Analyse infinitesimal, a theoria das differenças, etc. Na nova edição desenvolveu porém mais o auctor a parte relativa á Geometria infinitesimal, e introduziu tres novas lições, uma relativa ás coordenadas trilineares, outra relativa ás coordenadas tangenciaes e uma terceira relativa á intersecção das curvas do 2.º gráo.

---

*G. de Longchamps.* — *Les fonctions pseudo et hyper-Bernoulliennes etc. (Mémoires couronnés de l'Académie R. de Belgique,* t. LII).

Principia o auctor a sua bella memoria pelo estudo da lei de recorrencia

$$A_n \varphi(n) = A_1 A_{n-1} + A_2 A_{n-2} + \ldots + A_{n-1} A_1$$

($A_1$, $A_2$, etc. representando uma serie composta de um numero infinito de numeros e $\varphi(n)$ uma funcção dada de $n$), e por fazer vêr que, por meio d'esta relação, se póde exprimir a lei de recorrencia d'algumas series importantes, taes como as series que representam os desenvolvimentos de $e^x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, etc.

Em seguida estuda o auctor o caso em que $\varphi(n)$ representa a funcção $an+b$, $a$ e $b$ representando numeros constantes. N'este caso a relação anteriormente considerada representa a lei de recorrencia dos desenvolvimentos em serie de $\operatorname{tang} x$, $\mathrm{T}hx$, $x \cot x$, etc., e de um integral particular da equação de Riccati:

$$y' + Ay^2 = Bx^m.$$

Este ultimo resultado é principalmente importante, porque só se conhecia até aqui o integral d'esta equação debaixo da fórma de quociente de dois integraes definidos ou de duas series.

---

*G. Peano.* — *I principii di Geometria logicamente esposti.* — *Torino, 1889.*

Nas primeiras linhas do prefacio do seu importante opusculo expõe o auctor claramente qual o objecto que tem em vista. Diz com effeito, o sr. Peano:

«Quaes são as entidades geometricas que se podem definir, e quaes as que se devem acceitar sem definição? E entre as propriedades, experimentalmente verdadeiras, quaes é necessario acceitar sem demonstracção e quaes se podem deduzir como consequencia.

«A analyse d'estas questões, pertencentes ao mesmo tempo á Logica e a Geometria, são o objecto d'este livro.»

A questão de que se occupa o illustre geometra de Turim é a mais difficil de todas as questões de geometria e tem sido objecto de trabalhos importantes.

Como no opusculo de que se deu noticia na pag. 54, os termos, pertencentes á Logica e á Geometria, para o enunciado das proposições são substituidos por signaes, o que permitte enunciar estas proposições de um modo rigoroso e que não dá logar a ambiguidades. No principio do livro vem uma lista d'estes signaes.

O primeiro paragrapho do opusculo contém os signaes das entidades geometricas que se não podem definir.

O paragrapho segundo contém todas as definições de que se faz uso.

Os paragraphos seguintes contêm 16 axiomas e os theoremas que dependem d'estes axiomas. Cada axioma é immediatamente seguido dos theoremas que dependem d'elle e dos anteriores.

Termina o livro uma serie de notas muito interessantes contendo explicações relativas ao assumpto principal.

---

*G. W. Johnson. — Trazado de curvas dadas em coordenadas cartesianas (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin). — Buenos Ayres, 1889.*

O principal objecto d'este livro é a determinação da forma das curvas quando são dadas as suas equações em coordenadas cartesianas. O auctor, para tornar o seu livro accessivel a maior numero de leitores, emprega sómente methodos algebricos. A importancia do assumpto, a clareza com que está escripto, e a boa escolha das doutrinas levaram o sr. V. Balbin a traduzil-os em lingua hespanhola para servir de texto aos alumnos da cadeira de *Calculo graphico* na Universidade de Buenos Ayres.

---

*J. A. Serrasqueiro. — Tratado de Algebra Elementar. — Coimbra, 1890.*

Veja-se o que se disse na pag. 46 do t. VIII e na pag. 122 do t. V a respeito d'esta obra.

---

*G. Lalbaleitrier. — Trigonometrie rectiligne suivie des principes de la nouvelle Géometrie du triangle. — Paris, 1889 (lithographado).*

Consta esta obra de duas partes. A primeira contém a Trigonometria rectilinea. N'esta parte expõe o auctor as doutrinas que se encontram habitualmente nos livros que se occupam d'este ramo da Geometria.

Na segunda parte vem uma exposição clara e bastante completa dos principios da nova geometria do triangnlo. É a parte verdadeiramente interessante do livro de que estamos dando noticia, e que merece ser lida por aquelles que querem ter conhecimento das bellas questões pertencentes a este ramo moderno de geometria.

Termina o livro por uma collecção de exercicios relativos a todos os assumptos de que o auctor se occupa tanto na primeira como na segunda parte.

---

*B. J. Clasen. — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. — Paris, 1889.*

Para fazer conhecer o methodo a que se refere o opusculo de que queremos dar noticia, appliquemol-o ao caso de tres equações a tres incognitas

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Por meio d'estas equações fórma o sr. Clasen duas novas equações taes que numa d'ellas não entre $x$ e na outra não entre $y$, e taes que $x$ e $y$ tenham o mesmo coefficiente.

Estas novas equações são

$$(ab' - ba')x + (cb' - bc')z + bd' - db' = 0$$
$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z + da' - ad' = 0.$$

Depois o auctor multiplica a primeira d'estas equações por $-a''$, a segunda por $-b''$ e somma os resultados com a terceira das equações propostas para ter a equação que dá $z$.

Como se vê o methodo tem analogia com o methodo de reducção ao mesmo coefficiente, do qual differe todavia em alguns pontos essenciaos.

No seu interessante opusculo o sr. Clasen expõe com toda a generalidade o novo methodo e faz vêr quaes são as suas vantagens. Mostra, com effeito, que, ao contrario do que acontece com os outros methodos, o novo methodo indica e faz desapparecer os factores communs que se introduzem durante o calculo; que o numero das operações a executar é menor; finalmente que faz conhecer, logo que entram em calculo, as equações incompatives com as usadas anteriormente.

---

*Inauguration de la nouvelle Sorbonne.* — *Paris, 1889.*

Contém este opusculo os discursos pronunciados pelos srs. Gréard, Hermite, Chautemps e Fallières no dia 5 de agosto de 1889, pela occasião da inauguração da nova Sorbonne.

No seu magnifico discurso o sr. Hermite traça a historia brilhante do ensino das mathematicas neste estabelecimento de instrucção.

Foi em 1809 que as mathematicas tomaram logar entre os assumptos ensinados na Sorbonne, e desde então até hoje foram elles ensinados por homens eminentes como Lacroix, Poisson, Biot, Francoeur, Hachette, Sturm, Poncelet, Delaunay, Le Verrier, Lamé, Liouville, Serret, Duhamel, Chasles, Cauchy, Puiseux, Briot, Bouquet e outros que actualmente ainda continuam a obra de tão grandes mestres.

O sr. Hermite refere-se a todos estes geometras mostrando o papel que cada um d'elles representou nas sciencias mathematicas e physicas, e quaes os principaes trabalhos e descobertas com que concorreram para o progresso d'estas sciencias.

---

*M. Lerch. — Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques* (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 3.ª série, t. VI, 1889).

Deve-se ao sr. Hermite o ter mostrado pela primeira vez o papel importante que representam certas linhas em que uma expressão analytica se torna discontinua *(coupures)* no estudo das funcções definidas por integraes imaginarios. Approveitando esta doutrina, o sr. Lerch expõe os principios da theoria das funcções ellipticas sem a consideração dos integraes curvilineos. Parte para isso o auctor do integral

$$\int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-t^2x^2)(1-k^2t^2x^2)}},$$

onde $x$ representa uma variavel real ou imaginaria, e mostra que este integral define uma funcção analytica de $x$ com quatro pontos criticos.

Em seguida estuda o auctor a influencia do caminho seguido pela variavel $x$ sobre o valor da funcção precedente para mostrar que a funcção é duplamente periodica.

Estudado o integral precedente, passa o sr. Lerch ao estudo da funcção inversa da funcção definida por este integral estudando para isso, como Briot e Bouquet, a equação differencial

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Deve-se observar que em todo o seu bello trabalho o illustre geometra de Praga não emprega outras considerações que as que são relativas aos integraes das funcções imaginarias de variaveis reaes e ás series, e que o novo methodo de tractar dos fundamentos da theoria das funcções ellipticas têm uma superioridade consideravel, sob o ponto de vista da clareza, sobre o methodo fundado na consideração dos integraes curvilineos.

---

*M. Lerch. — Sur certains développements en séries trigonometriques.*

O principal objecto d'esta memoria é o desenvolvimento em serie trigonometrica da funcção definida pela serie

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}},$$

que contém como caso particular uma outra serie anteriormente estudada pelo sr. Appell.

---

*P. Appell. — Sur les invariants de quelques équations différentielles (Journal des Mathematiques, 4ᵉ série, t. v).*

Nesta importante memoria occupa-se o eminente geometra francez do estudo dos invariantes e dos casos de integrabilidade:

1.° das equações differenciaes da fórma

$$y' = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p} (p < n)$$

que conservam a mesma fórma quando se toma uma nova variavel dependente $\eta$ e uma nova variavel independente $\xi$ ligadas com $x$ e $y$ pelas relações

$$y = \eta u(x) + v(x), \quad \frac{d\xi}{dx} = \eta(x);$$

2.° das equações differenciaes homogeneas relativamente a $y$ e suas derivadas que conservam a mesma fórma quando se faz

$$y = \eta u(x), \quad \frac{d\xi}{du} = \eta(x).$$

---

*J. Ptaszycki. — Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale (Mathematische Annalen, t. XXXIII).*

N'esta Nota importante estende o sr. Ptaszycki aos integraes que dependem de uma raiz qualquer de um polynomio inteiro um theorema demonstrado pelo sr. Hermite para o caso dos integraes hyperellipticos, segundo o qual a reducção d'estes integraes á fórma normal póde ser effectuada por meio de operações algebricas.

---

*J. Ptaszycki. — Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques (Acta Mathematica, t. XI).*

N'este artigo appresenta o illustre geometra russo um theorema importante que lhe permitte resolver de um modo novo o problema que consiste em exprimir o integral $\int y\,dx$ ($y$ estando ligado a $x$ por uma equação algebrica) por meio de uma funcção algebrica de $x$, ou a mostrar que este integral não é algebrico.

---

*S. Pincherle.* — *Alcuni teoremi sulle frazioni continue (Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei, 1889).*

O auctor apresenta alguns criterios importantes para decidir da convergencia de algumas fracções continuas.

---

*Gino Loria.* — *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet (Bibliotheca Mathematica de G. Eneström, 1889).*

---

*G. Eneström.* — *Meddelande om Svedenborgs matematiska arbeten (Ofversigt af K. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar, 1889).*
—— *Bidrag till de matematiska studiernas historia i Sverige under femtonhundratalet (Stem).*

---

*Eduard Weyr.* — *O theorii forem bilinearnych.* — *Praze, 1889.*

---

*Notice sur les travaux scientifiques et littéraires de Aristide Marre.* — *Rome, 1889.*

---

*G. B. Guccia.* — *Su una proprietà delle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque (Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei, 1889.*

—— *Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare, etc. (Item).*

—— *Nuovi teoremi sulle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. (Item).*

—— *Sopra un recente lavoro concernente la reduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III).*

—— *Sulla singularità composte delle curve algebriche piane. (Item).*

---

P. S. *Schoute.* — *Sur un théorème relatif à l'hessienne d'une forme binaire (Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo,* t. III).

---

G. *Humbert.* — *Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. III).

---

H. G. *Zeuthen.* — *Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du seconde ordre (Acta Mathematica,* t. XII).

---

E. de *Longchamps.* — *Sur les égalités à deux degrés (Journal des Mathématiques élémentaires, 1889).*

—— *Sur le cercle de Joachimstal (Mathesis,* t. XII).

---

F. *Engel.* — *Zur invariantentheorie der Systeme von Pfaffs'schen Gleichungen (Berichten der Königl. Sächs Gesellschaft der Wissenschaften, 1889).*

---

M. *Lerch.* — *Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles (Comptes rendus des séances de la Societé royale des Sciences de Bohéme, 1889).*

*S. Pincherle.* — *Di un' estensione dell' algoritmo delle frazione continua* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie 2.ª, vol. XXII).

---

*C. Pelz.* — *Herr Küpper und der Pohlke' sche Beweis der Satres von Pohlke, Graz, 1889.*

---

*E. Cesàro.* — *Contribution à la théorie des limites* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XIII).

---

*L. Burmester.* — *Kinematische Untersuchung der Mechanismen mit Bandtrieb* (*Civil-ingenieur*, t. XXXV).

G. T.

# DUAS FORMULAS DE ANALYSE

POR

José Bruno de Cabedo

(Professor na Universidade de Coimbra)

Sejam $F(x)$, $F_1(x)$ expressões finitas e determinadas, e $f'(z)$, $f'_1(z)$ funcções que gozam da mesma propriedade no intervallo de $x$ a $x+h$.

Se, além d'isto, a equação $F_1(x)+hf'_1(z)=0$ não tem raiz alguma dentro do intervallo considerado, ter-se-ha

$$\frac{F(x)+f(x+h)-f(x)}{F_1(x)+f_1(x+h)-f_1(x)}=\frac{F(x)+hf'(x+\theta h)}{F_1(x)+hf'_1(x+\theta h)},$$

designando por $\theta$ uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Com effeito, fazendo

$$\frac{F(x)+f(x+h)-f(x)}{F_1(x)+f_1(x+h)-f_1(x)}=A,$$

a consideração da funcção

$$\begin{aligned}\psi(z) &= F(x)+f(z+h)-f(z)-A\,[F_1(x)+f_1(z+h)-f_1(z)]\\ &= F(x)-A\,F_1(x)+f(z+h)-A\,f_1(z+h)-f(z)+A\,f_1(z)\\ &= F(x)-A\,F_1(x)+h\,[f'(z+\theta h)-A\,f'_1(z+\theta h)]\end{aligned}$$

dá, pondo $z=x$ e notando que é $\psi(x)=0$,

$$A=\frac{F(x)+hf'(x+\theta h)}{F_1(x)+hf'_1(x+\theta h)}.$$

A proposição correspondente no calculo integral enuncia-se da maneira seguinte:

Sejam $F(x)$, $F_1(x)$ expressões finitas e determinadas e $f(z)$, $f_1(z)$ funcções que gozam da mesma propriedade no intervallo de $x$ a $x+h$.

Se, além d'isto, a equação $F_1(x)+hf_1(z)=0$ não tem raiz alguma dentro do intervallo considerado, ter-se-ha

$$\frac{F(x)+\int_x^{x+h} f(z)\,dz}{F_1(x)+\int_x^{x+h} f_1(z)\,dz}=\frac{F(x)+hf(x+\theta h)}{F_1(x)+hf_1(x+\theta h)}, \ldots \quad (1)$$

designando por $\theta$ uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Para dar uma applicação da formula que acabamos de deduzir, consideremos as equações

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\ldots\\ &+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^n(t)\,dt\\ F(x)&=F(x_0)+(x-x_0)F'(x_0)+\ldots\\ &+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{m-1}(x_0)+\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m-1}F^m(t)\,dt \end{aligned}\right\} . \quad (2)$$

das quaes se tira

$$\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^l}{l!}f^l(x_0)}{F(x)-F(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^k(x_0)}=$$

$$=\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!}f^{l+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^n(t)\,dt}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{k+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{m-1}(x_0)+\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{m-1}F^m(t)\,dt}$$

ou

$$\frac{f(x)-f(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^l}{l!}f^l(x_0)}{F(x)-F(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^k(x_0)}=$$

$$\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!}f^{l+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^n[x_0+\theta(x-x_0)]}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{k+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{m-1}(x_0)+\frac{(x-x_0)^m}{(m-1)!}(1-\theta)^{m-1}F^m[x_0+\theta(x-x_0)]}.$$

Verificadas as condições que permittem fazer uso das equações (1), (2), acha-se assim demonstrada a notavel formula descoberta pelo illustre redactor d'este jornal (*).

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª serie, tomo v.

# SOBRE AS FUNCÇÕES ELLIPTICAS

POR

JOSÉ PEDRO TEIXEIRA

## I

### As funcções duplamente periodicas ordinarias

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \varphi(x, z) = \dfrac{\pi}{K} \Sigma_n \operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{K}(x - z - 2niK') \\[2ex] \qquad = \dfrac{2\pi i}{K} e^{\frac{\pi i}{K}(x-z)} \Sigma_n \dfrac{q^{2n}}{e^{\frac{2\pi i}{K}(x-z)} - q^{4n}}, \end{cases}$$

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \psi(x, z) = \dfrac{\pi}{iK'} \Sigma_n \operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{iK'}(x - z - 2nK) \\[2ex] \qquad = \dfrac{2\pi}{K'} e^{\frac{\pi}{K'}(x-z)} \Sigma_n \dfrac{q_1^{2n}}{q_1^{4n} e^{\frac{2\pi}{K'}(x-z)} - 1}, \end{cases}$$

onde $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, $q_1 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$, considerando $z$ como variavel, têm, no interior do parallelogrammo dos periodos, a primeira os infinitos $x$, $x + K$, e a segunda $x$, $x + iK'$, aos quaes correspondem, n'uma e n'outra, os residuos $-1$, $+1$.

Seja $F(z)$ uma funcção duplamente periodica, e tomem-se os productos $F(z)\varphi(x, z)$, $F(z)\psi(x, z)$ que têm evidentemente a mesma propriedade.

Suppondo que são $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ os infinitos de $F(z)$, no interior do parallelogrammo acima considerado, e $p_1, p_2, \ldots, p_m$ seus graus de multiplicidade, o theorema de Liouville, applicado áquelles productos, dá immediatamente

$$(3)\ldots\quad F(x)-F(x+K)=\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}{}_g\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}d_{\beta_j}{}^{g-1}\varphi(x,\beta_j),$$

$$(4)\ldots\quad F(x)-F(x+iK')=\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}{}_g\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}d_{\beta_j}{}^{g-1}\psi(x,\beta_j).$$

As propriedades indicadas pelas equações que acabamos de achar pertencem a todas as funcções duplamente periodicas de primeira especie.

Em particular, se $F(x)$ satisfizer a

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad F(x+K)=-F(x),$$

a equação (3) torna-se em

$$(6)\ldots\ldots\quad F(x)=\frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}{}_g\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}d_{\beta_j}{}^{g-1}\varphi(x,\beta_j);$$

se satisfizer a

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad F(x+iK')=-F(x),$$

a equação (4) torna-se em

$$(8)\ldots\ldots\quad F(x)=\frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}{}_g\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}d_{\beta_j}{}^{g-1}\psi(x,\beta_j);$$

e se satisfizer a

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \left\{\begin{aligned}&F(x+K)=\pm\frac{1}{F(x)},\\&F(x+iK')=\mp\frac{1}{F(x)},\end{aligned}\right.$$

as equações (3) e (4) dão

$$(10)\ldots\quad F(x)=\frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}{}_g\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}d_{\beta_j}^{g-1}\left[\varphi(x,\beta_j)+\psi(x,\beta_j)\right].$$

Encontram-se muitas funcções duplamente periodicas pertencentes ás tres classes caracterisadas pelas equações (5), (7) e (9), as quaes poderão, conseguintemente, ser desenvolvidas em series trigonometricas de senos e cosenos, ou em series de exponenciaes pelas formulas que apresentamos.

## II

Tomemos para exemplos as tres funcções

$$\frac{dnx}{snx\,cnx}=F(x),\quad \frac{snx}{cnx\,dnx}=F_1(x),\quad \frac{cnx}{snx\,dnx}=F_2(x).$$

Estas funcções satisfazem respectivamente ás equações (5), (7) e (9). A primeira tem os infinitos $o$, K, aos quaes correspondem os residuos $\frac{k\theta_1\theta}{\eta_1\eta'}$, $-\frac{k\theta_1\theta}{\eta_1\eta'}$; a segunda tem os infinitos K, $K+iK'$ e os residuos $-\frac{\theta_1\eta_1}{k'\theta\eta'}$, $\frac{\theta_1\eta_1}{k'\theta\eta'}$; a terceira tem os infinitos $o$, $K+iK'$ e os residuos $\frac{\eta_1\theta}{\theta_1\eta'}$, $-\frac{\eta_1\theta}{\theta_1\eta'}$ (*). As formulas (6), (8) e (10) dão

$$F(x)=\frac{k\theta_1\theta\pi}{2\eta_1\eta' K}\left[\Sigma_n\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}(x-2niK')}-\Sigma_n\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}(x-K-2niK')}\right]$$

$$(11)\ldots\ldots\quad F(x)=\frac{k\theta_1\theta\pi}{\eta_1\eta' K}\Sigma_n\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}(x-2niK')};$$

(*) $k$ é o *modulo;* $k'$ o *modulo complementar;* e $\theta$, $\eta$ representam $\Theta(o)$, $\mathrm{H}(o)$.

$$F_1(x)=\frac{\theta_1\varkappa_1\pi}{k'\theta\varkappa'K'}\left[-\frac{q_1^{2n}e^{\frac{\pi}{K'}(x-K)}}{q_1^{4n}e^{\frac{2\pi}{K'}(x-K)}-1}+\frac{q_1^{2n}e^{\frac{\pi}{K'}(x-K-iK')}}{q_1^{4n}e^{\frac{2\pi}{K'}(x-K-iK')}-1}\right],$$

$$(12)\ldots\ldots\; F_1(x)=\frac{2\theta_1\varkappa_1\pi}{k'\theta\varkappa'K'}\Sigma_n\frac{e^{\frac{\pi x}{K'}}q_1^{2n+1}}{1-e^{\frac{2\pi x}{K'}}q_1^{2(n+1)}};$$

$$F_2(x)=\frac{\varkappa_1\theta\pi}{2\theta_1\varkappa'K}\left[\Sigma_n\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}(x-2niK')}+\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}[x-(2n+1)iK']}\right]$$

$$+\frac{\varkappa_1\theta\pi}{\theta_1\varkappa'K'}\left[\Sigma_n\frac{e^{\frac{\pi x}{K'}}q_1^{2n}}{e^{\frac{2\pi x}{K'}}q_1^{4n}-1}+\Sigma_n\frac{e^{\frac{\pi x}{K'}}q_1^{2n+1}}{e^{\frac{2\pi x}{K'}}q_1^{4n+2}-1}\right],$$

$$(13)\ldots\; F_2(x)=\frac{\varkappa_1\theta\pi}{2\theta_1\varkappa'K}\Sigma_n\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}(x-niK')}-\frac{\varkappa_1\theta\pi}{\theta_1\varkappa'K'}\Sigma_n\frac{e^{\frac{\pi x}{K'}}q_1^{n}}{1-e^{\frac{2\pi x}{K'}}q_1^{2n}}.$$

Empregando as operações conhecidas, facilmente de (11) deduziriamos

$$F(x)=\frac{k\theta_1\theta\pi}{\varkappa_1\varkappa'k}\left\{\operatorname{cosec}\frac{\pi x}{K}+\right.$$

$$\left.+4\operatorname{sen}\frac{\pi x}{K}\sum_1^{\infty}{}_n\, q^{2n}\left[1+\sum_1^{\infty}{}_m\, q^{4mn}\left(1+\sum_1^{m}{}_\mu \cos\frac{2\mu\pi x}{K}\right)\right]\right\}.$$

As formulas (12) e (13) podem tambem escrever-se dos seguintes modos:

$$F_1(x) = \frac{2\theta_1 \eta_1 \pi}{k' \theta \eta' K'} \Sigma_n \sum_{1}^{\infty}{}_m e^{\frac{(2m+1)\pi x}{K'}} q_1^{(2m+1)(2n+1)},$$

$$F_2(x) = \frac{\eta_1 \theta \pi}{2\theta \eta' K} \Bigg\{ \operatorname{cosec} \frac{\pi x}{K} +$$

$$+ 4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{K} \sum_{1}^{\infty}{}_n q^n \left[ 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_m q^{2mn} \left( 1 + \sum_{1}^{m}{}_\mu \cos \frac{2\mu\pi x}{K} \right) \right] \Bigg\}$$

$$- \frac{\eta_1 \theta \pi}{\theta_1 \eta' K'} \Sigma_n \sum_{0}^{\infty}{}_m e^{\frac{(2m+1)\pi x}{K'}} q^{(2m+1)n}.$$

# APPLICAÇÕES DE UMA FORMULA QUE DÁ AS DERIVADAS DE ORDEM QUALQUER DAS FUNCÇÕES DE FUNCÇÕES

POR

F. Gomes Teixeira

Sejam dadas as funcções

$$y=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

A formula que vamos applicar é a seguinte:

$$(1) \qquad y^{(n)}=\Sigma \frac{n!\dfrac{d^i y}{du^i}(u')^a (u'')^b \dots (u^{(n)})^l}{a!b!\dots l!(2!)^b \dots (n!)^l}$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+3c+\dots+nl=n,$$

e onde é

$$i=a+b+\dots+l.$$

N'um artigo publicado no tom. VII (pag. 150) d'este jornal mostrámos como se podiam deduzir d'esta formula algumas formulas conhecidas de analyse, que é costume obter por processos diversos. Aqui vamos junctar a estas applicações as duas seguintes.

## I

## Formula de Waring

Seja

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

uma equação dada e sejam $x_1, x_2, \dots, x_m$ as $m$ raizes d'esta equação.

Por ser

$$U = A_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$$

temos

$$\log U = \log A_0 + \sum_1^m \log (x - x_\omega),$$

e portanto, derivando esta egualdade $n$ vezes relativamente a $x$,

$$\frac{d^n \log U}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_1^m \frac{1}{(x - x_\omega)^n},$$

o que dá

$$\sum_1^m \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n \log U}{dx^n}.$$

D'esta egualdade deduziu o sr. M. d'Ocagne, empregando uma das expressões conhecidas que dão a derivada de ordem $n$ de uma funcção de funcção (*), uma formula que dá a somma das potencias semelhantes das raizes da equação proposta em funcção dos coefficientes da equação. Empregando para o mesmo fim a formula (1) obtem-se a formula de Waring, como vamos ver.

Por ser

$$U^{(m+1)} = 0, \quad U^{(m+2)} = 0, \text{ etc.},$$

(*) *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, tomo VII, pag. 133.

a derivada de ordem $n$ de $\log U$ é dada pela formula

$$\frac{d^n \log U}{dx^n} \Sigma (-1)^{i-1} \cdot \frac{n!\,(i-1)!\,U^{-i}\,U'^a \ldots U^{(m)l}}{a!\,b! \ldots l!\,(2!)^b \ldots (m!)^l},$$

e portanto temos

$$\Sigma \frac{1}{(x-x_\omega)^n} = (-1)^n n \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(i-1)!\,U^{-1}\,U'^a\,U''^b \ldots}{a!\,b! \ldots l!\,(2!)^b \ldots (m!)^l},$$

e, pondo $x=0$,

$$\Sigma \frac{1}{x_n{}^\omega} = n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\,U_0{}^{-i}\,U_0'^a \ldots U_0{}^{(m)l}}{a!\,b! \ldots l!\,(2!)^b \ldots (m!)^l}.$$

Temos porém

$$U_0 = A_m,\ U_0' = A_{m-1},\ U_0'' = 2!\,A_{m-2},$$

$$U_0''' = 3!\,A_{m-3},\ \ldots,\ U_0{}^{(m)} = m!\,A_0.$$

Logo

$$\Sigma \frac{1}{x_\omega{}^n} = n(-1)^i \frac{(i-1)!\,A_m{}^{-1}\,A^a{}_{m-1} \ldots A_0{}^l}{a!\,b! \ldots l!}.$$

Applicando agora esta formula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *formula de Waring*

$$\sum_{\omega=1}^{m} x_\omega{}^n = n \Sigma (-1)^i \frac{(i-1)!\,A_0{}^{-i}\,A_1{}^a \ldots A_m{}^l}{a!\,b! \ldots l!}$$

onde $a, b, \ldots, l$ são as soluções inteiras positivas da equação

$$a+2b+\ldots+ml=n,$$

e onde é

$$i=a+b+\ldots+l.$$

II

## Desenvolvimento de sen $n\varphi$ segundo as potencias de cos $\varphi$

Consideremos a funcção

$$y=\operatorname{arc\,tang} x.$$

Derivando-a uma vez vem

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Derivando agora $n-1$ vezes $y'$ por meio da formula (1), onde se deve pôr

$$y=u^{-1},\ u=1+x^2,$$

vem

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i.\frac{(n-1)!\,i!\,(2x)^a(1+x^2)^{-1-i}}{a!\,b!}$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$a+2b=n-1,$$

e onde é

$$i=a+b;$$

e portanto

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,\Sigma(-1)^\beta\frac{(n-1-2)!}{(n-1-2\beta)!\,\beta!}$$
$$\times(2x)^{n-1-2\beta}(1+x^2)^{\beta-n},$$

ou

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\Sigma(-1)^{\beta}\binom{n-1-\beta}{\beta}$$

$$\times(2x)^{n-1-2\beta}(1+x^2)^{\beta-n},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de $\beta$ desde zero até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$, se $n$ é par, e até $\frac{n-1}{2}$, se $n$ é impar.

Por outra parte, pondo

$$x = \cot\varphi$$

temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{sen}^2\varphi,$$

e portanto

$$y' = \frac{1}{1+\cot^2\varphi} = \operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$y'' = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$y''' = -2\operatorname{sen}\varphi(\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}2\varphi\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dx}$$

$$= -2\operatorname{sen}^3\varphi\operatorname{sen}3\varphi.$$

Continuando as derivações acha-se, por inducção, a lei seguinte:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\operatorname{sen}^n\varphi\operatorname{sen}n\varphi.$$

Para a demonstrar derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,n(\operatorname{sen}^{n-1}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}n\varphi + \operatorname{sen}^n\varphi\cos n\varphi)\frac{d\varphi}{dx}$$

$$= (-1)^n n!\operatorname{sen}^{n+1}\varphi\operatorname{sen}(n+1)\varphi.$$

Logo se a lei é verdadeira para a derivada de ordem $n$, tambem é verdadeira para a derivada de ordem $n+1$. Como se viu, porém, directamente que é verdadeira para as tres primeiras derivadas, segue-se que é geral.

Comparando agora as duas expressões de $y^{(n)}$, que vimos de achar, temos a egualdade

$$\operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen}\varphi \,\Sigma\,(-1)^{\beta}\binom{n-1-\beta}{\beta}(2\cos\varphi)^{n-1-2\beta},$$

que pretendiamos achar.

## CONGRESSO INTERNACIONAL DE BIBLIOGRAPHIA DAS SCIENCIAS MATHEMATICAS

Nos dias 16, 17, 18 e 19 de julho de 1889 reuniu-se em Paris um Congresso internacional de Bibliographia das sciencias mathematicas, com o fim de discutir um projecto de publicação de um reportorio bibliographico d'estas sciencias. Uma commissão, presidida pelo sr. Poincaré, membro do Instituto, tinha antecipadamente preparado o projecto de classificação a seguir no reportorio bibliographico. Este projecto foi discutido no Congresso nos dias 16, 17 e 18; e no dia 19 foram tomadas as resoluções seguintes:

### Resoluções votadas pelo Congresso

O Congresso internacional de Bibliographia das sciencias mathematicas, reunido em Paris a 19 de julho de 1889, toma as resoluções seguintes:

1.ª Convém publicar um repertorio bibliographico das sciencias mathematicas, destinado a poupar aos estudiosos longas e penosas indagações. Este repertorio deverá conter os titulos das memorias relativas ás mathematicas puras e applicadas, publicadas desde 1800 até 1889 inclusivamente, assim como dos trabalhos relativos á historia das mathematicas desde 1600 até 1889 inclusivamente. Estes titulos serão classificados não pelos nomes dos auctores, mas pela ordem logica das materias.

2.ª Serão publicados successivamente supplementos a este repertorio; o primeiro será consagrado aos trabalhos publicados desde 1889 exclusivamente até 1899 inclusivamente, e os supplementos seguintes aos periodos de dez annos que se seguirão. Em cada supplemento, as omissões descobertas no repertorio ou nos supplementos precedentes serão reparadas.

3.ª São excluidas do repertorio as obras classicas que não contiverem resultados originaes e destinadas aos alumnos dos diversos estabelecimentos de instrucção e aos candidatos aos diversos exames. Serão egualmente excluidas as memorias publicadas nas collecções scientificas especialmente destinadas a estes candidatos. Todavia, como diversas collecções scientificas apresentam um caracter mixto e contêem, ao lado de numerosos exercicios que não podem ser uteis senão aos estudantes, alguns trabalhos originaes, estes ultimos trabalhos serão mencionados no repertorio depois de a escolha ter sido feita pela administração d'estas collecções e a commissão permanente instituida pela decima resolução ter dado parecer favoravel.

4.ª Os trabalhos relativos ás mathemathicas applicadas não deverão ser mencionadas no repertorio, excepto quando elles interessem os progressos das mathematicas puras. Os trabalhos relativos á astronomia, já mencionados na *Bibliographia* de Houzeau e Lancaster, são excluidos do repertorio.

5.ª O Congresso adopta para o repertorio a classificação proposta pela sua commissão de organisação, com as modificações votadas nas sessões de 17 e 18 de julho de 1889. Os diversos titulos mencionados serão repartidos em um certo numero de classes, subdivididas em subclasses, divisões, secções e subsecções. As classes serão designadas por uma letra maiuscula: ellas poderão ser subdivididas em subclasses designadas por uma lettra maiuscula affectada de um expoente. As classes ou subclasses subdividem-se em divisões designadas por um algarismo arabe, e estas em secções designadas por uma lettra minuscula latina, as quaes poderão ainda ser divididas em subsecções representadas por uma lettra minuscula grega. Assim, a subsecção $\alpha$ da secção $b$, fazendo parte da divisão 3 da subclasse $L^1$, será notada assim

$$\boxed{L^1\,3\,b\,\alpha}\,.$$

6.ª Os titulos dos trabalhos escriptos n'outras linguas que não sejam a allemã, a ingleza, a italiana, a hespanhola e a latina serão seguidos da sua traducção franceza.

7.ª Attendendo a que poderá acontecer que por uma razão qualquer um sabio entenda dever adoptar um modo differente de classificação, o Congresso faz votos para que este sabio empregue uma notação que não possa ser confundida com a descripta na quinta resolução, e evite em todo o caso o emprego do rectangulo figurado acima.

8.ª Attendendo a que o trabalho do repertorio levará ainda muitos annos, e que importa fornecer aos indagadores novos instrumentos no mais curto praso possivel, o Congresso faz votos para que as diversas publicações periodicas consagradas ás mathematicas publiquem uma taboa geral das materias contidas nos seus volumes, conformando-se com a classificação adoptada acima. O Congresso será muito agradecido aos administradores d'estas publicações se prestarem, quanto poderem, o seu concurso, para esta classificação, á Commissão permanente.

9.ª Para facilitar o estabelecimento dos supplementos consagrados aos trabalhos posteriores a 1889, o Congresso faz votos para que cada auctor faça seguir o titulo da sua memoria da notação definida na quinta resolução; que se o auctor deixou de o fazer, os administradores das diversas publicações periodicas, ou, quando estes o não fizerem, os redactores das publicações analyticas que derem noticia d'estes trabalhos, queiram encarregar-se d'este cuidado.

10.ª É instituida uma Commissão permanente para velar pela execução das resoluções precedentes. Ella é composta dos membros francezes: srs. Poincaré, Désiré André, Humbert, d'Ocagne, Charles Henry; e dos membros extrangeiros: srs. Catalan, Bierens de Haan, Glaisher, Gomes Teixeira, Holst, Valentin, Emile Weyr, Guccia, Eneström, Gram, Liguine, Stephanos. A séde da Commissão permanente é em Paris, onde deverão residir o presidente e o secretario. Se se derem vagaturas n'esta Commissão, deve ella completar-se escolhendo novos membros; ella é egualmente auctorisada a aggregar novos membros em numero qualquer. Esta Commissão resolverá a respeito das addições á classificação adoptada que os progressos da sciencia poderão tornar necessarios e a respeito das difficuldades a que der origem a interpretação das resoluções precedentes. No caso de, por uma razão qualquer, lhe parecer necessaria uma nova conferencia entre os mathematicos dos diversos paizes, a Commissão organisará um novo Congresso internacional, ou em Paris, ou n'outra qualquer cidade da Europa.

11.ª O Congresso faz votos para que tanto em França como no extrangeiro os diversos jornaes mathematicos dêem a maior

10

publicidade ás precedentes resoluções e ás decisões futuras da Commissão permanente.

---

Um resumo das actas do Congresso, contendo as resoluções precedentes e a classificação das questões do dominio das sciencias mathematicas approvada pelo Congresso, vem de ser publicado em um opusculo.

## BIBLIOGRAPHIA

*G. de Longchamps.* — *Essai sur la Géometrie de la règle et de l'équerre.* — *Paris, 1890.*

O objecto que o auctor tem em vista n'esta obra é resolver, usando só da régoa ou da régoa e do esquadro, muitos problemas pertencentes á Geometria practica.

Comprehendo-se facilmente a vantagem que ha em estudar os methodos de resolver certos problemas de Geometria por meio de determinados instrumentos. Nas applicações d'esta sciencia tem, com effeito, de se attender aos instrumentos de que se dispõe para esta resolução, visto que, em certas circumstancias materiaes, se é obrigado a resolver os problemas geometricos que apparecem usando só dos instrumentos de que se dispõe ou que são applicaveis n'essas circumstancias.

A obra consta de duas partes. Na primeira o auctor apresenta os principios theoricos de que tem necessidade. Na segunda tracta da applicação d'estes principios a muitos problemas de agrimensura e arte da guerra.

A primeira parte abre por uma introducção historica, em que o sr. Longchamps dá noticia dos trabalhos de Geometria, publicados anteriormente, que têem relação com o assumpto de que se occupa, referindo-se mais desenvolvidamente ás *Solutions peu connues de différents problèmes de géometrie pratique,* de Servois, livro que, como o auctor diz, mais se approxima do seu. Em seguida vem uma série de theoremas relativos á theoria das transversaes, muitos dos quaes são objectos de generalisações e desenvolvimentos novos da parte do sr. Longchamps, e que fazem objecto dos capitulos 1.° e 2.°

Nos capitulos seguintes tracta o auctor dos problemas fundamentaes na geometria da régoa e do esquadro; tracta dos methodos para dividir uma recta em partes eguaes; tracta do traçado das conicas e das tangentes e das normaes a estas curvas; do traçado de algumas cubicas (cissoide, estrophoide, tricetriz de Maclaurin, folium de Descartes, serpentina, tridente de Newton, cubica de Agnesi, cubicas parabolicas e hyperbolicas, etc.); tracta das curvas do quarto gráo unicursaes, e, em particular, do folium duplo, do caracol de Pascal, da lemniscata, do trifolium recto, do folium simples, etc. (capitulos 3.º a 12.º).

Na segunda parte tracta primeiramente o sr. Longchamps dos problemas de agrimensura, occupando-se do problema que tem por fim determinar a largura d'um rio, do problema que tem por fim prolongar uma recta além d'um obstaculo, do problema que tem por fim determinar a distancia de um ponto accessivel a um ponto inaccessivel, do problema que tem por fim achar a distancia de dois pontos inaccessiveis, e de varios problemas relativos a pontos, rectas e figuras inaccessiveis.

De todos estes problemas apresenta o auctor mais do que uma solução, visto que, como elle bem diz, quando se opéra sobre o terreno, as condições materiaes que são exigidas a uma solução podem tornal-a completamente illusoria.

As applicações precedentes são tractadas nos capitulos 1.º a 8.º Os capitulos seguintes (9.º a 10.º) são destinados a problemas de artilheria, a diversos problemas relativos a um ponto inaccessivel no espaço, etc.

Limitar-nos-hemos a estas rapidas indicações sobre o bello livro do sr. Longchamps, cuja leitura é das mais attrahentes e proveitosas.

---

*Memoria sobre a determinação das coordenadas geographicas do Observatorio do Castello de S. Jorge, em Lisboa.— Lisboa, 1890.*

O Observatorio do Castello de S. Jorge, em Lisboa, é o ponto d'onde se observou o primeiro azimuth da triangulação portugueza, e por isso tem-se procurado determinar com a maior exactidão possivel as suas coordenadas geographicas. Estas coordenadas foram determinadas primeiramente por meio de observações directas pelo dr. Ciera no fim do seculo passado, e depois pelo general Folque em 1837; e mais tarde foram determinadas indirectamente, deduzindo-as das coordenadas do Observatorio da Marinha e do Observatorio astronomico de Lisboa, com os quaes se ligou o Observatorio do Castello de S. Jorge por meio de pequenas triangulações. Tendo-se encontrado algumas discordancias nos valores obtidos para a latitude d'este Observatorio pelos meios que vimos de mencionar, resolveram os geodesicos portuguezes determinar de novo por meio de observações directas as coordenadas d'este ponto geodesico importante. A presente *Memoria* contém os resultados d'estas observações, que foram feitas nos intervallos de 10 de maio de 1886 a 14 de junho do mesmo anno, e de maio de 1888 a maio de 1889 pelos srs. Brito Limpo, Fernando Costa e A. J. d'Avila.

Abre a Memoria uma noticia historica sobre as determinações anteriores das coordenadas que se pretendem achar. Vem depois a descripção e determinação das constantes do instrumento empregado nas novas observações feitas em 1886 e 1888 a 1889, que foi um theodolito de Repsold; a descripção e apreciação dos methodos empregados para determinar a latitude, que foram o methodo das distancias zenithaes e o das passagens pelo primeiro vertical; as taboas das observações, etc. Segue-se uma serie de taboas contendo o valor da latitude correspondente a cada observação e as medias correspondentes ás observações feitas no mesmo dia com a mesma estrella. Finalmente vem a discussão de todas estas observações que levou a tomar para valor da latitude pedida o numero $30^\circ.42'.43'',631 \pm 0'',036$.

O resto da Memoria refere-se ao azimuth do Observatorio do *Castello de S. Jorge — Serves*, e contém a descripção do methodo empregado para o determinar (methodo das digressões da polar) e uma serie de taboas contendo as observações que para esse fim se fizeram; refere-se á determinação da differença das longitudes entre este Observatorio e o Observatorio astronomico de Lisboa; e finalmente refere-se rapidamente á determinação da altitude do Observatorio do Castello.

---

*J. Neuberg. — Algunos sistemas de barras articuladas; trazado mecánico de las lineas (traduzido do francez para hespanhol por V. Balbin), Buenos Aires, 1890.*

Á serie dos trabalhos importantes que o sr. V. Balbin tem traduzido para hespanhol, com o intuito de ser util aos alumnos da Universidade de Buenos-Ayres, temos hoje de accrescentar aquelle cujo titulo vimos de enunciar.

Contém o presente opusculo uma conferencia feita pelo illustre professor da Universidade de Liège, sr. Neuberg, na *Associação dos alumnos das escholas especiaes*, annexas á Universidade de Liège, em que o auctor se occupa dos mais importantes systemas de barras articuladas e do traçado mecanico das curvas. Eis os pontos estudados: pantographos, inversores, apparelhos de Kempe, ellipsographos, conicographos, pedal de circumferencia, pedal de parabola, pedal de conica com centro, e compasso analagmatico.

---

*Ch. Hermite.* — *Sur les polynômes de Legendre* (*Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo*, tom. IV).

N'este artigo apresenta o grande geometra francez uma demonstração muito elegante das relações

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx \, \frac{2}{2n+1},$$

partindo do integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p \, dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}.$$

Depois mostra que as relações de Laplace e Jacobi

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n},$$

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi,$$

podem ser deduzidas muito facilmente da formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{At^2+Bt+C} = \frac{\varepsilon i\pi}{\sqrt{B^2-AC}},$$

demonstrada no seu *Cours d'Analyse* (pag. 289 e 290).

---

*G. Eneström.* — *Programme d'un Cours Universitaire d'histoire des mathématiques (Bibliotheca mathematica, 1890).*

O auctor, depois de expôr algumas considerações relativas ás vantagens de introduzir nos cursos universitarios a historia das mathematicas, e alguns conselhos sobre a orientação a dar a estes cursos para serem proveitosos, expõe um programma de um curso da historia das mathematicas em trinta lições.

Depois vem uma lista das obras e memorias mais importantes que se devem consultar para a redacção de cada lição.

---

*P. H. Schoute.* — *Sur les quadruples équianharmoniques ou harmoniques (Association française pour l'avancement des sciences, Paris, 1889).*

N'esta memoria importante o illustre professor da Universidade de Groningen extende alguns theoremas relativos aos quadruplos harmonicos e equianharmonicos a systemas de pontos e de curvas de ordem mais elevada do que as anteriormente consideradas. Assim, primeiramente procura a equação que determina os polos, cujos systemas polares biquadraticos relativamente a um systema de pontos dados formam um quadruplo harmonico ou equianharmonico. Depois procura a relação que liga os polos cujos systemas polares cubicos relativamente a um systema de pontos dados, combinados com o ultimo ponto polar de um outro polo relativamente a outro systema de pontos dados, formam um quadruplo harmonico ou equianharmonico. Continuando com questões analogas, combina depois dois systemas polares quadraticos relativamente a um systema de pontos com outro systema polar quadratico relativamente a outro systema de pontos; um systema polar quadrativo relativamente a um systema de pontos com os dois ultimos pontos polares de dois systemas polares quadraticos relativamente a dois systemas de pontos; etc. Cada theorema demonstrado é seguido de um problema interessante de Geometria, que se resolve por meio d'elle.

---

*H. Bentabal y Ureta.* — *Introduccion al estudio del Cálculo infinitesimal.* — *Madrid, 1890.*

Occupa-se o auctor n'este opusculo das definições e dos principios geraes que servem de base á analyse infinitesimal, considerando nos capitulos 1.° e 3.° a noção de numero e suas differentes especies, no capitulo 2.° a noção de limite, no capitulo 4.° a noção de funcção e a classificação das funcções, finalmente no capitulo 5.° os limites das funcções e os principios do methodo infinitesimal.

---

*Gaston Tarry.* — *Géométrie générale (Association pour l'avancement des sciences, Paris, 1889).*

Na Geometria analytica ha elementos visiveis correspondentes ás soluções reaes das equações, e elementos invisiveis correspondentes ás soluções imaginarias. O objecto que o sr. Tarry tem em vista na sua interessante memoria é constituir uma sciencia que permitta representar por symbolos visiveis os elementos visiveis e invisiveis de uma figura, e é a esta sciencia que chama *Geometria geral.* Para isso define as principaes entidades geometricas (ponto, linha recta, etc.) de modo que tanto as equações com coefficientes reaes como as equações com coefficientes imaginarias tenham representação geometrica.

---

*G. Peano.* — *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* t. XXI).

N'este trabalho apresenta o auctor uma demonstração muito simples e elegante do theorema relativo á existencia dos integraes da equação $y' = f(x, y)$, collocando-se n'um ponto de vista mais geral do que os geometras que anteriormente se tinham occupado d'este theorema, pois que impõe á funcção $f(x, y)$ unicamente a condição de ser continua.

---

*Geminiano Pirondini.* — *Di due superficie rigate che si presentano nello studio delle curve* (*Giornale de Battaglini*, t. XXVIII).

As superficies regradas consideradas são a superficie que é o logar geometrico das rectas que junctam os pontos de uma curva de dupla curvatura com os centros correspondentes das espheras osculadoras, e a superficie que é o logar geometrico das normaes principaes da mesma curva. O auctor apresenta uma serie de theoremas importantes, relativos principalmente á deformação das superficies e das linhas, em que figuram principalmente estas superficies.

---

*Emile Vigarié.* — *Esquisse historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle* (*Association française pour l'avancement des sciences*, 1889).

Contém este artigo um resumo muito interessante da historia do moderno ramo da Geometria, conhecido pelo nome de *Geometria do triangulo*, que tem sido objecto, nos ultimos annos, de tantos trabalhos importantes.

O auctor occupa-se primeiramente dos trabalhos anteriores a 1873, dando noticia dos principaes elementos do plano do triangulo até essa occasião considerados.

Depois considera o auctor os trabalhos posteriores a 1873, epocha a que, como elle diz, é necessario remontar para encontrar o germen de estudos seguidos e o cuidado de ajunctar e fazer concordar os resultados que se referem aos elementos notaveis do plano do triangulo.

Finalmente apresenta o sr. Vigarié um supplemento á noticia bibliographica das publicações relativas á Geometria do triangulo, publicada pelo sr. Lemoine em 1885.

---

*H. Burkhardt.* — *Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung* (*Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, etc., 1889*).

---

*P. H. Schoute.* — *Zum Normalen problem der Kegelschnitte* (*Sitzungsberichten der K. Akademie d. Wissenschaften in Wien, 1889*).

---

*G. Peano.* — *Sulla definizione dell' area d'una superficie* (*Rendiconti della R. Academia dei Lincei, 1890*).

— *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* (*Atti della R. Academia delle Scienze di Torino,* t. XXII).

— *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* (*Mathematische Annalen,* t. XXXVI).

— *Teoremi su massimi e minimi geometriche, e su normali a curve e superficie* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* t. II).

— *Sur les Wronskiens* (*Mathesis,* t. IX).

---

*G. Eneström.* — *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (*Bibliotheca mathematica, 1890*).

G. T.

# EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

## I

### Resto da formula de Taylor

Se uma funcção $f(x)$ admitte derivadas de ordem $1, 2, \ldots, n-1$, para todos os valores de $x$ comprehendidos entre $x_0$ e $x_0+h$, e admitte uma derivada de ordem $n$ para $x=x_0$, temos

$$(1) \quad f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^n(x_0)+\frac{h^n}{n!}\varepsilon$$

onde

$$(2) \quad \varepsilon=\frac{f^{n-1}(x_0+\theta h)-f^{n-1}(x_0)}{\theta h}-f^n(x_0)$$

$$0<\theta<1;$$

e a quantidade $\varepsilon$ tende para zero quando $n$ tende para o infinito.

Esta proposição, na qual não se suppõe nem a continuidade nem a existencia da derivada de ordem $n$ da funcção $f(x)$ na vizinhança do ponto $x=x_0$, é devida ao sr. Peano, professor na Universidade de Turin, que a achou notando que a fracção

$$\varepsilon=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\ldots-\frac{h^n}{n!}f^n(x_0)}{\frac{h^n}{n!}}$$

é a razão de duas funcções de $h$ que se annullam, assim como as suas derivadas de ordem $1, 2, \ldots, n-2$, para $h=0$; e portanto que $\varepsilon$ é egual á razão das derivadas de ordem $n-1$, para um valor de $h$ comprehendido entre 0 e $h$. Obteve assim a formula (2), a qual mostra que $\varepsilon$ tende para zero quando $h$ tende para zero.

[*G. Peano: Une nouvelle formule du reste dans la formule de Taylor* (*Mathesis*, t. IX)].

II

## Sobre o desenvolvimento das funcções em serie

Seja

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + R_n$$

uma relação verdadeira para todo o valor de $n$. Ter-se-ha tambem

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots + u_{n+p-1} + R_{n+p}.$$

Supponhamos que é

$$\lim_{n=\infty} (R_{n+p} - R_n) = 0,$$

qualquer que seja o valor inteiro que se dê a $p$. Não resultará d'aqui necessariamente

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

e portanto não se póde escrever

$$f(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + \text{etc.}$$

em serie infinita.

Exemplo. Se é $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, temos, como se sabe,

$$e^x + \varphi(x) = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \mathrm{R}_n,$$

$$\mathrm{R}_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} + \varphi(x), \quad \mathrm{R}_{n+p} = \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} e^{\theta_1 x} + \varphi(x),$$

$\theta$ e $\theta_1$ representando dois numeros comprehendidos entre zero e a unidade. Deduz-se d'aqui

$$\mathrm{R}_{n+p} - \mathrm{R}_n = \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} e^{\theta_1 x} - \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

e

$$\lim_{n=\infty} (\mathrm{R}_{n+p} - \mathrm{R}_n) = 0.$$

Mas é $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{R}_n = \varphi(x)$, e portanto não se póde escrever, em serie infinita,

$$e^x + \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \text{etc.}$$

A nota precedente não differe da de Cauchy relativamente á funcção $\varphi(x)$, mas a fórma é talvez nova.

[*J. Bruno de Cabedo: Sur le développement des fonctions en série* (*Mathesis*, t. x)].

III

## Rectificação approximada de um arco de circulo

Seja AM um arco de circulo menor do que um quadrante, cujo centro seja O; prolongue-se o raio AO de um comprimento OC igual ao diametro, de modo que seja AC = 3R, R representando o raio do circulo, e trace-se a recta CM.

Seja M′ o ponto de intersecção d'esta recta com a tangente no ponto A. A recta AM′ é sensivelmente egual ao arco AM.

Designe-se por $a$ a medida do arco AM em partes do raio R; teremos

$$\mathrm{AM}' = \frac{3 \operatorname{sen} a}{2+\cos a} \mathrm{R}.$$

Represente-se por $\varepsilon$R a differença arc AM — AM′; temos

$$\varepsilon = a - \frac{3 \operatorname{sen} a}{2+\cos a},$$

e, derivando $\varepsilon$ relativamente a $a$,

$$\varepsilon' = \frac{(1-\cos a)^2}{(2+\cos a)^2}.$$

Como esta derivada é sempre positiva, $\varepsilon$ augmenta quando $a$ varía desde 0 até $\frac{\pi}{2}$.

Para $a=\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - 1{,}5 < 0{,}0708.$

Para $a=\frac{\pi}{4}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2\sqrt{2}+1} < 0{,}00322 < \frac{1}{300}.$

Para $a=\frac{\pi}{6}$, $\varepsilon = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4+\sqrt{3}} < 0{,}00023 < \frac{1}{4000}.$

A differença entre AM′ e arc AM poderá desprezar-se, no ponto de vista do desenho, quando $\mathrm{R} < 1^{\mathrm{m}}$, se $a$ é menor do que $\frac{\pi}{6}$;

se $R < \frac{1^m}{10}$, a differença póde desprezar-se, se $a$ é menor do que $\frac{\pi}{4}$.

[*J. E. Pellet: Rectification approximative de l'arc de cercle* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1890).

## IV

## Sobre um theorema de Cauchy

Para que uma successão de valores $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tenda para um limite finito e determinado, é necessario e sufficiente que dado o numero positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeno, se possa determinar um certo indice $\nu$ a partir do qual se tenha

$$(1) \qquad | a_{n'} - a_{n''} | < \varepsilon$$

para todos os valores de $n'$ e $n''$ não inferiores a $\nu$.

Póde-se demonstrar do modo seguinte que a condição precedente é sufficiente.

Os numeros $a_1, a_2, a_3$, etc. podem ser representados por segmentos de uma recta. Tem-se, pois, um grupo de pontos que admittem um numero finito ou infinito de grupos derivados, cada um dos quaes póde ser constituido por um numero finito ou infinito de pontos limites. D'este modo a successão $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é decomponivel em um numero finito ou não de successões que tendem para um limite.

Considerem-se duas quaesquer d'estas successões:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

que tendem respectivamente para os limites $b$ e $c$.

Em virtude de (1) ter-se-ha

$$|b_{n'} - c_{n''}| < \varepsilon; \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} (b_{n'} - c_{n'}) = 0;$$

mas

$$\lim b_n = b, \quad \text{logo} \quad \lim c_n = b.$$

Logo todas as successões de numeros em que se póde decompôr a successão $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tendem para o mesmo limite.

[*Alberto La Maestra: Sopra un teorema di Cauchy* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVIII)].

# SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\sin n\varphi$ ET DE $\cos n\varphi$ SUIVANT LES PUISSANCES DE $\cos \varphi$

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira)

PAR

M. M. D'OCAGNE

... La seconde partie de l'intéressant article que vous venez de faire paraître dans votre Journal m'a fait penser à vous communiquer une méthode tout élémentaire dont je me suis servi pour obtenir le développement de $\sin n\varphi$ et de $\cos n\varphi$ suivant les puissances de $\cos \varphi$.

Posons

$$U_n = \alpha^n \sin n\varphi.$$

Nous avons

$$U_n + pU_{n-1} + qU_{n-2} = \alpha^{n-2} \sin n\varphi \,[\alpha^2 + \alpha p \cos \varphi + q \cos 2\varphi]$$

$$-\alpha^{n-2} \cos n\varphi \,[\alpha p \sin \varphi + q \sin 2\varphi].$$

Déterminons $\alpha$ et $\varphi$ par la double condition que

$$\alpha^2 + \alpha p \cos \varphi + q \cos 2\varphi = 0,$$

$$\alpha p \sin \varphi + q \sin 2\varphi = 0.$$

Nous en tirons

$$\cos \varphi = -\frac{p}{2q^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha = q^{\frac{1}{2}}.$$

Dès lors, si nous posons

$$u_n = \frac{2}{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}} U_n,$$

nous voyons que

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1,$$

$$u_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} = 0.$$

Par suite, d'après une formule connue [voyez *Nouvelles Annales,* 1884, p. 69, formule (8)]

$$u_n = (-1)^{n-1} \Sigma (-1)^i C^i_{n-1-i} p^{n-1-2i} q^i.$$

Et conséquemment,

$$\sin n\varphi = \frac{U_n}{\alpha_n} = \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}}{2} u_n$$

$$= \frac{(4q-p^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^{\frac{1}{2}}} \Sigma (-1)^i C^i_{n-1-i} \left(\frac{-p}{q^{\frac{1}{2}}}\right)^{n-1-2i}$$

$$= \sin\varphi\, \Sigma (-1)^i C^i_{n-1-i} (2\cos\varphi)^{n-1-2i}.$$

Le même méthode s'applique aussi heureusement pour cos $n\varphi$.

# NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECONDE ORDRE (*)

PAR

F. Gomes Teixeira

**1.** Je vais considérer l'équation aux dérivées partielles du seconde ordre

$$(1)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, et où l'on pose, suivant l'usage

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

M. Imschenetesky a fait voir, dans son *Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (pages 130 et 131 de la traduction par M. J. Hoüel), que cette équation peut être transformée dans une équation linéaire, quand on connait une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires.

Ensuite, en se basant sur les importants recherches sur la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles, publiées par Ampère dans les cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*, il fait voir que cette équation se simplifie consi-

(*) Este artigo foi por nós publicado no *Bulletin de la Société mathématique de France* (tomo XVII, pagina 125).

dérablement quand cette intégrale satisfait à un ou aux deux systèmes d'équations de la *caracteristique,* auxquels Monge et Ampère ramènent le problème de l'intégration de (1).

Comme la théorie de Ampère, qui ne se prête pas aisément à une exposition succinte, ne se trouve pas dans les Traités systématiques de Calcul intégral, je crois qu'il ne sera pas inutile de voir comme on obtient les mêmes résultats par des considérations directes. C'est le but que nous nous proposons dans cette Note.

**2.** Soit

$$z=\omega\,(x,\ y,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \tag{2}$$

une inrégrale particulier de (1) avec trois constantes arbitraires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Nous avons l'identité

$$H_1\frac{d^2\omega}{dx^2}+2K_1\frac{d^2\omega}{dx\,dy}+L_1\frac{d^2\omega}{dy^2}+M_1 \tag{3}$$

$$+N_1\left[\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d^2\omega}{dy^2}-\left(\frac{d^2\omega}{dx\,dy}\right)^2\right]=0$$

où $H_1$, $K_1$, $L_1$, $M_1$, $N_1$ représentent des fonctions de $\omega$, $x$, $y$, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d\omega}{dy}$.

M. Imschenetsky considère ensuite $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ comme variables et introduit en (1), au lieu de la variable dépendante $z$, la variable $\gamma$ déterminée par (2) et, au lieu des variables indépendantes $x$ et $y$, les variables $\alpha$ et $\beta$ déterminées par les équations

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d\omega}{d\alpha}+\frac{d\omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\\ &\frac{d\omega}{d\beta}+\frac{d\omega}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}=0.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour obtenir l'équation dans laquelle se transforme de cette manière l'équation proposée, on tire de (2)

$$p=\frac{d\omega}{dx},\quad q=\frac{d\omega}{dy}$$

$$r=\frac{d^2\omega}{dx^2}+\left(\frac{dp}{d\alpha}+\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dx}+\left(\frac{dp}{d\beta}+\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dx}$$

$$s=\frac{d^2\omega}{dx\,dy}+\left(\frac{dp}{d\alpha}+\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dy}+\left(\frac{dp}{d\beta}+\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dy}$$

$$t=\frac{d^2\omega}{dy^2}+\left(\frac{dq}{d\alpha}+\frac{dq}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dy}+\left(\frac{dq}{d\beta}+\frac{dq}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\frac{d\beta}{dy};$$

ensuite on substitue dans les expressions précédentes de $r$, $s$, $t$ les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$, $\frac{d\beta}{dy}$ que l'on tire des équations du premier dégré qui résultent de la différentiation des deux équations (4) par rapport à $x$ et à $y$; et enfin on substitue les valeurs qui résultent pour $r$, $s$, $t$ dans l'équation (1). On trouve de cette manière, ayant égard à (3), l'équation suivante:

$$\text{(5)}\qquad \mathrm{R}\frac{d^2\eta}{d\alpha^2}+2\mathrm{S}\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta}+\mathrm{T}\frac{d^2\eta}{d\beta^2}+\mathrm{U}=0,$$

où R, S, T, U sont des fonctions de $\alpha$, $\beta$, $\eta$ $\frac{d\eta}{d\alpha}$, $\frac{d\eta}{d\beta}$ données par les formules suivantes:

$$-\mathrm{R}=(\mathrm{H}+\mathrm{N}t_1)\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2$$

$$+2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s_1)\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)$$

$$+(\mathrm{L}+\mathrm{N}r_1)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2,$$

$$S = (H + Nt_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)$$

$$+ (K - Ns_1)\left[\left(\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right.$$

$$\left. + (L + Nr_1)\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right]$$

$$-T = (H + Nt_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2$$

$$+ 2(K - Ns_1)\left(\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)$$

$$+ (L + Nr_1)\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2$$

$$\frac{d\omega}{d\eta}U = N\left[\left(\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\right]^2$$

$$+ R\left[\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} + 2\frac{d^2\omega}{d\alpha\, d\beta}\frac{d\eta}{d\alpha} + \left(\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}\right)^2\left(\frac{d\eta}{d\alpha}\right)^2\right]$$

$$+ 2S\left[\frac{d^2\omega}{d\alpha\, d\beta} + \frac{d^2\omega}{d\alpha\, d\eta}\frac{d\eta}{d\beta} + \frac{d^2\omega}{d\eta\, d\beta}\frac{d\eta}{d\alpha} + \frac{d^2\omega}{d\eta^2}\frac{d\eta}{d\alpha}\frac{d\eta}{d\beta}\right]$$

$$+ T\left[\frac{d^2\omega}{d\beta^2} + 2\frac{d^2\omega}{d\beta\, d\eta}\frac{d\eta}{d\beta} + \frac{d^2\omega}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2\right],$$

où je pose, pour abreger,

$$p_1 = \frac{d\omega}{dx}, \quad q_1 = \frac{d\omega}{dy}, \quad r_1 = \frac{d^2\omega}{dx^2}, \quad s_1 = \frac{d^2\omega}{dx\,dy}, \quad t_1 = \frac{d^2\omega}{dy^2}.$$

**3.** Cela posé, j'entre dans le sujet de cette Note, c'est-à-dire, je vais considérer le cas où l'on obtient l'intégrale (2) au moyen d'une ou de deux intégrales intermédiaires particulières de (1), avec une constante arbitraire chacune.

Soit

$$f(x, y, z, p, q) = \alpha$$

une intégrale intermédiaire de (1) avec une constante arbitraire $\alpha$. On sait que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux équations qui résultent de l'élimination de deux des quantités $r$, $s$, $t$ entre (1) et les équations suivantes:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} p + \frac{df}{dp} r + \frac{df}{dq} s = 0 \\ & \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q + \frac{df}{dp} s + \frac{df}{dq} t = 0 \end{aligned} \right.$$

e que ces équations sont

$$\mathrm{P} = \mathrm{H}\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dq} - \mathrm{H}\frac{df}{dp}\left(\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz}\right)$$

$$-2\mathrm{K}\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dp} + \mathrm{M}\left(\frac{df}{dp}\right)^2 - \mathrm{N}\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz}\right) = 0.$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{H}\left(\frac{df}{dq}\right)^2 - 2\mathrm{K}\frac{df}{dp}\frac{df}{dq} + \mathrm{L}\left(\frac{df}{dp}\right)^2$$

$$-\mathrm{N}\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dq} - \mathrm{N}\left(\frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz}\right)\frac{df}{dp} = 0.$$

Soit maintenant l'équation (2) une intégrale particulière de (6) que l'on peut obtenir, comme on sait, par la méthode de Lagrange et Charpit. La valeur qu'il donne pour $z$ satisfait aux équations précédentes, et par conséquent satisfait aussi à l'équation suivante:

$$(8)\qquad (\mathrm{H}+\mathrm{N}t)\left(\frac{df}{dq}\right)^2-2(\mathrm{K}-\mathrm{N}s)\frac{df}{dp}\frac{df}{dq}$$
$$+(\mathrm{L}+\mathrm{N}r)\left(\frac{df}{dp}\right)^2=0,$$

qui résulte de l'élimination de

$$\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz},\quad \frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}$$

dans la seconde au moyen des équations (7).

Mais, en différentiant (6) par rapport à $\beta$ et considérant $z, p, q$ comme des fonctions de $\beta$ déterminées par (2), on trouve

$$\frac{df}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{d\beta}+\frac{d\omega}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)$$
$$+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0,$$

ou, en vertu des équations (4)

$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0.$$

En substituant maintenant dans l'expression de R la quantité

$$\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}$$

par sa valeur donnée par cette équation, on trouve

$$-\mathrm{R}=\frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)^2}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1 t_1)\left(\frac{df}{dq_1}\right)^2\right.$$

$$\left.-2(\mathrm{K}-\mathrm{N}_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\frac{df}{dq_1}+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1 r_1)\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2\right].$$

Donc, en vertu de la formule (8), nous avons $\mathrm{R}=0$, et l'équation (5) prend la forme simplifiée suivante:

$$2\mathrm{S}\frac{d^2\eta}{d\alpha\, d\beta}+\mathrm{T}\frac{d^2\eta}{d^2\beta}+\mathrm{U}=0.$$

**4.** Soient maintenant

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x, y, z, p, q)=\alpha\\ &\mathrm{F}(x, y, z, p, q)=\beta\end{aligned}\right.$$

deux intégrales intermédiaires de (1) avec deux constantes arbitraires $\alpha$ et $\beta$. Si chacune delles satisfait à un des deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, aux quels la methode de Monge ramène le problème de l'intégration de l'équation (1), ou à un des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, aux quels la methode de Boole ramène le même problème, on sait que les valeurs de $p$ et $q$ données par les équations (9) rendent

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

intégrable. De cette intégration résulte l'équation (2).

Dans ce cas, on voit, comme dans le cas antérieur, que $\mathrm{R}=0$. Ensuite, en éléminant dans l'expression de T la quantité

$$\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}.$$

au moyen de l'équation

$$\frac{dF}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)+\frac{dF}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)=0,$$

et ayant égard à l'équation qui résulte du changement dans (8) de $f$ en F, on voit aussi que $T=0$.

L'équation (5) prend donc la forme suivante:

$$2S\frac{d^2\eta}{d\alpha\, d\beta}+U=0.$$

**5.** Soit maintenant

$$K^2-HL+MN=0,$$

ce qui arrive quand les deux systèmes d'équations de la *caractéristique* coïncident, et soit encore

$$f(x,y,z,p,q)=\alpha,$$

une intégrale particulière de (1) avec une constante arbitraire $\alpha$.

En différentiant cette équation par rapport à $\alpha$ et à $\beta$, considérant $z, p, q$ comme des fonctions de $\alpha$ et $\beta$ déterminées par (2), et ayant égard à (4), on trouve

$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)=0,$$

$$\frac{df}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)+\frac{df}{dq_1}\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)=1.$$

En substituant ensuite dans l'expression de **S** les valeurs que ces équations donnent pour

$$\frac{dp_1}{d\beta}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta},$$

$$\frac{dp_1}{d\alpha}+\frac{dp_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha},$$

on trouve

$$\mathrm{S}=\frac{\left(\frac{dq_1}{d\alpha}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha}\right)\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}$$

$$\times\left[(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1 t_1)\left(\frac{df}{dq_1}\right)^2\right.$$

$$\left.-2(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\frac{df}{dq_1}+(\mathrm{L}_1+\mathrm{N}_1 r_1)\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2\right]$$

$$+\frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[-(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1 t_1)\frac{df}{dq_1}+(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\right],$$

et par conséquent, en vertu de (8),

$$\mathrm{S}=\frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta}+\frac{dq_1}{d\eta}\frac{d\eta}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2}\left[-(\mathrm{H}_1+\mathrm{N}_1 t_1)\frac{df}{dq_1}+(\mathrm{K}_1-\mathrm{N}_1 s_1)\frac{df}{dp_1}\right].$$

Mais l'équation (8) donne

$$\frac{df}{dq}=\frac{\mathrm{K}-\mathrm{N}s\pm\sqrt{(\mathrm{K}-\mathrm{N}s)^2-(\mathrm{H}+\mathrm{N}t)(\mathrm{L}+\mathrm{N}r)}}{\mathrm{H}+\mathrm{N}t}\cdot\frac{df}{dp}$$

$$=\frac{\mathrm{K}-\mathrm{N}s\pm\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{HL}+\mathrm{MN}}}{\mathrm{H}+\mathrm{N}t}\frac{df}{dp}$$

$$=\frac{\mathrm{K}-\mathrm{N}s}{\mathrm{H}+\mathrm{N}t}\frac{df}{dp}.$$

Donc nous avons $\mathrm{S}=0$, et l'équation (5) prend la forme

$$\mathrm{T}\frac{d^2\eta}{d\zeta^2}+\mathrm{U}=0.$$

# SUR TROIS FORMULES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ÉLLIPTIQUES (*)

PAR

J. A. MARTINS DA SILVA

Dans les *Acta Mathematica*, t. I, p. 368, M. Hermite a fait usage des formules qui donnent la décomposition en éléments simples, des trois quantités

$$\operatorname{sn} x \,.\, \operatorname{sn}(x+a),\ \operatorname{cn} x \,.\, \operatorname{cn}(x+a),\ \operatorname{dn} x \,.\, \operatorname{dn}(x+a),$$

pour démontrer une relation remarquable dans la théorie des fonctions élliptiques.

D'une manière analogue je démontre facilement au moyen de ces formules les trois relations suivantes. Supposons les quatre quantités $u$, $v$, $r$, $s$ assujetties à la condition

$$u+v+r+s=0,$$

on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \,.\, \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ & -k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \,.\, \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \\ & - \quad \operatorname{dn} u \,.\, \operatorname{dn} v + \operatorname{dn} r \,.\, \operatorname{dn} s = 0, \end{aligned}\right.$$

(*) Este artigo foi publicado por Martins da Silva, pouco tempo antes de morrer, no *Bulletin des sciences mathématiques* (tom. X da 2.ª série, pag. 78). Veja-se *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas,* tom. VI, pag. 194.

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{ll} k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + & \\ + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \,. & \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ - \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \,. & \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0, \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \,.\, \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s - \\ - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \,.\, \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v = 0. \end{array}\right.$$

Ces relations, déduites par M. Smith dans les *Proceedings of London mathematical society*, vol. x, p. 91, sont symetriques par rapport aux deux couples de quantités $u$, $v$, $r$, $s$, et aux deux arguments des mêmes couples.

Posons

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} u = x, \\ v = -(x+a), \\ r + s = a, \end{array}\right.$$

la relation (I) devient

$$(2)\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ -k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \\ - \quad \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0; \end{array}\right.$$

mais les formules du savant géomètre M. Hermite sont

$$(3)\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) = \mathrm{U}, \\ \operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \,.\, \mathrm{U}, \\ \operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \,.\, \mathrm{U}, \end{array}\right.$$

en supposant

$$U = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a} \left[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)\right];$$

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

appliquées dans la relation (2) donnent

$$-k^2 . U . \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s -$$

$$-k^2 (\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a . U) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s -$$

$$-(\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a . U) + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0,$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 . U(-\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{cn} a) - \\ -(k^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s) = 0. \end{array} \right.$$

Il faut alors démontrer les formules

$$(4) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{cn} a = 0, \\ k^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0. \end{array} \right.$$

Il suffit d'introduire les conditions (1) dans les formules (3), en attendant l'égalité

$$a = -(u+v);$$

ou en obtient les formules (4), qui démontrent la relation (I).

Considérons maintenant la relation (II); il vient par un calcul semblable la relation

$$\left\{ \begin{array}{l} -k'^2 . U - k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ +(\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a . U) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ -(\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a . U) \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0 \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}\,(-k'^2-k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s)- \\ -(k'^2\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s+\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s)=0. \end{array}\right.$$

On connait déjà les formules

$$\left\{\begin{array}{l} -k'^2-k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s=0, \\ k'^2\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s+\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s=0; \end{array}\right.$$

ce sont les équations dont M. Hermite s'est servi pour obtenir la relation de M. Cayley (loc. cit.) et qui déterminent aussi la relation (II).

La relation (III) donne

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{U}\,.\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s-(\mathrm{dn}\,a-k^2\,\mathrm{cn}\,a\,.\,\mathrm{U})\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s+ \\ \qquad +\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s-(\mathrm{cn}\,a-\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{U})=0. \end{array}\right.$$

ou bien

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}\,(-\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s+k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s+\mathrm{dn}\,a)- \\ \quad-\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s-\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s+\mathrm{cn}\,a)=0; \end{array}\right.$$

les parenthèses comprendent les formules (4) qui demontrent notre quéstion.

## BIBLIOGRAPHIA

*R. R. de Sousa Pinto. — Continuação dos estudos instrumentaes. — Coimbra, 1890.*

No tomo VIII (pagina 132) d'este jornal deu-se noticia de um opusculo em que o sr. Sousa Pinto se occupa do estudo do circulo meridiano de Repsold que possue o Observatorio astronomico de Coimbra. No presente opusculo continúa o auctor este estudo, occupando-se do erro de collimação, da reducção de passagens pelos fios lateraes á passagem pelo fio do meio, do uso do chronographo nas passagens observadas pelos fios do reticulo, etc.

---

*Coordenadas geographicas dos pontos geodesicos de primeira ordem. — Lisboa, 1889.*

Este opusculo, publicado pela Direcção geral dos trabalhos geodesicos, contém as coordenadas geographicas dos pontos de primeira ordem da triangulação portugueza. As longitudes são referidas ao meridiano do Observatorio do Castello de S. Jorge em Lisboa, e as altitudes são referidas ao nivel medio das aguas do Tejo, defronte de Lisboa. Depois das tabellas que contêem as latitudes, longitudes e altitudes vem uma descripção rapida de cada um dos signaes geodesicos.

---

*Gino Loria. — Il periodo aureo della Geometria greca (Memorie della R. Accademia del Scienze di Torino,* série II, t. XL, 1890).

Já por varias vezes temos dado noticia de trabalhos importantes relativos á historia das mathematicas, devidos ao sr. Gino Loria. Na presente Memoria o sabio professor da Universidade de Genova estuda o periodo mais importante da Geometria grega, isto é, o periodo grego-alexandrino, para dar noticia dos geometras mais eminentes que n'este periodo floreceram, e dos resultados mais importantes e dos methodos mais engenhosos que lhes são devidos.

O geometra de que primeiro o auctor se occupa é Euclides. Na noticia relativa a este geometra considera em primeiro logar os *Elementos de Geometria*, analysando as differentes partes d'esta obra celebre, e discutindo a authenticidade e originalidade de cada uma d'ellas, etc.; considera depois a obra intitulada *Dados*, em que Euclides apresenta uma serie de proposições em que se affirma que uma ou muitas cousas de que se fala são consequencia das hypotheses feitas sem todavia as determinar completamente; considera em terceiro logar a obra intitulada *Da divisão das figuras*, em que o grande geometra tracta de dividir figuras limitadas por linhas rectas ou circulos por meio de uma ou mais rectas em partes tendo entre si razões dadas; considera finalmente as obras que se conhecem apenas pelas referencias que a ellas fazem os escriptores antigos, *Porismas, Logares superficiaes, Conicas*, etc., dando noticia do que a respeito d'estas obras se sabe ou se conjectura.

Depois de se occupar de Euclides passa o sr. Gino Loria a occupar-se de Archimedes, abrindo por uma comparação d'estes dois grandes homens. Diz, com effeito, o auctor: «Quem faz um exame comparativo dos modos como os homens de sciencia contribuem para o progresso do saber, não tarda a reconhecer que taes modos são de duas especies: uns propondo-se resolver questões isoladas, que elles julgam dignas de estudo, e procurando methodos originaes applicaveis a um problema particular ou a uma classe inteira de questões; outros, compulsando os materiaes scientificos existentes sobre um determinado argumento, propõem-se distribuil-os harmonicamente e encher as lacunas existentes entre elles com o fim de compôr um todo organico. Se n'esta ultima cathegoria de homens de sciencia se deve sem duvida collocar Euclides, á primeira pertence sem contestação Archimedes.»

A respeito de Archimedes o sr. Gino Loria expõe o que se sabe a respeito da vida do grande geometra syracusano, e em seguida dá noticia das suas obras: *Equilibrio dos planos I, Quadratura da parabola, Equilibrio dos planos II, Esphera e cylindro,* *Spiraes, Conoides e Espheroides, Medida do circulo,* etc., analysando cada uma d'ellas, apreciando os methodos empregados, comparando estes methodos com os methodos modernos, etc.

O terceiro geometra de quem o sr. Gino Loria se occupa é Eratostene, o geometra que primeiro tentou a medida da terra. Dá noticia do seu instrumento para inserir duas medias proporcionaes entre duas rectas dadas, do seu methodo para formar uma táboa de numeros primos e das conjecturas que têm sido feitas a respeito dos outros trabalhos que Pappo attribue a este geometra.

Segue-se Apollonio, o geometra celebre, de quem Leibnitz dizia: *Quem comprehende Archimedes e Apollonio, pouco se admirará das descobertas dos homens eminentes recentes.* O sr. Loria examina principalmente a obra immortal d'este grande geometra, intitulada *Tractado das secções conicas,* dando noticia dos assumptos contidos em cada um dos livros em que se divide, distinguindo as proposições que se podem attribuir a Apollonio das que eram já conhecidas pelos geometras anteriores, comparando os methodos d'este auctor com o methodo cartesiano, para fazer vêr que muitas vezes o methodo empregado por Apollonio é uma traducção geometrica do methodo cartesiano, etc.

Vêem depois noticias sobre Ipsìcles, a quem se attribuem os dois capitulos XIII e XIV contidos nas antigas edições dos Elementos de Euclides, aos quaes se dá o nome de *Livros de Ipsìcles de Alexandria sobre os corpos regulares;* sobre Nicomedes e Diocles, que estudaram respectivamente as curvas conhecidas pelos nomes de conchoïde, cissoïde; sobre Perseo, que estudou as curvas que resultam de cortar o toro por planos parallelos ao eixo de rotação; e finalmente sobre Zenodoro, auctor de um trabalho sobre os isoperimetros.

Terminaremos esta rapida noticia sobre a bella Memoria do sr. Gino Loria, aconselhando vivamente a sua leitura como das mais proveitosas e das mais interessantes. Por meio d'ella póde-se, com pequeno trabalho, tomar um conhecimento bastante extenso de uma das epochas mais brilhantes da Geometria.

*S. Pincherle.* — *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche* (*Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1890*).

N'esta Memoria importante o auctor generalisa a theoria das fracções continuas algebricas. Supponde dadas as funcções analyticas $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, de gráo $0, -1, -2, \ldots, -(p-1)$, mostra como se póde formar uma serie de funcções analyticas

$$\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{p+n}, \ldots$$

de gráo sempre decrescente (a differença dos gráos de duas consecutivas sendo em geral egual á unidade e podendo ser maior) que satisfaçam á relação linear recorrente

$$\sigma_n + a_{1,n}\,\sigma_{n+1} + a_{2,n}\,\sigma_{n+2} + \ldots + a_{p-1,n}\,\sigma_{n+p-1} = \sigma_{n+p},$$

onde $a_{1,n}, \ldots, a_{p-1,n}$ são polynomios ordenados segundo as potencias de $x$.

As fracções continuas algebricas ordinarias correspondem ao caso de ser $n=2$.

Para mostrar a importancia das novas fracções continuas mostra o sr. Pincherle que, por meio d'ellas, se póde determinar $p$ funcções inteiras $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ taes que as funcções $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ estejam ligadas pela relação linear

$$A_0\,\sigma_0 + A_1\,\sigma_1 + \ldots + A_{p-1}\,\sigma_{p-1} = 0$$

com a maior approximação possivel, para um gráo dado dos A.

---

*B. d'Engelhardt.* — *Observations astronomiques (deuxième partie).* — *Dresde, 1890.*

No tomo VIII (pagina 26) d'este jornal foi por nós publicada uma noticia sobre a primeira parte d'esta publicação importante. A segunda parte é em tudo digna da primeira. N'ella continúa o sr. B. d'Engelhardt a expôr os resultados das observações por elle feitas no seu Observatorio particular, installado em Dresde, e contém:

1.° Uma serie de observações micrometricas dos satellites de Saturno, feitas em 1887 e 1888.

2.° Muitas observações de cometas (cometa de 1882 II, cometa de 1885 V, cometas de 1886 I, II, III, V, VII, VIII, IX, cometas de 1887 IV, V, cometas de 1888 I, III, V, cometa de 1889 I).

3.° Algumas observações dos planetas Diana, Sapho e Dresda.

4.° Algumas observações para verificar o movimento proprio de duas estrellas.

5.° Uma serie de observações de 829 estrellas do catalogo de Bradley, executadas pelo auctor por proposta do sr. O. Struve, e feitas no intervallo de 1886 a 1889.

6.° Uma serie de medidas micrometricas de estrellas duplas, contidas n'uma lista fornecida pelo sr. O. Struve e feitas por pedido d'este illustre astronomo.

7.° Observações de algumas estrellas de comparação, feitas por pedido do sr. W. Schur.

8.° Uma longa lista de observações de nebulosas, feitas no intervallo de 1885 a 1888.

A obra, de que o sr. B. d'Engelhardt vem de publicar a segunda parte, parece-nos destinada a figurar distinctamenie entre as publicações dos principaes observatorios. Por ella se vê, com admiração, a que altura este illustre astronomo elevou o seu observatorio particular, dando assim um exemplo brilhante de dedicação á sciencia.

---

*R. Marcolongo. — Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890).*

N'esta Nota importante occupa-se o sr. Marcolongo das linhas geodesicas traçadas sobre os paraboloides. Integra as equações differenciaes das linhas geodesicas que partem dos pontos umbilicaes, por meio de funcções exponenciaes, e exprime as coordenadas de um ponto qualquer por meio de funcções exponenciaes dependentes de um unico parametro. Depois extende ao paraboloide alguns dos theoremas que têem logar no caso das superficies de segunda ordem com centro. Finalmente integra as equações differenciaes das linhas geodesicas que partem de um ponto não umbilical, por meio das funcções teta de Jacobi.

---

*R. Marcolongo.* — *Teorema di Meccanica* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II).

O theorema demonstrado é o seguinte:

Todo o problema de Mecanica, no qual a posição geometrica do systema depende só de tres quantidades e no qual subsistem o integral das forças vivas, um dos integraes das áreas e um dos integraes do centro de gravidade relativo a um dos eixos do plano sobre o qual tem logar o theorema das áreas, é reductivel a quadraturas.

---

*R. Marcolongo.* — *Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie* (*Rendiconti della R. Accademia de Napoli, 1889*).

N'esta Nota apresenta o auctor algumas relações importantes relativas ás funcções cylindricas de 1.ª especie $Y_n(x)$. Taes são as relações

$$\int_0^1 \frac{Y_n(ax)\,Y_{n-1}(ax)}{x}\,dx = -\frac{a}{2n-1}\,Y_{n-1}(a)\,Y_{n+1}(a),$$

$$\int_0^1 \frac{dY_n(ax)}{dx}\cdot\frac{dY_n(bx)}{dx}\,dx + \int_0^1 \frac{Y_n(ax)\,.\,Y_n(bx)}{x}\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 x^2\,Y_{n-1}(ax)\,Y_n(bx)\,dx + \int_0^1 x^2\,Y_{n+1}(ax)\,Y_n(bx)\,dx = 0,$$

onde $a$ e $b$ representam duas raizes differentes de $Y_n(x) = 0$; e

$$\int_0^1 x\left(\frac{dY_n(ax)}{dx}\right)^2 + n^2\int_0^1 \frac{Y^2{}_n(ax)}{x}\,dx = \frac{a^2}{2}\,Y^2{}_{n+1}(a),$$

$$\int_0^1 x^2 Y_{n-1}(ax)\,Y_n(ax)\,dx + \int_0^1 x^2\,Y_{n+1}(ax)\,Y_n(ax)\,dx = \frac{n}{a}\,Y^2{}_{n+1}(a),$$

onde $a$ representa uma raiz de $Y_n(x) = 0$ cujo gráo de multiplicidade é egual ou superior a 2.

---

*G. Vivanti.* — *Sulle funzioni definita da un' exprezione algebrico-differenziale del primo ordine (Annali di Matematica pura ed applicata, 1888).*

—— *Sulle equazioni algebrico-differenziali del 1.° ordine (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. IV).

—— *Sulle equazioni algebrico-differenziali del 1.° ordine* (Nota II) *(Item).*

A equação considerada n'estes tres bellos trabalhos é a seguinte:

$$f_0(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1(w, z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(w, z) = 0,$$

onde $f_0$, $f_1$, $f_2$, etc., representam funcções racionaes inteiras de $w$ e $z$. Resolvendo esta equação obtem-se as $m$ raizes

$$\frac{dw}{dz} = \varphi_1(w, z), \ldots, \quad \frac{dw}{dz} = \varphi_m(w, z),$$

que, integrando, dão

$$w = F_1(z), \quad w = F_2(z), \quad \ldots, \quad w = F_m(z).$$

O auctor apresenta uma serie de theoremas importantes relativos ao modo como a natureza d'estas funcções depende da fórma dos coefficientes da proposta.

---

*G. Vivanti.* — *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati (Annali di Matematica pura ed applicata, 1889).*

Um aggregado de elementos, materiaes ou não, dispostos em $n$ sentidos differentes formam um typo ordenado. A theoria dos typos ordenados é devida a G. Cantor, e é d'esta theoria que o sr. Vivanti se occupa na sua excellente Memoria.

Nos paragraphos I e II vêem algumas definições e principios geraes. No paragrapho III vem a theoria das operações sobre typos ordenados. No paragrapho IV vem o estudo desenvolvido do problema que tem por fim, dado o numero de elementos de um typo, achar o numero correspondente de typos. Finalmente no paragrapho V vem o estudo de alguns typos de natureza particular.

---

*G. Vivanti.* — *Sulle equazioni a derivate parziali del 1.º ordine* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II).

O auctor demonstra o theorema seguinte:

Para que a equação

$$\mathrm{H}\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{dz}{dx_1},\ \ldots,\ \frac{dz}{dx_n}\right)=h$$

tenha um integral da fórma

$$z=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n)$$

é necessario e sufficiente que H satisfaça a uma equação da fórma

$$\varphi\left[\varphi_1\left(\mathrm{H}, x_1, \frac{dz}{dx_1}\right), \varphi_2\left(\mathrm{H}, x_2, \frac{dz}{dx_n}\right), \ldots, \varphi_n\left(\mathrm{H}, x_n, \frac{dz}{dx_n}\right)\right]=0.$$

G. T.

# EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

## I

## Sobre a inversão das derivações parciaes

N'uma Nota publicada no *Mathesis*, o sr. Peano enuncía e demonstra o theorema relativo á inversão das derivações do modo seguinte:

*Se* $f''_{xy}(x, y)$ *existe na vizinhança de* $x = x_0$, $y = y_0$, *e é continua para* $x = x_0$ *e* $y = y_0$, *e se* $f'_y(x, y)$ *existe na vizinhança de* $x = x_0$, *a derivada* $f''_{yx}(x, y)$ *existe tambem, e é* $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''(x_0, y_0)$.

Seja $\varepsilon$ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Ponhamos

$$f''_{xy}(x_0 + h, y_0 + k) = f''(x_0, y_0) + \alpha. \tag{1}$$

Pois que $f''_{xy}(x, y)$ é contínua para $x = x_0$ e $y = y_0$, póde-se determinar uma quantidade positiva $\rho$ tal que, se $|h| \leqq \rho$, $|k| \leqq \rho$, se tenha $|\alpha| \leqq \varepsilon$. Integremos (1) relativamente a $k$, de 0 a $k$; teremos

$$f'_x(x_0 + h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + h, y_0) = hf''_{xy}(x_0, y_0) + k\alpha' \tag{2}$$

onde $\alpha'$, um dos valores de $\alpha$, não será, em valor absoluto, superior a $\varepsilon$, isto é, $|\alpha'| \leqq \varepsilon$.

Integremos (2) relativamente a $h$, de 0 a $h$; teremos a fórmula bem conhecida

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$
$$= hkf''_{xy}(x_0, y_0) + hk\alpha'',$$

e, por ser $\alpha''$ um dos valores de $\alpha'$, $|\alpha''| \leqq \varepsilon$. Deduz-se pois

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}-\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}$$
$$=hf''_{xy}(x_0\, y_0)+h\alpha''. \quad (4)$$

Passemos ao limite, para $h=0$. Pois que $f'_y(x, y_0)$ existe temos

$$\lim_{k=0}\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}=f'_y(x_0+h, y_0)$$

$$\lim_{k=0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}=f'_y(x_0, y_0).$$

Logo $\alpha''$ terá tambem um limite $\alpha'''$, em valor absoluto, egual ou inferior a $\varepsilon$. Tem-se pois

$$f'_y(x_0+h, y_0)-f'_y(x_0, y_0)=hf''_{xy}(x_0, y_0)+h\alpha''' \quad (5)$$

ou

$$\frac{f'(x_0+h, y_0)-f'_y(x_0, y_0)}{h}=f''_{xy}(x_0, y_0)+\alpha''', \quad (6)$$

e para todos os valores de $h$ eguaes ou inferiores a $\rho$, em valor absoluto, $\alpha'''$ é, em valor absoluto, egual ou inferior a $\varepsilon$. Logo, pela definição dos limites, tem-se

$$\lim_{h=0}\frac{f'_y(x_0+h, y_0)-f'_y(x_0, y_0)}{h}=f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Está pois provado que $f_{yx}(x_0, y_0)$ existe, e que o seu valor é egual a $f''_{xy}(x_0, y_0)$.

[*G. Peano: Sur l'inversion des dérivations partielles* (*Mathesis*, t. x)].

## II

## Sobre o caso duvidoso relativo a certos caracteres de convergencia das series

N'um artigo muito interessante, publicado nos *Nouvelles Annales*, vem de demonstrar o sr. Fouret que *se a applicacão do criterio de convergencia da serie*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

*(onde* $\lim_{n=\infty} u_n=0$*) baseado na consideração da expressão* $\sqrt[n]{u_n}$ *não leva a conclusão alguma, o mesmo acontece com o criterio fundado na consideração de* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Eis a demonstração dada pelo sr. Fouret.

Como os termos da serie tendem para zero, póde-se sempre achar um numero inteiro $r$ tão grande que $u_r$ e os termos seguintes sejam todos inferiores á unidade. O mesmo acontece portanto á expressão $\sqrt[n]{u_n}$, visto que as raizes de indice qualquer d'um numero inferior á unidade são menores do que a unidade. Logo, se a expressão $\sqrt[n]{u_n}$ não fornece indicação alguma relativamente á convergencia ou divergencia da serie, provém isto da impossibilidade de assignar um numero menor do que a unidade, ao qual $\sqrt[n]{u_n}$ seja inferior, para os valores sufficientemente grandes de $n$.

Posto isto, não se póde demonstrar a divergencia da serie (1) pelo theorema baseado na consideração de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Com effeito, não é possivel achar um inteiro $q$ tal que, para todos os valores de $n$ eguaes ou superiores a $q$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ seja maior do que a unidade; visto que, quando isto tem logar, os termos $u_q$, $u_{q+1}$, etc. crescem, o que é contrario á hypothese.

Tambem se não póde demonstrar a convergencia da serie pelo criterio baseado na consideração de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Com effeito, se, para valores de $n$ eguaes ou superiores a um certo inteiro $p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ fosse constantemente inferior a um certo numero $\lambda < 1$, de modo que se tivesse

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \lambda, \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < \lambda, \quad \ldots, \quad \frac{u_{p+k}}{u_{p+k-1}} < \lambda,$$

ter-se-hia

$$u_{p+k} < u_p \lambda^k,$$

e portanto

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}}.$$

Dois casos ha agora a distinguir. Suppondo primeiramente $\frac{u_p}{\lambda^p} \leqq 1$, ter-se-hia, qualquer que seja $k$,

$$\sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} \leqq 1,$$

e portanto

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda.$$

Suppondo pelo contrario $\frac{u_p}{\lambda^p} > 1$ e representando por $\mu$ um numero tomado arbitrariamente entre $\lambda$ e $1$, poder-se-hia sempre achar um numero inteiro tão grande que

$$\lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} < \mu$$

e a *fortiori*

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \mu,$$

para todos os valores de $k$ eguaes ou superiores a este inteiro.

Logo n'um e n'outro caso poder-se-hia determinar, para o inteiro $n$, um valor tal que, para todos os valores superiores a este,

$\sqrt[n]{u_n}$ fosse inferior a um numero determinado menor do que a unidade, o que é contrario á hypothese.

[*G. Fouret: Remarque sur le cas douteux relatif à certains caractères de convergence des séries* (*Novelles Annales de Mathématiques, 1890*)].

III

## Trisectriz de Maclaurin

N'um artigo publicado no tomo VI (pag. 13) d'este jornal, considerou o sr. João d'Almeida Lima uma curva que serve para dividir um angulo em tres partes eguaes. O sr. Longchamps, referindo-se no seu *Cours de Mathématiques spéciales* (*Supplément*, 1890, pag. 114) a esta curva, diz que ella coincide com a trisectriz de Maclaurin (*Traité des fluxions*, 1749, pag. 198) e expõe um modo de geração d'esta curva differente do que empregou o sr. Almeida Lima.

Eis este meio de geração.

Imaginemos sobre uma recta pontos equidistantes

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_5 = a;$$

tracemos por O (*) uma transversal arbitraria $O_1M$, depois abaixemos $O_5M$ perpendicularmente a esta recta; seja $O_2I$ parallela a $O_1M$ e seja MI perpendicular a $O_1O_5$. O logar geometrico de I é a trisectriz de Maclaurin.

Para mostrar que esta curva serve a dividir os angulos em tres partes eguaes, emprega o sr. Longchamps o seguinte processo:

Tirando por $O_2$ uma perpendicular a $O_1O_5$ e chamando A o ponto em que esta perpendicular encontra a recta $O_1M$, e representando respectivamente por $\omega$ e $\varphi$ os angulos $IO_2O_5$, $IO_4O_5$, temos

$$\rho = O_2I = AM = O_1M - O_1A = 4a\cos\omega - \frac{a}{\cos\omega}$$

(*) É facil de construir a figura com as indicações dadas.

e

$$\frac{O_2I}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{2a}{\operatorname{sen}(\varphi - \omega)}.$$

Os angulos $\varphi$ e $\omega$ verificam pois, para todos os pontos da curva considerada, a relação

$$2 \operatorname{sen}\varphi \cos\omega = (4\cos^2\omega - 1)\operatorname{sen}(\varphi - \omega).$$

Esta egualdade póde ser escripta do modo seguinte:

$$\operatorname{sen}\varphi\cos\omega\,(3 - 4\cos^2\omega) = \operatorname{sen}\omega\cos\varphi\,(1 - 4\cos^2\omega),$$

ou ainda

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{4\operatorname{sen}^3\omega - 3\operatorname{sen}\omega}{3\cos\omega - 4\cos^2\omega},$$

ou finalmente

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} 3\omega.$$

Logo o angulo $IO_2O_5$ é a terça parte do angulo $IO_4O_5$.

No seu importante livro intitulado — *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) torna o sr. Longchamps a occupar-se d'esta curva, que define como cubica circular, possuindo um nó onde as tangentes fazem com o eixo da curva angulos eguaes a 60° e 120°.

Entre os trabalhos relativos a esta curva póde ainda vêr-se um do sr. Schoute, que se occupou d'ella nos *Archives Néerlandaises* (tomo XX, 1885), outro do sr. Habich, que se occupou d'ella na *Gaceta Cientifica* (1885), e dois do sr. Longchamps, publicados um no *Journal de mathématiques spéciales* (1885), e outro no *Annuaire de l'Association française* (1885).

FIM DO VOLUME IX.

# INDICE