JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII — N.º 1

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1894

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME XII

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1894

BIOGRAPHIA DO DR. RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO (*)

POR

ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA

No dia 14 de setembro do corrente anno falleceu em Penafiel, em casa de sua filha, a ex.^ma^ sr.^a^ D. Maria Magdalena de Macedo Sousa Pinto, este distinctissimo lente jubilado na faculdade de Mathematica, o unico dos nossos professores da Universidade, a quem a morte havia até agora poupado.

Á similhança da numerosa e illustrada familia dos Navarros, que deu seis doutores para as differentes faculdades academicas, a familia Sousa Pinto tinha em Mathematica o sabio astronomo e analysta que pranteamos, outro irmão mais velho, Basilio Alberto de Sousa Pinto, doutor em Leis, lente de Direito, Reitor da Universidade e depois visconde de S. Jeronymo, e um terceiro, Joaquim de Sancta Clara Sousa Pinto, que foi lente de Chimica na Academia Polytechnica do Porto.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto era filho de José de Sousa Ribeiro Pinto, e tinha nascido em Ferreiros de Tendaes, concelho de Sinfães, districto de Vizeu, a 24 de janeiro de 1811. Vindo para Coimbra, e feitos os preparatorios, matriculou-se na faculdade no anno de 1825, n'ella concluiu com brilho o seu curso em 1830, e a 13 de julho de 1836 recebeu o gráu de doutor, sendo convidado pelo decreto de 1 de setembro d'esse

(*) Extrahida do *Instituto de Coimbra*, 1893.

anno, que o declarou oppositor, a reger cadeira, e concorrendo com outros collegas para a resolução de uma das diversas crises, por que passou aquella corporação academica. Em portaria de 22 de maio de 1837 foi chamado para assistir aos actos.

Pelas promoções da Universidade coube-lhe uma das cadeiras de Astronomia. N'essa sciencia produziu o estudo admiravel intitulado — *Calculo das ephemerides* — onde examinou e discutiu as formulas, que desde o fundador do Observatorio tinham passado sem demonstração de uns para outros calculadores, sendo muito duvidoso se algumas se encontravam exactas. Este excellente livro mereceu os mais justos applausos das pessoas competentes, e até na camara dos deputados o lente, que fôra da faculdade, Guilherme José Antonio Dias Pegado, lhe teceu rasgados elogios, chamando ao auctor um dos primeiros mathematicos de Portugal.

Já antes, supprindo a deficiencia do compendio de Besout, que não continha os necessarios subsidios para se poderem entender as obras de Poisson e Laplace, adoptadas nos ultimos annos da faculdade, a congregação o encarregara conjunctamente com o seu collega, Francisco de Castro Freire, da traducção do *Curso completo de mathematicas puras*, de L. B. Francoeur, que era, n'essa epocha, incontestavel melhoramento para o ensino. Os traductores desempenharam-se com esmero da incumbencia, introduzindo bastantes materiaes, que não tinham sido tractadas pelo auctor, de que resultou na segunda e terceira edição, que aperfeiçoaram cada vez mais, o livro antes parecer trabalho novo, que traducção de original francez. Durante algum tempo foi adoptado na Eschola Polytechnica de Lisboa e na Academia Polytechnica do Porto.

Á pag. 76 do n.º 1 do *Instituto*, de julho de 1890, escrevemos o seguinte, em apontamentos para a biographia de José Monteiro da Rocha:

«Á faculdade de Mathematica pertenciam quatro cadeiras de conegos magistraes: uma na sé de Leiria; outra na de Miranda, transferida depois para Bragança; a terceira e a quarta nas sés de Elvas e Portalegre. As duas primeiras conservaram-se para os lentes, que fossem ecclesiasticos; as duas ultimas foram transformadas, pela bulla *scientiarum omnium* do papa Clemente XIV, em commendas da ordem de Christo, e destinadas aos lentes seculares.

«José Monteiro da Rocha obteve em 1774 provimento n'uma d'ellas, na cadeira de conego magistral da sé de Leiria, como professor ecclesiastico. Foi a maior das recompensas dos seus valiosos serviços por occasião da reforma da Universidade, e dos seus assiduos trabalhos na organisação da faculdade de Mathematica, a cada passo lembrados ao grande ministro pelo animo generoso de D. Francisco de Lemos. E quando este foi pela segunda vez nomeado reitor reformador da Universidade, como premio de serviços e prova de estima, conseguiu-lhe a commenda de Christo e a carta do conselho do principe regente».

Os premios recebidos pelo fundador do Observatorio Astronomico da Universidade foram conferidos tambem ao professor, que mais tempo esteve dirigindo aquelle estabelecimento, e que tanto se distinguiu nas investigação das formulas do calculo das ephemerides, e nas observações alli feitas com os poucos e fracos instrumentos fornecidos pelos governos. Assim, ao dr. Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto foi dada a commenda da ordem de Christo e a carta do conselho de Sua Majestade; e coube a honra de ser nomeado socio da Academia real das sciencias de Lisboa, socio honorario do Instituto de Coimbra, e membro de outros institutos o sociedades scientificas extrangeiras. Não sollicitou directa nem indirectamente estas distincções, que vieram ao encontro do seu grande merecimento.

Outra publicação, com que enriqueceu as sciencias mathematicas foi a que impropriamente se denominou — *Complementos de geometria descriptiva* — e que é um livro de alta analyse, tractando por esse modo alguns problemas resolvidos na geometria descriptiva de Fourcy, que era em 1854 o compendio adoptado na faculdade para o ensino d'esta sciencia.

Como professor da cadeira de Astronomia fez tambem o valioso serviço de compôr o livro de ensino, que se tornava indispensavel para substituir a volumosa obra de Biot, que por muitos annos serviu ao estudo na Universidade. Os *Elementos de Astronomia*, que na parte estudada encerram a ultima palavra da sciencia, são apenas dois volumes de 4.°, de 218 e 126 paginas, escriptos com o rigor que distingue todos os trabalhos mathematicos do auctor, e sufficientes por em si conterem as materias do programma.

Falámos da exactidão e do rigor, que havia nas publicações de Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto; mas se n'ellas em consequencia d'essa virtude podia acaso transparecer alguma sombra de obscuridade, a assimilação com que abrangia todos os assumptos, e a clareza com que os desenvolvia, tornaram-no o primeiro lente da faculdade, e o mais eloquente expositor das doutrinas mathematicas. Nunca deixou de ser entendido por todos aquelles a quem ensinava ou a quem se dirigia, e de se lhes impôr pelo brilho da sua palavra inspirada.

As obras de Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto foram publicadas nas seguintes datas:

Curso completo de mathematicas puras, por L. B. Francoeur, traduzido do francez, em collaboração com o dr. Francisco de Castro Freire. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1838 e 1839, 2 vol. em 8.° gr. *Segunda edição mais correcta e consideravelmente augmentada.* Ibi, 1853-1858, 8.° gr., 4 vol. *Geometrio analytica* de L. B. Francoeur, 3.ª ed. Ibi, 1871. *Algebra Superior*, do mesmo auctor, 3.ª ed. Ibi, 1871. *Calculo differencial e calculo integral*, do mesmo auctor, 3.ª ed. Ibi, 1878.

Additamento ás Notas do calculo differencial e integral de Francoeur. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1845, 4.°, de 48 pag. quasi todo introduzido nos logares respectivos da 2.ª edição do *Curso completo de mathematicas puras* acima referido.

Calculo das ephemerides astronomicas de Coimbra. Ibi, na mesma Imprensa, 1849, 4.°, de 182 pag.

Das refracções atmosphericas. Lisboa, na Imprensa Nacional, 1850, 8.° gr., de 24 pag. com uma estampa. D'aqui sahiu a seguinte:

Memoria sobre as refracções atmosphericas apresentada á Academia real das sciencias. Foi em sessão de 5 de julho de 1854 mandada imprimir na Nova serie das Memorias da Academia.

Complementos da Geometria descriptiva de Fourcy. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1853, 4.°, de 100 pag.

Apontamentos de trigonometria spherica. Ibi, na mesma Imprensa, 1854, 4.° gr., de 8 pag. No *Instituto*, vol. III, pag. 130 a 133; e 185 a 188.

Apontamentos de optica. Ibi, 1856, 4.° gr., de 18 pag. com estampas. No *Instituto*, vol. III, pag. 264 a 267; vol. IV, pag. 25 a 28; 72 a 75; 167 e 168; 179 e 180; 203.

Elementos de astronomia. Primeira parte. Ibi, 1858. *Supplemento* com estampas. Ibi, 1859, 4.°, de 218 pag. *Segunda edição*, tom. I, 4.°, de 416 pag. com *um supplemento e additamentos* á primeira parte, 54 pag. e sete estampas. Ibi, 1872.

Elementos de astronomia. Segunda parte. Ibi, 1860, 4.°, de 124 pag. e mais 2 innumeradas e uma estampa. *Segunda edição*, tom. II, 4.°, de 226 pag. e doze estampas. Ibi, 1872.

Eclipse solar de 18 de julho de 1860. Memoria apresentada ao excellentissimo ministro do reino pela commissão portugueza. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1860, 4.°, de 39 pag. com 4 mappas em que vem o resultado das observações no cabo de Oropesa. No *Instituto*, vol. X, secção official de 1861, pag. 57 a 66.

Relatorio sobre a visita dos observatorios de Madrid, Paris, Bruxellas e Greenwich, apresentado ao ministro do reino em 9 de novembro de 1860, 4.°, de 30 pag. e mais uma innumerada no fim. No *Instituto*, vol. X, secção official de 1861, pag. 67 a 77.

Elementos de Geometria de L. B. Francoeur, traduzidos pelos lentes da faculdade de Mathematica, Francisco de Castro Freire e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto. Coimbra, 1856. Depois de varios accrescentamentos foram publicados com o titulo de *Geometria elementar theorica e practica*, por Francisco de Castro Freire e Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto, lentes da faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra. Coimbra na Imprensa da Universidade, 1859. Novas edições em 1863 e 1866.

Additamento ao calculo dos eclipses. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1868, folio, de 11 pag.

Breves reflexões sobre as parallaxes das estrellas, e sobre os instrumentos do observatorio de Coimbra. No *Instituto*, vol. I, pag. 45 e 46.

Cometa de agosto de 1862. No *Instituto*, vol. XI, pag. 120.

Ecclipse do sol em 15 de março de 1858. No *Instituto*, vol. VII, pag. 22 e 23.

Nota sobre a parallaxe equatorial do sol, e additamento a esta nota. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1869, folio, de 4 pag.

Noticia sobre um cometa que se observou em abril de 1854. No *Instituto*, vol. III, pag. 3, 4 e 5.

Observação do cometa de 1861. No *Instituto*, vol. x, pag. 204 a 206.

Observações feitas em 1858 no observatorio de Coimbra para a determinação da sua longitude. No *Instituto*, vol. vi, pag. 215, 216, 240, 253 e 273; no vol. vii, pag. 60, 84, 108, 168, 204 e 268; no vol. viii, pag. 32 e 212; e vol. ix, pag. 128 e 160.

Posição geographica do observatorio da Universidade de Coimbra. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1867. No *Instituto*, vol. ix, pag. 24 e 25.

Taboas para a correcção das passagens meridianas no observatorio astronomico da Universidade e intervallos equatoriaes dos fios do reticulo do circular meridiano de Coimbra. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1867 e 1868.

Uso do instrumento de passagens pelo primeiro vertical com as taboas dos angulos horarios e das distancias zenithaes nas passagens pelo primeiro vertical do observatorio astronomico da Universidade de Coimbra. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1870 e 1871.

Nota sobre a carta de M. Wils Brown na qual se indica um novo methodo para o calculo das distancias lunares observadas no mar. No *Instituto*, vol. v, pag. 10 e 11. Mostra que a formula é a mesma que deu o lente de Mathematica, Francisco de Paula Travassos, no *Methodo de reducção* publicado em Coimbra no anno de 1805.

Collimação do polo de um circular mural de Fortin. No *Instituto*, vol. i, pag. 198.

Bibliographia. Taboas da lua reduzidas das de Burckhardt pelo sr. Florencio Mago Barreto Feio. No *Instituto*, vol. i, pag. 258.

Tratado elementar de Mathematicas, por D. Aciulo F. Vallin e Buotillo, cathedratico en la Universidad de Madrid. No *Instituto*, vol. ii, pag. 166, 167, 186 e 187.

Bibliographia. Taboas auxiliares para o calculo das ephemerides astronomicas do observatorio da Universidade de Coimbra, pelo sr. Jacome Luiz Sarmento. No *Instituto*, vol. ii, pag. 296.

Noticia dos pequenos planetas descobertos em 1855 e 1856. No *Instituto*, vol. iii, pag. 291 e 292; e vol. v, pag. 128 e 129.

Influencia da lua nos terramotos. No *Instituto*, vol. iii, pag. 116, 117, 118, 195 e 196.

Programma da cadeira de astronomia. No *Instituto,* vol. III, pag. 26 e 27.

Duas consultas de 27 de abril de 1857: a primeira pedindo a mudança do Observatorio para o sitio do Castello, onde para este fim se fizeram n'outro tempo solidos alicerces; a segunda a creação de uma nova cadeira na faculdade. No *Instituto,* vol. VI, pag. 37 e 38.

O dia 18 de julho de 1861. No *Instituto,* vol. IX, pag. 130.

Estudos instrumentaes no observatorio astronomico da Universidade de Coimbra. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1887, folio, de 86 pag. e mais uma innumerada e uma estampa.

Continuação dos estudos instrumentaes. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1890, folio, de 21 pag. com uma estampa.

Observações feitas no primeiro vertical do observatorio astronomico da Universidade com o instrumento de passagem transportavel de Repsold. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1882, folio, de XII-88 pag. e mais tres innumeradas.

Demonstração elementar das leis do movimento uniformemente variado. No *Instituto,* vol. XVII, pag. 57 a 59, e 248.

Taboa de interpolação para o meio dia do intervallo. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1874, folio, de 2 pag.

Supplemento ao calculo das ephemerides. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1887, 4.°, de 8 pag.

Observação do cometa de 1881. No *Instituto,* vol. XXIX, pag. 111 e 112.

Adopção de um meridiano universal. Sessão do Instituto de 13 de janeiro de 1883. No *Instituto,* vol. XXX, pag. 304 a 306.

Taboas de $\tau = \frac{g}{h} \operatorname{sen} (H + \gamma\tau)$ *para o calculo dos eclipses e occultações.* São 30 paginas publicadas em 1877, as 5 primeiras em portuguez e em francez, explicando a formação de umas taboas compostas: uma pelo dr. Agostinho José Pinto de Almeida; outra pelo dr. Rufino Guerra Osorio, ambos lentes da faculdade de Mathematica; a primeira ainda inedita, e a segunda publicada na ephemeride para 1844.

Taboa dos factores L, A, C para a correcção das passagens meridianas no Observatorio astronomico de Coimbra. Instituto de agosto de 1892, pag. 129 e 130.

Noticia sobre Le Verrier. No *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, 1 vol., 1877, pag. 86 a 89.

Apontamentos de mathematica. Coimbra, na Imprensa da Universidade, 1893, 8.º, de 21 pag.

Mais de meio seculo de constantes labores, durante o qual foram publicados tão esplendidos estudos, como os que deixamos aqui brevemente descriptos, tornou conhecido e apreciado dentro e fóra do paiz o abalisado geometra e insigne astronomo, que a Universidade e o Observatorio acabam de perder.

Aos cultores da sciencia mathematica, aos alumnos e professores da faculdade, e á desolada familia do nobre extincto, enviamos sentidos e cordeaes pesames.

BIBLIOGRAPHIA

G. Peano: Lezioni di Analisi infinitesimale, Torino, 1893.

Consta esta obra de dois volumes, que contêm o curso professado pelo auctor na Universidade de Turin. Os assumptos considerados são os que ordinariamente se encontram em obras d'esta natureza e são expostos com clareza, simplicidade e com aquelle rigor que o illustre geometra costuma empregar em todos os seus trabalhos. Para simplificar e dar maior precisão á linguagem, emprega o sr. Peano alguns signaes da *Logica,* como tem feito em muitos dos seus trabalhos anteriores. Faz tambem, no segundo volume, um grande uso de algumas das operações sobre segmentos da recta introduzidos por Hamilton, Grassmann, Möbius, etc., e que tanta importancia vão adquirindo na actualidade; esta circumstancia fazendo com que o modo de expôr as doutrinas consideradas n'este volume diffira consideravelmente do modo como são expostas nos manuaes de calculo mais espalhados, dá a esta parte da obra um interesse consideravel. Além d'isso, em muitos pontos, taes como na theoria das funcções interpolares, na doutrina relativa ao calculo por approximação dos integraes definidos, na theoria das equações differenciaes, etc., o auctor expõe o resultado das suas proprias indagações.

Vamos indicar resumidamente o objecto de cada capitulo.

No capitulo 1.° são estudadas as propriedades fundamentaes das derivadas das funcções, são procuradas as derivadas das funcções elementares e faz-se applicação das doutrinas estudadas á theoria das tangentes ás curvas planas.

No capitulo 2.° trata o auctor do desenvolvimento das funcções em serie ordenada segundo as potencias crescentes da variavel, das formulas de interpolação, da determinação dos verdadeiros valores das funcções indeterminadas n'um certo ponto. Faz depois applicação dos principios estudados n'este capitulo á theoria dos pontos de inflexão das curvas planas, á theoria das asymptotas e á theoria dos contactos.

No capitulo 3.° é estudada a noção de integral, tanto definido como indefinido, e é feita depois applicação da doutrina exposta á theoria das áreas, á theoria da rectificação das curvas e á theoria dos volumes.

No capitulo 4.° são apresentados os methodos geraes de integração; em seguida são integradas as funcções racionaes e as funcções irracionaes e transcendentes que é uso considerar em obras d'esta natureza.

No capitulo 5.° são estudados os principios geraes da theoria das series e dos productos infinitos e os methodos de integração por series.

Com o capitulo 5.° termina o primeiro volume da obra. O volume 2.° consta de quatro capitulos. No primeiro são estudados os numeros complexos dependentes de duas ou mais unidades, a representação d'aquelles por vectores, as series compostas de termos complexos, etc. No capitulo seguinte é extendida a formula de Taylor ao caso dos numeros complexos e faz-se applicação da theoria dos numeros complexos a varias questões de geometria relativas ao plano osculador, á curvatura das linhas, etc. Termina-o a theoria da integração no caso dos numeros complexos.

O capitulo 6.° é consagrado ao estudo das funcções de muitas variaveis. Ahi são estudadas as propriedades das derivadas parciaes e ahi são consideradas algumas questões de Analyse e de Geometria que dependem d'estas derivadas. N'este capitulo são considerados tambem os integraes multiplos.

No capitulo 9.° é finalmente estudada a integração das equações differenciaes nos casos mais elementares.

Cada um dos assumptos considerados n'esta obra excellente é seguido por numerosos e bem escolhidos exercicios, para que os alumnos se habituem a manejar com facilidade os methodos estudados.

L'intermédiaire des mathématiciens, Paris, G. Villars.

Com este titulo vêm de fundar os srs. Laisant e Lemoine um novo jornal, que tem um programma completamente differente dos outros jornaes mathematicos existentes e que deve ser da maior utilidade para os geometras. O fim d'este jornal é pôr em relação dois mathematicos, cada vez que um necessita de uma informação que o outro lhe possa dar. Para isso, cada numero consta de duas secções, a primeira das quaes contém as questões que são dirigidas aos directores do jornal pedindo informações sobre os assumptos a respeito dos quaes os auctores desejam ser informados; a segunda contém as respostas enviadas pelos geometras que estejam no caso de dar cada informação pedida. Nos quatro numeros que até hoje foram publicados vêm questões e respostas assignadas por muitos dos maiores geometras da actualidade.

M. d'Ocagne: Sur la détermination géométrique du point le plus probable donné par un système de droites non convergentes (Journal de l'École Polytechnique de Paris, 1893).

O objecto d'esta memoria importante é a resolução do seguinte problema: Suppondo que um ponto é determinado pelo encontro de muitas rectas cujo traçado depende de elementos dados por observações, não é possivel fixar com exactidão a posição d'este ponto por causa dos erros das observações; determinar porém a sua posição mais provavel.

Ch. de la Vallée Poussin: Mémoire sur l'intégration des équations differentielles (Mémoires de l'Académie des Sciences de Belgique, 1893).

N'esta bella e importante memoria o auctor extende o theorema fundamental de Calculo integral, relativo á existencia de integral das equações differenciaes, a casos em que nas equações differenciaes figuram funcções discontinuas. O methodo empregado para esse fim é uma generalisação do methodo empregado por Cauchy no caso das funcções continuas.

P. Pizzetti: Gli odierni studî sulla figura della Terra, Genova, 1893.

Contém este opusculo um discurso muito interessante, pronunciado pelo sr. Pizzetti na Universidade de Genova, na inauguração solemne do anno academico de 1892 a 1893. O objecto d'este discurso é, como o seu titulo indicá, o que actualmente se sabe a respeito do problema que tem por fim determinar a figura da terra.

G. B. Guccia: Richerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane dotati di singolaritá ordinarie (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, 1893).

Não é possivel dar em pequeno espaço noticia de todas as proposições importantes que se encontram n'esta memoria. Limitar-nos-hemos porisso a dizer que o auctor se baseia principalmente nos trabalhos de Cremona e Jonquières e que, depois de algumas definições e explicações preliminares, estuda os systemas lineares k vezes infinitos determinados por $k+1$ curvas dadas, os systemas lineares k vezes infinitos com uma singularidade ordinaria, o jacobiano de tres curvas dadas, o de uma curva e de um feixe e o de uma rêde, etc.

J. A. Serrasqueiro: Tratado elementar de Cosmographia, Coimbra, 1893.

Contém este volume a parte da Cosmographia exigida pelos programmas officiaes para o ensino d'esta sciencia nos Lyceus. Está dividido em cinco partes em que são respectivamente estudadas as estrellas, a terra, o sol, a lua e finalmente os planetas e os cometas. Sem sair do ponto de vista elementar, o auctor apresenta a respeito da constituição physica, posições relativas e movimentos d'estes corpos, bastantes informações.

S. Pincherle: Sull' interpolazione (Memorie della R. Accademia di Bologna, 1893).

N'esta memoria occupa-se o sr. Pincherle do problema que consiste em determinar uma funcção por meio do conhecimento dos valores que ella toma para um dado systema de valores da variavel. Suppondo que A representa a collecção de valores dados á variavel independente, que A' representa a collecção derivada d'esta, segundo a nomenclatura de Cantor, examina o sabio geometra italiano as questões seguintes:

1.° Pode-se construir, por meio dos valores dados, uma expressão arithmetica que tome os valores dados nos pontos da collecção $A+A'$?

2.° Quaes são as condições para que exista uma funcção analytica, regular nos pontos de A e que tome os valores dados nos pontos de $A+A'$?

—— *Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle* (Acta mathematica, 1893).

Entre outros assumptos, o auctor trata n'esta memoria do desenvolvimento das funcções em serie ordenada segundo as funcções de um systema recorrente de que se conhece a escala de relação.

Annuaire pour l'an 1894 publié par le Bureau des longitudes, Paris, G. Villars.

Contém este *Annuario*, além das informações que é uso conter esta publicação periodica, as noticias seguintes: *A luz e a electricidade segundo Maxwell e Hertz*, por Poincaré; *A origem e o emprego da bussola maritima chamada hoje compasso*, por Fleuriais; *Quatro dias de observação no vertice de Monte-Branco*, por Janssen; *Discursos pronunciados nos funeraes do Almirante Páris*, por Faye, Bouquet de la Grye e Fleuriais; *Discursos pronunciados na inauguração da estatua de Arago*, por Tisserand, Cornu e Mouchez.

L. C. Almeida: Primeiras noções sobre o calculo das quantidades geometricas, Coimbra, 1893.

Na pagina 5 do tomo XI d'este jornal deu-se noticia de um opusculo do mesmo auctor com o mesmo titulo. O presente opusculo é a continuação do anterior e contém a doutrina das series de termos imaginarios e os primeiros principios da theoria das funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares de uma variavel imaginaria.

J. Bruno de Cabedo: Principios fundamentaes da theoria dos numeros limites, Coimbra, 1893.

Partindo da definição de numero irracional adoptada por Heine e Cantor, o auctor expõe n'este opusculo, com todo o rigor e clareza, a theoria d'estes numeros.

Gino Loria: Della varia fortuna di Euclide in relazione com i problemi dell'insegnamento geometrico elementare, Roma, 1893.

N'este bello opusculo faz o auctor a historia do papel que os

Elementos de Euclides têm representado no ensino da Geometria elementar. Este estudo leva-o a dar informações de grande interesse sobre o modo como na actualidade é ensinada a Geometria nos diversos paizes e sobre a natureza e qualidades dos livros mais empregados para esse fim.

J. Pedro Teixeira: Sur les nombres bernoulliens (Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa, 1893).

N'este artigo o auctor apresenta uma expressão dos numeros de Bernoulli por meio de um determinante.

L. Grillières: Étude des modifications apportées par la rotation diurne de la terre aux lois de l'équilibre et du mouvement des corps pesantes, Paris, Nony, 1893.

O auctor estuda primeiramente a influencia da rotação diurna sobre a direcção do fio de prumo e sobre a intensidade da attracção terrestre, e em seguida trata, por meio da consideração dos movimentos absolutos, a questão dos desvios que soffrem os corpos pesados durante a sua queda.

Ch. de la Vallée Poussin: Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1893).

M. d'Ocagne: Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. XI).
—— Sur une classe de transformations dans le triangle etc. (Item, t. XII).
—— Remarque sur la déformation des surfaces de révolution (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXI).
—— Sur la sommation d'une certaine classe de séries (Comptes rendus, 1893).

P. Mansion: Sur les principes fondamentaux de la Géométrie, de la Mécanique et de l'Astronomie, Paris, G. Villars, 1893.

R. Guimarães: Sur l'évaluation de certaines aires coniques (Association française pour l'avancement des sciences, 1892).

M. Lerch: Généralisàtion du théorème de Frullani (Bulletin de la Société R. des Sciences de Bohéme, 1893).
—— Sur une fonction transcendente (Item).
—— Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma (Item).
—— Sur deux transcendentes considérées par Legendre (Item).
—— Sur un théorème de Kronecker (Item).

G. Vivanti: Sulle serie di potenze (Annali di Matematica, 1893).

SUR LES SURFACES RÉGLÉES

NOTE DE

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

§ 1

Je rappelle ici quelques formules connues de la théorie des surfaces réglées.

Soient ξ, η, ζ les coordonées d'un point quelconque P d'une ligne Λ *(directrice)*; $\cos A$, $\cos B$, $\cos G$ les cosinus directeurs d'une droite R *(génératrice)* passant par le point P; v une portion quelconque de R comptée à partir de P; i l'inclinaison de R sur Λ; σ l'arc de Λ; X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque de la surface réglée lieu des droites R. On a

$$(1) \quad X = \xi + v \cos A, \quad Y = \eta + v \cos B, \quad Z = \zeta + v \cos C$$

$$(2) \qquad \cos i = \Sigma \cos A \,.\, \frac{d\xi}{d\sigma}.$$

Et si l'on pose

$$(3)\qquad M^2 = \Sigma\left(\frac{d\cos A}{d\sigma}\right)^2;\quad N = \Sigma\left(\frac{d\cos A}{d\sigma}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma}\right),$$

la plus courte distance $d\Delta$ entre la génératrice (1) et la successive est donnée par l'équation

$$d\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \frac{d\cos A}{d\sigma} & \frac{d\cos B}{d\sigma} & \frac{d\cos C}{d\sigma} \end{vmatrix} \cdot \frac{d\sigma}{M}$$

Mais, en force des égalités (2) et (3) et des identités

$$\Sigma\cos^2 A = 1,\quad \Sigma\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 = 1$$

on déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \frac{d\cos A}{d\sigma} & \frac{d\cos B}{d\sigma} & \frac{d\cos C}{d\sigma} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos i & N \\ \cos i & 1 & 0 \\ N & 0 & M \end{vmatrix} = M^2\sin^2 i - N^2;$$

on a donc

$$d\Delta = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 i - N^2}}{M} \, d\sigma.$$

Soit v_0 la distance entre le point P de A et le point où la génératrice rectiligne R passant par le point P est coupée par la plus courte distance entre cette génératrice et la successive. En posant

$$a = \begin{vmatrix} \cos B & \cos C \\ \frac{d \cos B}{d\sigma} & \frac{d \cos C}{d\sigma} \end{vmatrix} d\sigma, \quad b = \begin{vmatrix} \cos C & \cos A \\ \frac{d \cos C}{d\sigma} & \frac{d \cos A}{d\sigma} \end{vmatrix} d\sigma$$

$$c = \begin{vmatrix} \cos A & \cos B \\ \frac{d \cos A}{d\sigma} & \frac{d \cos B}{d\sigma} \end{vmatrix} d\sigma,$$

on a

$$v_0 = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\sigma} & \cos A + \frac{d \cos A}{d\sigma} d\sigma & a \\ \frac{d\eta}{d\sigma} & \cos B + \frac{d \cos B}{d\sigma} d\sigma & b \\ \frac{d\zeta}{d\sigma} & \cos C + \frac{d \cos C}{d\sigma} d\sigma & c \end{vmatrix} . \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = M^2 \, . \, d\sigma^2$$

Si donc on néglige les infiniment petits, on peut écrire

$$(4) \qquad v_0 = -\frac{N}{M^2}$$

Il suit que l'équation

$$(5) \qquad M^2 \sin^2 i - N^2 = 0$$

exprime que la surface réglée (1) est développable et l'autre équation

$$(6) \qquad N = 0$$

exprime que la directrice Λ est la ligne de striction de la surface réglée (1).

Rapportons les points de la surface (1) aux lignes coordonnées $\sigma =$ const. (génératrices rectilignes) et $v =$ const.; la distance dS entre deux points de la surface infiniment rapprochés est donnée par l'équation

$$(7) \quad dS^2 = (M^2 v^2 + 2 N v + 1) d\sigma^2 + 2 \cos i \,.\, d\sigma dv + dv^2.$$

§ 2

Á un point quelconque $M(x, y, z)$ d'une ligne L considérons le trièdre trirectangle T formé par la tangente ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), la normale principale ($\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$) et la binormale ($\cos l$, $\cos m$, $\cos n$). Soit P un point lié au trièdre T et R une droite passant par P.

Désignons par U, V, W les coordonnées de P, par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ les cosinus directeurs de R par rapport au trièdre T; et sur la surface réglée Σ, lieu des droites R, prenons pour directrice Λ le lieu des points P. Cela posé, les coordonnées d'un point quelconque de Σ sont exprimables par les équations

$$X = (x + U\cos\alpha + V\cos\lambda + W\cos l) +$$
$$+ v(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\lambda + \cos c\cos l), \text{ etc.}$$

La comparation entre ces équations et les autres (1) donne

$$\xi = x + U\cos\alpha + V\cos\lambda + W\cos l;$$
$$\cos A = \cos a\cos\alpha + \cos b\cos\lambda + \cos c\cos l, \text{ etc.}$$

Si donc on désigne par s, ρ, r l'arc, le rayon de courbure et le rayon de torsion de L, on a

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
M^2 &= \left\{\left(\frac{d\cos a}{ds} - \frac{\cos b}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\cos a}{\rho} + \frac{d\cos b}{ds} + \frac{\cos c}{r}\right)^2 + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{d\cos c}{ds} - \frac{\cos b}{r}\right)^2\right\}\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2\\
N &= \left\{\left(\frac{d\cos a}{ds} - \frac{\cos b}{\rho}\right)\left(1 + U' - \frac{V}{\rho}\right) + \right.\\
&\quad + \left(\frac{\cos a}{\rho} + \frac{d\cos b}{ds} + \frac{\cos c}{r}\right)\left(\frac{U}{\rho} + V' + \frac{W}{r}\right) + \\
&\quad \left. + \left(\frac{d\cos c}{ds} - \frac{\cos b}{r}\right)\left(W' - \frac{V}{r}\right)\right\}\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2\\
\cos i &= \left\{\left(1 + U' - \frac{V}{\rho}\right)\cos a + \left(\frac{U}{\rho} + V' + \frac{W}{r}\right)\cos b + \right.\\
&\quad \left. + \left(W' - \frac{V}{r}\right)\cos c\right\}\frac{ds}{d\sigma}\\
\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 &= \left(1 + U' - \frac{V}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{U}{\rho} + V' + \frac{W}{r}\right)^2 + \left(W' - \frac{V}{r}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

§ 3

Considérons la surface réglée Σ que l'on obtient en déplaçant, parallèlement à sa direction, une des trois droites *tangente, normale principale* et *binormale* d'une courbe L, le long des autres. La directrice Λ soit, dans tout cas, le lieu des points où les génératrices de Σ coupent les droites principales de L, suivant lesquelles on fait le déplacement.

I°) Si l'on fait glisser les tangentes le long des normales principales, on a

$$U=W=0, \quad a=0, \quad b=c=\frac{\pi}{2};$$

si donc on a recours aux équations (8), les conditions (5), (6) deviennent

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r}V=0, \quad \frac{1}{\rho}V'=0.$$

Et puisque la solution $\frac{1}{\rho}=0$ est à refuser, on voit que la surface Σ est développable lorsque $\frac{1}{r}=0$ (la ligne L est plane) ou $V=0$ (Σ est la développable osculatrice de L).

La courbe Λ est la ligne de striction de Σ lorsque $V'=0$; le déplacement des tangentes le long des normales principales doit donc être constant.

II°) Si l'on fait glisser les tangentes le long des binormales, on a

$$U=V=0, \quad a=0, \quad b=c=\frac{\pi}{2},$$

et les équations (5), (6) deviennent

$$\frac{1}{\rho}.\mathrm{W}'=0, \quad \frac{1}{\rho}.\frac{1}{r}\mathrm{W}=0.$$

La surface Σ est donc développable lorsque le déplacement W est constant.

La courbe Λ est la ligne de striction de Σ lorsque $\frac{1}{r}=0$ (la ligne L est plane) ou $\mathrm{V}=0$ (Σ est la développable osculatrice de L).

Dans le cas que l'on vient de considérer on a la formule remarquable

$$\cos i=\frac{ds}{d\sigma}.$$

III°) Si l'on fait glisser les normales principales le long des tangentes, on a

$$\mathrm{V}=\mathrm{W}=0, \quad a=c=\frac{\pi}{2}, \quad b=0,$$

et les équations (5) (6) donnent

$$\frac{1}{r}(1+\mathrm{U}')=0, \quad \frac{1}{\rho}(1+\mathrm{U}')=0.$$

La première équation a les solutions

$$\frac{1}{r}=0, \quad 1+\mathrm{U}'=0.$$

La solution $\frac{1}{r}=0$ démontre que la ligne L est plane; l'autre $1+U'=0$ est une solution de la deuxième équation. La ligne Λ est dans ce cas une développante de L.

IV) Si l'on fait glisser les normales principales le long des binormales, on a

$$U=V=0, \quad a=c=\frac{\pi}{2}, \quad b=c,$$

et l'on obtient les équations

$$\frac{1}{r}-\frac{W'}{\rho}=0, \quad \frac{1}{\rho}+\frac{W'}{r}=0.$$

La surface Σ est donc développable lorsque

$$W=\int\frac{\rho}{r}\,ds+\text{const.}$$

La courbe Λ est la ligne de striction de Σ lorsque

$$W=-\int\frac{r}{\rho}\,ds+\text{const.}$$

V°) Si l'on déplace les binormales le long des tangentes, il résulte

$$V=W=0, \quad a=b=\frac{\pi}{2}, \quad c=0$$

et l'on a les conditions

$$\frac{1}{r}(1+U')+0, \quad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{r}U=0.$$

La surface Σ est donc développable si la ligne L est plane, ou bien si la ligne Λ est une développante de L.

La courbe Λ est la ligne de striction de Σ lorsque L est plane ou bien lorsque la condition $U=0$ est vérifiée (Σ est, dans ce cas, la surface lieu des binormales de L).

Il est bon de remarquer que, dans ce cas, on a $\cos i=0$, quelle que soit U.

Par conséquent «Si l'on déplace, suivant une loi arbitraire, les binormales d'une ligne quelconque, parallèlement à leur direction, le long des tangentes, la ligne Λ, lieu des extrémités de ces déplacements, est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface réglée engendrée».

VI°) Si l'on déplace les binormales le long des normales principales, on a

$$U=W=0, \quad a=b=\frac{\pi}{2}, \quad c=0,$$

et l'on déduit les conditions:

$$\frac{1}{r}\left(1-\frac{V}{\rho}\right)=0, \quad \frac{1}{r}V'=0.$$

La surface Σ est donc développable lorsque $\frac{1}{r}=0$ (L est plane), ou $V=\rho$ (la surface Σ est la développable polaire de L). La directrice Λ est la ligne de striction de Σ lorsque la ligne L est plane, ou bien lorsque le déplacement des binormales le long des normales principales est constant.

§ 4

Sur chaque plan osculateur d'une ligne L conduisons une droite, ayant l'inclinaison θ sur la tangente; et soit Σ la surface réglée que l'on engendre, et Λ le lieu des points où les droites menées rencontrent les tangentes de L.

Puisque dans ce cas on a

$$V = W = 0, \quad a = \theta, \quad b = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad c = \frac{\pi}{2},$$

les équations (5), (6), par l'application des égalités (8), donnent

$$(9) \qquad \left\{(1 + U') \sin\theta - \frac{U}{\rho} \cos\theta\right\} \frac{\sin\theta}{r} = 0$$

$$(10) \qquad \left\{(1 + U') \sin\theta - \frac{U}{\rho} \cos\theta\right\} \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

La condition (9) se dédouble comme il suit

$$\theta = 0, \quad \frac{1}{r} = 0, \quad (1 + U') \sin\theta - \frac{U}{\rho} \cos\theta = 0.$$

La solution $\theta = 0$ donne la développable osculatrice de L; l'autre $\frac{1}{r} = 0$ n'a pas d'importance, la ligne L étant, dans ce cas, plane. La troisième solution vérifie aussi l'équation (10), et la surface développable Σ a pour arête de rebroussement la ligne Λ.

La détermination de U revient à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, ce qui nous donne

$$U = \left(a - \int e^{-\int \frac{\cot\theta}{\rho} ds} ds\right) e^{\int \frac{\cot\theta}{\rho} ds},$$

a étant une constante quelconque.

L'équation (10) se dédouble dans les autres

$$(1 + U')\sin\theta - \frac{U}{\rho}\cos\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho} = 0;$$

la première solution vérifie aussi l'équation (9) et la deuxième donne

$$\theta = k - \int \frac{ds}{\rho}.$$

Donc «La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne de striction de la surface gauche, lieu d'une série de droites menées sur les plans osculateurs d'une ligne L, soit le lieu des points où ces droites coupent les tangentes de L, est que la différentielle de l'inclinaison des droites sur les tangentes soit égale à l'angle de contingence de L».

Supposons $U = 0$ et l'on a un théorème de *M Catalan* (*).

L'équation (7), pourvu que l'on y substitue les valeurs de M, N, $\cos i$, donne le carré de l'élément linéaire de la surface gauche; et si l'on pose la condition d'orthogonalité entre les lignes

(*) *Bulletin de la Société Philomathique*, 1848.

coordonnées $s=$ constant (génératrices rectilignes) et $v=$ constant, on a

$$(11)\qquad (1+U')\cos\theta+\frac{U}{\rho}\sin\theta=0$$

$$(12)\; dS^2=\left\{\frac{\sin^2\theta}{r^2}v^2+\left[\frac{U}{\rho\cos\theta}+\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\rho}\right)\right]^2\right\}ds^2+dv^2.$$

On sait d'ailleurs que le carré de l'élément linéaire de la surface lieu des normales principales d'une ligne L_1 (s_1, ρ_1, r_1) est

$$(13)\qquad dS_1{}^2=\left\{\frac{v_1{}^2}{r_1{}^2}+\left(1-\frac{v_1}{\rho_1}\right)^2\right\}ds_1{}^2+dv_1{}^2.$$

L'identification des expressions (12), (13) conduit aux conditions

(14)

$$\rho_1=-\frac{U}{\left(1+\rho\frac{d\theta}{ds}\right)\cos\theta},\quad r_1=\frac{Ur}{\rho\sin\theta\cos\theta},\quad ds_1=\frac{U}{\rho\cos\theta}ds.$$

Donc:

«La surface réglée dont il s'agit est applicable sur la surface gauche des normales principales de la ligne L_1 dont les rayons ρ_1, r_1, de courbure et de torsion sont exprimables en fonction de l'arc par les équations (14), U, ρ, θ étant liés entre eux par la condition (11)».

Exemple. Lorsque U est une constante, l'équation (11) donne

$$\rho=-U\,\mathrm{tang}\,\theta\,;$$

si donc on suppose que θ soit une constante, il résulte

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\sin\theta}, \quad r_1 = -\frac{r}{\sin^2\theta}, \quad ds_1 = -\frac{ds}{\sin\theta}.$$

Les rayons de courbure ρ et ρ_1 sont donc constants.

Par conséquent «Si sur les tangentes d'une ligne L à courbure $\frac{1}{\rho}$ constante on prend des distances constantes U et par leurs extrémités P on mène, dans les plans osculateurs, des droites inclinées sur les tangentes de l'angle θ défini par l'équation $\tang\theta = -\frac{\rho}{U}$, les génératrices de la surface réglée Σ que l'on obtient sont perpendiculaires à la ligne Λ lieu des points P.

Si l'on déforme Σ par flexion, de manière à réduire Λ à une ligne asymptotique de la surface réglée déformée, la ligne Λ se réduit à une ligne L_1 à courbure constante. La torsion et l'arc élémentaire de cette ligne L_1 ont un rapport constant à la torsion et à l'arc élémentaire de L».

§ 5

Sur chaque plan normal d'une ligne quelconque L traçons une droite inclinée de l'angle θ sur la normale principale, et considérons la surface réglée Σ que l'on vient de former.

Soit Λ le lieu des points où les droites menées coupent les normales principales de L. Nous avons

$$U = V = 0, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad b = \theta, \quad c = \frac{\pi}{2} - \theta$$

et les conditions (5), (6) deviennent

$$(15)\quad \left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{V}{\rho}\right)-\frac{\cos\theta}{\rho}\left(V'\sin\theta+\frac{V}{r}\cos\theta\right)=0$$

$$(16)\quad \left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{r}\right)\left(V'\sin\theta+\frac{V}{r}\cos\theta\right)+\frac{\cos\theta}{\rho}\left(1-\frac{V}{\rho}\right)=0.$$

Celles-ci sont des équations différentielles linéaires du premier ordre; on peut donc effectuer leur intégration et résoudre d'une manière complètè les problèmes correspondants.

Cas particulier. Soit $V=\rho$; la ligne Λ est alors le lieu des centres de courbure de L et les équations (15), (16) deviennent

$$(15')\qquad \left(V'\sin\theta+\frac{V}{r}\cos\theta\right)\cos\theta=0$$

$$(16')\qquad \left(V'\sin\theta+\frac{V}{r}\cos\theta\right)\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{r}\right)=0.$$

Les solutions de l'équation (15') sont

$$\theta=\frac{\pi}{2},\quad V'\sin\theta+\frac{V}{r}\cos\theta=0.$$

La première donne lieu à la développable polaire de L; la deuxième conduit à la développable osculatrice de Λ, car cette solution vérifie l'équation (16').

Donc: «Par la ligne Λ lieu des centres de courbure d'une ligne quelconque L, passent deux surfaces développables, dont

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII — N.º 2

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1895

les génératrices sont dans les plans normaux de L; ce sont la développable polaire de L et la développable osculatrice de Λ.

Si l'on remarque que

$$\theta = \int \frac{ds}{r} + \text{const.}$$

est une des solutions de l'équation (16′), on a:

«Par la ligne Λ, lieu des centres de courbure d'une ligne quelconque L, passent deux surfaces réglées ayant Λ pour ligne de striction, et dont les génératrices sont dans les plans normaux de L. Ces surfaces sont la développable osculatrice de L, et celle dont les génératrices sont inclinées sur les normales principales de L de l'angle θ donné par l'équation

$$\theta = \int \frac{ds}{r} + \text{const.}$$

Au moyen d'un calcul analogue à celui du n.° 4, cherchons le carré de l'élément linéaire de la surface gauche dont il s'agit, et posons ensuite la condition que les lignes coordonnés $s = \text{const.}$ (génératrices) et $v = \text{const.}$ soient orthogonales.

On a

$$V' \cos\theta - \frac{V}{r} \sin\theta = 0$$

$$(18) \qquad dS^2 = \left\{ \left[\frac{V'}{\sin\theta} - \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{r} \right) v \right]^2 + \left[\left(1 - \frac{V}{\rho} \right) - \frac{\cos\theta}{\rho} v \right]^2 \right\} ds^2 + dv^2.$$

En comparant l'équation (18) à la (13), on trouve pour conditions d'identité

$$\rho_1 = \frac{\rho^2 V'^2 + (\rho - V)^2 \sin^2\theta}{\rho^2 V'\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{r}\right) + (\rho - V)\sin\theta\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$

$$r_1 = \frac{\rho^2 V'^2 + (\rho - V)^2 \sin^2\theta}{V'\cos\theta - (\rho - V)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta} \cdot \frac{1}{\rho\sin\theta}$$

$$ds_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 V'^2 - (\rho - V)^2 \sin^2\theta}}{\rho\sin\theta} \cdot ds.$$

On peut, à l'aide de ces équations, déterminer la ligne L_1, pourvu que l'on rappelle la condition (17).

Exemple. Soit

$$V = \rho \text{ et } \theta = \text{constante};$$

les formules que l'on vient d'écrire deviennent

$$\rho_1 = \frac{-r\rho'}{\sin\theta}, \quad r_1 = \frac{\rho\rho'}{\sin\theta\cos\theta}, \quad ds_1 = \frac{\rho'}{\sin\theta} ds.$$

La condition (17) se réduit à l'autre

$$\rho'\cos\theta - \frac{\rho}{r}\sin\theta = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{\rho}{r} = \rho' \cot \theta.$$

Si donc $\frac{\rho}{r}$ est constant, ρ' est aussi constant et la ligne L est une hélice cylindro-conique. Et puisque les formules précédentes démontrent que ρ' et r_1 sont des fonctions linéaires de s_1, on conclut que la ligne L_1 est elle-même une hélice cylindro-conique.

Donc: «Si l'on mène, par les centres de courbure d'une hélice cylindro-conique L, et dans les plans normaux, des droites inclinées sur les normales principales d'un angle θ défini par l'équation

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\rho' r}{\rho},$$

la ligne Λ, lieu des centres de courbure de L, est une trajectoire orthogonale des génératrices de la surface gauche engendrée. Si l'on déforme par flexion cette surface de manière que la ligne Λ devienne une ligne asymptotique de la surface gauche déformée, cette ligne (qui, comme on sait, est une hélice cylindro-conique) devient une nouvelle hélice cylindro-conique».

§ 6

Sur chaque plan rectifiant d'une ligne L traçons une droite coupant la tangente sous l'angle θ; soit Σ la surface réglée que l'on vient d'engendrer et Λ le lieu des points où les droites menées coupent les tangentes de L.

On a

$$V=W=0, \quad a=\theta, \quad b=\frac{\pi}{2}, \quad c=\frac{\pi}{2}-\theta$$

et les équations (5) (6) donnent

$$(19) \qquad \frac{U}{\rho}\frac{d\theta}{ds}+(1+U')\left(\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\theta$$

$$(20) \qquad (1+U')\sin\theta.\frac{d\theta}{ds}-\frac{U}{\rho}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\sin\theta}{r}\right)=0.$$

L'integration de ces équations s'effectue tout de suite.

Si l'on suppose $U=0$, les équations (19), (20) deviennent

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\theta=0, \quad \sin\theta.\theta'=0.$$

Ces équations ont la solution commune $\theta=0$, et dans ce cas Σ est la développable osculatrice de L. L'autre solution de la première équation est

$$\operatorname{tang}\theta=-\frac{r}{\rho},$$

et la surface Σ est la développable rectifiante de L.

L'autre solution de la deuxième équation est $\theta=\text{const.}$, ce qui démontre un théorème bien connu de *M. Bonnet* sur la ligne de striction géodésique d'une surface gauche.

En revenant au cas général, calculons le carré de l'élément linéaire de la surface gauche, et posons ensuite la condition que les lignes coordonnées

$$s = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

soient orthogonales ; on obtient

$$(21) \qquad (1 + U') \cdot \cos\theta = 0$$

$$(22) \quad dS^2 = \left\{ (1 + U' - v \cdot \sin\theta \cdot \theta')^2 + \left[\frac{U}{\rho} + v\left(\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\theta}{r} \right) \right]^2 + v^2 \cos^2\theta \cdot \theta'^2 \right\} ds^2 + dv^2.$$

La condition (21) se dédouble de la manière suivante

$$\theta = \frac{}{2}, \quad 1 + U' = 0.$$

Nous nous bornons à la première solution.

Les droites menées sont, dans ce cas, parallèles aux binormales de L et l'expression (22) de dS^2 se réduit à l'autre

$$(23) \qquad dS^2 = \left\{ (1 + U')^2 + \left(\frac{U}{\rho} + \frac{v}{r} \right)^2 \right\} ds^2 + dv^2.$$

Supposons ensuite $U=0$ et l'équation

$$ds_1{}^2 = \left(1 + \frac{v_1{}^2}{r_1{}^2}\right) ds_1{}^2 + dv_1{}^2, \tag{24}$$

à laquelle se réduit l'équation (23), donne l'expression du carré de l'élément linéaire de la surface gauche des binormales d'une ligne L_1 (s_1, ρ_1, r_1).

Pour identifier les expressions (23), (24) posons

$$v_1 = v + k,$$

k étant une constante, et l'on obtient les trois équations

$$\left\{(1+U')^2 + \frac{U^2}{\rho^2}\right\} ds^2 = \left(1 + \frac{k^2}{r_1{}^2}\right) ds_1{}^2;$$

$$\frac{U}{\rho r} ds^2 = \frac{k}{r_1{}^2} ds_1{}^2; \quad \frac{1}{r^2} ds^2 = \frac{1}{r_1{}^2} ds_1{}^2 .$$

qui nous donnent

$$U = k\frac{\rho}{r}; \quad r_1 = r\left\{1 + k\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right\};$$

$$ds_1 = \left\{1 + k\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right\} ds.$$

Lorsque la ligne L est donné, ρ et r sont des fonction connues de s et les formules précédentes donnent la construction de la ligne L_1 dont les binormales engendrent une surface gauche applicable à la surface gauche donnée.

Exemple. *a*) Si l'on suppose

$$\frac{\rho}{r} = \text{constante},$$

on a

$$ds_1 = ds, \quad r_1 = r.$$

On obtient donc le théorème: «Si sur les tangentes d'une hélice quelconque L on prend des distances constantes $k \frac{\rho}{r}$, et par les extrémités on conduit des parallèles aux binormales, la surface réglée que l'on obtient est la surface gauche des binormales d'une ligne L_1, dont le rayon de torsion et l'arc élémentaire sont égaux au rayon de torsion et à l'arc élémentaire de L. La distance entre les points correspondants des lignes L, L_1 est *k*».

b) Si l'on suppose que r_1 soit proportionnel à r, on a

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)' = \text{const.} = \frac{1}{a}, \quad U = k\left(\frac{s}{a} + b\right).$$

La condition

$$\frac{\rho}{r} = \frac{s}{a} + b$$

nous apprend que la ligne L est une géodésique d'un cône (*).

(*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. Journal de M. Battaglini,* 1855.

Donc: «Si sur les tangentes d'une géodésique d'un cône

$$\left(\frac{\rho}{r}=\frac{s}{a}+b\right)$$

on prend des distances

$$U=k\left(\frac{s}{a}+b\right),$$

et par les extrémités on conduit des parallèles aux binormales de la ligne, la surface réglée que l'on obtient est la surface des binormales d'une ligne L_1 dont le rayon de torsion et l'arc sont liés au rayon de torsion et à l'arc de L par les équations

$$r_1=\left(1+\frac{k}{a}\right)r,\quad s_1=\left(1+\frac{k}{a}\right)s.$$

La distance entre les points correspondants des lignes L, L_1 est k.»

§ 7

Faisons tourner d'un angle θ les binormales d'une ligne L, autour des points de cette courbe, et dans les plans normaux. À la surface gauche Σ que l'on vient d'obtenir, on peut appliquer les formules du § 2, pourvu que l'on y suppose

$$U=V=W=0,\quad a=\frac{\pi}{2},\quad b=\frac{\pi}{2}\theta,\quad c=\theta.$$

On a donc

$$ds = d\sigma\,;\quad M^2 = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{r}\right)^2;\quad N = -\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Et si l'on fait usage de l'équation (4) du § 4, on arrive au théorème :

«La condition nécessaire et suffisante pour que la surface Σ que l'on vient de construire soit la surface gauche des binormales d'une ligne L_1 est exprimée par l'équation

$$\frac{\dfrac{\sin\theta}{\rho}}{\dfrac{\sin^2\theta}{\rho^2} + \left(\dfrac{d\theta}{ds} + \dfrac{1}{r}\right)^2} = k, \tag{25}$$

k étant une constante».

Si donc θ n'est pas constant, chaque ligne L donne lieu à une des surfaces gauches Σ que l'on vient de considérer. La construction de la ligne L_1, ayant pour binormales les génératrices de Σ, n'offre pas de difficulté, puisque k désigne précisément la distance entre les points correspondants des courbes L, L_1.

Si θ est constant, l'équation (25) donne

$$\frac{1}{\rho} = k\sin\theta\,.\,\frac{1}{\rho^2} + \frac{k}{\sin\theta}\,.\,\frac{1}{r^2}. \tag{26}$$

Donc : «Les lignes gauches L dans lesquelles les rayons de courbure et de torsion sont liés entre eux par l'équation (26), (dans laquelle k et θ sont des constantes) sont caractérisées par la propriété que, si l'on fait tourner les binormales de l'angle θ, avec la condition qu'elles ne sortent pas des plans normaux, la surface gauche que l'on obtient est le lieu des binormales d'une autre ligne L_1.

La distance entre les points correspondants des lignes L, L_1 est *k*».

Si l'on suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a l'équation

$$\frac{1}{\rho} = k\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

caractérisant (*) les lignes L dans lesquelles les normales principales sont les binormales d'une autre ligne.

Parme, novembre, 1892.

(*) *Journal de M. Battaglini*, l. c.

CONGRESSO DE CAEN

(Extracto de uma carta do sr. R. Guimarães)

Entre as varias questões discutidas na 1.ª e 2.ª secções (sciencias mathematicas) do Congresso que a *Association française pour l'avancement des sciences* realisou na cidade de Caen de 9 a 14 do corrente, uma ha, que é digna de menção, principalmente pelas resoluções tomadas. É a seguinte:

«Estudar os meios a seguir para facilitar as relações entre os mathematicos das diversas nações e contribuir para o progresso das sciencias mathematicas e aperfeiçoamento dos methodos».

As resoluções tomadas pelo Congresso, e que me apresso a transmittir-lhe, afim de as tornar conhecidas dos leitores do seu *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, são as seguintes:

1.° Empregar todos os esforços para a realisação de congressos de mathematica internacionaes que terão logar com intervallos de alguns annos. É provavel que o primeiro d'estes congressos tenha logar em Genebra;

2.° Approvar completamente a ideia do professor Mansion pelo que respeita á redacção do Vocabulario mathematico e felicitar o major de engenhãria sr. Brocard, pelos serviços que já tem prestado com relação ao vocabulario francez;

3.° Fazer votos para que o projecto do sr. Jacques Boyer, relativo ao *Diccionario mathematico*, seja levado a cabo tanto em França, como nos outros paizes;

4.° Chamar a attenção para as notaveis memorias sobre mathematicas puras que ultimamente se têm publicado na Allemanha, e que bom seria que se traduzissem para diversas linguas;

5.° Considerar que os grandes esforços empregados pelo professor Peano, da Universidade de Turin, e varios outros dos seus compatriotas, pelo que respeita á propaganda da *Logica mathematica* e á publicação de um formulario mathematico, são de natureza a contribuir para a realisação do fim em vista;

6.º Applaudir a publicação da *Revue semestrielle des publications mathématiques*, devida á iniciativa de um grupo de mathematicos hollandezes á frente dos quaes se acha o professor Schoute, da Universidade de Groningue, e felicitar a commissão de preparação do *Repertoire bibliographique*, pelo estado de adiantamento em que se encontram os trabalhos;

7.º Chamar a attenção para os grandes serviços prestados pelo *Intermédiaire des mathématiciens*, pelo que respeita ás relações entre os mathematicos entre si, felicitando ao mesmo tempo os fundadores de tão importante revista, os srs. Laisant e Lemoine, membros da associação franceza.

8.º Tomar em consideração a ideia apresentada pelo sr. Lemeray com relação á creação de bibliothecas mathematicas, tendo por fim pôr os seus livros á disposição dos estudiosos que residam fóra dos grandes centros scientificos.

Além d'estas resoluções, a secção resolveu que a questão, tal qual foi este anno apresentada, continue a fazer parte das ordens do dia no proximo Congresso da associação franceza, o qual terá logar na cidade de Bordeus em 1895.

Caen, 14 de agosto de 1894.

NOTA SOBRE EL TRIANGULO

POR

DON JUAN J. DURAN LORIGA

Capitan de Artilleria

Las espresiones

$$a^2+b^2+c^2,\ a^2+b^2-c^2,\ldots,$$

que se presentan en muchas formulas relativas al triangulo son susceptibles de una interpretacion geometrica muy sencilla.

Consideremos el triangulo A B C y la circunferencia descrita sobre el lado $BC=a$, como diametro. La potencia del punto A respecto á esta circunferencia tiene por espresion A B'. A B ó lo que es lo mismo $m_a^2-\frac{a^2}{4}$, y poniendo en lugar de m_a su valor en funcion de los lados resulta, llamando p_a á la potencia,

$$p_a=\frac{b^2+c^2-a^2}{2};$$

del mismo modo se obtiene

$$p_b = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},$$

$$p_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Sumando miembro á miembro las tres igualdades y llamando P á la suma, resulta:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Llamaremos á esta cantidade P *potencia del triangulo,* asi como á p_a, p_b y p_c *potencias parciales* relativas á cada uno de sus vertices, ó brevemente, potencia parcial de A, de B ó de C.

La consideracion de las potencias simplifica muchas formulas del triangulo, ya haciendo mas sencilla su estructura, ya facilitando su retencion por medio de reglas mnemonicas —, y no por la sustitucion de letras convencionales como abreviacion de los trinomios de que hemos hablado al principio, sino por cantidades que tienen completa interpretacion geometrica y pueden figurar como élementos de los triangulos para la resolucion de problemas que pueden proponerse haciendolos entrar como datos.

La enunciacion de algunos teoremas adquiere una forma mas sencilla; p. e. el fundamental de los triangulos oblicuangulos se traduce en las siguientes igualdades:

$$p_a = bc \cos A,\ p_b = ac \cos B,\ p_c = ab \cos C,$$

esto es, *en todo triangulo la potencia de un vértice es igual al producto de los lados que en el concurren por el coseno del angulo que forman,* resultando por consiguinte que la potencia es positiva, nula, ó negativa, segun el angulo correspondiente sea agudo, recto, ó obtuso, hecho que igualmente se deduce de la definicion geometrica.

Es bien facil obtener, en vista de nuestra definicion de potencia, las relaciones siguientes

$$P^2+p_a^2+p_b^2+p_c^2=a^4+b^4+c^4,$$

$$\frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} B}=\frac{p_b}{p_a},$$

$$\frac{ap_a}{\cos A}=\frac{bp_b}{\cos B}=\frac{cp_c}{\cos C},$$

diciendonos la 2.ª que en todo triangulo *las potencias de los vertices son inversamente proporcionales á las tangentes de los angulos correspondientes* y la 3.ª *que los productos de los lados por las potencias de los vertices opuestos son proporcionales á los cosenos de los angulos correspondientes.*

La altura de un triangulo en funcion de las potencias de los vertices tiene por espresion

$$h_a=\frac{1}{a}\sqrt{p_a\cdot p_b+p_a\cdot p_c+p_b\cdot p_c}$$

y por consiguiente el area

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{p_a\cdot p_b+p_a\cdot p_c+p_b\cdot p_c}.$$

Para los valores de los angulos se tiene:

$$\cos A = \frac{p_a}{b_c},\ \tang A = \frac{2S}{p_a}.$$

De las definiciones dadas y de formulas conocidisimas relativas á los triangulos, se deducen inmediatamente varios corolarios; citaremos algunos:

1.° En los triangulos equivalentes y de la misma potencia total (equipotenciales) el angulo de Brocard es constante.

2.° Si en un triangulo se fijan las potencias de los vértices (con lo que se determina un lado), el lugar geometrico del tercero es una perpendicular á dicho lado.

3.° Si se marca la potencia total y la de un vértice (con lo que tambien se fija un lado), el lugar geometrico del tercer vértice es una circunferencia.

4.° Si un triangulo variando de forma y posicion se mantiene inscripto en una circuferencia pero moviendose el centro de gravedad segun otra concentrica, se conserva equipotencial (igual potencia total).

5.° Una propriedad analoga se verifica respecto al ortocentro.

6.° Cuando un triangulo conserva un angulo fijo en magnitud y posicion y constante la potencia del vértice, el tercer lado envuelve una hipérbola.

7.° Si varios triangulos son equipotenciales, tambien lo son entre si los formados con las medianas de ellos.

8.° Cuando varios triangulos equipotenciales son inscriptibles en una misma circunferencia, se verifica: 1.° La suma de los cuadrados de las distancias del centro de esta á los lados es constante. 2.° Lo mismo sucede respecto á la suma de los cuadrados de los radios de los circulos inscriptos y exinscriptos. 3.° Los ejes orticos de todos estos triangulos son tangentes á una misma circunferencia.

9.° Si varios triangulos son equipotenciales y equivalentes, la suma de los inversos de los cuadrados de los radios de los circulos inscriptos y exinscriptos, es constante.

10.° Cuando un triangulo manteniendose inscripto en una circunferencia pivotea al rededor de un vértice conservando fija la potencia en este punto, el tercer lado es tangente á una conica y las alturas que corresponden á los vertices moviles son tangentes á una parabola.

11.° La potencia de dos circunferencias (*) no es mas que la parcial del triangulo formado por la linea de centros y los radios que van á uno de los puntos de interseccion, y con respecto á dicho punto.

En ciertas formulas de la geometria moderna del triangulo puede ser comodo para retenerlas, hacer entrar las espresiones potenciales; asi tenemos p. e. para las coordenadas normales absolutas del ortocentro

$$\delta_a = \frac{p_b p_c}{2S}, \ \delta_b = \ldots\ldots, \ \delta_c = \ldots\ldots;$$

del centro del circulo circunscripto

$$\delta_a = \frac{ap_a}{4S}, \ \delta_b = \ldots\ldots, \ \delta_c = \ldots\ldots;$$

del reciproco del ortocentro

$$\delta_a = \frac{2Sp_a}{aP}, \ \delta_b = \ldots\ldots, \ \delta_c' = \ldots\ldots$$

(*) *Sobre la definicion de potencia de dos circunferencias, vease:*
R. Lachlan.—An elementary Treatise on modern pure geometry, pag. 189.

Las coordenadas baricentricas de los vertices del 2.° triangulo de Brocard son

$$A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = 2p_a : b^2 : c^2,$$

$$B_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = a^2 : 2p_b : c^2,$$

$$C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : 2p_c.$$

La ecuacion del eje de homologia del triangulo dado y el 2.° de Brocard es

$$\frac{\alpha}{a^2 - 2p_a} + \frac{\beta}{b^2 - 2p_b} + \frac{\gamma}{c^2 - 2p_c} = 0$$

etc., etc.

Podria ahora proponerse como ejercicio: 1.° La demonstracion *geometrica* de los corolarios que hemos deducido. 2.° Diversos problemas de construccion de triangulos en que figurasen entre los datos, ademas de ciertos elementos de los mismos, las potencias totales ó las parciales de sus vértices.

BIBLIOGRAPHIA

E. Cesàro: Corso di Analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. Torino, Bocca, 1894.

Contém este volume o curso que sobre analyse algebrica professou o sr. Cesàro na Universidade de Palermo nos annos de 1886 a 1891. Obra de um geometra illustre, recommenda-se pelo rigor, clareza e elegancia com que está escripto, pela quantidade de assumptos interessantes que n'elle são considerados e pela maneira original com que muitas questões ahi são tratadas.

Abre o livro por uma exposição muito bem feita da theoria dos determinantes, á qual se segue a da parte mais importante da theoria das fórmas lineares e das fórmas quadraticas. Depois é exposta com a maior clareza a theoria dos numeros irracionaes. Segue-se o estudo da noção de limite, a respeito da qual o auctor não só expõe os theoremas que geralmente se encontram nas obras que tratam d'este assumpto, mas outros de natureza mais elevada e menos conhecidos, de que elle tem tirado partido em muitas das publicações com que tem enriquecido a sciencia.

Ao estudo da noção de limite segue-se o estudo das series, em que os theoremas demonstrados anteriormente a respeito d'esta noção têm a sua primeira applicação. A este respeito o auctor não só apresenta os theoremas de maior importancia que têm sido enunciados pelos geometras, mas, estudando intimamente estes theoremas, apresenta a respeito d'elles muitas notas e observações importantes que os esclarecem, e fixam o alcance de que são susceptiveis.

Estuda depois o sr. Cesàro os principios geraes da theoria das funcções de variaveis reaes e a theoria do seu desenvolvimento em serie; como applicação, são estudadas as funcções que em obras d'esta natureza é uso considerar.

Nos cinco capitulos seguintes são estudados os fundamentos da theoria dos numeros complexos, as series compostas de numeros complexos, a theoria das funcções hyperbolicas, os quaterniões, etc.

Os doze capitulos seguintes da obra são destinados á theoria das equações. N'elles são expostos os methodos classicos para a resolução das equações numericas e para a resolução algebrica das equações do 3.º e do 4.º gráo e é demonstrada a impossibilidade da resolução algebrica das equações de gráo superior ao quarto.

Os dois restantes capitulos são destinados um á theoria da interpolação e o outro á theoria dos productos compostos de factores em numero infinito.

Não terminaremos esta rapida noticia sem nos referir aos exercicios que terminam muitos dos capitulos da obra. Escolhidos com grande cuidado, estes exercicios são todos interessantes e alguns mesmo originaes.

G. Papelier: Leçons sur les coordonnées tangentielles, Paris, Nony, 1894.

Depois das coordenadas cartesianas não ha systema de coordenadas que tenha mais importancia do que o das coordenadas tangenciaes. Da combinação dos dois systemas resulta com effeito o *principio da dualidade*, um dos mais fecundos da geometria. Para que os alumnos possam empregar este poderoso meio de indagação geometrica, torna-se necessario familiarisarem-se com este systema de coordenadas, excitando-se no seu manejo; e para esse fim nada melhor do que, depois de estudarem a geometria analytica cartesiana, estudarem a geometria analytica tangencial desde os seus primeiros elementos. Para este fim, a obra do sr. Papelier é um excellente auxiliar. Eis o objecto de cada um dos quatorze capitulos em que se divide:

I. Ponto e recta. II. Generalidades sobre as curvas e principio de dualidade. III. Posição de uma curva relativamente ás suas tangentes. IV. Tangentes e normaes. V. Classificação das curvas de segunda classe. VI. Pólos e polares. VII. Centros, diametros e eixos. VIII. Reducção da equação geral do segundo gráo. IX. Fócos e directrizes. X. Tangentes communs a duas conicas. XI. Conicas inscriptas no quadrilatero das tangentes communs a duas conicas. XII. Rectas que têm o mesmo pólo relativamente a duas conicas. XIII. Coordenadas trilateraes. XIV. Propriedades de duas e de tres conicas.

A exposição dos assumptos é feita com a maior clareza e muitas questões são n'esta obra pela primeira vez tratadas com o auxilio das coordenadas tangenciaes.

C. Burali-Forti: Logica matematica, Milano, Hoepli, 1894.

Pela precisão e fixidez que permitte dar ao enunciado das proposições, a logica mathematica vae attrahindo cada vez mais a attenção dos geometras dos diversos paizes. Tem sido o objecto de obras extensas, onde é exposta desenvolvidamente esta sciencia, antiga na origem que remonta a Leibnitz, mas moderna no seu desenvolvimento, iniciado por Boole e continuado por Schröder, Peirce, Nagy, Peano, etc.; os seus symbolos têm sido approveitados em trabalhos importantes, para escrever com concisão e de um modo intelligivel para os mathematicos de todos os paizes as proposições n'elles consideradas; tem sido mesmo introduzida no ensino em algumas Universidades da Europa e da America. Tornava-se porisso extremamente desejavel a redacção de uma obra resumida, onde sem grandes esforços nem emprego consideravel de tempo se podesse estudar o que é mais importante n'esta sciencia. A este objecto satisfaz plenamente o excellente livro que vem de publicar o sr. Burali-Forti, o qual em pequeno espaço e com a maior clareza apresenta o que é essencial conhecer para se poder usar a Logica mathematica.

Accrescentaremos que o livro, a que vimos de nos referir, faz parte da importante collecção de manuaes que, com o nome de *Manuali Hoepli*, está publicando a casa editora Hoepli de Milão.

Accrescentaremos ainda que os symbolos de Logica mathematica têm sido empregados no *Formulario* geral das mathematicas que, debaixo da direcção do sr. Peano, está publicando a *Rivista di matematica* e na redacção do qual tem tomado uma parte importante o sr. Burali-Forti.

A. Rebière: Les femmes dans la science, Paris, Nony, 1894.

Contém este opusculo uma conferencia muito interessante que foi feita pelo sr. Rebière no *Cercle Saint Simon de Paris* em 14 de fevereiro de 1894, a qual teve por objecto dar noticia de algumas mulheres que cultivaram com successo as sciencias mathematicas. N'elle se refere o auctor a Hypatia de Alexandria, a Emilie du Châtelet, a Maria Agnezi, a Sophie Germain, a Mary Somerville, e a Sophie Kowalevski.

A respeito de todas estas mulheres celebres apresenta o sr. Rebière informações cheias de interesse que tornam a leitura do seu opusculo das mais agradaveis.

M d'Ocagne: Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, Paris, G. Villars, 1894.

Contém este opusculo algumas conferencias que foram feitas no Conservatorio das artes de Paris pelo sr. M. d'Ocagne, a respeito dos processos mecanicos e graphicos que têm sido empregados para executar os calculos numericos.

Estes processos foram classificados pelo auctor nos grupos seguintes: 1.° Instrumentos e machinas arithmeticas; 2.° Instrumentos logarithmicos; 3.° Traçados graphicos; 4.° Taboas numericas; 5.° Taboas graphicas.

A primeira conferencia refere-se aos processos pertencentes ao primeiro grupo. N'ella são descriptos o addicionador de Troncet, o multiplicador de Neper, as machinas de Pascal, Roth, Thomaz, Bollée, Babbage, Tchebichef, etc.

A segunda conferencia refere-se aos processos pertencentes ao segundo, ao terceiro e ao quarto grupo. Dos instrumentos logarithmicos são n'ella considerados as regoas, os circulos, as helices e os cylindros.

Na terceira conferencia considera o auctor os processos pertencentes ao ultimo grupo, isto é os abacos. A theoria geral d'estes processos de calculo foi ainda ha poucos annos constituida pelo auctor, que a respeito d'elles escreveu um livro importante do qual se deu noticia no tomo XI d'este jornal. Na conferencia actual o auctor dá, sem o recurso da Analyse, indicações precisas sobre o emprego e vantagens dos diversos abacos.

Encontra-se ainda no opusculo, a que nos estamos referindo uma nota muito interessante, contendo a primeira descripção detalhada da importante machina de calcular devida a Tehebichef, a respeito da qual o seu auctor tinha apenas publicado uma nota muito succinta. D'esta machina ingenhosa existe um unico exemplar, que está depositado no Conservatorio das artes de Paris.

Com a publicação em opusculo d'estas conferencias fez o sr. M. d'Ocagne um grande serviço. Muitos são na verdade os individuos que exercem profissões sociaes que os levam a effectuar successivos calculos numericos; estes encontrarão n'elle os meios para simplificar tão fastidioso trabalho.

G. Vivanti: Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla Matematica, Mantova, 1894.

N'este bello e interessante trabalho faz o auctor a historia do conceito que da noção de infinitamente têm feito os philosophos e os mathematicos, e faz o estudo critico das diversas opiniões a este respeito apresentadas. É dividido em duas partes, na primeira das quaes é a noção de infinitamente pequeno estudada debaixo do ponto de vista philosophico e na segunda debaixo do ponto de vista da sua applicação á mathematica.

A primeira parte consta de quatro capitulos onde são considerados os diversos modos como têm sido concebidos os infinitamente pequenos, já como rigorosamente nullos, já como grandezas constantes, já como grandezas intensivas. N'esta parte é tambem considerada a questão do *angulo de contacto*, celebre nos seculos XVI e XVII, á qual é consagrado um capitulo muito bem feito.

A segunda parte do opusculo consta tambem de quatro capitulos onde são considerados os methodos de exaustão, dos indivisiveis, dos infinitamente pequenos e dos limites.

O resto do opusculo é occupado por 215 notas, contendo informações historicas e bibliographicas, cheias de interesse.

Jubilé de M. Hermite, Paris, G. Villars, 1893.

Contém este bello opusculo a mensagem que foi dirigida ao sr. Hermite pelos geometras de todas, as nações no dia 24 de dezembro de 1892, na occasião do seu septuagesimo anniversario, e os discursos proferidos na sessão solemne que n'esse dia teve logar na Sorbonne. É adornado com um excellente retrato d'este eminente geometra.

F. Canu: Précis de Météorologie endogène, Paris, G. Villars, 1894.

A presente obra trata de uma parte da physica do globo, cujo estudo é recente, a qual tem por objecto os phenomenos que têm sua origem na crusta terrestre e que são produzidos pela acção das forças naturaes, calor, electricidade, etc. Estes phenomenos podem revelar-se á superficie da terra, ou por movimentos d'esta crusta, como tem logar com os terramotos, erupções vulcanicas, etc., ou pela influencia que elles exercem sobre o estado da atmosphera.

No seu muito interessante livro, o sr. Canu faz uma exposição d'esta sciencia nova tão completa quanto possivel, e reune e classifica os trabalhos importantes, mas muito espalhados, que a este respeito têm sido publicados.

C. A. Laisant: Recueil de problèmes de mathématiques, Paris, G. Villars, 1894.

Nas paginas 83 e 125 do tomo XI d'este jornal referimo-nos aos tres primeiros volumes d'esta obra. O presente volume é consagrado á Geometria elementar, a duas e a tres dimensões, e abrange os problemas que se pretende que sejam resolvidos por methodos puramente geometricos. É dividido em oito capitulos onde são respectivamente enunciados: 1.° problemas relativos a pontos, rectas e angulos; 2.° problemas relativos a figuras circulares; 3.° problemas relativos aos triangulos; 4.° problemas relativos aos polygonos; 5.° problemas relativos ás conicas e outras curvas; 6.° problemas relativos a planos no espaço e a polyedros; 7.° problemas relativos aos corpos redondos; 8.° problemas de Geometria descriptiva.

G. Arnoux: Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, G. Villars, 1894.

A theoria dos quadrados magicos é uma theoria difficil de arithmetica de que se têm occupado muitos mathematicos illustres. É d'esta theoria que trata o sr. Arnoux no seu interessante livro. Para se apreciar a importancia dos methodos empregados pelo auctor, transcreveremos de uma communicação feita a este respeito pelo sr. Laisant á Sociedade mathematica de França, as palavras seguintes:

«Ha uma tal originalidade, um tal poder de invenção nos methodos referidos, que eu ficaria muito admirado se a arithmetica os não utilisasse um dia, ou para obter demonstrações mais simples de verdades conhecidas, ou para descobrir verdades novas... As construcções de quadrados magicos, ou de espaços magicos em geral, não foram para o auctor senão uma occasião de utilizar ideias geraes, tendo um alcance bem differente do de um simples recreio arithmetico».

R. *Guimarães: O vigesimo segundo Congresso da Associação franceza para o adiantamento das sciencias, Lisboa, 1893.*

Contém este interessante opusculo o Relatorio, apresentado á Academia Real das Sciencias de Lisboa, dos trabalhos do Congresso da Associação franceza para o adiantamento das sciencias que teve logar em Besançon no anno de 1893. O auctor apresenta primeiramente uma noticia sobre a origem e fins d'esta util sociedade, refere-se depois aos trabalhos das vinte e quatro secções que a compõem, a muitas das quaes foram por elle apresentados trabalhos enviados por auctores portuguezes, e finalmente dá noticia das conferencias, das vizitas e das excursões que foram realizadas pelos membros do Congresso.

Jorge F. d'Avillez: Sobre a representação da terra pelas projecções orthogonaes (Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes, 1893).

O objecto d'este artigo é o estudo da representação da terra por meio de cartas geographicas, obtidas por projecções orthographicas orthogonaes.

O auctor estuda a fórma d'esta projecção, tanto no caso de o plano de projecção ser parallelo ao equador como no caso de ser parallelo a um meridiano; deduz as formulas que dão a posição na carta de qualquer ponto cuja colatitude e longitude sejam conhecidas; considera as deformações d'estes systemas de projecção e apresenta as condições em que é util empregal-os. A exposição do assumpto é feita com clareza e simplicidade.

A. *Macfarlane: On the definitions of the trigonometric functions, Boston, 1894.*

—— *The principles of elliptic and hyperbolic analysis, Boston, 1894.*

Contêm estes importantes opusculos duas communicações feitas pelo auctor, no Congresso de Mathematica que teve logar em Chicago em 1894. No primeiro o sr. Macfarlane, depois de apresentar e analysar as differentes definições que têm sido dadas das funcções circulares, estende geometricamente estas definições, por meio de considerações ligadas á theoria dos quaterniões, de modo a obter funcções que abrangem as precedentes e outras com representação na ellipse, na hyperbole e em outras curvas. No segundo opusculo o auctor, empregando estas funcções, constitue as trigonometrias spherica, ellipsoidal e hyperboloidica.

E. *Mosnat: Problèmes de Géométrie analytique. t. III, Paris, Nony, 1894.*

Deram-se n'este jornal, na pagina 21 do tomo X e na pagina 5 do tomo XI, noticias a respeito dos dois primeiros volumes d'esta excellente collecção de problemas. No presente volume o auctor occupa-se dos problemas de Geometria analytica a tres dimensões e apresenta a este respeito 128 problemas com as respectivas soluções e 400 problemas simplesmente enunciados. Estes problemas referem-se á parte elementar da Geometria analytica. A sua escolha foi feita, como nos volumes anteriores, com um grande cuidado.

Ch. Hermite: Sur la généralisation des fractions continues algébriques (Annali di Matematica, 1893).

—— *S. Pincherle: Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue (Mémorie della R. Accademia di Bologna, 1894).*

N'estas duas importantes memorias é estudado o problema seguinte: Dadas n series ordenadas segundo as potencias de uma variavel x, determinar os polynomios $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dos gráos m_1, $m_2, \ldots, m_n$ de modo que seja

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n = S_x{}^{m_1+m_2+\ldots+m_n+n-1},$$

onde S é uma serie da mesma natureza que as séries dadas S_1 S_2, etc.

E. Picard: Sur l'inversion des intégrales des fonctions à multiplicateurs (American Journal of Mathematics, t. XVI).

O auctor resolve a questão seguinte:

Representando por $f(x, y) = 0$ uma relação algebrica e por

$h(x, y)$ uma funcção racional de x e y, em que casos a equação

$$u = \int^{(x,y)} e^{\int^{(x,y)} h(x,y)\,dx}\,dx$$

dá para x e y funcções uniformes de u?

E. Picard: Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité (Bulletin de la Société mathématique de France, 1894).

O auctor estuda, por meio do methodo geral de Riemann, a equação ás derivadas parciaes

$$\frac{d^2U}{dt^2} - \frac{d^2U}{dx^2} = U.$$

R. Marcolongo: Sopra due moti di Poinsot concordanti (Annali di Matematica, 1894).

E. Lemoine: Notes de Géométrie (Association française pour l'avancement des sciences, 1893).
—— *Application au tétraèdre de la transformation continue (Item).*
—— *Complements de Géométrographie (Item).*

G. de Longchamps: Notice nécrologique sur E. Catalan (Journal de Mathématiques élémentaires, 1894).

—— *L'arithmétique avec les figures négatives (Association française pour l'avancement des sciences, 1893).*

—— *Un théorème de Géométrie des masses (Item).*

—— *L'espace infinitésimal autour d'un point d'infléxion (Item).*

—— *Sur le trisecteur.*

G. de Longchamps: Sur certaines généralisations de l'équation de Pell (Journal de Math. élémentaires, 1894).

—— *Sur la construction des tangentes aux courbes et sur la tangente à l'atriphtaloïde (Item).*

Gino Loria: Studi intorno alla logistica greco-egiziana (Giornale di Matematiche, Napoli, t. XXXII).

—— *La logique mathématique avant Leibnitz (Bulletin des sciences mathématiques, 1894).*

P. Gunther: Die Untersuchungen von Gauss in der Theorie der elliptichen Functionen (Nach. der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1894).

—— *Partialbruchrerlegungen in der theorie der elliptichen Functionen (Journal für die reine und aug. Mathematik, t. 113).*

M. Lerch: Nouvelle analogie de la série théta et quelques séries hypergéométriques particulières de Heine.

—— *Sur quelques théorèmes d'Arithmétique (Bulletin de la Société R. des Sciences de Prague, 1894).*

—— *Sur une intégrale définie (Giornale di Mathematiche, Napoli, t. XXXI).*

Lampe: Zur mechanischen Quadratur (Verhandhungen der Gesellschaft Deutcher Naturforscher, 1893).

D. André: Sur le triangle des séquences (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1894).
—— Sur le partage en quatre groupes des pérmutations des n *premiers nombres (Bulletin de la Société mathématique de Paris, 1893).*

P. Pizzetti: Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico (Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1894).

G. B. Guccia: Una definizione sintetica delle curve polari (Rend. del Circolo mat. di Palermo, 1893).

G. Cantor: Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati (Rivista di Matematica, 1893).

E. Cesàro: Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze (Rend. delle R. Accademia di Napoli, 1893).
—— La serie di Lambert in Aritmetica assintotica (Item).
—— Le formole di Codazzi negli iperspazii (Rend. della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1894).
—— Sulla Geometria intrinseca degli spazii curvi (Atti delle R. Accademia delle Sienze di Napoli, 1894).

C. Burali-Forti: I numeri negativi (Rivista di Matematica, 1893).
—— *Sulle classi derivate a destraa e a sinistra (Alti della R. Accademia delle Science di Torino, 1894).*
—— *Sulle classi ordinate e inumeri transfiniti (Rend. del Circolo Math. di Palermo, 1894).*

M. d'Ocagne: Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point (Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de Paris, 1894).
—— *Abaque général de la Trigonométrie sphérique (Bulletin astronomique 1894).*

G. Vivanti: Theorie degli Aggregati (Rivista di Matematica, Torino, 1894).

C. A. Laisant: Sur les tableaux de sommes (Association française pour l'avancement des sciences, 1893).
—— *Figuration graphique de quelques nombres combinatoires. (Item).*
—— *Principes de la methode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques (Bulletin de la Société mathématique de Paris, 1894).*

G. T.

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa-Cabral.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII—N.º 3

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1895

DI ALCUNE FORMOLE RELATIVE ALLA FUNZIONE SFERICA $P_n(x)$

NOTA DI

DAVIDE BESSO

Professore nella Università di Modena

L'equazione differenziale lineare omogenea del second ordine

$$R_2 y'' + R_1 y' + R_0 y = 0$$

si può, come è noto, trasformare nella

$$(\theta R_2 y' + (\theta (R_1 - R'_2) - \theta' R_2) y)' + \psi y = 0$$

in cui θ significa una funzione arbitraria, ed è

$$\psi = R_2 \theta'' + (2R'_2 - R_1) \theta' + (R_0 - R'_1 + R_2'')\theta.$$

Ed in modo analogo si può trasformare un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine qualunque.

Questa trasformazione è applicata, nella presente Nota, alla dimostrazione d'alcune formole conosciute, e forse di qualche altra, che si riferiscono alla funzione sferica $P_n(x)$.

1. Dall'equazione

$$(1-x^2)\,y''-2x\,y'+n\,(n+1)\,y=0 \qquad \text{I}$$

che, per n intero e positivo, è soddisfatta dalla $P_n(x)$, si deduce

$$\int \psi y dx=(1-x^2)\,(y\theta'-y'\theta)+\text{cost.} \qquad \text{II}$$

in cui è

$$\psi=(1-x^2)\,\theta''-2x\,\theta'+n\,(n+1)\theta.$$

Posto

$$y=P_n(x), \quad \theta=1,$$

risulterà

$$\int_0^a P_n(x)\,dx=\frac{1}{n\,(n+1)}\Big(P'_n(0)-(1-a^2)P'_n(a)\Big) \qquad (1)$$

e in particolare

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx=\frac{1}{n\,(n+1)}P'_n(0)=\begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\,(n+1)}\cdot\dfrac{3.5\ldots n}{2.4\ldots(n-1)} & \text{per } n \text{ dispari} (>1). \end{cases}$$

2. Colla sostituzione

$$\theta=P_m(x), \quad m \gtrless n,$$

si ha

$$\psi = [n(n+1) - m(m+1)]\, P_m(x),$$

e quindi

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_0^a P_m(x)\, P_n(x)\, dx = (1-a^2) \Big[P_n(a)\, P'_m(a)$$

$$- P'_n(a)\, P_m(a) \Big] - P_n(0)\, P'_m(0) + P'_n(0)\, P_m(0) \qquad (2)$$

e in particolare, supponendo che $m+n$ sia un numero pari,

$$\int_0^1 P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \qquad (3)$$

e, quando sia m pari ed n dispari (>1),

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x)\, dx = \frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{n(n+1)-m(m+1)} \cdot \frac{1.3\ldots(m-1)}{2.4\ldots m} \cdot \frac{3.5\ldots n}{2.4\ldots(n-1)} \qquad (4)$$

3. Posto

$$\theta = x,$$

si trova

$$(n-1)(n+2) \int_0^a x P_n(x)\, dx = (1-a^2) \Big[P_n(a) - a\, P'_n(a) \Big] - P_n(0) \qquad (5)$$

e quindi

$$\int_0^1 x\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari } (>1) \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(n-1)(n+2)} \dfrac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n} & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

E colla sostituzione

$$\theta = x^\mu, \quad \mu \geqq 2,$$

si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \mu(\mu-1)\int_\theta^a x^{\mu-2}P_n(x)dx + \big[n(n+1)-\mu(\mu+1)\big]\int_0^a x^\mu P_n(x)\,dx \\ = (1-a^2)\big[\mu a^{\mu-1}P_n(a) - a^\mu P_n^1(a)\big] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Si ha quindi la relazione

$$\mu(\mu-1)\int_0^1 x^{\mu-2}P_n(x)\,dx = (\mu-n)(\mu+n+1)\int_0^1 x^\mu P_n(x)dx \quad (7)$$

mediante la quale, e i valori dell' integrale $\int_0^1 x^\mu\, P_n(x)\, dx$ per $\mu=0$ e per $\mu=1$, si otterrà la nota formola che dà il valore di quest' integrale per ogni valore intero e positivo di $\mu>n$; e, in particolare, per $n \geqq 2r$,

$$\int_0^1 x^{n-2r}\,P_n(x)dx = 0. \quad (8)$$

La (7) non vale a determinare l'integrale per $\mu = n$. Ma si può arrivare al noto risultato mediante la formola che da quella si deduce

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 x^n P^n(x)dx = \frac{2.4.6\ldots 2k(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+2k-1)(n+2k)} \\ \displaystyle\qquad (2n+2k+1)\int_0^1 x^{n+2k} P_n(x)\,dx\end{array}\right\} (9)$$

cercando il limite a cui tende il secondo membro quando k tende all'infinito. A tale scopo osservo dapprima che la frazione, che ivi si trova, è eguale a

$$\frac{2.4\ldots 2n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)(2n+3)\ldots 2k}{(2n+2)(2n+3)\ldots 2k}$$

$$\cdot \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n-1)}{(2k+1)(2k+2)\ldots(2k+n)},$$

epperò ha per limite

$$\frac{2.4\ldots 2n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}.$$

Posto poi

$$P_n(x) = A_n x^n + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_\lambda x^\lambda \qquad \lambda = \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

si ha

$$m\int_0^1 x^m \mathrm{P}_n(x)\,dx = \frac{m}{m+n+1}\mathrm{A}_n + \frac{m}{m+n-1}\mathrm{A}_{n-1} + \ldots$$

$$+\frac{m}{m+\lambda+1}\mathrm{A}_\lambda$$

e quindi

$$\lim\left[m\int_0^1 x^m \mathrm{P}_n(x)\,dx\right]_{m=\infty} = \mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_\lambda = 1.$$

Preciò dalla (9) risulta

$$\int_0^1 x^n \mathrm{P}_n(x)\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)}. \tag{10}$$

Mediante questa formola e la (8) e rammentando che il coefficiente di x_n nella $\mathrm{P}_n(x)$ è

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

si ottiene quella di Legendre

$$\int_0^1 \mathrm{P}_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} \tag{11}$$

4. Colla sostituzione

$$\theta = \frac{1}{(1+gx^2)^\lambda}$$

si ha

$$\psi = -\frac{4\lambda(\lambda+1)(g+1)}{(1+gx^2)^{\lambda+2}} + \frac{2\lambda[(2\lambda+1)g+4\lambda+1)]}{(1+gx^2)^{\lambda+1}}$$

$$+\frac{(n+2\lambda)(n-2\lambda+1)}{(1+gx^2)^\lambda},$$

e ponendo

$$\int_0^a \frac{P_n(x)}{(1+gx^2)^\lambda}\,dx = V_{\lambda,\,g,\,a},$$

si trova

$$\left.\begin{aligned}&-4\lambda(\lambda+1)(g+1)V_{\lambda+2,g,a}+2\lambda[(2\lambda+1)g+4\lambda+1]V_{\lambda+1,\,g,\,a}\\&+(n+2\lambda)(n-2\lambda+1)V_{\lambda,\,g,\,a}=-\frac{1-a^2}{(1+ga^2)^{\lambda+1}}\Big[2\lambda\,ga\,P_n(a)\\&+(1+ga^2)P_n'(a)\Big]+P_n'(0)\end{aligned}\right\}(12)$$

Per $g=-1$ questa relazione diviene

$$\left.\begin{aligned}&4\lambda^2V_{\lambda+1,-1,\,a}+(n+2\lambda)(n-2\lambda+1)V_{\lambda,-1,\,a}=\frac{1}{(1-a^2)^\lambda}\Big[2\lambda aP_n(a)\\&\qquad-(1-a^2)P_n'(a)\Big]+P_n'(0).\end{aligned}\right\}(13)$$

Posto anche

$$a=1, \quad \lambda=-\frac{2r+1}{2}\left(r \geqq 0\right)$$

e

$$V_{-\frac{2r+1}{2},-1,1}=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}} P_n(x)\,dx = T_r,$$

si ottiene

$$(2r+1)^2 T_{r-1}+(n-2r-1)(n+2r+2)\,T_r=P'_n(0) \quad (14)$$

dalla quale, per n dispari (>1), risulta

$$T_{\frac{n-3}{2}}=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}-1} P_n(x)dx=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\cdot\frac{3.5\ldots n}{2.4\ldots(n-1)} \quad (15)$$

5. Dalla (14) si ricava, per n pari,

$$T_{r-1}=\frac{(2r-n+1)(2r+n+2)}{(2r+1)^2}T_r$$

e quindi

$$\mathrm{T}_{-1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{(-n+1)\,(n+2)}{1^2}\mathrm{T}_0$$

$$=\frac{(-n+1)\,(n+2)\,(-n+3)\,(n+4)}{1^2.3^2}\mathrm{T}_1$$

$$=\frac{(-n+1)(n+2)(-n+3)(n+4)\ldots(-n+2r+1)(n+2r+2)}{1^2.3^2\ldots(2r+1)^2}\,\mathrm{T}_r$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\cdot\frac{(2r+4)\,(2r+6)\ldots(2r+n+2)}{(2r-n+3)\,(2r-n+5)\ldots(2r+1)}\\&\qquad\cdot\frac{2.4.6\ldots(2r+2)}{1.3.5\ldots(2r+1)}\,\mathrm{T}_r\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

dalla quale risulta

$$\int_0^1\frac{\mathrm{P}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\lim\left(\frac{2.4.6\ldots(2r+2)}{1.3.5\ldots(2r+1)}\,\mathrm{T}_r\right)_{r=\infty}\qquad(16')$$

Ora, posto

$$\frac{2.4.6\ldots(2r+2)}{1.3.5\ldots(2r+1)}=\Omega_r\quad\text{e}\quad\Omega_r\int_0^1(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}\,x^{2k}\,dx=\mathrm{U}_{r,\,k},$$

si ha

$$\mathrm{U}_{r,\,0}=\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{U}_{r,\,k+1}=\mathrm{U}_{r,\,k}-\frac{\Omega_r}{\Omega_{r+1}}\,\mathrm{U}_{r+1,\,k}$$

e, in conseguenza, qualunque sia l'intero positivo k,

$$\lim (\mathrm{U}_{r,k})_{r=\infty} = 0.$$

Risulta da ciò che, indicando con $\mathrm{L}(x^2)$ qualsivoglia funzione intera di x^2, si ha

$$\lim \left[\Omega_r \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}} \mathrm{L}(x^2)\, dx \right] = \frac{\pi}{2} \mathrm{L}(0),$$

e in particolare, per n pari,

$$\lim (\Omega_r \mathrm{T}_r) = \frac{\pi}{2} \mathrm{P}_n(0) = \frac{\pi}{2} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}.$$

Sostituendo questo valoıe nella (16') si ottiene la formola

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\right)^2 \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

che è stata trovata per tutt'altra via dal *Bauer* (*), e pure per via diversa, dimostrata del *Catalan* (**).

(*) *Giornale di Crelle* — Tomo LVI, anno 1859, pag. 110.
(**) *Sur les fonctions* X_n *de Legendre, second Memoire* (présenté à la classe des sciences dans la séance du 6 août 1881) pag. 82.

6. Posto

$$\theta = \log \frac{1+x}{1-x}$$

e quindi

$$\psi = n(n+1) \log \frac{1+x}{1-x},$$

si trova

$$\left. \begin{aligned} n(n+1)\int_0^a P_n(x) \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2P_n(a) - (1-a^2)\, P'_n(a) \log \frac{1+a}{1-a} \\ -2P_n(0) \end{aligned} \right\} (18)$$

e, in particolare,

$$\int_0^1 P_n(x) \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{2}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)} P_n(0). \quad (19)$$

Colla posizione

$$\theta = \log(1-x^2)$$

che dà

$$\psi = n(n+1) \log(1-x^2) - 2,$$

e applicando la formola (1), si ottiene

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a P_n(x) \log(1-x^2)\, dx = \frac{2}{n^2(n+1)^2} [P'_n(0) - (1-a^2) P'_n(a)] \\ - \frac{1}{n(n+1)} [(1-a^2) P'_n(a) \log(1-a^2) + 2a P_n(a)] \end{aligned} \right\} (20)$$

la quale, per $a=1$, diviene

$$\int_0^1 P_n(x)\log(1-x^2)\,dx=\frac{2}{n^2(n+1)^2}P'_n(0)-\frac{2}{n(n+1)} \tag{21}$$

Dalle (18) (20) si ricava, per n pari

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} P_n(x)\log(1+x)\,dx=-\frac{1-a^2}{n(n+1)}P'_n(a)\\
&\left[\frac{2}{n(n+1)}+\log(1-a^2)\right]-\frac{2a}{n(n+1)}P_n(a)\\
&\text{e, per } n \text{ dispari,}\\
&\int_{-a}^{a} P_n(x)\log(1+x)\,dx=-\frac{1-a^2}{n(n+1)}P'_n(a)\log\frac{1+a}{1-a}\\
&\qquad+\frac{2}{n(n+1)}P_n(a)
\end{aligned}\right\}(22)$$

Quale caso particolare della (22) si ha la formola

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\log(1+x)\,dx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n(n+1)} \tag{23}$$

che è stata trovata per altra via del *Catalan* (*).

(*) *Sur les fonctions* X_n *de Legendre, premier Mémoire* (présenté à la classe des sciences dans la séance du 5 octobre 1879), pag. 58.

7. É noto che l'equazione differenziale

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+m(m+1)\,y=0 \qquad \text{I}'$$

è soddisfatta, per m intero e positivo, dalla funzione

$$\mathrm{P}_m(x)\log\frac{1+x}{1-x}+\mathrm{R}_{m-1}(x),$$

in cui $\mathrm{R}_{m-1}(x)$ significa una funzione intera di x del grado $(m-1)$ la quale contiene le sole potenze pari o le sole potenze dispari di x. Perciò posto

$$\theta=\mathrm{P}_m(x)\log\frac{1+x}{1-x}+\mathrm{R}_{m-1}(x),$$

sarà

$$\psi=[n(n+1)-m(m+1)]\,\theta,$$

e dall' equazione fondamentale II risulterà

$$\left.\begin{aligned}&(n-m)(n+m+1)\int_0^1\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{P}_m(x)\log\frac{1+x}{1-x}\,dx+(n-m)(n+m+1)\int_0^1\mathrm{P}_n(x)\mathrm{R}_{m-1}(x)\,dx\\&\quad=-\mathrm{P}_n(0)\,[2\mathrm{P}_m(0)+\mathrm{R}'_{m-1}(0)]+\mathrm{P}'_n(0)\,\mathrm{R}_{m-1}(0)+2\end{aligned}\right\}(24)$$

Se ora supponiamo m dispari ed n pari e $>m-1$, sarà $\mathrm{R}_{m-1}(x)$ una somma di termini della forma $\mathrm{C}_r x^r$ con r pari e $<n$, epperò sarà eguale a zero il secondo integrale del primo membro; e si

conchiuderà

$$\int_0^1 P_n(x)\,P_m(x)\log\frac{1+x}{1-x}\,dx=\frac{2}{(n-m)(n+m+1)}. \qquad (25)$$

8. La nota equazione

$$k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dy}{dk}-ky=0,$$

soddisfatta dall'integrale ellittico completo di modulo k, si trasforma, colla sostituzione

$$k=\sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

nella stessa I, quando vi si ponga $n=-\frac{1}{2}$. Perciò posto

$$\theta=K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right),$$

si ottiene

$$\psi=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right),$$

e dalla II si ricava

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\int_0^a P_n(x)\,K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)dx = -(1-a^2)\left[\frac{P_n(a)\,K'\left(\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{1-a}}\right.$$

$$\left. +P'_n(a)\,K\left(\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}P_n(0)\,K'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + P'_n(0)\,K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Applicando ora la formola che dà la K′ in funzione di K e di E, ed osservando che, dalla relazione

$$KE_1 + K_1E - KK_1 = \frac{\pi}{2}$$

risulta

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)},$$

la precedente diviene

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\int_0^a P_n(x)\,K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)dx = P_n(a)\left[\frac{1+a}{2}K\left(\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)\right.\\ \left.-E\left(\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)\right] - (1-a)^2P'_n(a)\,K\left(\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right) + P_n(0)\frac{\pi}{4K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\\ +P'_n(0)\,K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}\right\}(26)$$

e in particolare

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \int_0^1 \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)dx = \frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{P}_n(0)}{\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \mathrm{P}'_n(0)\,\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ossia

$$\int_0^1 \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{K}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)dx = \left\{\begin{array}{l} (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{\pi}{(2n+1)^2}\,\dfrac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n}\,\dfrac{1}{\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\[2ex] (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{4}{(2n+1)^2}\,\dfrac{3.5\ldots n}{2.4\ldots(n-1)}\,\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right\} \quad (27)$$

SOBRE OS COEFFICIENTES DA SERIE DE FOURIER

POR

J. Bruno de Cabedo

Professor da Universidade de Coimbra

Consideremos as formulas

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}a_0+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\operatorname{sen}mx) \qquad (1)$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}a_0'+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}(a'_m\cos mx+b'_m\operatorname{sen}mx) \qquad (2)$$

$$a_m=\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\cos mx\,dx, \qquad b_m=\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\operatorname{sen}mx\,dx,$$

$$a'_m=\int_{x_0}^{X}\psi(x)\cos mx\,dx, \qquad b'_m=\int_{x_0}^{X}\psi(x)\operatorname{sen}mx\,dx,$$

e supponhamos que as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ satisfazem no intervallo (x_0, X) ás condições de Dirichlet.

Se o segundo membro da primeira equação, por exemplo, for uniformemente convergente no intervallo considerado, attendendo a que é finito o integral $\int_{x_0}^{X} |\psi(x)|\, dx$, vem immediatamente (*), multiplicando por $\psi(x)$ e integrando

$$\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}a_0\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{1}\left[a_m\int_{x_0}^{X}\psi(x)\cos mx\,dx\right.$$

$$\left.+\,b_m\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,\mathrm{sen}\,mx\,dx\right]$$

ou

$$\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}a_0a'_0+\frac{1}{\pi}\sum_{1}(a_m a'_m+b_m b'_m). \quad (3)$$

Se nenhum dos segundos membros de (1) e (2) é uniformemente convergente em todo o intervallo (x_0, X), ainda tem logar a relação que acabo de apresentar.

Com effeito, decomponha-se este intervallo em um determinado numero de intervallos (α, β) taes que o segundo membro de (1), por exemplo, seja uniformemente convergente nos dominios que se obtêm isolando um dos pontos extremos α e β.

Como, para as series de Fourier, esta decomposição é sempre possivel, a generalidade da formula precedente acha-se demonstrada, fazendo ver que é

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}a_0\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{1}\left[a_m\int_{\alpha}^{\beta}\psi(x)\cos mx\,dx\right.$$

$$\left.+\,b_m\int_{\alpha}^{\beta}\psi(x)\,\mathrm{sen}\,mx\,dx\right]$$

(*) Gomes Teixeira, *Curso de Analyse*, tom. II, pag. 88.

ou, (*) designando por γ um dos numeros α e β, uniformemente convergente a serie

$$\frac{1}{\pi} a_0 \int_\gamma^t \psi(x)\, dx + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left[a_m \int_\gamma^t \psi(x) \cos mx\, dx \right.$$

$$\left. + b_m \int_\gamma^t \psi(x) \operatorname{sen} mx\, dx \right] \qquad (4)$$

no dominio (α, β) da variavel t.

Para isto, note-se que existe um numero positivo A, independente de m e t, para o qual é (**)

$$\left| a_m, b_m \right| < \frac{A}{m}, \quad \left| \int_\gamma^t \psi(x) (\cos mx, \operatorname{sen} mx)\, dx \right| < \frac{A}{m}.$$

Logo, tem logar a relação

$$\left| \frac{1}{\pi} \sum_n \left[a_m \int_\gamma^t \psi(x) \cos mx\, dx + b_m \int_\gamma^t \psi(x) \operatorname{sen} mx\, dx \right] \right| < \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{2A^2}{m^2},$$

da qual se conclue a uniformidade de convergencia da serie (4) em toda a extensão do intervallo (α, β).

Fazendo em (3) $\varphi(x) = \psi(x)$, vem a formula

$$\int_{x_0}^{X} \varphi^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} a_0^2 + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$

(*) Gomes Teixeira, op. cit., tom. II, pag. 92.
(**) Picard, *Traité d'Analyse*, tom. I, pag. 233.

ou

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{X}\varphi^2(x)\,dx-\frac{1}{4\pi^2}a_0^{\,2}=\frac{1}{4\pi^2}a_0^{\,2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_1(a_m^{\,2}+b_m^{\,2})$$

que dá o valor da serie formada pelos quadrados dos coefficientes de uma serie de Fourier.

BIBLIOGRAPHIA

E. Picard: Traité d'Analyse, t. II, Paris, G. Villars, 1893.

Quem observa o movimento scientifico moderno, na parte que se refere ás sciencias mathematicas, nota, com verdadeiros sentimentos de satisfação, que muitos dos geometras mais eminentes, que com suas descobertas e trabalhos originaes mais concorrem para o progresso d'aquellas sciencias, tomam sobre si tambem o encargo de em obras didacticas divulgar as suas descobertas e as dos outros geometras, fazendo assim á sciencia um serviço consideravel. É com estes sentimentos de satisfação que se abre a obra do sr. Picard.

Do 1.º volume d'esta obra importante deu-se noticia na pagina 106 do t. x d'este jornal.

O volume 2.º abre por dous capitulos muito interessantes, em que o auctor expõe a theoria das funcções de variaveis complexas pelo methodo de Riemann. Sabe-se que as funcções de variaveis reaes u e v que entram n'uma funcção analytica $u+iv$ de uma variavel complexa $x+iy$, satisfazem á equação ás derivadas parciaes de Laplace

$$\frac{d^2 U}{dx^2}+\frac{d^2 U}{dy^2}=0$$

quando substituidas no logar de U. D'esta circumstancia resulta que as propriedades da funcção $u+iv$ podem ser deduzidas das propriedades dos integraes d'esta ultima equação. O sr. Picard estuda porisso as propriedades dos integraes d'esta equação, por um methodo analogo ao que tinha empregado para o estudo dos integraes da equação de Laplace a tres variaveis, no tomo I da mesma obra, e tira d'estas propriedades as propriedades da funcção $u+iv$. N'estes mesmos capitulos são estendidos os resultados obtidos para a equação de Laplace a outras equações ás derivadas parciaes lineares de segunda ordem mais geraes. Com a doutrina d'estes capitulos está ligada a doutrina dos capitulos III e IV, onde são expostos os bellos e importantes trabalhos dos srs. Schwars e Poincaré sobre a resolução do problema de Dirichlet no caso do espaço a duas dimensões; no capitulo I tinha já sido dado o methodo de Neumann para o mesmo fim.

No capitulo V é estudada a theoria das funcções analyticas pelos methodos classicos de Cauchy. No capitulo VI faz o sr. Picard applicação do theorema de Cauchy, que serve de base á theoria dos residuos, á determinação de alguns integraes definidos, ao desenvolvimento das funcções em serie de funcções racionaes, á theoria das equações e á theoria das series periodicas. Esta ultima applicação constitue a parte mais importante d'este capitulo. O sr. Picard estuda alli profundamente o methodo dado por Cauchy para obter a serie de Fourier e outras series analogas, dando-lhe todo o rigor e clareza.

No capitulo VII occupa-se o auctor da representação por integraes duplos do numero de raizes communs a duas equações simultaneas. N'elle expõe o sr. Picard os trabalhos de Kronecker e os seus proprios sobre este assumpto interessante.

No capitulo VIII é exposta com a maior clareza a theoria dos integraes das funcções não uniformes.

No capitulo IX são estudadas as funcções analyticas de muitas variaveis independentes. Assignalaremos em especial n'este capitulo a extensão, devida ao sr. Poincaré, do theorema de Cauchy, relativo aos integraes tomados ao longo dos circuitos fechados, aos integraes multiplos de muitas variaveis.

No capitulo X é estudada a representação conforme, e é completada a exposição do methodo de Schwars para a resolução do problema de Dirichlet, o qual é fundado no problema da representação conforme.

Nos capitulos XI e XII são estudados os theoremas geraes sobre a existencia dos integraes das equações differenciaes. Encontram-se n'este capitulo as demonstrações dadas por Cauchy do theorema fundamental da theoria das equações differenciaes, e a demonstração, tão simples, d'este theorema, para o caso das variaveis reaes, que o auctor tinha encontrado pouco tempo antes da publicação d'este volume da sua obra.

Nos capitulos XIII a XVII é feito o estudo das funcções algebricas, das superficies de Riemann, dos integraes abelianos, etc. Este estudo difficil é feito com a maior clareza e de modo a vêr-se que o papel que as superficies de Riemann representam na theoria das funcções multiformes é fundamental e não se reduz a simplificar a exposição da theoria das funcções algebricas.

São estes, em resumo, os assumptos de que o sr. Picard se occupa no tomo II da sua obra. Só nos resta accrescentar que a elegancia da exposição, a profundeza com que são considerados os assumptos, a originalidade, quer no fundo, quer na fórma, que se encontra em muitas passagens em que o auctor expõe os resultados das suas proprias descobertas, a feliz escolha dos assumptos considerados, todos interessantes pela variedade das combinações analyticas e profundeza de methodos a que dão origem, collocam a obra do eminente geometra entre as mais bellas obras d'Analyse.

Ch. Méray: Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale, Paris, G. Villars, 1894.

N'um pequeno volume, publicado em 1872, com o titulo de *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, expoz o sr. Méray, de um modo muito differente do que então era usado, as theorias da Analyse infinitesimal. Seguindo uma ideia outr'ora apresentada por Lagrange, o auctor reduz toda a Analyse infinitesimal á theoria das funcções que podem ser desenvolvidas em series inteiras. As funcções que não estão n'estas condições são por elle systematicamente postas de parte, e para justificar esta exclusão funda-se na circumstancia de não terem ellas applicação alguma no estudo dos phenomenos physicos. Para constituir debaixo d'este ponto de vista a Analyse, estuda o auctor as propriedades das series inteiras e os diversos algorithmos que dão origem a funcções que possam ser desenvolvidas em series inteiras.

As ideias apresentadas no *Nouveau Précis* não chamaram a principio a attenção que mereciam, e foi necessario que passassem annos e que muitos pontos de vista apresentados pelo auctor d'este opusculo fossem novamente encontrados por outros geometras para que fosse notado o trabalho do sr. Méray.

Aproveitando a corrente favoravel ás suas ideias, que se vae manifestando, e fortalecido por novos estudos feitos no longo intervallo de tempo que vae desde a publicação do seu opusculo até á epocha actual, o auctor vem de principiar a publicação de uma obra consideravel sobre a Analyse infinitesimal e suas applicações geometricas, onde as doutrinas serão expostas segundo o seu modo de considerar esta sciencia.

A obra constará de quatro volumes, dos quaes acaba de ser publicado o primeiro. N'elle são estudados os principios geraes da theoria das funcções e os algorithmos geraes que dão origem a funcções no sentido considerado pelo auctor, ficando para os volumes seguintes as applicações geometricas e o estudo das funcções especiaes. O estudo a que nos estamos referindo é sempre feito com a maior generalidade possivel, não separando o auctor o caso das variaveis reaes do caso das variaveis imaginarias, nem o caso de uma só variavel do caso de muitas variaveis.

Abre a obra por uma exposição muito clara da theoria dos numeros fraccionarios, dos numeros negativos, dos numeros irracionaes e dos numeros complexos. Estas differentes especies de numeros são introduzidos como symbolos necessarios para tornar possiveis todas as operações da Algebra. O methodo empregado para a exposição da theoria dos numeros irracionaes coincide com o que se attribue a Heine; o auctor faz porém notar no prefacio que, antes de Heine, o havia elle já publicado na *Revue des Sociétés savantes*, em 1869.

Estuda em seguida o auctor as propriedades geraes das series e as propriedades especiaes das series inteiras, e munido com estes conhecimentos passa ao estudo das propriedades geraes das funcções consideradas no sentido a que já nos referimos, isto é, das funcções representaveis na visinhança de cada ponto por series inteiras. Este estudo leva o auctor á noção importante de *prolongamento* de uma funcção definida por uma serie inteira fóra do circulo de convergencia d'esta serie, noção que os trabalhos do sr. Weierstrass tornaram classica, mas cuja primeira ideia parece pertencer ao sr. Méray.

As doutrinas a que nos estamos referindo occupam a primeira metade do volume.

A outra metade é dedicada ao estudo das condições de existencia e propriedades geraes das funcções dadas por integraes das equações differenciaes ou das equações ás derivadas parciaes, estudo que é feito de uma maneira muito completa e profunda. Um capitulo especial é consagrado tambem á theoria das funcções implicitas, cujo estudo o auctor liga com o estudo da theoria das equações differenciaes.

Terminando esta rapida noticia devemos dizer que, pelos pontos de vista novos que encerra e pelo modo largo e geral como são considerados os assumptos, a obra do sr. Méray parece-nos extremamente digna da attenção dos geometras.

Ch. Henry: Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, Nony, 1895.

Contém este opusculo um resumo da parte mais essencial da theoria das funcções ellypticas.

Na exposição do assumpto o auctor dá o primeiro logar ás notações de Weierstrass; não deixa porém de relacionar com ellas e de estudar depois as notações de Jacobi e Abel, habilitando d'este modo para a leitura dos trabalhos em que são empregadas umas e outras notações.

É dividido o opusculo em quatro partes, sendo na primeira estudados alguns principios geraes da theoria das funcções duplamente periodicas; na segunda as funcções pu, ζu, σu de Weierstrass; na terceira as funcções $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$; na quarta as funcções ϑ de Jacobi. De todas estas funcções são estudadas as propriedades mais importantes. Para introduzir a funcção pu, o auctor recorre á serie dupla de Weierstrass; as funcções ζu e $\log \sigma u$ são definidas por integrações de pn e ζu; as outras funcções consideradas são definidas pelas suas relações com as anteriores.

A clareza com que está exposto o assumpto torna este opusculo muito proprio para o primeiro estudo dos principios mais essenciaes da theoria das funcções ellipticas.

E. Pascal: Lezioni di Calcolo infinitesimale, Milano, Hoepli, 1895.

A parte mathematica da importante collecção de manuaes publicados pela livraria Hoepli, de Milão, acaba de ser enriquecida com mais dous volumes. Um d'elles é dedicado ao Calculo differencial, o outro ao Calculo integral e são devidos ao illustre professor na Universidade de Pisa, sr. E. Pascal.

Os assumptos que estes livros contêm são aquelles que o auctor ensina no seu curso, e são elles os que se costumam ensinar n'um curso regular de calculo infinitesimal. Percorrendo-os com cuidado vê-se que estão escriptos com a maior clareza e com aquelle rigor de que o auctor tem tão bons exemplos dentro do seu paiz nos trabalhos de Dini, Peano, etc. Todos os principios, todas as observações, que hoje se julgam indispensaveis para dar á Analyse infinitesimal o rigor que deve ter, são n'estes livros cuidadosamente apresentadas, e isto é feito de tal modo que nem a clareza nem a precisão são jámais sacrificadas.

O primeiro volume está dividido em seis capitulos dedicados aos assumptos seguintes:

I Funcções reaes de variaveis reaes (principios geraes, limite das funcções, continuidade, etc.). II Derivada das funcções. III Desenvolvimento das funcções em series. IV Estudo do andamento de uma funcção na visinhança de um ponto (maximos e minimos, etc.). V Algumas applicações analyticas (indeterminações, determinantes funccionaes, etc.). VI Applicações geometricas (tangentes, curvatura, contato, envolventes, etc.).

O segundo volume contém os assumptos seguintes:

I Integraes definidos e indefinidos. II Integrabilidade das funcções. III Calculo dos integraes definidos e indefinidos. IV Integraes multiplos. V Integrações das differenciaes totaes. VII Equações differenciaes.

G. Maupin: Questions d'Algèbre, Paris, 1895.

A collecção de questões d'Algebra, que acaba de publicar o sr. Maupin, offerece um interesse que não se encontra ordinariamente nas collecções d'esta natureza. Este interesse resulta da boa escolha que o auctor fez das questões que apresenta (que são sempre relativas a assumptos que prendem a attenção e para obter muitas das quaes o auctor recorreu ás obras dos grandes mestres da sciencia), da elegancia das soluções e das informações historicas que acompanham muitas d'ellas. Todo o alumno que resolver todas as questões apresentadas, terá adquirido no fim grande desenvolvimento no manejo dos methodos da Algebra e grande copia de conhecimentos uteis. Os professores mesmo encontrarão decerto n'este livro informações e resultados que os interessarão.

Das questões apresentadas, cujo numero é superior a 1:300, muitas são resolvidas pelo auctor, outras são simplesmente enunciadas. Referem-se á analyse combinatoria, á theoria dos logarithmos, dos imaginarios, das series, dos infinitamente pequenos, das derivadas, dos maximos e minimos, dos determinantes, das fracções racionaes, á resolução numerica das equações, aos integraes definidos e indefinidos, ás applicações geometricas do Calculo infinitesimal, ás fracções continuas, á interpolação, á theoria das probabilidades, etc.

B. Niewenglowski: Cours de Géométrie Analytique, t. I, Paris, G. Villars, 1894.

A obra, cujo titulo acabamos de indicar, constará de tres volumes, sendo o primeiro dedicado á linha recta, ao circulo e a uma parte da theoria das conicas, o segundo á theoria geral das curvas planas e á continuação da theoria das conicas e o terceiro á Geometria a tres dimensões.

O primeiro volume acaba de ser publicado. As doutrinas que encerra estão dispostas em vinte capitulos, onde são considerados os assumptos seguintes:

I Preliminares. II Linha recta. III Coordenadas homogeneas. Coordenadas trilineares. IV Invariantes. V Feixes de rectas. VI Circulo. VII Logares geometricos. VIII Curvas do segundo grau. IX Theoria do Centro. X. Theoria dos diametros. XI Reducção da equação do segundo grau, com eixos rectangulares, XII Comprimento dos eixos de uma conica. Theorema de Apollonius. XIII Figuras homotheticas. Figuras semelhantes. XIV Theoria das tangentes e das normaes. XV Theoria das envolventes. XVI Pólos e polares. XVII Curvas polares reciprocas. XVIII Curvas passando por pontos dados ou tangentes a rectas dadas. XIX Theoria dos fócos. XX Secantes communs a duas conicas.

Entre estes assumptos encontram-se todos os que fazem parte dos programmas de Geometria analytica das nossas escolas e muitos outros; porisso os alumnos do primeiro anno dos nossos cursos superiores de Mathematica encontrarão no livro que acaba de publicar o sr. Niewenglowski um excellente auxiliar para os seus estudos, os professores um excellente modelo para o seu ensino.

Z. G. de Galdeano: Geometria general, Zaragoza, 1895.

Está publicada a primeira parte d'esta obra, que é consagrada á exposição e critica dos theoremas e problemas fundamentaes em geometria e dos methodos geometricos. É um trabalho interessante, em que o illustre professor da Universidade de Saragoça expõe, debaixo de um ponto de vista ao mesmo tempo historico, philosophico e mathematico, tudo o que é fundamental na sciencia da extensão. Abre por uma introducção, em que o auctor segue rapidamente, debaixo do ponto de vista indicado, o movimento progressivo de aperfeiçoamento d'esta sciencia desde o tempo de Euclides até á actualidade. Vêm depois no livro 1.º estudos logico-mathematicos sobre os meios de raciocinar empregados em geometria e sobre a significação de certas palavras que esta sciencia vae buscar á Logica. Encontra-se aqui em particular um estudo da natureza dos methodos de indagação e de demonstração synthetico e analytico, estudo bastante desenvolvido na parte que se refere ao primeiro d'estes methodos, cujo papel no progresso da sciencia geometrica o auctor indica. No livro 2.º são estudados os diversos methodos de indagação geometrica. O auctor considera o methodo euclideano, o methodo trigonometrico, os methodos da geometria projectiva (methodos de Poncelet, de Mobius, de Chasles, etc.), os methodos analytico geometricos (methodos de Argand, de Bellavitis, de Grassmann, de Hamilton, etc.).

V. Balbin: Tratado de Estereometria genetica, Buenos Ayres, 1895.

A Estereometria *genetica* é, como diz o auctor, uma extensão da geometria elementar no espaço, que ensina a gerar, segundo uma certa lei, todos os corpos geometricos elementares e muitos outros, e a calcular os seus volumes por meio de uma formula unica.

Ao corpo cujo estudo fórma a base da Stereometria genetica chama o sr. Balbin *poliedroide*. Este corpo tem por base figuras situadas em planos parallelos; cada vertice (ou cada ponto) de uma das bases está ligado por meio de uma recta (ou por meio de uma curva de lei determinada) com o correspondente da outra base, ou com o correspondente e o contiguo a este; e as suas faces lateraes são geradas por uma recta que se move apoiando-se sobre duas arestas contiguas e conservando-se parallela aos planos das bases.

A Stereometria genetica tem sido unicamente estudada na Allemanha, onde têm sido publicados varios trabalhos a respeito d'ella. No presente volume expõe o auctor tudo o que de mais importante se tem publicado a este respeito, completando-o com as suas proprias indagações. Com esta publicação fez o sr. Balbin um bom serviço, tornando este ramo da geometria elementar accessivel a muitos que não conhecem a lingua allemã.

V. Balbin: Geometria plana moderna, Buenos Ayres, 1894.

Este opusculo é a traducção de outro, publicado em inglez pelos srs. *G. Richardson* e *A. Ramsey*, com o titnlo de *Modern plane geometry*. É uma continuação dos *Elementos* de Euclides e ao mesmo tempo um livro de preparação para o estudo da Geometria descriptiva das conicas e dos pontos imaginarios, redigido segundo um programma para o desenvolvimento do ensino da

Geometria plana, elaborado pela Associação Britannica. São estudados n'elle as propriedades do triangulo, do quadrilatero completo, de um ou mais circulos, os maximos e minimos geometricos, as relações inharmonicas, a involução, as polares reciprocas, a theoria das projecções, etc. Todos estes assumptos são considerados debaixo do ponto de vista elementar, de modo a poderem ser estudados pelos que conhecem sómente os Elementos de Geometria. É um livro de uma utilidade incontestavel, pela natureza dos assumptos que encerra e pela clareza com que está escripto; porisso o sr. Balbin fez um bom serviço traduzindo-o para a lingua hespanhola.

Ch. Brisse: Cours de Géomètrie descriptive à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne, Paris, G. Villars, 1895.

O presente livro é um guia excellente para principiar o estudo da Geometria descriptiva. Não contém todos os assumptos do programma para o ensino da Geometria descriptiva nas nossas Escolas Polytechnicas; todavia póde ser consultado com grande vantagem pelos alumnos d'estas escolas, para o estudo da parte do programma que n'elle se encontra.

Está dividido o volume em duas partes. Na primeira parte são estudados os principios geraes, o methodo das rotações e dos rebatimentos, e a Geometria descriptiva da recta e do plano. Na segunda parte são considerados o cone, o cylindro e as superficies de resolução. N'um appendice são apresentadas as primeiras noções de perspectiva.

As figuras estão dispostas no texto, o que facilita muito a leitura d'este volume.

F. Castellano: Lezioni di Meccanica razionale, Torino, 1894.

A litteratura mathematica italiana está sendo continuadamente enriquecida com obras didacticas excellentes, relativas aos diversos ramos d'esta sciencia. Entre estas podemos collocar o *Manual de Mechanica racional*, que acaba de publicar o sr. Castellano, professor na Real Academia militar de Turin. Contém os assumptos que constituem o programma de um curso regular de Mechanica racional, e estes são n'elle expostos com a maior clareza e simplicidade.

Para dar uma ideia da natureza dos assumptos considerados n'esta obra e da sua disposição, vamos dizer o objecto de cada um dos vinte e um capitulos em que ella está dividida:

I Movimento de um ponto. Velocidade. Acceleração. II Cinematica dos systemas de fórma invariavel. III Movimento de rotação de um corpo á roda de um ponto. IV Movimento composto. V Movimento geral de um corpo. VI Forças applicadas a um ponto. Statica do ponto. VII Dynamica do ponto livre. VIII Dynamica do ponto não livre. Movimento de um ponto sobre uma linha. IX Movimento do ponto sobre uma superficie. X Attricto. XI Systemas materiaes. Calculo da massa. XII Centros de gravidade. XIII Momentos de inercia. XIV Statica dos systemas materiaes. Equilibrio dos systemas de forças. XV Equivalencia e reducção dos systemas de forças. XVI Equilibrio dos systemas ligados. XVII Polygonos funiculares. XVIII Dynamica dos systemas. Equações geraes do movimento de um systema. XIX Dynamica dos systemas rigidos. XX Theoria das forças instantaneas, da percussão e do choque. XXI Principio das velocidades virtuaes.

Na exposição o auctor faz largo uso da theoria dos vectores, a qual é resumidamente exposta n'uma introducção.

Cada capitulo é seguido por uma lista de exercicios bem escolhidos.

X. Antomari: Cours de Mécanique, Paris, Nony, 1895.

N'este pequeno volume são expostos de uma maneira muito simples e muito clara os primeiros principios de Mechanica racional.

Abre por um capitulo onde são estudados alguns principios de Geometria analytica a tres dimensões, dos quaes o auctor faz depois uso. Segue-se a Statica, a Cinematica e finalmente a Dynamica. Da Statica vem a theoria da composição das forças e dos binarios, o estudo do equilibrio do ponto e do solido invariavel, a theoria dos centros de gravidade, e a theoria das machinas chamadas simples. Da Cinematica vem a parte que se refere ao movimento do ponto. Da Dynamica vêm a theoria do movimento do ponto, á applicação d'esta theoria ao movimento dos projecteis e algumas noções geraes relativas á theoria das machinas em movimento.

Este livro é destinado aos candidatos á Escola militar de *Saint-Cyr*, e contêm porisso só os assumptos exigidos para a entrada na referida Escola.

X. Antomari et C. Laisant: Questions de Mécanique, Paris, Nony, 1895.

Esta excellente collecção de problemas é destinada aos alumnos que se querem familiarisar com os primeiros principios da Mechanica racional. Porisso os auctores tiveram o cuidado de não apresentar problemas de grande difficuldade. Muitos d'elles têm sido propostos nos exames oraes para a entrada na Escola Polytechnica de Paris.

A classificação dos problemas é feita em capitulos, havendo em cada capitulo problemas que são acompanhados das respectivas soluções e outros que são simplesmente enunciados. Cada capitulo principía por um resumo das fôrmulas e theoremas pertencentes á theoria a que os problemas que vão seguir se referem.

Termina o volume um resumo, muito bem feito, da Geometria vectorial, cuja importancia em Mechanica, hoje aliás reconhecida, os auctores tornam evidente por meio de algumas applicações.

G. T.

CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Publica-se o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* em fasciculos de 32 paginas. Cada 6 fasciculos formarão um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume — 2$400 réis.

A correspondencia relativa ao *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para o Porto, rua de Costa Cabral.

F. GOMES TEIXEIRA

Curso de Analyse infinitesimal

Tomo I (Calculo differencial);
Tomo II (Primeira parte do Calculo integral);
Tomo III (Segunda parte do Calculo integral).

Preço de cada volume — 2$500 réis.

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOL. XII — N.º 4

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1895

SOBRE LOS CIRCULOS RADICALES

POR

DON JUAN J. DURAN LORIGA

Comandante de Artilleria

Se sabe que el lugar geometrico de los puntos tales que sus potencias con relacion á dos circunferencias fijas guardan la relacion $\frac{m}{n}$ es una circunferencia, y si suponemos $m = -n$, esta linea tambien será el lugar de los puntos que tienen respecto á otras dos de esta clase potencias iguales y de signos contrarios, que la analogia nos conduce á llamarla *circunferencia radical* (*) de las propuestas. Es muy facil determinar su centro y radio.

Llamemos P_0 y $P_{0'}$ las potencias de un punto P del plano respecto á las circunferencias O y O'. Se tendrá $P_0 = -P_{0'}$ ó lo que es lo mismo, llamando l y l' las distancias de P á los centros y

(*) Algunos autores, en particular los ingleses, llaman «circulo radical» (radical circle) al que corta ortogonalmente á otras tres pero nos parece preferible la denominacion muy usada de «circulo ortotomico» y llamar circulo radical al que es objeto de este estudio.

d la distancia OO',

$$l^2 - R^2 = R'^2 - l'^2 \text{ es decir } l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2.$$

El centro de la circunferencia que buscamos será por consiguinte el medio de OO' y su radio será

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

Para que la circunferencia radical exista, es preciso que se tenga

$$d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)};$$

esta condicion se cumple siempre, cuando las circunferencias son tangentes (ya exteriores ó interiores), secantes ó interiores, pero si son exteriores podrá existir ó no la circunferencia radical.

Cuando las circunferencias son secantes, teniendo evidentemente que pasar la circunferencia radical por los dos puntos de corte (de potencia cero), podrá describirse inmediatamente.

Cuando son tangentes exteriores, la circunferencia radical será tangente interior á la de mayor radio y en el punto de tangencia de las dadas (puesto que este punto tiene potencia cero respecto á ambas) y como su centro es en todos los casos el medio de la linea de centros, es tambien su trazado inmediato. Si se quiere numericamente determinar su radio sin recurrir al hecho visto á priori, se hará $d = R + R'$ en el valor de ρ y resulta como es consiguinte $\rho = \frac{1}{2}(R - R')$.

Si son tangentes interiores, tambien resultará la circunferencia radical tangente á las dadas y su radio será $\rho = \frac{1}{2}(R + R')$.

Si las circunferencias son concentricas, tambien lo será con ellas la radical y su radio se obtendrá haciendo $d = O$ en el valor de ρ, con lo que resulta

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}.$$

Para el trazado grafico de la circunferencia radical de dos exteriores (cuando existe) ó de dos interiores, se utilizaran las consideraciones que vamos á exponer.

Consideremos tres circunferencias O, O′ y O″, llamemos $\pi_{OO'}$ la circunferencia radical de O y O′ y $\pi_{OO''}$ la de O y O″; si estas circunferencias se cortan, se tendrá en los puntos de interseccion

$$\begin{cases} P_0 = -P_{0'} \\ P_0 = -P_{0''} \end{cases} \text{por consiguinte } P_{0'} = P_{0''}$$

es decir que el eje radical de O′ y O″ lo es tambien de $\pi_{OO'}$ y $\pi_{OO''}$.

Cuando las circunferencias radicales no se cortan, tambien es facil dar una demonstracion geometrica, y aun mas sencillo demonstralo analiticamente, como haremos mas adelante.

Esta observacion sugiere el medio de encontrar la circunferencia radical de dos exteriores (si existe) ó de dos interiores O y O′. Cortense por una tercera O″, determinese la circunferencia radical de O y O″ y el eje radical de O′ y O″ y se tendrá uno ó dos puntos de la circunferencia que se quiere determinar y de la que el centro es conocido.

La circunferencia O″ debe elegirse de un modo conveniente para que se corten el eje y circunferencia radical auxiliares, lo cual es facil conseguir.

Puede verse graficamente si existe la circunferencia radical en el caso de ser las dadas exteriores (unico caso en que puede haber imposibilidad) por la siguiente construccion (*). Levantase en el extremo del radio OA la perpendicular AB igual al radio R′ de la otra circunferencia, unase O con B, tracese la perpendicular $BC=OB$ y si la circunferencia descrita con el radio OC envuelve el centro O′ la circunferencia radical existe.

La sencillez de esta construccion evita otras esplicaciones.

Cuando dos circunferencias son ortogonales, se ve claramente que la radical pasa por los centros de ellas, como se deduce tambien del valor de ρ, pues siendo $R^2+R'^2=OO'^2$, resulta $\rho=\frac{1}{2}OO'$. La reciproca es tambien cierta, como se ve facilmente.

La consideracion de circunferencias radicales permite resolver inmediatamente el siguiente problema:

Se tienen dos circunferencias tangentes, por ejemplo interiores, O y O′ de radios respectivos R y R′ por el punto de tangencia p se trazan secantes, tales como pam y se toma en sentido contrario una longitud $am'=am$. Cual es el lugar geometrico de el punto m'?

Tracemos la circunferencia O″ que tenga por circunferencia radical respecto á la O, la O′ y se tendrá en valor absoluto $ap.am=ap.am'$ y por lo tanto $am'=am$; el lugar buscado es por conseguiente la circunferencia O″. Para determinar su radio x, notemos que se tiene $R'=\frac{1}{2}(R-x)$, de donde se deduce $x=R-2R'$. La circnnferencia encontrada es tangente exterior ó interior á la O segun sea $R-2R' \gtrless O$. Si la circunferencia O′ pasa por el punto O, el lugar geometrico se reduce al punto p lo cual es evidente.

Hemos dicho anteriormente que si se tienen tres circunferencias O, O′ y O″ y se determinan las radicales de dos grupos OO′ y OO″ por ejemplo, el eje radical de estas circunferencias radicales es el mismo que el de las del tercer grupo.— Esto permite demostrar con gran sencillez que las circunferencias descritas sobre las medianas de un triangulo como diametros, tienen de dos en dos

(*) Se ruega al lector haga las figuras.

por eje radical las alturas de dicho triangulo. Observemos en efecto que si sobre los lados de un triangulo como diametros se describen circunferencias, las radicales de estas son las trazadas sobre las medianas (asi p. e. la correspondiente á las descritas sobre b y c es la que tiene por diametro la mediana relativa al lado a); resulta pues, en virtud de nuestra observacion, que los ejes radicales de las ultimas seran los mismos que los correspondientes á las primeras, es decir las alturas del triangulo. Tenemos pues seis circunferencias que tienen por centro radical comun el ortocentro del triangulo dado.

Si consideramos ahora las circunferencias descritas desde los medios de los lados como centros con un radio igual á las medianas correspondientes y á las que hemos llamado por ciertas razones, que en otra ocasion espusimos, circunferencias potenciales (vease nuestra nota del Progreso matematico, tomo v, pag. 70), es evidente que dichas circunferencias son las descritas tomando como diametros las medianas del triangulo anticomplementario, pero por otra parte, en virtud de lo anteriormente dicho, estas circunferencias son las radicales de las descritas sobre los lados de este último triangulo, podemos en consecuencia decir que las circunferencias descritas desde los vertices de un triangulo como centros con radios iguales á los lados opuestos tienen por circunferencias radicales las potenciales de dicho triangulo, y que por lo tanto su centro radical es el ortocentro del triangulo anticomplementario del propuesto.

Tenemos pues un segundo grupo de seis circunferencias que tienen el mismo centro radical.

Hemos dicho que, cuando dos circunferencias son ortogonales, la circunferencia radical tiene por diametro la linea de centros y, como el circulo de Longchamps es ortotomico de los descritos desde los vertices como centros con radios iguales á los lados opuestos, resulta que las circunferencias que tienen por diametros las rectas que unen el ortocentro de un triangulo con el de su complementario son las radicales del circulo de Longchamps y de los otros tres de que hemos hecho merito.

El mismo criterio puede servir para encontrar las circunferencias radicales de algunas otras del triangulo, pero en todos los casos puede recurrirse á la geometria analitica, es en efecto evidente que si $C=O$ y $C'=O$ son las ecuaciones de dos circunferencias, la de la radical será $C+C'=O$ ya se trate de coordenadas cartesianas ó trilineales; así la circunferencia radical de las representadas por las ecuaciones

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0,$$

$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=0,$$

es la siguiente:

$$x^2+y^2+(A+A')x+(B+B')y+\frac{1}{2}(C+C'=0),$$

y si en particular se toma por eje de las X la linea de centros y una de ellas tiene el suyo en el origen (suponemos rectangular el sistema) la circunferencia radical será:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+y^2=\frac{2(R^2+R'^2)-\alpha^2}{4},$$

resultado que comprueba lo que anteriormente hemos dicho, que para que la circunferencia radical exista tiene que ser la distancia de centros menor que $\sqrt{2(R^2+R'^2}$. Si esta distancia es $\sqrt{2(R^2+R'^2}$, la circunferencia se reduce á un punto situado en lá linea de centros, interiormente á la circunferencia de mayor radio y á una distancia de su centro igual á la anterior cantidad radical dividida por dos.

Si se trata de coordenadas baricentricas y las circunferencias dadas son

$$\sum\alpha\times\sum u\alpha-\sum a^2\beta\gamma=0$$

$$\sum\alpha\times\sum u'\alpha-\sum a^2\beta\gamma=0$$

la circunferencia radical es

$$\sum \alpha . \sum (u+u') \alpha - 2 \sum a^2 \rho\gamma = 0.$$

Es muy facil probar analiticamente un hecho que anteriormente hemos consignado y es que si tenemos tres circunferencias O, O′, O″ y las agrupamos de dos en dos, el eje radical de las circunferencias radicales de dos grupos lo es del tercer grupo. Tenemos en efecto llamando

$$C = 0 \;..\; C' = 0 \;..\; C'' = 0$$

las ecuaciones de las tres circunferencias dadas

$$\left.\begin{array}{l}\text{La circunferencia radical de}\begin{cases}C = 0\\ C' = 0\end{cases}\text{es } C + C' = 0\\[2ex] \text{La} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{de}\begin{cases}C = 0\\ C'' = 0\end{cases}\text{es } C + C'' = 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Eje radical de}\begin{cases}C + C' = 0\\ C + C'' = 0\end{cases}\text{es } C' - C'' = 0\\[2ex] \text{Eje} \quad \text{»} \quad \text{de}\begin{cases}C' = 0\\ C'' = 0.\end{cases}\text{es } C' - C'' = 0\end{array}$$

Si despues de encontrar las circunferencias radicales de tres dadas operamos lo mismo (cuando es posible) con las que sucesivamente vamos obteniendo, podran resultar series triples de circulos sometidos á ciertas ligazones cuyo estudio puede ser curioso.

La consideracion de circunferencias radicales en la geometria del triangulo relacionando las relativas á circulos notables de este, con otros circulos, rectas y puntos ligados al mismo, podrá quizas dar lugar á resultados interesantes, pero faltos hoy de tiempo para hacer un estudio detenido solo hemos apuntado ideas, que nos proponemos desarrollar en otra ocasion.

La Coruña, Junio, 1895.

RÈGLE D'ANALOGIES DANS LE TRIANGLE OU TRANSFORMATION CONTINUE ET TRANSFORMATION ANALYTIQUE CORRESPONDANTE

PAR

E. LEMOINE

On rencontre nombreuses propriétés du triangle ayant entre elles des analogies évidentes; pour n'en citer que l'exemple le plus simple: à chaque propriété où entre le cercle inscrit correspondent des propriétés analogues pour chaque cercle ex-inscrit, mais toutes les fois qu'un géomètre trouve une proposition nouvelle, il ne peut arriver à décernir les propositions analogues qu'après certains tâtonnements; nous nous proposons d'indiquer une loi qui donne explicitement sans aucun calcul, pour un très grand nombre de formules ou de théorèmes, les formules ou les théorèmes analogues.

Nous appellerons A, B, C, a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, S, R, r_a, r_b, r_c, r, δ, δ_a, δ_b, δ_c, ω etc. les angles, les cotés, le demi-périmètre, les quantités

$$\frac{b+c-a}{2}, \quad \frac{c+a-b}{2}, \quad \frac{a+b-c}{2},$$

la surface, le rayon du cercle circonscrit, les rayons des 3 cercles ex-inscrits, le rayon du cercle inscrit, les quantités

$$4R+r, \quad 4R-r_a, \quad 4R-r_b, \quad 4R-r_c,$$

l'angle de *Brocard*, etc.

Théorème:

Si dans une formule entre les éléments du triangle on change A, B, C, a, b, c, p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$, S, R, r_a, r_b, r_c, r, δ, δ_a, δ_b, δ_c, ω etc., *respectivement en* $-A$, $\pi-B$, $\pi-C$, a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $(p-c)$, $(p-b)$, $-S$, $-R$, r, $-r_c$, $-r_b$, r_a, $-\delta_a$ $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, $-\omega$, etc., *on aura une formule exacte, quelquefois identique à la première, quelquefois différente.*

Cela revient, *au fond*, à ceci, qui est évident:

Si l'on a l'identité

$$f(a, b, c)=0$$

on aura aussi l'identité

$$f(a, -b, -c),$$

mais les consequences sont *extrêmement* fécondes pour la Géométrie du triangle.

Si l'on a démontré par exemple la formule:

$$a^2 r_a + b^2 r_b + c^2 r_c = 4p^2 (R-r)$$

on en tire immédiatement

$$-a^2 r + b^2 r_c + c^2 r_b = 4(p-a)^2 (R+r_a),$$

de même de

$$\Sigma(b-a)^2(c-a)^2=(p^2-3r\delta)^2$$

on deduit :

$$(b+a)^2(c+a)^2+(b+a)^2(b-c)^2+(c+a)^2(b-c)^2=$$

$$=[(p-a)^2+3r_a\delta_a]^2$$

formules qu'il eût été impossible de deviner à priori.

Nous appelons cette transformation la tranformation continue en A, à cause de la manière dont nous y sommes primitivement parvenus en considérant un triangle ABC et en cherchant ce que deviennent par continuité les éléments en faisant mouvoir A sur BA dans les sens BA après que A est poussé à l'infini. Il y a évidemment aussi la transformation continue en B et la transformation continue en C.

Le même ordre d'idées donne lieu à une transformation analytique fort curieuse.

Soient x, y, z les coordonnées normales absolues d'un point M relatives à un triangle de référence ABC, coordonnées que nous supposons fonctions des éléments du triangle.

Soit K une expression quelconque fonction de ces éléments; nous désignerons par K_a ce que devient l'expression K lorsque l'on fait subir à ses éléments la transformation continue en A.

Cela posé, on demontre : il y a un point M_a dont les coordonnées normales absolues sont : $-x_a$, y_a, z_a ; c'est le transformé continu en A du point M.

Si maintenant

$$f(x,\ y,\ z,\ K,\ K'\ldots)=0 \tag{1}$$

représente un certain lieu dépendant de M, lieu correspondant par conséquent á une propriété P de M

$$(2) \qquad f(-x, y, z, H_a K'_a \ldots) = 0$$

représentera le lieu que l'on obtiendrait en transformant continuement en A la propriété P, propriété nouvelle que j'appelle P_a.

Nous dirons que (2) est la transformée continue en A de l'équation (1).

Conséquence :

Si une propriété P *a été établie par une série de calculs ou de raisonnements, on trouvera immédiatement la série de calculs (ou de raisonnements) qu'il faudrait faire pour établir directement* P_a, *en transformant continuement en* A *chacune des équatious qui forment le calcul qui conduit à* P.

Il n'est du reste nullement besoin de repasser par ces intermédiaires et de P on déduit immédiatement P_a.

Exemples :

1.° Si H, O, O_a, K sont le point de concours des hauteurs, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté BC et au prolongement des deux autres, le point de Lemoine d'un triangle, on a :

$$\text{Surface} \qquad HOK = \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{24p \operatorname{cotg} \omega};$$

on en déduit immédiatement :

$$HO_aK = \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{24(p-a) \operatorname{cotg} \omega}.$$

2.° L'hyperbole H_a qui a pour foyers B et C et passe en A a pour équation:

$$(p-b)(p-c)(b^2y^2+c^2z^2)-bcyz[(p-c^2)^2+(p-b)^2]+$$

$$+abc(c-b)x(y-z)=0.$$

La transformation continue en A reproduit le même résultat, mais la transformation en B donne l'ellipse E_a, qui a pour foyers B et C et passe en A

$$p(p-a)(b^2y^2+c^2z^2)+bcyz[p^2+(p-a)^2]+$$

$$+abc(c+b)x(z+y)=0.$$

Nous ne pouvons entrer ici dans de plus longs détails, que l'on trouvera par exemple dans les comptes rendus des congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences; disons seulement en terminant que la transformation continue s'applique au tétraèdre et que, si a et a', b et b', c et c' sont les groupes d'arêtes opposées du tétraèdre ABCD, la transformation continue en D revient à changer a, b, c, a', b', c' en $a, b, c, -a', -b', -c'$.

SOBRE UMA FÓRMULA DE ANALYSE

POR

JOÃO AREZ

O sr. dr. F. Gomes Teixeira deu no tomo XVIII do jornal do sr. Battaglini uma demonstração da fórmula (*)

$$(a) \ldots y^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,x\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,x\ldots} \cdot \frac{d^m f}{du_1^a\, du_2^b \ldots} (u_1')^a \left(\frac{u_1''}{2!}\right)$$

$$\ldots \left(\frac{u_1^{(n)}}{n!}\right)^l (u_2')^{\alpha'} \left(\frac{u_2''}{2!}\right)^{\beta'} \ldots \left(\frac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{l'} \ldots$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada da ordem n de y em ordem a x, sendo

$$y = f(u_1, u_2, \ldots u_l), \quad u_1 = \varphi_1(x), \quad u_2 = \varphi_2(x), \quad u_l = \varphi_l(x),$$

(*) Vide tambem o *Calculo differencial* do sr. G. Teixeira, 2.ª edição, pag. 215.

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha+2\beta+\ldots+n\lambda+\alpha'+2\beta'+\ldots+n\lambda'$$

$$+\ldots+\alpha^{(l-1)}+2\beta^{(l-1)}+\ldots n\lambda^{(l-1)}=m$$

e onde é

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=a,\quad \alpha'+\beta'+\ldots+\lambda'=b\ldots, \text{ etc.}$$

e

$$a+b+c+\ldots=m.$$

É esta a fórmula que pretendemos aqui deduzir como applicação da fórmula de Taylor.

Com effeito a fórmula de Taylor póde escrever-se

$$f(u_1+h_1,\, u_2+h_2,\ldots)-f(u_1,\, u_2,\ldots)$$

$$=\sum\frac{h_1^a}{a!}\cdot\frac{h_2^b}{b!}\cdots\frac{d^mf}{d^au_1\, du^b{}_2\ldots}$$

onde

$$m=a+b+c+\ldots$$

as quantidades h_1, $h_2 \ldots$, h_l sendo dadas pelas relações

$$h_1 = \varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) = \sum u_1^{(i)} \frac{h^i}{i!},$$

$$h_2 = \varphi_2(x+h) - \varphi_2(x) = \sum u_2^{(i)} \frac{h^i}{i!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_l = \varphi_l(x+h) - \varphi_l(x) = \sum u_l^{(i)} \frac{h^i}{i!}.$$

Mas por ser por hypothese y uma funcção de x, temos

$$f(u_1 + h_1, u_2 + h_2, \ldots) - f(u_1, u_2, \ldots) = \sum \frac{h^n}{n!} y^{(n)}.$$

Logo será

$$\sum \frac{h^n}{n!} y^{(n)} = \sum \frac{d^m f}{du_1^a \, du_2^b \ldots} \times \frac{\left(\sum u_1^{(i)} \frac{h^i}{i!}\right)^a}{a!} \times \frac{\left(\sum u_2^{(i)} \frac{h^i}{i!}\right)^b}{b!} \ldots$$

desenvolvendo as potencias do 2.º membro d'esta egualdade, tere-