

## BIBLIOGRAPHIA

*J. Petersen : Théorie des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars, 1897.*

As qualidades de clareza e simplicidade de exposição que tem em alto gráo a *Theoria das equações algebraicas* do sr. Petersen levaram o sr. Laurent a fazer uma traducção franceza d'este livro, prestando assim um grande serviço aos que não podiam ler o livro notavel do illustre professor da Universidade de Copenhague na lingua em que o seu auctor o escreveu.

Pela indicação que vamos dar do objecto de cada capitulo vê-se quaes são as doutrinas consideradas n'este Tratado de Algebra, o qual está dividido em cinco partes, sendo a primeira consagrada ás propriedades geraes das equações algebraicas, a segunda á resolução algebraica das equações, a terceira á resolução numerica das equações, a quarta á theoria das substituições e a quinta á theoria das fórmias.

*Primeira parte.* I Propriedades geraes das equações algebraicas. II Relações entre os coefficients das equações e as raizes. III Sobre a eliminação. IV Transformação das equações.

*Segunda parte.* I Equações do terceiro gráo. II Equações do quarto gráo. III Equações binomias. IV Equações do quinto gráo. V Decomposição dos polynomios racionaes em factores racionaes. VI Equações abelianas. VII Equações resolueis por meio de radicaes.

*Terceira parte.* I Separação das raizes. II Calculo das raizes das equações numericas.

*Quarta parte.* I Substituições em geral. II Substituições conjugadas ou grupos. III Theoria de Galois. IV Applicações da theoria de Galois.

*Quinta parte. I Covariantes das fórmulas binarias.*

Todos estes assumptos são expostos em um volume que contém apenas 345 paginas, sem que d'esta concisão resulte a mais pequena falta de clareza.

Acrescentaremos ainda que d'estes capitulos são principalmente interessantes, pela sua originalidade, o capitulo VII, onde o auctor trata das condições para as equações serem resolueis por meio de radicaes quadrados e applica estas condições ao problema da triseccão do angulo, e a quinta parte, onde é exposta uma theoria nova das fórmulas binarias.

---

*W. Fr. Meyer: Sur les progrès de la théorie des invariants projectives. Paris, Gauthier-Villars, 1897.*

É tão grande a quantidade de resultados que têm adquirido as sciencias mathematicas no nosso seculo e nos que o precederam que se tornou necessaria a formação de inventarios das diversas partes que constituem o vasto campo d'estas sciencias. A realisação d'estes inventarios foi inaugurada pela Sociedade mathematica allemã, que publicou já a este respeito alguns trabalhos notaveis. O livro de que estamos a dar noticia é um d'elles. Publicado primeiramente pelo seu auctor F. Meyer em lingua allemã no *Jahresbericht* d'esta sociedade, foi depois traduzido para francez por H. Fehr, que felizmente quiz concorrer assim para augmentar o numero de leitores do trabalho excellente do sabio professor allemão,

A theoria dos invariantes, apezar de moderna, tem dado logar a um numero consideravel de memorias e notas, espalhadas por diversas publicações scientificas. No trabalho de Meyer dá-se noticia da marcha progressiva d'esta theoria e do seu estado actual, e dão-se indicações bibliographicas preciosas a respeito das publicações que a ella têm sido consagradas.

---

*H. Burkhardt: Einführung in die theorie der analytischen functionen einer complexen veranderlichen, Leipzig, 1897.*

N'este livro excellente é exposta a parte mais essencial da theoria das funcções analyticas com um mixto de concisão e clareza que o tornam muito proprio para se estudar este bello e importante assumpto. Esta exposição abrange os primeiros principios da theoria considerada. Assim o primeiro capitulo é consagrado á theoria algebrica dos numeros complexos e suas operações e tambem á representação geometrica d'estes numeros e d'estas operações.

Os methodos empregados pelo sr. Burkhardt para estudar a theoria das funcções analyticas são os de Cauchy e Riemann. Por estes methodos é estudada a theoria das funcções uniformes no capitulo quarto e a theoria geral das funcções uniformes e multiformes no capitulo sexto. Antes porém d'estes estudos geraes e para facilitar a sua intelligencia são consideradas respectivamente nos capitulos segundo e quinto as funcções racionais e algumas funcções irracionais particulares.

Uma questão a que o illustre auctor d'esta obra prestou toda a attenção foi a da representação conforme, que é considerada em todos estes capitulos a respeito das diversas funcções que vão sendo successivamente estudadas.

Contém ainda o livro um capitulo (o terceiro) consagrado á theoria das funcções de variaveis reaes, onde são consideradas algumas questões fundamentaes d'esta theoria que o sr. Burkhardt julgou conveniente expôr para facilitar o estudo do assumpto principal do livro.

---

*Ch. Méray: Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale, t. III, Paris, Gauthier Villars, 1897.*

Deu-se já noticia n'este jornal dos dous primeiros volumes da obra importante que está publicando o sr. Méray e indicou-se qual o espirito em que está concebida. O presente volume é consagrado ao estudo de varias questões analyticas classicas que se encontram habitualmente nos manuaes de Calculo integral, muitas das quaes são tratadas por methodos novos ou por methodos que são um aperfeiçoamento dos methodos conhecidos.

As doutrinas que contêm este volume estão dispostas em seis capitulos. No primeiro é estudada a integração das funcções racionais e das funcções irracionais ou transcendentales que se encontram habitualmente nos livros de Calculo integral. O capitulo segundo é consagrado ao estudo dos methodos para obter certos integraes definidos. No terceiro capitulo são integradas as equações differenciaes lineares e algumas outras equações differenciaes elementares. No capitulo quarto são integradas as equações ás derivadas parciaes de primeira ordem. No capitulo quinto são consideradas varias questões de maximos e minimos e, em especial, o calculo das variações. No capitulo sexto são estudados os integraes multiplos reaes.

O volume termina por cinco appendices importantes, relativos a questões que têm relação com os assumptos do primeiro volume da obra, os quaes encerram pontos de vista novos, que permitem simplificar o estudo de algumas questões n'elle consideradas.

---

*N. Cor et J. Riemann: Traité d'Algèbre élémentaire, Paris, Nony, 1898.*

Contêm este livro as materias que é uso conterem os manuaes desenvolvidos de Algebra elementar, as quaes são n'elle tratadas com muito rigor e clareza. Estas materias estão dispostas com bom methodo em seis capitulos, de que vamos dar uma rapida noticia.

O primeiro capitulo é consagrado aos numeros algebricos. N'elle é exposta com simplicidade, primeiramente, a theoria das operações sobre numeros reaes e, como applicação, a fórmula do binomio, depois a theoria das operações sobre polynomios e, como applicação, as theorias do maior divisor commum e do menor multiplo commum de muitos polynomios.

No capitulo segundo são estudadas as equações do primeiro gráo a uma e a muitas incognitas. Vem neste capitulo tambem a parte elementar da theoria dos determinantes e a sua applicação á resolução de  $n$  equações a  $n$  incognitas.

No capitulo terceiro são estudadas as equações do segundo

gráo, algumas equações reductivas ao segundo gráo e alguns systemas de duas equações a duas incognitas, que, pela eliminação de uma incognita, conduzem a equações do segundo gráo. São tambem consideradas n'este capitulo algumas classes de problemas que conduzem ás equações que n'elle são estudadas.

O capitulo quarto é consagrado ao estudo dos primeiros principios da theoria das funcções de variaveis reaes, que são expostos com rigor. Vem tambem n'elle a theoria das progressões.

No capitulo quinto são estudadas as propriedades das funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares.

Finalmente no capitulo sexto são apresentados os primeiros principios e regras do Calculo differencial.

---

*Ernesto Cesàro: Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli, 1896.*

Lê-se com muito prazer e grande proveito o bello livro que o sr. Cesàro consagrou ao estudo das curvas e superficies representadas por equações referidas a coordenadas intrinsecas. O assumpto é vivamente interessante e é tratado com aquella elegancia e originalidade que se encontra em todas as obras do sabio professor da Universidade de Napoles.

Os primeiros oito capitulos da obra a que nos estamos referindo são consagrados á Geometria plana. No primeiro vêem os methodos para determinar as tangentes, asymptotas, pontos asymptoticos, pontos de inflexão, etc. das curvas definidas por equações em coordenadas intrinsecas. No segundo são dadas as fórmulas fundamentaes para a analyse intrinseca das curvas planas. Em ambos estes capitulos se fazem bellas e importantes applicações das theorias expostas a varias curvas notaveis, e estas applicações são continuadas no capitulo III, onde o auctor faz applicação dos principios estabelecidos nos capitulos anteriores ás conica, ás ovaes de Cassini, ás curvas de Ribaucour e ás espiraes sinusoides.

O capitulo IV é consagrado á theoria do contacto das curvas planas, o capitulo V á theoria das roletas, os capitulos VI e VII á determinação dos baricentros das curvas planas e á analyse

baricentrica e o capitulo VIII ao estudo de algumas propriedades dos systemas de curvas planas.

A Geometria intrinseca das curvas empenadas e das superficies regradas é estudada nos capitulos IX e X, sendo o primeiro consagrado á exposiçào dos methodos e theoremas geraes e o segundo ás applicações ás curvas esphericas, ás helices, ao circulo empenado, ás curvas de Bertrand, etc.

Os capitulos XI, XII e XIII sãõ respectivamente consagrados á theoria geral das superficies, a varias applicações d'esta theoria ás superficies de revoluçào, ás superficies de curvatura total constante, ás superficies de curvatura media constante, ás quadricas, ás superficies de Weingarten, etc., e finalmente á theoria das deformações infinitesimas das superficies.

No capitulo XIV sãõ estudadas as congruencias de rectas, no capitulo XV os espaços a tres dimensões e nos capitulos XVI e XVII os espaços a  $n$  dimensões.

---

*Zoel G. de Galdeano: Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbólica, las Geometricas no-euclideas y el concepto de hiper-espacio, Madrid, 1896.*

Este interessante trabalho é consagrado a uma exposiçào da historia e philosophia de algumas questões de Geometria e Algebra que tãem adquirido grande importancia nos nossos tempos e que tiveram a sua origem nos trabalhos de Cauchy, pelo que respeita á parte algebraica, e nos trabalhos de Poncelet, pelo que respeita á parte geometrica.

Os assumptos de que se occupa n'elle o sabio professor hespanhol sãõ distribuidos por oito capitulos. O primeiro é uma especie de introduçào ao livro, onde é apresentado um resumo do desenvolvimento moderno das theorias mathematicas. No segundo sãõ considerados os differentes methodos de analyse vectorial. Faz-se n'elle referencia aos trabalhos de Argand, Cauchy, Grassmann e Hamilton, sendo mais desenvolvida a parte que se refere aos trabalhos de Grassmann. O terceiro capitulo é consagrado á Algebra symbolica, a que deram origem os trabalhos geometricos

considerados no capitulo anterior, os quaes levaram ao estudo das quantidades referidas a duas e tres unidades e depois por uma generalização, que se deve a Weierstrass, ao estudo das quantidades referidas a  $n$  unidades. O capitulo v é principalmente consagrado á introdução do imaginarismo em Geometria e ás primeiras indicações sobre alguns assumptos que são desenvolvidos nos capitulos seguintes. O capitulo v é destinado a dar uma ideia dos trabalhos de Cayley sobre a applicação da Algebra das fórmulas á Geometria e dos trabalhos de Lie e Klein sobre os grupos de substituições em Geometria. No capitulo vi a vii vem uma exposição muito clara dos principios geraes da historia das Geometrias não euclideanas, e da Geometria a  $n$  dimensões.

Todos estes assumptos, apesar da sua diversidade, estão ligados uns com os outros, e o auctor do livro faz a sua exposição de modo a passar naturalmente de uns para os outros e a fazer notar estas ligações.

---

*L. Raffy: Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Paris, Gauthier-Villars, 1897.*

Contém este volume uma parte das lições que o sr. Raffy tem dado na Faculdade das sciencias de Paris, as quaes têm por objecto varias questões de Geometria que se encontram espalhadas por muitas obras e, em especial, por differentes lugares dos manuaes de Calculo differencial e integral, onde apparecem como applicação das theorias analyticas consideradas. O illustre geometra expõe na sua obra estas doutrinas coordenadamente, encadeando-as segundo a sua natureza e as relações que têm umas com as outras.

Pela leitura d'esta obra excellente vê-se que o sr. Raffy prestou toda a attenção á sua redacção, á qual deu clareza e elegancia notaveis. Pela noticia que vamos dar do objecto de cada capitulo da obra vê-se quaes os assumptos que ella contém e a ordem por que estão dispostos.

I Representação analytica das curvas e superficies. II Elementos e propriedades de primeira ordem das curvas e superficies. III Familias de curvas e de superficies. Trajectorias e envolventes ;

superfícies planificaveis. IV Curvatura e torsão. Propriedades da curvatura das curvas planas. V Fórmulas fundamentaes da theoria das curvas. Applicações diversas. VI Contactó das curvas e das superfícies. VII Curvatura das linhas traçadas sobre as superfícies. VIII Direcções conjugadas. Linhas asymptoticas. Linhas de curvatura. IX Secções principaes. Linhas asymptoticas e linhas de curvatura em coordenadas curvilineas. X Estudo das superfícies regradas. XI Arcos, áreas e volumes.

---

C. Wessel: *Essai sur la représentation analytique de la direction*, Copenhague, 1897.

O auctor d'esta memoria nasceu em 1745 e morreu em 1815. Em 1797 apresentou á Academia das Sciencias de Copenhague uma memoria, escripta em lingua dinamarqueza, a qual foi publicada em 1798 nas memorias d'esta Academia, onde é exposta a mesma theoria que mais tarde Argand apresentou no seu celebre *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires* (Paris, 1806), e ainda uma theoria das operações algebricas feitas com rectas no espaço, que contém o germen da theoria dos quaterniões. D'esta memoria, que ficou até hoje esquecida, vem de ser publicada pela Academia de Copenhague uma traducção, com o fim de a fornar conhecida e de dar a Wessel o logar que lhe compete como primeiro fundador de uma d'estas doutrinas importantes e como tendo dado os primeiros passos para a fundação da outra.

A memoria é precedida de dous prefacios. No primeiro faz o sr. Valentiner a apresentação do trabalho de Wessel, no segundo mostra o sr. Thiele como das indicações de Wessel sobre as operações com rectas no espaço se póde tirar uma theoria completa dos quaterniões.

G. T.

---

REMARQUE ÉLÉMENTAIRE SUR LA CONSTANTE D'EULER

NOTE DE

M. LERCH

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

En posant

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{v} = f(n), \quad \sum_1^{n-1} \frac{\log v}{v} = F(n),$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(n) - \log n \right\} = C, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F(n) - \frac{1}{2} \log^2 n \right\} = K,$$

C et K étant deux certaines constantes, dont la première porte le nom d'Euler. Ces deux circonstances suffisent pour obtenir un développement de la constante C.

Soit en effet  $n$  impair, nous aurons évidemment

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log v}{v} - 2 \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log(2v)}{2v} = \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v},$$

ou bien

$$F(n) - F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log 2 \cdot f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v}.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \left[ F(n) - \frac{1}{2} \log^2 n \right] - \lim_{n=\infty} \left[ F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log^2 \frac{n+1}{2} \right] \\ - \log 2 \cdot \lim_{n=\infty} \left[ f\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log \frac{n+1}{2} \right] \\ + \lim_{n=\infty} \left[ \frac{1}{2} \log^2 n - \frac{1}{2} \log^2 \frac{n+1}{2} - \log 2 \cdot \log \frac{n+1}{2} \right] \\ = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v}. \end{aligned}$$

Or le premier membre étant

$$\frac{1}{2} \log^2 2 - \text{Clog } 2,$$

il s'ensuit la formule de M<sup>r</sup> de la Vallée-Poussin (\*)

$$(1) \quad \log 2 \cdot \left[ C - \frac{1}{2} \log 2 \right] = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{\log v}{v}.$$

(\*) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers (*Ann. Soc. scient., Brux.*, t. XX, 2<sup>e</sup> partie, 1896), pag. 65.

On obtient une série analogue pour le nombre  $K$ , en partant de l'expression

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} = G(n),$$

pour laquelle on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ G(n) - \frac{1}{3} \log^3 n \right] = K'.$$

A cet effet il suffit de considérer l'identité

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} - 2 \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log^2 2v}{2v} = \sum_1^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log^2 v}{v};$$

elle nous donne la formule

$$(2) \quad 2 \log 2 \left( K + C \frac{\log 2}{2} - \frac{\log^2 2}{6} \right) = \sum_1^{\infty} (-1)^v \frac{\log^2 v}{v}.$$

La formule d'Euler

$$\sum_1^{\infty} (-1)^v a_v^{\frac{1}{2}} = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^{n-1} a_1}{2^n}$$

permet de transformer les séries (1) et (2) en séries dont la convergence est plus rapide.

..

Il est clair qu'on peut obtenir par ce procédé la valeur des séries

$$\sum (-1)^v \frac{\log^3 v}{v}, \quad \sum (-1)^v \frac{\log^4 v}{v}, \dots$$

en fonction des constantes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} - \frac{1}{3} \log^3 n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_1^{n-1} \frac{\log^3 v}{v} - \frac{1}{4} \log^4 n \right), \dots$$

Mais l'intérêt de la déduction précédente consiste dans ce qu'elle est entièrement élémentaire, et pour conserver ce caractère, j'ajoute une démonstration des lemmes sur lesquels elle est fondée.

En élevant l'équation

$$\log(v+1) = \log v + \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \dots$$

à la puissance  $k^{\text{me}}$ , j'obtiens

$$\frac{\log^k(v+1) - \log^k v}{k} = \frac{\log^{k-1} v}{v} + \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2},$$

où  $A_v$  reste fini pour  $v$  infini; en y substituant  $v = 2, 3, \dots, n-1$  et additionnant, il vient

$$\frac{1}{k} \log^k n = \sum_{v=2}^{n-1} \frac{\log^{k-1} v}{v} + \frac{1}{k} \log^k 2 + \sum_2^{n-1} \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2},$$

et il est clair que la dernière somme se réduit à la série convergente

$$\sum \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2},$$

lorsque  $n$  devient infini. Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_1^{n-1} \frac{\log^{k-1} v}{v} - \frac{1}{k} \log^k n \right)$$

est finie.



## BIBLIOGRAPHIA

*C. A. Laisant: La Mathématique. Philosophie — enseignement. Paris. G. Carré et C. Naud, 1898.*

Este bello livro, vivamente interessante e cuja leitura é das mais agradaveis e das mais proveitosas, é consagrado, como o seu titulo o indica, á philosophia e ao ensino das sciencias mathematicas.

Para a redacção da parte que é relativa ao primeiro assumpto inspirou-se principalmente o seu illustre auctor na obra de Augusto Comte. Para a redacção da segunda parte, onde faz principalmente a critica do ensino das escolas francezas, serviu-se da sua experiencia e do seu fino criterio.

O livro consta de uma introducção, onde é exposto o plano da obra, e de tres partes, a primeira consagrada á philosophia das mathematicas puras, a segunda consagrada á philosophia das mathematicas applicadas e a terceira ao ensino das mathematicas.

A primeira parte abre por um capitulo onde o sr. Laisant se occupa da origem, definição, fim e classificação das sciencias mathematicas. Depois é exposta em capitulos separados a philosophia da Arithmetica, Algebra, Calculo infinitesimal, Theoria das funcções, Geometria synthetica, Geometria analytica, Mecanica racional.

A segunda parte obre por um capitulo consagrado a algumas considerações geraes sobre as applicações das Mathematicas puras, e são depois consideradas em capitulos separados as applicações do Calculo, da Geometria e da Mecanica racional.

A parte relativa ao ensino das Mathematicas está dividida em sete capitulos, respectivamente consagrados ás ideias geraes sobre o ensino das Mathematicas, ao ensino da Arithmetica, ao da

Algebra e do Calculo superior, ao da Geometria synthetica, ao da Geometria analytica, ao da Mecanica e á hierarchia dos ensinios.

Todo o livro está escripto com elegancia e a maior clareza, e a sua leitura deve ser vivamente recômmendada aos professores dos nossos lyceus e das nossas escolas superiores, que por certo encontrarão n'elle muito que õs hade interessar.

---

*Lucien Lévy: Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars, 1898.*

Têm sido publicados nos ultimos tempos varios tratados da theoria das funcções ellipticas, uns extensos, onde a theoria d'estas funcções é exposta com o maior desenvolvimento, destinados ás pessoas que a querem estudar profundamente, outros mais breves, onde é exposta a parte mais essencial da mesma theoria, destinados ás pessoas que querem conhecer d'ella sómente o que é necessario para as applicações. O livro excellente que vem de publicar o sr. Lévy é destinado a este ultimo fim e ainda ao de preparar para a leitura dos grandes tratados; por isso encerra o que ha de fundamental e mais importante na theoria, a cuja exposição é consagrado, e o que é necessario conhecer para fazer applicações da mesma theoria, occupando-se mesmo o seu sabio auctor dos calculos numericos, a que se é conduzido quando se fazem estas applicações, e apresentando taboas para os facilitar.

Os assumptos considerados no livro a que nos estamos referindo estão dispostos em nove capitulos. No primeiro são expostos alguns principios geraes da theoria das funcções analyticas; no segundo são estudadas as funcções  $\theta$  de Jacobi; no terceiro são estudadas as funcções  $\sigma$  e  $\zeta$  de Weierstrass; no quarto são estudadas a funcção  $p(u)$  de Weierstrass e as funcções  $snu$ ,  $cnu$ ,  $dnu$  de Jacobi; no capitulo quinto é estudada a integração por meio de funcções ellipticas; no capitulo sexto e oitavo são dados methodos para os calculos numericos das funcções consideradas. Depois no capitulo setimo faz-se applicação das theorias expostas anteriormente á Mecanica (pendulo simples, curva elastica plana, movimento dos projecteis, pendulo espherico, equação de Lamé), á Geometria (rectificação da ellipse, área do ellipsoide, etc.), e

á Algebra (resolução da equação do quarto gráo). No capitulo nono é estudada principalmente a decomposição das funcções ellipticas em factores e em elementos simples. Terminam o livro quatro notas consagradas á reducção de alguns integraes ellipticos ás funcções ellipticas, á degeneração d'estas funcções, á inversão em quantidades reaes por meio das funcções de Jacobi e á applicação numerica das funcções consideradas ao movimento quasi vertical dos projecteis. Para facilitar as applicações da theoria das funcções ellipticas contém ainda o volume uma taboa contendo as principaes fórmulas e algumas taboas numericas. Acrescentaremos ainda que cada capitulo é acompanhado por uma série de exercicios muito bem escolhidos, todos relativos a questões de grande interesse.

A exposição dos assumptos considerados pelo sr. Lévy é feita com grande clareza e com todo o rigor; por isso e pela feição pratica que lhe deu o seu illustre auctor, deve ser o seu excellento livro vivamente recommendado a todos os que quizerem conhecer a parte mais essencial d'esta theoria e habilitar-se para a applicar.

---

*Ernesto Pascal: Repertorio di Matematiche superiori. I Analisi. U. Hoepli. Milano, 1898.*

O objecto d'esta utilissima obra é precisamente exposto pelo seu auctor nas seguintes palavras do prefacio que a precede: reunir no mais breve espaço possivel um resumo de quasi todas as principaes theorias da mathematica moderna, dando de cada uma só quanto baste para que um leitor possa orientar-se n'ella e saber a que livro hade recorrer para adquirir maiores particularidades e mais extensas indicações.

O volume que vem de ser publicado é consagrado á Analyse e são n'elle consideradas as theorias seguintes:

I. Theorias introductorias (numeros irrationaes, numeros complexos, quaterniões, grupos de pontos, conceito de funcção, limites, theoria das combinações). II Theoria dos grupos de substituições. III Theoria dos determinantes. IV Theoria das series, dos productos infinitos e das fracções continuas. V Theoria das equações algebraicas. VI Calculo differencial. VII Calculo integral.

VIII Equações differenciaes. IX Theoria dos grupos de transformações. X Calculo das differenças finitas. XI Calculo das variações. XII Theoria dos invariantes. XIII Funcções de variaveis complexas. XIV A theoriu das funcções em relação com a theoria dos grupos ; periodicidade ; automorfismo. XV Funcções algebraicas e integraes abelianos. XVI Theoria das funcções ellipticas. XVII Funcções hyperellipticas e abelianas. XVIII Funcções especiaes (funcções exponenciaes e logarithmicas, funcções circulares, funcções hyperbolicas, funcções de Bernoulli, funcções eulerianas, funcções hypergeometricas, funcções esphericas, funcções cylindricas, funcções de Lamé). XIX Representação analytica das funcções. XX Theoria dos numeros inteiros, racionais e complexos. XXI Theoria dos numeros algebraicos e transcendentos. XXII Calculo das probabilidades. XXIII Instrumentos eapparelhos analiticos.

A respeito de cada uma d'estas theorias o auctor dá em primeiro logar as definições e as noções fundamentaes, depois os theoremas, sem os demonstrar, e as formulas mais importantes de cada theoria considerada, e finalmente preciosas indicações bibliographicas.

As indicações que vimos de dar a respeito do livro a que nos estamos referindo só nos resta acrescentar que está muito bem redigido e que nos parece destinado a prestar grandes serviços aos que quizerem conhecer o estado actual da Analyse, que encontrarão n'elle um inventario muito bem feito das suas diversas theorias ; aos que tiverem de applicar esta sciencia, que encontrarão n'elle as fórmulas e os theoremas de que podem ter necessidade ; finalmente aos que quizerem iniciar ou continuar o estudo de alguma das suas theorias, que encontrarão n'elle indicação dos melhores trabalhos que podem empregar para esse fim.

---

*J. D. Souto Rodrigues : Goniometria — Coimbra, 1898.*

Esta obra excellente é composta de dois volumes, o primeiro consagrado á Trigonometria rectilinea, e o segundo á Trigonometria espherica e á exposição de algumas noções relativas principalmente á moderna Geometria do triangulo.

O primeiro volume mereceu o ser adoptado para o ensino da Trigonometria rectilinea nos nossos lyceus pela commissão encarregada da escolha dos livros destinados a este fim. Contém as doutrinas exigidas pelos programmas officiaes, dispostas pela ordem seguinte :

PRIMEIRA PARTE (*Funcções goniometricas*). I Preliminares. II Medida dos angulos. Regra dos signaes. Coordenadas. III Razões trigonometricas (definições e variações). IV Primeiras fórmulas (relações entre as funcções trigonometricas). V Funcções inversas. VI Projecções. VII Adição dos angulos. VIII Multiplicação e divisão dos angulos. IX Construcção das taboas. X Uso das taboas.

SEGUNDA PARTE (*Triangulos rectilineos*). I. Equações fundamentaes. II Triangulos rectangulos. III Triangulos obliquangulos. IV Avaliação das áreas. V Medida das distancias e alturas. VI Angulo auxiliar.

O segundo volume contém em primeiro logar a parte essencial da Trigonometria espherica, disposta em sete capitulos, cujos argumentos são: I Preliminares. II Equações fundamentaes. III Eliminação (equações que se deduzem das equações fundamentaes por meio de eliminações). IV Triangulos rectangulos. V Triangulos obliquangulos. VI Áreas.

Contém ainda o mesmo volume seis capitulos consagrados á Geometria do triangulo cujos argumentos são :

I Theorema de Euler (relação entre os seis segmentos de uma recta determinados por quatro pontos). Transversaes. II Pontos isogonos e isotomicos. III Antiparallelas. Symedianas. IV Circulos de Lemoine, de Brocard e de Tucker. V Circulos tritangentes ao triangulo. VI Triangulo orthico.

A exposição das doutrinas tanto do primeiro como do segundo volume é feita com o rigor e clareza necessarias para os usos a que o livro é destinado, e é acompanhada das indicações praticas, applicações e exercicios que um livro d'esta natureza e que tem este destino deve conter para ser util aos alumnos.

---

---

*C. Burali-Forti: Introduction à la Géométrie différentielle suivant la methode de Grassmann.— Paris, Gauthier-Villars, 1897.*

O objecto d'este livro é o calculo geometrico que com o nome de *Ausdehnungslehre* publicou Grassmann em 1844. Este calculo, cujo estudo o sr. Peano simplificou, dando-lhe uma fórma mais concreta, é exposto pelo sr. Burali-Forti com muita clareza e simplicidade, segundo este ultimo modo de o conceber, e é applicado a varias questões elementares de Geometria differencial. Com estas applicações mostra o auctor do livro o poder do methodo considerado, pois que por meio d'elle resolve com grande facilidade algumas questões que pelos methodos ordinarios da Geometria analytica exigem calculos extensos.

O livro está dividido em tres capitulos. No primeiro são expostos os principios e regras do methodo de Grassmann. No segundo é exposta, seguindo este methodo, a parte elementar da Geometria differencial. No terceiro applicam-se as doutrinas consideradas á helice, ás trajectorias orthogonaes, ás curvas de Bertrand e a varias superficies regradás que apparecem na theoria das curvas de dupla curvatura.

A esta rapida noticia accrescentaremos que a leitura do livro, a que vimos de nos referir se faz com grande facilidade e que porisso é muito proprio para se tomar conhecimento do methodo importante a que é consagrado.

---

*G. Fontené: Géométrie dirigée.— Paris, Nony, 1897.*

Este opusculo interessante é consagrado a algumas questões de Geometria elementar relativas aos angulos, em que o auctor entra em consideração com a orientação dos planos e das rectas que os formam. Transportando assim para a Geometria elementar o modo de considerar os angulos que se emprega em Trigonometria, o sr. Fontené consegue vencer certas difficuldades que se encontram na primeira d'estas sciencias.

---

*P. Mansion: Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale. Paris, Gauthier-Villars, 1896.*

Contém este bello opusculo uma exposição muito bem feita dos primeiros principios da Metageometria. Além de um esboço historico e dos estudos preliminares sobre os postuladõs e a origem das tres especies de Geometrias, contém elle vinte e seis proposições communs ás tres Geometrias e varias proposições caracteristicas de cada uma d'ellas.

Mencionaremos ainda tres paragraphos interessantes consagrados o primeiro a mostrar a impossibilidade de demonstrar os postulados, o segundo a determinar qual das tres Geometrias ideaes corresponde ao mundo physico, e o terceiro a analysar as ideias de Kant sobre a Geometria e o espaço.

*W. Rouse Ball: Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes. Paris, Hermann, 1898.*

Este livro foi publicado primeiramente em inglez pelo seu auctor W. Rouse Ball e vem de ser traduzido em francez por J. Fitz-Patrick. É um livro muito interessante, consagrado a recreios mathematicos, alguns dos quaes são muito bellos, e a problemas interessantes da mesma sciencia, que não exige para ser lido grandes conhecimentos mathematicos e que tem em grão elevado a qualidade de instruir, deleitando ao mesmo tempo.

Os assumptos considerados pelo auctor estão dispostos em doze capitulos, dos quaes sete são consagrados a recreios e os restantes a problemas e theorias.

O capitulo I é consagrado a questões de Arithmetica. Vêem n'elle muitos recreios que se podem fazer com numeros, a indicação de varios paradoxos de Arithmetica, a historia de alguns problemas célebres, etc.

O capitulo II é consagrado a questões de Geometria. Contém varios paradoxos geometricos, algumas questões de Geometria de situação, entre as quaes vem a das côres das cartas geographicas, varios jogos de situação e de posição, etc.

O capitulo III é consagrado á Mecânica. N'elle são considera-

das muitas questões inseressantes, taes como o modo de navegar mais depressa do que o vento, o modo de mover um barco por meio de uma corda collocada no seu interior, o vôo das aves, etc.

No capitulo IV vêem varios jogos e recreios, entre os quaes alguns que se fazem sobre um tabolleiro de xadrez e outros que se fazem com um baralho de cartas.

No capitulo V são consideradas varias questões relativas aos quadrados magicos; no capitulo VI e VII são principalmente considerados o problema dos labyrintos e o problema da marcha do cavalleiro sobre um tabolleiro de xadrez.

O capitulo VIII é consagrado á historia dos tres problemas célebres de Geometria — problema da duplicação do cubo, problema da trisecção do angulo e problema da quadratura do circulo.

O capitulo IX é consagrado á exposição da historia e dos methodos de Astrologia.

Finalmente nos capitulos X, XI e XII apresenta o auctor algumas considerações relativas ás propriedades do espaço, do tempo e da materia, indicando as diversas hypotheses que se têm feito a respeito da sua natureza.

Pelas indicações que vimos de dar pôde-se fazer ideia do agrupamento dos assumptos considerados, é necessario porém fazer a leitura do livro para se fazer ideia da riqueza de informações que elle contém e do interesse das questões consideradas.

---

*C. Juel: Elementaer Stereometrie: Kjobenhavn, 1896.*

O livro, cujo titulo acabamos de escrever, é um pequeno volume em que o seu sabio auctor conseguiu reunir tudo o que ha de mais essencial na Stereometria elementar. Contém tudo o que no nosso paiz é exigido pelos programmas d'esta parte da Geometria elementar e ainda as fórmulas de Trigonometria espherica e o estudo das secções plenas do cone.

---

*E. Villié: Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie, t. III. Paris, Gauthier-Villars, 1898.*

Este livro, muito util, contém as soluções de todas as questões propostas na Faculdade das Sciencias de Paris para o acto de licenciado em sciencias mathematicas desde o anno de 1889 até 1896. As questões consideradas são relativas á Analyse, á Cinematica, á Mecanica e á Astronomia.

As questões estão dispostas em capitulos, segundo os assumptos a que se referem. Assim as questões relativas á Analyse, que são sessenta e uma, estão dispostas em oito capitulos em que são respectivamente consideradas as que dizem respeito a quadraturas, equações differenciaes, equações ás derivadas parciaes, trajectorias orthogonaes, raios de curvatura, linhas asymptoticas e linhas geodesicas, questões diversas, variaveis imaginarias.

As questões relativas á Cinematica estão dispostas em tres capitulos, no primeiro dos quaes estão reunidas as questões relativas ao movimento n'um plano, no segundo as relativas ao movimento de um systema invariavel á roda de um ponto, no terceiro as que são relativas ao movimento geral de um systema invariavel.

As questões relativas á Mecanica estão dispostas em tres capitulos, onde são respectivamente consideradas as questões relativas ao movimento de um ponto, ao movimento d'um solido e ao movimento dos systemas.

---

*J. de Mendizábal y Tamborrel: Tratado de Matematica, t. I (Arithmetica). Mejico, 1897.*

O presente livro é o primeiro volume de uma obra que o sr. Tamborrel tenciona publicar, na qual serão considerados os diversos ramos das sciencias mathematicas. É consagrado á Arithmetica e contém a parte mais elementar d'esta sciencia, isto é, a theoria das operações sobre numeros inteiros, a theoria das fracções, a theoria das proporções e o systema metrico-decimal.

A exposição das doutrinas é feita com clerezza, e vê-se pela leitura do livro que o auctor prestou toda a attenção á parte pra-

tica d'esta sciencia tão util. Esta ultima circumstancia levou-o mesmo a junctar ao livro algumas tabellas, a primeira das quaes contém todos os numeros primos até 10:000, a segunda contém a decomposição em factores primos dos numeros até 10:000, a terceira contém os quadrados dos numeros até 10:000, etc.

---

*Slavnort porádáná na pamet 500-Letych narozenin Renea Descartesa. Praze, 1897.*

Contém este opusculo um discurso pronunciado pelo illustre professor da Universidade de Praga sr. Studnicka em uma sessão solemne que teve lugar n'aquella cidade, no dia 6 de dezembro de 1896, para celebrar o terceiro centenario do nascimento de René Descartes. A ideia tão sympathica de celebrar esta data memoravel partiu da Sociedade dos mathematicos bohemios, á qual se uniu, para a realisar, a Sociedade dos philosophos bohemios. O opusculo é acompanhado de uma bella gravura representando um retrato do grande sabio, pintado por Zenisek para esta solemni-  
dade.

---

*Rodolpho Bettazi: Fondamenti per una teoria generale dei gruppi. Roma, 1896.*

A theoria dos grupos de grandezas, creada por Dedekind e Cantor, tem adquirido uma grande importancia por causa das applicações que d'ella se tem feito. No opusculo, que o sr. Bettazi vem de consagrar a este assumpto, são os fundamentos d'esta theoria expostos com muito rigor e clareza, e é feita, em especial, a distincção entre grupos finitos e infinitos, que nos trabalhos anteriores não era feita de um modo isento de difficuldades, que elle indica.

*G. Pirondini: Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable (Journal für Mathematik, Berlin, t. 118).*

O sabio auctor d'esta memoria occupa-se n'ella principalmente das helices cilindro conicas e das helices existentes sobre dous cones. A respeito das primeiras mostra que a helice traçada sobre o cone de revolução e o cylindro cuja secção recta é uma espiral logarithmica não é, como se julgava até aqui, a unica helice cilindro conica existente.

---

*Ventura Reyes Prosper: Note sur le théorème de Pythagore et la Géométrie Non-Euclidienne (Buletin da Sociedade Physico math. de Kasan, 1897).*

N'esta nota demonstra o sabio professor hespanhol que na Geometria não euclidiana o theorema de Pythagoras é falso.

---

*P. Gunther: Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques (Journal des mathématiques. Paris, 1896).*

Este trabalho notavel é a traducção de uma memoria, escripta em lingua allemã, que P. Gunther apresentou como Dissertação inaugural á Universidade de Berlin em 1890. Por elle vê-se qual é a parte que compete a Gauss na fundação da theoria das funcções ellipticas. Accrescentaremos que o auctor d'esta memoria, geometra d'um brilhante talento, foi roubado á sciencia prematuramente na idade de 24 annos apenas.

---

*Alfredo Capelli: Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali*

*col metodo delle classi contigue (Giornale di Matematiche, Napoli, t. XXXV).*

---

Contém este trabalho uma exposição notavelmente clara da theoria dos numeros irracionaes, a qual, para ser comprehendida, não exige outros conhecimentos além da theoria das operações fundamentaes da Arithmetica dos numeros reaes. O methodo empregado para introduzir os numeros irracionaes é o das classes contiguas, que o auctor compara com o de Dedekind.

---

*R. Marcolongo: Formole per la composizione di più movimenti finiti (Annali di Matematica pura ed applicata, Milano, 1897).*

N'esta memoria importante apresenta o sr. Marcolongo formulas para a composição de muitas rotações finitas á roda de eixos concorrentes ou á roda de eixos não concorrentes. Apresenta tambem fórmulas para a composição de dous ou mais movimentos finitos helicoidaes.

---

*G. Vailati: Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze. Torino, 1896.*

Contém este opusculo uma bella prelecção feita pelo sr. Vailati na Universidade de Turin como introducção a um curso sobre a historia da Mecanica. N'elle faz ver o auctor a importancia que têm os estudos relativos á historia das sciencias, principalmente no caso das sciencias mathematicas.

---

*M. d'Ocagne: Karl Weierstrass (Revue des questions scientifiques, 1897).*

Contêm este artigo uma noticia muito interessante sobre a vida e os trabalhos scientificos de Weierstrass.

*A. Cabreira: Sobre a Geometria da espiral, Lisboa, 1896.*

— *Sobre as propriedades geometricas da espiral de Poinot, Lisboa, 1896.*

— *Sobre a Geometria das curvas trigonometricas, Lisboa, 1896.*

D'estes tres opusculos interessantes os dous primeiros são consagrados á Geometria das espiraes e o terceiro á Geometria das curvas em que o raio vector é uma funcção trigonometrica do angulo vector.

O primeiro opusculo contém tres capitulos, onde são respectivamente estudadas a espiral parabolica de ordem  $n$ , definida pela equação  $r^n = \frac{b}{\pi} \alpha^n$ , a espiral hyperbolica e a espiral logarithmica. A respeito de cada uma d'estas curvas apresenta o auctor muitos theoremas, uns relativos a relações entre os elementos de cada curva, outros relativos ás relações dos elementos de umas curvas com os de outras.

No segundo opusculo são expostas algumas propriedades da espiral de Poinot.

No terceiro opusculo são consideradas algumas propriedades relativas ás relações que têm umas com as outras as curvas representadas pelas equações, em coordenadas polares,

$$r = \alpha \operatorname{sen} \omega, \quad r = \alpha \operatorname{cos} \omega, \quad r = \alpha \operatorname{tang} \omega,$$

$$r = \alpha \operatorname{cot} \omega, \quad r = \alpha \operatorname{sec} \omega, \text{ etc.}$$

L. F. Marrecas Ferreira: *Calculo dos movimentos de uma viga de n tramos collocada sobre apoios* (Revista de Obras publicas, 1896).

N'este trabalho occupa-se principalmente o distincto engenheiro da applicação dos determinantes á resolução das equações que resultam do theorema de Clapeyron, no calculo dos movimentos de uma viga de  $n$  tramos collocada sobre apoios.

---

L.<sup>t</sup> Colonel R. du Ligondès: *Formation mécanique du système du monde*. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

Tres hypotheses notaveis têm sido apresentadas para explicar a formação dos mundos — a de Kant, a de Laplace e a de Faye. No livro que vimos de annunciar, o sr. Ligondès apresenta uma nova hypothese, que se approxima da de Faye, sem que lhe sejam applicaveis as objecções que contra ella apresentou Wolf no livro intitulado *Les hypothèses cosmogoniques*. Segundo o sr. Ligondès, o Universo reduzia-se na origem a um chaos geral extremamente raro, formado de elementos diversos movidos em todos os sentidos e submettidos ás suas attracções mutuas. Este principio é exposto no capitulo 1 do livro, onde também são analysadas as hypotheses de Kant, Laplace e Faye; os restantes capitulos são consagrados a demonstrar as suas consequencias, sendo o segundo consagrado ao systema solar, o terceiro, quarto, quinto, sexto e setimo aos planetas, o oitavo aos systemas planetarios, o nono aos cometas. Nos capitulos decimo e undecimo são expostas algumas confirmações da hypothese considerada, tiradas da Geologia e do estudo do Céu.

Terminaremos esta rapida noticia aconselhando a leitura d'este trabalho, que é vivamente interessante.

---

••

*Ormond Stone: Nebula of Orion (Publications of the Leander Mc Cormick Observatory, 1896),*

Contém este opusculo as observações da Nebulose de Orion feitas no intervallo de 1886 a 1894, no Observatorio da Universidade de Virginia, pelo sabio director d'este Observatorio sr. O. Stone.

---

*Annuaire pour l'anné 1898 publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars.*

Além das informações e tabellas que é uso conter esta publicação, o volume presente traz as seguintes interessantes noticias scientificas :

- 1.º *Sobre alguns progressos recentemente realizados por meio da photographia no estudo da superficie lunar, por Loewy e Puiseux.*
- 2.º *Sobre a estabilidade do systema solar, por H. Poincaré.*
- 3.º *Noticia sobre a obra scientifica de H. Fizeau, por A. Cornu.*
- 4.º *Sobre os trabalhos executados no Observatorio do Monte Branco em 1897, por J. Janssen.*
- 5.º *Discursos pronunciados no cinquentenario academico de M. Faye, por J. Janssen e Loewy.*

---

*Vincenzo Reina: Sulla lunghezza del pendulo semplice a secondi in Roma (Memorie della R. Accademia dei Lincei, série v, t. 1).*

Ha alguns annos, os professores Pisati e Pucci tomaram sobre si o encargo de determinar o comprimento do pendulo de segundos em Roma. Sendo, porém, surprehendidos pela morte antes de terminarem o seu trabalho, o sr. Reina encarregou-se da missão de completar e preparar para a publicação os materiaes junctos por aquelles professores. São estes trabalhos que constituem a memoria cujo titulo foi dado no principio d'esta noticia, memoria

cuja leitura é das mais instructivas, porque contém a descripção dos instrumentos empregados para as observações e uma exposição detalhada dos methodos empregados para resolver o problema a que ella se refere.

---

*Vicenzo Reina: Azimut assoluto di Monte Cavo sull' orizzonte della Specola geodetica di S. Pietro in Vincoli. Padova, 1894.*

Este trabalho importante contém tres partes. Na primeira é estudado o instrumento empregado para fazer as observações; na segunda vêm as observações feitas e a descripção do methodo empregado para as fazer; a terceira refere-se á ligação da *Specola* com a rêde de 1.<sup>a</sup> ordem italiana.

---

*V. Reina e G. Cicconetti: Ricerche sur coefficiente di rifrazione terrestre eseguite in Roma nel 1895 (Memorie della Società italiana delle Scienze, serie III, t. X, 1896).*

A Associação geodesica internacional, na reunião que teve em Roma em 1883, approvou uma proposta em que se exprimia o desejo de ver multiplicar as indagações sobre a refração terrestre, nos estados que fazem parte da Associação, a fim de se conhecer a influencia que as circumstancias locais e as condições climatericas exercem sobre este phenomeno.

Para satisfazer a este voto, os srs. V. Reina e G. Cicconetti realisaram em Roma uma serie de observações, que são o objecto da presente memoria importante.

Os instrumentos empregados para medir as distancias zenithaes foram dous theodolitos, cujo exame constitue a primeira parte da memoria. A segunda parte é consagrada á exposição das operações que fizeram para obter a differença do nivel entre as estações em que se fizeram as observações. Na terceira parte são apresentadas as observações zenithaes e são deduzidos os valores do coefficiente medio de refração.

Finalmente na quarta parte são comparados os valores dos coefficients de refracção dados pelas observações com os que dá a theoria.

---

*L. Lorenz: Oeuvres scientifiques; Copenhague, tomo 1, 1898.*

Sendo grande a importancia e o interesse das obras scientificas do eminente sabio dinamarquez L. Lorenz, a fundação Carlsberg de Copenhague resolveu publicar uma edição onde as reunisse todas, a qual constará de dous volumes. Um d'estes volumes está já publicado e contém as memorias seguintes, escriptas em lingua franceza:

- 1.<sup>a</sup> Determinação da direcção das vibrações do ether luminoso pela polarisação da luz diffractada.
- 2.<sup>a</sup> Sobre a reflexão da luz na superficie de dous meios transparentes e isotropos.
- 3.<sup>a</sup> Determinação da direcção das vibrações do ether pela reflexão e pela refracção da luz.
- 4.<sup>a</sup> Sobre a theoria da luz.
- 5.<sup>a</sup> Sobre a theoria da luz.
- 6.<sup>a</sup> Sobre a identidade das vibrações da luz e das correntes electricas.
- 7.<sup>a</sup> e 8.<sup>a</sup> Indagações experimentaes e theoreticas sobre os indices de refracção.
- 9.<sup>a</sup> Theoria da dispersão.
- 10.<sup>a</sup> Sobre a luz reflectida e refractada por uma esphera transparente.

Todas estas memorias foram revistas pelo sr. Valentiner e são acompanhadas por notas em que este illustre sabio rectifica algumas passagens e esclarece ou commenta outras.

---

*P. Mansion: Melanges de Géométrie euclidienne et non euclidienne.*

Contém este opusculo uma serie de artigos cheios de interesse

que a respeito da Geometria não euclideana o sr. Mansion publicou em varias collecções scientificas e ainda uma exposição elementar muito bem feita d'esta Geometria.

*N. Charruit: Cours de Géométrie cotée. Paris. Nony e C.<sup>ie</sup>, 1898.*

Este livro é, como o seu titulo o indica, consagrado a expor e applicar o methodo de Geometria descriptiva a que se dá o nome de methodo das projecções cotadas. Contém toda a parte mais essencial d'esta doutrina e está escripta com uma clareza tal, que se póde vivamente recommendar aos alumnos da cadeira de Geometria descriptiva das nossas escolas, que n'elle encontrarão um excellente auxiliar para os guiar no estudo da doutrina a que é consagrado.

Os assumptos considerados pelo sr. Charruit estão dispostos pelas quatro partes em que é dividido o livro do modo seguinte:

Na primeira parte são expostos os primeiros principios da Geometria descriptiva (pag. 1 a 45).

Na segunda parte principia o estudo da Geometria cotada e são n'ella expostos os primeiros principios d'esta Geometria, os seus methodos geraes e a applicação d'estes methodos a diversas questões de distancia e angulos e a diversas questões relativas aos polyedros (pag. 46 a 114).

A terceira parte é destinada á Geometria das curvas e superficies. Contém os principios geraes relativos á representação das curvas e das superficies, e á determinação dos planos tangentes, e depois a applicação d'estes principios ao cylindro, ao cone e ás superficies de revolução (pag. 117 a 185).

Na quarta parte são expostos os methodos geraes para a determinação das secções planas das superficies e a sua applicação á esphera, ao cylindro e ao cone (pag. 187 a 258).

Contém ainda o livro um numero consideravel de bons exercicios para os alumnos se desenvolverem nas applicações das doutrinas expostas.

Na exposição dos assumptos o auctor não se limitou a consi-

derar as questões, de que se occupa, debaixo do ponto de vista graphico. Acompanham sempre os theoremas de Geometria das superficies, que emprega, as suas respectivas demonstrações.

---

*Gino Loria: Bolletino di Bibliografia e storia delle scienze matematiche. Torino.*

É este o titulo de uma nova publicação periodica, consagrada á historia e á bibliographia das sciencias mathematicas, que acaba de ser fundada pelo sr. Gino Loria. A competencia especial do sabio professor da Universidade de Genova para este genero de trabalhos, no qual tem adquirido um nome notavel, faz esperar para esta publicação um pleno successo.

Os numeros até hoje publicados do novo jornal são vivamente interessantes. Contêm trabalhos historicos, noticias sobre algumas publicações recentes, biographies de alguns mathematicos recentemente fallecidos, programmas de alguns cursos mathematicos universitarios e muitas noticias proprias a interessar os mathematicos de todos os paizes.

A publicação do *Bolletino* é feita em Turin pelo editor Carlo Clausen em fasciculos trimensaes de 32 paginas, pelo menos.

---

*Robert Ball: The twelfth and concluding Memoir on the theory of screws (Transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXXI).*

Esta bella e importante memoria é a ultima de uma serie de doze memorias que o sr. Robert Ball consagrou á theoria dos eixos da rotação, a qual teve a sua origem nos trabalhos de Poincot, relativos á rotação de um corpo solido á roda de um ponto fixo. N'esta serie de trabalhos o illustre professor da Universidade de Cambridge generalisa successivamente o problema de Poincot, considerando todos os casos desde aquelle em que existe um eixo unico de rotação até ao caso em que o corpo, sendo inteiramente livre, é capaz de se mover á roda de qualquer eixo no espaço. Esta generalisação do-problema levou-o a fazer uma generalisação

correspondente do systema de forças que actuam sobre o corpo, o qual no caso considerado por Poinot se reduzia a um binario.

---

*M. d'Ocagne: Sur la méthode nomographique la plus générale résultant de la position relative de deux plans superposés (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1898).*

— *Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à trois et à quatre variables (Bulletin de la Société mathématique de France, 1898).*

Temo-nos referido por varias vezes n'este jornal aos trabalhos importantes do sr. d'Ocagne, relativos ao ramo das sciencias mathematicas que elle fundou e a que deu o nome de Nomographia. Os dous trabalhos presentes são relativos a este assumpto e é n'elles considerado o problema mais geral de Nomographia, que tem por fim determinar todos os modos possiveis de representação plana, por meio de elementos (pontos ou curvas) cotados, das equações com um numero qualquer de variaveis. No primeiro d'estes trabalhos e na primeira parte do segundo é exposto o principio geral do methodo. No resto do segundo faz-se applicação do methodo geral ás equações com tres e com quatro variaveis e são considerados, como exemplos, alguns abacos importantes.

---

*G. Loria: Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva (Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1897).*

N'esta interessante noticia demonstra o sr. G. Loria que Torricelli rectificou a espiral logarithmica e que esta rectificação foi feita antes de Neil fazer a rectificação, até hoje considerada a primeira, da parabola semi-cubica.

---

*L. F. Marrêças Ferreira: Sobre a decomposição das forças n'um plano (Revista de obras publicas e minas, t. XXVIII).*

N'este artigo é exposta com muita clareza e bom methodo a doutrina da decomposição das forças existentes n'um plano.

---

*R. Guimarães: Sobre o integral de uma equação notavel (Jornal de sciencias math., physicas e naturaes, 1897).*

Contém este artigo um novo methodo para integrar a equação differencial de um systema de cônicas homofocaes.

---

*Jorge Frederico d'Avillez: Sobre algumas applicações dos determinantes á Geometria do triangulo. (Jornal de sciencias math., physicas e naturaes, 1897).*

Notam-se n'este trabalho muitas relações interessantes entre os elementos de um triangulo, nas quaes figuram determinantes.

---

*A. Cabreira: Sobre a área dos polygonos semi-regulares (Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes, 1897).*

— *Sobre a área dos polygonos regulares (Item).*

Contém o primeiro d'estes artigos algumas relações entre as áreas dos polygonos regulares inscriptos e circumscriptos ao cir-

culo e as áreas dos polygonos semi-regulares, inscriptos e circumscriptos á ellipse, que se obtêm projectando-os sobre um novo plano.

No segundo artigo são apresentadas varias relações entre as áreas de alguns polygonos regulares inscriptos em um mesmo circulo.

---

*A. Cabreira: Descoberta e primeiras propriedades geometricas de uma espiral binomia do primeiro gráo (Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes, 1897).*

O auctor apresenta algumas propriedades da curva representada pela equação, em coordenadas polares,

$$r^m - r^n = (\alpha^m - \alpha^n) \frac{\theta}{\pi}.$$

---

*G. Pirondini: Quelques propriétés des surfaces moulures (Journal des mathématiques, Paris, 1897).*

---

*M. d'Ocagne: Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (Acta mathematica, t. XXI).*

— *Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général (Bulletin de la Société mathématique de France, 1895).*

— *Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables (Item, 1896).*

— *Les propriétés focales des coniques obtenues au moyen de la méthode des polaires réciproques (Nouvelles Annales, 1895).*

— *Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée en un de ses points un contact d'ordre supérieur (Item, 1897).*

*M. Hamburger: Neuer Beweis der Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung (Nach einer Mittheilung von Paul Gunther) (Journal für Mathematik, t. 118.)*

---

*R. Bettazzi: Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo (Atti della R. Accademia di Torino, 1897).*

---

*F. Gerbaldi: Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1898).*

---

*G. Vivanti: Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione Pfaffiana (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1897).*

---

*T. Levi-Civita: Sui numeri transfiniti (Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1898).*

---

A. Gützmer: Zum existenzbeweise des Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung von Paul Gunther (*Journal für die Mathematik*, t. 119).

---

E. Cesàro: Sur la représentation analytique des régions et des courbes qui les remplissent (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1897).

---

P. H. Schoute: Sur les focales planes d'une courbe plane à un ou plusieurs axes de symétrie (*Comptes rendus de l'Académie de Paris*, 1897).

---

E. Carvallo: Recherches de précision sur la dispersion infra rouge du quartz (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1898).

— Recherches de précision sur la dispersion infra rouge du spath d'Islande (*Item*).

---

Macfarlane: On the theory of the quadratic equation (*Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, 1897).

— On discharge of Condenser (*Item*).

---

- V. Reina: *Sulla determinazione dei raggi di curvatura di una superficie per mezzo di misure locali sopra di essa (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1895).*
- *L'attrazione locale nella Specula geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma (Ibidem, 1895).*
- *Sulla probabilità degli errori di situazione di un punto nello spazio (Ibidem, 1897).*
- *Della compensazione nella determinazione di un punto da n punti dati (Rivista di Topografia e Catasto, Roma, 1893).*
- *Il calcolo di compensazione nel problema generale di Hansen (Ibidem, 1894).*
- *Una legge di dualità della teoria della compensazione delle osservazioni (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1894).*

---

Gino Loria: *Matematica, Mantova, 1896.*

Definição de Mathematica. Classificação dos ramos em que se divide. Resumo da sua historia. Organização dos estudos mathematicos na Italia.

---

Sonin et Ch. Hermite: *Sur les polynomes de Bernoulli (Journal für die reine undl angew. Math., t. 116).*

---

E. Goursat: *Sur les équations linéaires et la methode de Laplace (American Journal of Mathematics, t. XVIII).*

---

Dr. Studnicka: *O determinantech mocninnych a sestavných, Praze, 1897.*

*E. Lemoine* : *Considérations générales sur la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques et application à la évaluation théorique de la simplicité des tracés géométriques ou Géométopographie* (Congress Mathematical Papers, Chicago, t. 1).

— *Règles des analogies dans le triangle et transformation continue* (*Ibidem*).

---

*G. Peano* : *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie* (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1897*).

---

*M. Lerch* : *Sur quelques analogies des sommes de Gauss* (*Bulletin de la Société R. bohém. des Sciences, Prague, 1897*).

— *Expressions nouvelles de la constante de Euler* (*Ibidem*).

— *Über die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Function* (*Monatsheft für Mathematik, t. VIII*).

— *Sur quelques formules relatives au nombre des classes* (*Bulletin des sciences mathématiques, 1897*).

---

*S. Pincherle* : *Appunti di calcolo funzionale distributivo* (*Rend. del R. Ist. Lomb. di scienze, 1897*).

---

*E. Lampe* : *Arthur Cayley und J. Sylvester. Nachruf* (*Naturwissenschaftlichen Rundschau, XII*).

— *Sur quelques erreurs dans les — Nuove Tavole delle funzioni iperboliche — de M. A. Forti* (*Atti della R. Accademia di Torino, 1897*).

---

G. Veronese: *Sul postulato della continuità* (*Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1897*).

— *Segmenti e numeri transfiniti* (*Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1898*).

---

A. Capelli: *Per la commemorazione di James Joseph Sylvester* (*Rend. della R. Accademia di Napoli, 1897*).

---

Studnicka: *Neuer Beitrag zur Theorie der Potenz- und Kombinations-Determinanten* (*Sitzungsbericht der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Prag, 1897*).

G. T.

---

## LES COMPOSANTES DE DÉFORMATION D'UN MILIEU CONTINU

PAR

R. MARGOLONGO

Professeur à l'Université de Messina

Si deux portions quelconques  $s$  et  $S$  d'un milieu continu sont telles que  $S$  se déduit de  $s$  par un mouvement de corps rigide, combiné ou non avec une transformation par symétrie, on dit que le milieu n'a pas reçu de déformation (\*).

Les coordonnées  $X_i$  d'un point de  $S$  sont des fonctions linéaires des coordonnées  $x_i$  du point correspondant de  $s$ ; leur déterminant est égal à  $\pm 1$ .

Dans tout autre cas, on a une déformation du milieu. Posons :

$$X_i = x_i + u_i; \quad (1)$$

les  $u_i$  sont les composantes du déplacement du point. Soient  $ds$  et  $dS$  les éléments linéaires de  $s$  et  $S$ ; on a :

$$dS^2 - ds^2 = 2 \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} dx_i dx_k, \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\delta u_i}{\delta x_k} + \frac{\delta u_k}{\delta x_i} + \sum_h \frac{\delta u_h}{\delta x_k} \frac{\delta u_h}{\delta x_i}. \quad (3)$$

(\*) Voir l'important mémoire de E. et F. Cosserat «Sur la théorie de l'élasticité» Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome x.

La fonction :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = \sum (1 + 2\varepsilon_{ii}) x_i^2 + 2 \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} x_i x_k, \quad (4)$$

joue un rôle important ; c'est, suivant Beltrami, la fonction caractéristique de la déformation. On a :

$$\varphi(dx_1, dx_2, \dots) = dS^2.$$

Le discriminant de  $\varphi$  est le carré du déterminant fonctionnel  $\Delta$  des  $X_i$  par rapport aux  $x_i$ . Si

$$\varepsilon_{ik} = 0$$

dans tout le milieu, les éléments linéaires ne seront pas déformés.

Les quantités  $\varepsilon_{ik}$  sont les composantes de déformation du milieu.

Je veux démontrer ce théorème :

*La déformation du milieu est nulle, si ses composantes sont nulles :*

Considérons les identités suivantes :

$$\frac{\delta \varepsilon_{hk}}{\delta x_i} + \frac{\delta \varepsilon_{ik}}{\delta x_h} - \frac{\delta \varepsilon_{ih}}{\delta x_k} = \sum_l \frac{\delta X_l}{\delta x_k} \frac{\delta^2 u_l}{\delta x_h \delta x_i}.$$

pour toutes les valeurs de  $i, h, k$ . Mais puisque  $\varepsilon_{ik} = 0$ , le déter-

minant fonctionnel

$$\Delta = \sum \pm \frac{\delta X_1}{\delta x_1} \frac{\delta X_2}{\delta x_2} \dots$$

est égal à  $\pm 1$ , et les systèmes d'équations :

$$\sum_l \frac{\delta X_l}{\delta x_k} \frac{\delta^2 u_l}{\delta x_h \delta x_i} = 0$$

nous donnent :

$$\frac{\delta^2 u_i}{\delta x_h \delta x_i} = 0$$

pour toutes les valeurs de  $h$  et  $i$ . Les  $u_i$  sont donc des fonctions linéaires des  $x_i$ ; c'est à dire :

$$X_i = a_i + \sum a_{il} x_l. \tag{5}$$

Mais les équations (3), où l'on fait  $\epsilon_{ik} = 0$ , nous donnent les relations :

$$\sum_l a_{li}^2 = 1, \quad \sum_l a_{li} a_{lk} = 0, \quad (i \geq k).$$

Donc les  $a_{il}$  sont les coefficients constants d'une substitution orthogonale directe ou inverse; le théorème est démontré.

..

On déduit encore que :

*Deux déformations ayant les mêmes composantes, ne peuvent différer que par un mouvement de corps rigide combiné ou non avec une transformation par symétrie.*

On arrive aux mêmes formules (5) supposant constantes les  $\varepsilon_{ik}$ ; les  $a_{ik}$  satisfont alors aux relations :

$$\sum_i a_{ii}^2 = (1 + 2\varepsilon_{ii})^2; \quad \sum_l a_{li} a_{lk} = 2\varepsilon_{ik} \quad (i \geq k). \quad (6)$$

C'est le cas, très important, de la déformation homogène de Thomson.

Considérons deux segments  $r_\alpha, r_\beta$  aboutissant à un même point de  $s$ , origine des coordonnées et formant un angle  $\omega$ ; soient  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ;  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$  leurs cosinus directeurs. Après la déformation homogène,  $r_\alpha, r_\beta, \omega$  sont devenus  $r'_\alpha, r'_\beta, \omega'$ ;  $\alpha_i, \beta_i$  se sont transformés en  $\alpha'_i, \beta'_i$  et l'on trouve :

$$r'_\alpha \alpha'_i = r_\alpha \sum_l a_{il} \alpha_l; \quad r'_\beta \beta'_i = r_\beta \sum_l a_{il} \beta_l;$$

par conséquent :

$$2r'_\alpha r'_\beta \cos \omega' = r_\alpha r_\beta \sum_l \alpha_l \frac{\delta \varphi}{\delta \beta_l} = r_\alpha r_\beta \sum_l \beta_l \frac{\delta \varphi}{\delta \alpha_l}. \quad (7)$$

De cette formule générale on déduit que :

$$r'^2_\alpha = r^2_\alpha \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots),$$

et que :

$$2 \cos \omega' \sqrt{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots)} = \sum_l \alpha_l \frac{\delta \varphi}{\delta \beta_l}$$

Les droites issues d'un même point et parallèles aux axes coordonnés ont pour *coefficients de dilation linéaire* :

$$-1 + \sqrt{1 + 2\epsilon_{ii}}$$

et après la déformation, forment entre elles des angles dont les cosinus sont :

$$\frac{2\epsilon_{ik}}{\sqrt{(1 + 2\epsilon_{ii})(1 + 2\epsilon_{kk})}}$$

L'équation :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = \text{const.}$$

représente un ellipsoïde qui se transforme dans la sphère :

$$\sum X_i^2 = \text{const.}$$

On l'appelle ellipsoïde de déformation ; ses axes sont les droites principales de déformation et restent orthogonales dans la déformation. Leur recherche conduit aux équations :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_i} = 2kx_i$$

où

$$k = \frac{r'^2}{r^2}$$

est racine d'une équation bien connue.

La surface de second degré

$$\psi(x_1, x_2, \dots) = \sum \epsilon_{ik} x_i x_k = \text{const.}$$

a les mêmes axes de l'ellipsoïde  $\varphi = \text{const}$ , car :

$$\varphi = \sum x_i^2 + 2\psi.$$

Les carrés des rayons de  $\psi$  augmentent tous de la même quantité.

Enfin :

$$\psi = 0$$

est l'équation du cône des dilatations nulles.

Messine, janvier, 1899.



## BIBLIOGRAPHIA

*P. Appell: Eléments d'Analyse mathématique. Paris, G. Carré et C. Naud, 1898.*

Contém esta obra importante o curso que a respeito da Analyse infinitesimal o sr. Appell professa ha muitos annos na Escola central de artes e manufacturas de Paris. Escripita por um geometra eminente, que domina completamente o assumpto sobre que escreveu e que, pela sua posição entre o professorado da Escola para cujos alumnos a destinou, conhece quaes as materias de maior utilidade para os que estudam a Analyse como preparação para os estudos de engenharia e qual a fórma debaixo da qual lhes convém mais aprendel-a, esta obra está destinada a prestar grandes serviços não só aos alumnos da Escola para os quaes foi escripita, mas aos alumnos das Escolas de engenharia de todos os paizes.

Na escolha dos assumptos, sobre que escreveu, o sr. Appell procedeu de modo a não deixar de tocar em todos os pontos de que as pessoas a que o livro é destinado possam necessitar, dando mais desenvolvimento áquelles de cujo conhecimento elles mais carecem; na exposição d'estes assumptos empregou a fórma mais apropriada ao fim do livro. A respeito d'esta ultima circumstancia devemos observar que é por intermedio da Geometria e da Mecanica que a Analyse infinitesimal intervém principalmente nas questões de Engenharia; por isso o illustre auctor do livro deu ás suas demonstrações a fórma geometrica, tanto quanto possivel, e desenvolveu muito o quadro das applicações das theorias expostas á Geometria.

Uma difficuldade que se encontra no estudo dos assumptos da Analyse infinitesimal provém dos desenvolvimentos que é necessa-

rio dar ás demonstrações em que entram considerações de limites e de infinitamente pequenas para lhes dar o rigor que actualmente se exige, e muitas vezes para evitar difficuldades subtis, que os que principiam o estudo d'esta sciencia e mesmo os que não têm sobre ella pensado maduramente não podem apreciar completamente. Para evitar esta difficuldade o sr. Appell considerou muitas vezes estes desenvolvimentos em notas fóra do texto, que o leitor póde deixar de considerar quando estuda pela primeira vez o assumpto.

O livro a que nos estamos referindo está dividido em 24 capitulos, onde são estudados simultaneamente os assumptos do Calculo differencial e do Calculo integral. Este estudo simultaneo dos dous calculos permite ao auctor desenvolver mais cêdo o quadro das applicações geometricas e aproveitar os principios do Calculo integral para a demonstração de algumas proposições de Calculo differencial. A seguinte indicação succinta do objecto de cada um d'aquelles capitulos póde dar uma ideia, ainda que ligeira, de quaes os assumptos que são considerados e da sua disposição na obra: I Infinitamente pequenos. Diferenciaes. II Funções primitivas. Integraes indefinidos. Integraes definidos simples. Applicações á medida das áreas planas. III Volume d'um solido de bases parallelas. IV Rectificação das curvas. Áreas das superficies de revolução e das superficies conicas. V Alguns methodos de integração. VI Desenvolvimento de uma função em serie de potencias inteiras e positivas da variavel. VII Desenvolvimento de uma função em serie trigonometrica. Expressão de um polynomio em função dos valores medios do polynomio e de suas derivadas em um intervallo. VIII Integraes definidos cujo elemento differencial se torna infinito ou do qual um limite se torna infinito. IX Tangente a uma curva plana. Maximos e minimos de uma função de uma variavel. X Curvas empenadas. Tangente. Plano osculador. XI Função de duas variaveis. Plano tangente a uma superficie. Maximos e minimos. XII Envoltentes das curvas e das superficies. XIII Curvatura das curvas planas. XIV Curvatura e torsão das curvas empenadas. XV Curvatura das linhas traçadas sobre uma superficie. Curvatura das superficies. XVI Linhas particulares traçadas sobre uma superficie. XVII Diferenciação dos integraes. Integração das diferenciaes totaes. Integraes tomados ao longo de uma curva. XVIII Integraes duplos e triplos. Applicações. XIX Equações diferenciaes de primeira

ordem. XX Equações differenciaes de segunda ordem e de ordem superior. XXI Equações differenciaes lineares. XXII Systemas de equações differenciaes simultaneas com uma variavel independente. XXIII Alguns exemplos de equações ás derivadas parciaes. Equações de primeira ordem. XXIV Valor numerico de um integral definido. Methodos de approximação. Integradores.

---

*E. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars, 1898.*

Contém este bello e importante trabalho algumas conferencias feitas pelo sr. Borel na Escola Normal Superior de Paris. O objecto d'ellas é a theoria dos aggregados nas suas relações com a theoria das funcções analyticas. Não contém, pois, nem uma exposição systematica da theoria dos aggregados nem também da theoria das funcções analyticas; contém sim a parte d'aquella theoria que tem applicações na segunda e contém estas applicações.

Os tres primeiros capitulos do livro são consagrados á theoria dos aggregados. N'elles são expostos com muita clareza e elegancia os principios d'esta importante theoria, de que o auctor tem de fazer uso, e a sua applicação á theoria dos numeros algebricos. Os capitulos restantes são consagrados ás applicações da theoria dos aggregados á theoria das funcções. A este respeito é estudada no capitulo 4.º a noção de prolongamento analytic das funcções, devida a Weierstrass, é demonstrado o theorema de Poincaré segundo o qual se póde definir toda a funcção analytica por meio de um aggregado numeravel de elementos  $P(x-a)$ , e é dado um methodo simples para formar series de funcções uniformes que representam em diversas regiões do plano funcções analyticas diversas. No capitulo 5.º é demonstrada a convergencia de algumas series de que depois o auctor faz uso. No capitulo 6.º é estudada profundamente a noção de funcção analytica; encontram-se n'elle considerações cheias de interesse e de finura de vistas sobre esta noção e sobre os methodos para a representação analytica das funcções uniformes.

Contém ainda o volume a que nos estamos referindo tres notas interessantes. Na primeira é continuado o estudo da noção de

potencia de um aggregado, da qual o auctor se tinha já occupado no capitulo 1.º Na segunda é estudado um theorema notavel de P. du Bois-Reymond sobre o crescimento das funcções e são considerados os numeros maiores do que o infinito, introduzidos por Cantor. Na terceira são considerados os diversos sentidos em que se póde tomar a noção de *funcção*.

---

*H. Weber : Traité d'Algèbre supérieure, traduit de l'allemand par J. Griess. Paris, Gauthier-Villars.*

Com o nome de *Lehrbuch der Algebra* publicou em 1894 o sr. H. Weber um tratado de Algebra, em dous volumes, que teve um tal successo que a edição se esgotou rapidamente. Uma segunda edição foi publicada em 1898 pelo auctor, e foi sobre esta edição que o sr. Griess, querendo concorrer para augmentar o numero de leitores da obra magistral do eminente professor de Strasbourg, fez uma traducção franceza, da qual acaba de ser pulicado o primeiro volume.

No tratado de Algebra a que nos estamos referindo é exposta esta sciencia com todo o desenvolvimento que tem adquirido nos ultimos tempos, e esta exposição é feita de modo a ser facilmente comprehendida pelo leitor, sem exigir n'elle grandes conhecimentos preliminares, e de modo a conduzil-o gradualmente até aos pontos elevados e difficeis da sciencia considerada.

O primeiro volume da obra, o unico que agora temos de considerar, contém dezoito capitulos, cada um dos quaes encerra uma quantidade consideravel de assumptos aggrupados do modo seguinte: I Funcções racionaes. II Determinantes. III As raizes das equações algebraicas. IV Funcções symetricas. V Transformação linear. Invariantes. VI Transformação de Tschirnhausen. VII Realidade das raizes. VIII Theorema de Sturm. IX Limites do numero e do valor das raizes. X Aproximação das raizes. XI Fracções contínuas. XII Raizes da unidade. XIII Theoria de Galois. XIV Applicação dos grupos de permutações ás equações. XV Equações cyclicas. XVI Divisão do circule em partes eguaes. XVII Resolução algebraica das equações. XVIII Raizes das equações metacyclicas.

A exposição de todos estes assumptos é feita com muita clareza, elegancia e profundeza. Porisso, pela riqueza dos assumptos considerados e pela feição moderna que lhe deu o auctor é esta notavel obra indispensavel a todos os que quizerem estudar com desenvolvimento a Algebra e conhecer os seus mais modernos progressos.

---

*Ch. Méray: Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Quatrième partie. Paris, Gauthiers-Villars, 1899.*

Os tres primeiros volumes d'esta obra são, como já aqui o dissemos, consagrados á exposição dos principios e methodos geraes da Analyse infinitesimal e ás applicações a algumas categorias de funcções particulares. No volume presente estão reunidas todas as applicações geometricas d'esta sciencia, que o auctor julgou dever expôr.

Seguindo o plano adoptado nos volumes anteriores, o sr. Méray continua n'este, como é natural, a banir as considerações de infinitamente pequenos e a fundar-se unica e exclusivamente na theoria das series inteiras. Tambem, como nos volumes anteriores, expõe de preferencia as doutrinas e methodos geraes, deixando a outros o encargo, relativamente facil, de desenvolver, segundo o mesmo modo de vêr, as questões importantes, mas de natureza mais particular, que se encontram nos manuaes de Calculo infinitesimal e que, por causa das applicações que têm, é necessario estudar. N'esta exposição trata simultaneamente as questões relativas á Geometria plana e á Geometria do espaço, considerando as primeiras como um caso particular das segundas.

Os assumptos que o sr. Méray considera n'este volume estão distribuidos por oito capitulos. No primeiro trata elle das rectificações das curvas, das quadraturas das áreas e da cubatura dos solidos. No segundo e terceiro vem a theoria geral dos contactos e a applicação d'esta theoria ao caso do contacto das superficies e das curvas com as figuras do primeiro gráo. No quarto vem a theoria das figuras envolventes. No quinto vem a applicação da theoria do contacto ao caso do contacto de primeira ordem entre a esphera ou o circulo e figuras dadas. No capitulo sexto são

estudadas primeiramente as propriedades mais importantes dos cylindros, cones e d'outras superficies planificaveis, depois as propriedades mais importantes das superficies empenadas e das superficies de revolução. No capitulo setimo é applicada a theoria do contacto ao caso dos contactos de ordem superior de uma linha com o circulo e a esphera. No capitulo oitavo são estudadas algumas questões relativas aos contactos de segunda ordem de uma superficie com o circulo e a recta.

Como se vê por esta indicação do objecto dos diversos capitulos, dous assumptos geraes são estudados n'este volume da obra do sr. Méray, aos quaes se referem todas as questões estudadas. São elles a theoria da medida das grandezas geometricas e a theoria dos contactos. A esta ultima theoria é ligada a theoria dos tangentes e dos planos tangentes, a theoria das normaes e dos planos normaes, a theoria da curvatura, etc.

Para terminar esta noticia só nos resta dizer que o volume a que acabamos de nos referir é o ultimo da obra importante e cheia de originalidade a que o sr. Méray consagrou todos os seus esforços, e á qual por varias vezes nos temos referido n'este jornal.

---

*E. Cesàro: Elementi di Calcolo infinitesimale. Napoli, 1899.*

Este bello livro differe em muitos pontos dos manuaes para o estudo do Calculo infinitesimal até hoje publicados. Contém, como estes, toda a doutrina essencial para os alumnos que querem estudar esta sciencia, a qual é exposta com completo rigor e com clareza, e, além d'isso, um numero consideravel de observações, notas e applicações vivamente interessantes e muitas vezes cheias de originalidade, que tornam a sua leitura muito proveitosa e muito agradável para todos os que amam a sciencia n'elle estudada.

O livro está dividido em treze capitulos. No primeiro são estudadas as noções de funcção, de limite e de continuidade. No segundo são dadas as regras de derivação das funcções e são estudadas as propriedades das derivadas. No terceiro trata-se do desenvolvimento das funcções em serie. O quarto é consagrado ás funcções de muitas variaveis. O quinto é consagrado ás regras

de differenciação das funcções. No sexto são applicados os principios anteriores ás curvas planas, no setimo ás curvas empenadas, no oitavo ás superficies. No capitulo nono vêm os principios fundamentaes de Calculo integral e as primeiras regras de integração. No capitulo decimo são applicadas estas regras á integração de algumas classes de funcções que habitualmente se consideram nos manuaes de Calculo integral. No capitulo undecimo vêem as applicações do Calculo integral á determinação do comprimento dos arcos de curva, á determinação das áreas planas, e á determinação das áreas e volumes dos solidos. O capitulo duodecimo é consagrado á theoria das equações differenciaes. Finalmente o capitulo treze é consagrado ao calculo das variações.

Por este resumo do objecto de cada capitulo só pôde fazer-se ideia do plano de distribuição dos assumptos. Para fazer-se ideia da riqueza de cada capitulo é necessario ler-se o livro, porque não é possível dar-se em pequeno espaço noticia de quanto de interessante n'elle poz o geometra cheio de erudição e de talento que o escreveu.

---

*J. Tannery et J. Molk: Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, tome III. Paris, Gauthier-Villars, 1898.*

Deu-se já noticia n'este jornal dos dous primeiros volumes d'esta obra importante. No volume 3.º, que acaba de ser publicado, é estudada em primeiro logar a theoria geral das funcções duplamente periodicas de primeira, segunda e terceira especie. A esta theoria são consagrados os capitulos I e III, onde se encontram varios theoremas geraes relativos a estas funcções (theoremas de Livreville, theoremas de decomposição de Hermite, etc.). No capitulo II é applicado o theorema de decomposição de Hermite ás funcções  $\sigma$ ,  $\zeta$ ,  $p$ , etc., o que conduz a muitos resultados já obtidos nos volumes anteriores por outros processos, e são estudados os desenvolvimentos das funcções  $p$ ,  $sn$ ,  $cn$ , etc., em series inteiras. O capitulo IV é consagrado aos theoremas de addição e multiplicação da funcção  $p$  e aos theoremas de addição das funcções  $sn$ ,  $cn$ , etc. São o objecto do capitulo V os desenvolvimentos em series trigonometricas das funcções duplamente periodicas da primeira e de segunda especie. O capitulo VI é consagrado ao es-

tudo dos integraes das funcções duplamente periodicas. Finalmente os capitulos VII e VIII são consagrados ao problema de inversão das funcções ellipticas, sendo no primeiro considerados os problemas que têm por fim determinar a razão dos periodos ou os periodos, quando se dá o modulo ou os invariantes, e no segundo a inversão das funcções de segunda ordem e em particular da funcção *sn*.

N'este volume, como nos anteriores, a exposição dos assumptos considerados é feita com grande rigor, clareza e elegancia. Por isso e pela riqueza de formulas e resultados que encerram os tres volumes, é esta obra muito propria para se estudar com desenvolvimento a theoria das funcções ellipticas.

---

*G. Oltramare: Calcul de généralisation. Paris, Hermann, 1899.*

O objecto d'esta obra importante é o estudo de uma especie de calculo symbolico a que o sr. Oltramare dá o nome de *calculo de generalisação*, por meio do qual se podem effectuar facilmente sobre as funcções uniformes as principaes operações, como differenciações, integrações, etc. N'ella expõe o illustre professor os principios d'este calculo e faz muitas e variadas applicações, as quaes mostram o seu poder e utilidade.

O principio fundamental do methodo é exposto no capitulo I; depois nos capitulos II a VIII são determinadas as generalisações de varias funcções. Nos capitulos seguintes vêem as applicações do calculo considerado, as quaes têm por objecto as questões seguintes: 1.<sup>a</sup> expressão dos integraes de ordem *n* por meio de um integral definido; 2.<sup>a</sup> differenciação e integração de indices fraccionarios; 3.<sup>a</sup> transformação das series em integraes definidos; 4.<sup>a</sup> expressão por integraes definidos da somma de algumas series; 5.<sup>a</sup> integração de algumas equações differenciaes; 6.<sup>a</sup> integração das equações differenciaes ou ás differenças lineares com coefficients constantes; 7.<sup>a</sup> calculo inverso dos integraes definidos; 8.<sup>a</sup> integração das equações ás derivadas parciaes ou ás differenças parciaes lineares com coefficients constantes; 9.<sup>a</sup> integração das equações simultaneas, etc.

Estas applicações são todas importantes e mostram bem o valor do novo calculo como instrumento de indagação e de demonstração.

---

*Marco Nassó: Algebra elementare ad uso dei Licei e delgi Instituti tecnici, Torino, 1898.*

Todo o livro destinado ao ensino elementar deve satisfazer ás condições de ser rigoroso, claro e pratico. A estes requisitos satisfaz o manual de Algebra elementar que o sr. Nassó, professor em um dos lyceus de Turim, escreveu para uso dos alumnos dos lyceus e dos institutos technicos italianos em harmonia com os programmas d'estes estabelecimentos de ensino. É redigido com cuidado na sua parte logica e contém muitas minuciosidades, algumas inuteis para os melhores estudantes mas necessarias para os de intelligencia mediana, muitos exemplos para esclarecer as doutrinas consideradas, conselhos praticos para as applicar e numerosos exercicios para os alumnos se desenvolverem no calculo algebrico.

O livro está dividido em duas partes. A primeira abrange 252 paginas e é destinada á exposição das theorias algebricas, a segunda abrange 166 paginas e é consagrada a exercicios que são classificados e dispostos pela mesma ordem que as doutrinas explicadas na primeira parte.

Na primeira parte são considerados primeiramente os numeros racionais, a cujo estudo são consagrados nove capitulos, sendo os cinco primeiros destinados ao estudo das operações algebricas, o sexto ao estudo das fracções, o setimo ao estudo das primeiras noções da theoria das equações e o oitavo e nono ao problema da resolução das equações do primeiro gráo a uma e duas incognitas. Depois são considerados os numeros irracionais, cuja theoria é exposta em primeiro logar com rigor e simplicidade, e á qual seguem varios assumptos em que intervêm estes numeros, como são a theoria dos radicaes, a theoria das potencias de expoente qualquer, a resolução das equações do segundo gráo e a theoria dos logarithmos. Vem depois a theoria das proporções e das progressões, que abrange tres capitulos. Finalmente n'um appendice é completado o estudo de algumas questões anteriormente trata-

das, que o auctor julgou, e muito bem, dever expor no fim da parte do livro destinada ás theorias, para graduar melhor as difficuldades que os alumnos têm a vencer. Assim é continuada n'este appendice a theoria das operações, sendo estudada a multiplicação, a divisão e a extracção da raiz quadrada dos polynomios: trata-se tambem n'elle da resolução de muitas equações do primeiro gráo a muitas incognitas e da resolução de algumas classes de equações que se podem fazer depender da resolução de equações do primeiro e do segundo gráo. Encerra ainda este appendice a applicação da Algebra á resolução dos problemas de juros, annuidades e amortisações.

---

*Sidonio B. C. da Silva Paes: Introducção á theoria dos erros das observações. Coimbra, 1898.*

N'este opusculo, que foi apresentado á Faculdade de mathematica da Universidade de Coimbra como Dissertação inaugural para o acto de conclusões magnas, é exposto o que de mais essencial tem sido escripto a respeito da theoria dos erros das observações. Esta exposição é bem feita e bem ordenada, e é acompanhada de considerações criticas judiciosas a respeito dos diversos trabalhos considerados.

Está dividido este trabalho em quatro capitulos. O primeiro é consagrado á exposição das noções preliminares da theoria dos erros. No capitulo segundo é examinado o postulado de Gauss, segundo o qual, dada uma serie de observações directas igualmente precisas da mesma grandeza desconhecida, a media arithmetica das observações é o valor preferivel, sendo expostas e criticadas as demonstrações de Encke, Schiaparelli, Stone, Ferrero, etc. E estudada tambem n'este capitulo a lei dos erros que Gauss obteve partindo do seu postulado. No capitulo terceiro é deduzida a fórmula que dá o valor do erro total, quando se dá a lei dos erros elementares ou ainda quando os erros elementares estão sujeitos a hypotheses dadas. A respeito d'este segundo caso o livro encerra as theorias de Hagen, Laplace, Bessel e Crofton. No capitulo quarto finalmente estuda o auctor o principio dos menores quadrados, primeiramente considerando-o como conse-

quencia da lei dos erros de Gauss, depois independentemente de qualquer lei dos erros.

---

*Sidonio B. C. da Silva Paes: Series de numeros. Coimbra, 1898.*

N'este opusculo é exposta com clareza e rigor a theoria elemental das series simples e multiplas. Vêem primeiramente os theoremas relativos á inversão, associação e decomposição das series simples, depois os theoremas relativos ás operações sobre series, em seguida a theoria das series multiplas e finalmente os principaes theoremas para o estudo da convergencia das series.

---

*G. de Longchamps: Cours de problêmes de Géométrie analytique. Paris. Delagrave, 1898-1899.*

A obra importante, cujo titulo acabamos de enunciar, não é uma simples collecção de problemas de Geometria analytica, mas sim, como o seu titulo aliaz o indica, um tratado onde se encontram os methodos e preceitos para a resolução dos problemas relativos a esta sciencia e as applicações a muitos e variados problemas. Porisso em cada capitulo vêem primeiramente ideias geraes sobre o assumpto que é objecto do capitulo, conselhos para a resolução dos problemas respectivos e finalmente os exercicios relativos ao assumpto considerado.

A utilidade de uma obra d'esta natureza é evidente; porisso o sr. Longchamps fez um alto serviço aos alumnos e mesmo aos professores com a sua publicação, tanto mais que se encontram n'elle condições nada vulgares para escrever um tal trabalho, já como auctor de livros de texto excellentes para o ensino da Geometria analytica, já como professor distincto e com larga pratica do ensino, já porque a sua collocação durante muitos annos á frente do *Journal des mathématiques spéciales* o levou a analysar um numero consideravel de problemas que n'este jornal foram propostos e resolvidos.

Contém a obra a que nos estamos referindo tres volumes. Os

dous primeiros são relativos á Geometria plana, o terceiro é relativo á Geometria a tres dimensões. Pelo resumo que vamos dar da taboa das materias dos tres volumes vê-se quaes são os assumptos a que se referem os problemas considerados.

VOLUME I.— I Generalidades. II Classificação dos problemas. III A decomposição do resultado. IV Os problemas elementares. V Os problemas geraes. VI As conicas referidas aos seus eixos. VII O problema das tangentes. VIII Os problemas de polos e polares.

VOLUME II.— IX Os problemas de normaes. X Os problemas de cordas. XI Os problemas relativos a relações metricas. XII As conicas e a fórma normal. XIII Os problemas de fócios. Os problemas de vertices. XIV Os problemas de simples contacto. XV Os problemas de contacto superior. XVI Conicas inscriptas e circumscriptas. Conicas conjugadas. XVII As coordenadas barycentricas e as coordenadas tangenciaes. XVIII As transformações e os problemas da Geometria analytica.

VOLUME III.— I Generalidades. II Os problemas elementares. III As tangentes e os planos tangentes. IV Os centros, os polos e os planos polares. V Os problemas de cordas e os planos secantes. VI As normaes. VII As geratrizes rectilineas nas quadricas. VIII Os planos cyclicos e os planos hypercyclicos. Pontos umbelicaes. IX Os problemas de eixos e de vertices. X As superficies de resolução. As quadricas tangentes. XI Discussão das quadricas. XII Estudo de uma superficie (de Steiner).

Todos os exercicios são muito interessantes e a maior parte d'elles são publicados pela primeira vez. Esta ultima circumstancia dá originalidade ao livro e augmenta consideravelmente o seu valor. Devemos ainda fazer notar que quasi todos se referem a curvas notaveis.

---

*Guichard: Traité de Géométrie. Paris, Nony, 1899.*

Este livro excellente é consagrado á Geometria elementar e os assumptos que encerra coincidem com os que no nosso paiz são exigidos pelos programmas dos lyceus. Estes assumptos estão distribuidos por oito capitulos, sendo o primeiro consagrado á linha recta, o segundo á circumferencia, o terceiro ao estudo das

figuras semelhantes, o quarto á medida das áreas, o quinto ao estudo do plano no espaço, o sexto ao estudo dos polyedros, o setimo ao estudo dos corpos redondos, o oitavo ao estudo das conicas e da helice.

A exposiçãõ de todos estes assumptos é feita com o rigor que se exige nos livros consagrados á Geometria elementar, e com a clareza e simplicidade que deve existir n'um livro destinado a alumnos cujas facultades intellectuaes estão em principio do seu desenvolvimento.

---

*P. Mansion: Mélanges mathématiques. Paris, Gauthier-Villars, 1898.*

Contém este livro interessante muitos trabalhos publicados pelo sr. P. Mansion no intervallo de 1883 a 1898 em varias collecções scientificas periodicas, os quaes o illustre geometra teve a feliz ideia de reunir n'um volume, facilitando assim a sua leitura. Estes trabalhos referem-se a assumptos variados; assim encerra o livro bellos artigos relativos á historia das mathematicas, á Analyse algebraica, á Analyse infinitesimal, á Geometria elementar, á Mecanica, ao Calculo das probabilidades, etc., e entre elles encontram-se alguns que já foram mencionados na revista bibliographica d'este jornal.

Os trabalhos relativos á Geometria elementar, que o livro encerra, são numerosos e referem-se aos fundamentos da Geometria euclidiana e ás geometrias não euclidianas. A reunião de todos elles fórma um excellente guia para o estudo d'estas bellas questões.

---

*Ch. André: Traité d'Astronomie stellaire (Première partie). Paris, Gauthier-Villars, 1899.*

Os trabalhos accumulados pelos investigadores dos diversos ramos das sciencias nas publicações scientificas periodicas não podem produzir todo o seu fructo se de tempos a tempos alguns

..

d'elles não tomarem sobre si o encargo de reunir e dispôr methodicamente os principaes resultados contidos n'estes trabalhos. Ora este encargo tomou-o sobre si, pelo que respeita á Astronomia estellar, o sr. C. André, o sabio director do Observatorio de Lyão, o qual vae reunir n'uma obra, que conterà tres volumes e da qual acaba de ser publicado o primeiro, o que de mais importante se tem descoberto a respeito d'este bello e importante ramo da Astronomia.

No primeiro volume d'esta obra importante, que, como já dissemos, acaba de ser publicado, occupa-se o auctor das estrellas simples. São n'elle estudadas as questões de grandeza, numero, repartição, movimentos, distancias e dimensões d'estes astros. A respeito de todas estas bellas questões o sr. André expõe tudo o que de mais importante se tem descoberto até á actualidade, e esta exposição é feita de modo a interessar vivamente o leitor.

Abre o volume por um capitulo onde são estudados com grande cuidado as lentes e os espelhos que se empregam para as observações estellares. No capitulo segundo é feita a descripção do céo estrellado e a historia dos trabalhos dos astrónomos para o agrupamento das estrellas em constellações e para a formação dos catalogos e cartas celestes. O capitulo terceiro é consagrado aos trabalhos que têm sido feitos a respeito da grandeza das estrellas. No capitulo quarto é estudado o phenomeno de absorpção que a luz das estrellas soffre ao atravessar a atmospherá terrestre. O capitulo quinto é consagrado a questões relativas ao numero de estrellas e seu modo de distribuição. No capitulo sexto é estudada com grande desenvolvimento a via lactea. Os capitulos setimo e oitavo são consagrados o primeiro ao movimento proprio do sol, o segundo aos movimentos proprios das estrellas. O capitulo nono é consagrado ao estudo das parallaxes estellares. No capitulo decimo vêem os trabalhos sobre medida dos diametros das estrellas. Finalmente no capitulo undecimo é estudado o phenomeno da variação do brilho das estrellas.

— Por esta rapida indicação dos assumptos mal se pôde fazer ideia da riqueza de factos e informações que o livro encerra. É necessario lê-lo; e esta leitura indispensavel a todos os que se occupam de Astronomia, pôde tambem ser vivamente recommendada aos que, sem ser astrónomos, quèrem apprender o que se conhece na actualidade a respeito do assumpto encantador a que é consa-

grado, os quaes encontrarão na parte historica e descriptiva muito que os ha de interessar e deleitar.

---

*E. Blim e M. Rollet de L'Isle: Manuel de l'explorateur. Paris, Gauthier-Villars, 1899.*

O fim d'este livro é dar aos que viajam por paizes ainda não explorados meios para colherem elementos para o conhecimento geographico d'estes paizes, considerando tanto os elementos que se podem colher quando se atravessa rapidamente um paiz como os que se podem colher quando se permanece lá algum tempo.

O livro está dividido em cinco capitulos. No capitulo 1.º são dados os meios para o explorador obter rapidamente uma representação approximada do caminho seguido e do terreno que elle pôde ver, quer este caminho seja terrestre quer fluvial. Os instrumentos empregados para este fim são o pedometro, a bussula, o compasso de levantamentos, o barometro de altitudes. Todos estes instrumentos são descriptos e são expostos os meios de operar com elles, para resolver o problema que se tem em vista. No capitulo 2.º occupam-se os auctores da determinação da posição geographica de um ponto. Os instrumentos empregados para esse fim são o relógio e o theodolito, os quaes são tambem descriptos assim como os meios de resolver com elles o problema considerado. No capitulo 3.º vêem os meios para fazer em pouco tempo uma triangulação approximada de uma região do caminho percorrido que, por qualquer motivo, se queira representar com mais detalhes. O capitulo 4.º é consagrado aos methodos para a redacção da carta da região estudada e para esse fim são aconselhados os systemas de Mercator e Flamsteed, os quaes são estudados. Finalmente o capitulo 5.º contém informações sobre a escolha dos instrumentos que o explorador deve levar e sobre os meios de os transportar.

Por esta rapida noticia vê-se quanto é util o *Manuel de l'explorateur*, e quanto convém que seja conhecido no nosso paiz, que tem, no seu largo dominio colonial, tanta região a estudar.

Accrescentaremos ainda que para o ler é necessario apenas conhecer as primeiras noções de Geometria e de Trigonometria.

*F. Rudio: Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker Congresses in Zurich. Leipzig, B. G. Tenbner, 1898.*

Os leitores d'este jornal sabem que nos dias 9 a 11 de agosto de 1897 reuniu em Zurich o primeiro Congresso internacional dos mathematicos. O livro cujo titulo acabamos de indicar, redigido pelo illustre Secretario geral do Congresso, sr. F. Rudio, professor na Escola Polytechnica da referida cidade, contém as actas e noticias relativas ao mesmo Congresso.

As primeiras paginas do volume considerado são consagradas aos trabalhos preparatorios do Congresso, os quaes foram feitos por uma commissão composta principalmente de professores da Escola Polytechnica de Zurich.

Vem depois uma noticia sobre a primeira sessão do Congresso, a qual teve lugar em 9 de agosto. N'esta sessão foi pronunciado o discurso de abertura pelo sr. Geiser, professor na Escola Polytechnica de Zurich e presidente da commissão organisadora, foi lida pelo sr. Rudio uma proposta sobre a organização dos congressos internacionaes dos mathematicos, foi lida pelo mesmo professor um trabalho do sr. Poincaré sobre as relações da Analyse com a Physica mathematica, que estava destinado a ser o objecto de uma conferencia d'este illustre geometra, a qual não teve lugar por elle não poder assistir ao Congresso, e finalmente foi feita pelo sr. Hurwitz uma conferencia sobre os progressos da theoria das funcções analyticas no nosso tempo. Encerra depois o livro noticias sobre os trabalhos das secções em que foi dividido o Congresso. Estas secções foram em numero de cinco, sendo a primeira de Arithmetica e Algebra, a segunda de Analyse e theoria das funcções, a terceira de Geometria, a quarta de Mecanica e Physica mathematica e a quinta de Historia e Bibliographia mathematicas. Termina a primeira parte do livro pela noticia sobre as resoluções tomadas na ultima sessão plenaria do Congresso, a qual teve lugar no dia 11 de agosto. N'esta reunião resolveu-se que o segundo Congresso internacional dos mathe-

máticos tenha lugar em Paris em 1900, na occasião da exposição universal que vae ter lugar n'esta cidade no referido anno, ficando a Sociedade mathematica de França encarregada de o preparar. N'esta mesma sessão foi feita uma conferencia pelo sr. Peano sobre logica mathematica e outra pelo sr. F. Klein sobre o ensino das altas mathematicas.

Na segunda parte do livro a que nos estamos referindo são transcriptas as conferencias que tiverem lugar nas sessões plenarias do Congresso e os numerosos trabalhos que foram apresentados nas reuniões das secções.

Para terminar esta noticia resta-nos só accrescentar que o primeiro Congresso internacional dos mathematicos foi coroado do melhor successo, que a elle concorreram 204 mathematicos vindos de todos os paizes da Europa e que na lista dos nomes se encontram muitos dos primeiros geometras do nosso tempo.

---

*Annuaire pour l'an 1899, publié par le Bureau des longitudes.  
Paris, Gauthier-Villars.*

Este volume do Anuario, que o *Bureau des longitudes* publica todos os annos, contém, como os volumes anteriores, grande abundancia de informações indispensaveis aos engenheiros e aos homens de sciencia. Contém além d'isso este anno as noticias scientificas seguintes:

- 1.º Bouquet de la Grye: Noticia sobre os balões sondas;
- 2.º M. Bassot: Geodesia moderna em França;
- 3.º Nota sobre o siderostato de oculo de 60<sup>m</sup> de fóco e de 1<sup>m</sup>,25 de abertura em construcção na casa de P. Gautier para figurar na exposição de 1900.

---

*G. Maupin: Opinions et curiosités touchant la mathématique.  
Paris, G. Carré et C. Naud. 1898.*

Contém este volume noticias de documentos relativos ás scien-

cias mathematicas, que o sr. Maupin encontrou nas suas investigações sobre os trabalhos antigos, e que são da natureza a interessar o leitor, por conterem opiniões curiosas que se faziam nos seculos XVI, XVII e XVIII de algumas questões relativas a estas sciencias. Estas noticias estão dispostas em trinta e sete capitulos em que o livro está dividido, cada um dos quaes encerra uma. Não é possível dar aqui noticia especial de cada uma d'ellas; apenas podemos afirmar que são quasi todas curiosissimas e que a leitura do livro é das mais agradaveis.

---

A. Angot: *Traité élémentaire de Météorologie. Paris, Gauthier-Villars, 1899.*

Entre as sciencias que interessam a maior numero de pessoas figura sem duvida a Meteorologia, a qual dá a explicação de muitos phenomenos que desde a infancia chamam a attenção do homem. Por isso um livro consagrado a esta sciencia, que contenha a explicação e as leis dos diversos phenomenos que são do seu dominio e que possa ser lido sem grande preparação prévia deve aproveitar de certo a muitos leitores. Ora o bello livro que acaba de publicar a respeito d'este assumpto o sr. Angot está n'estas circumstancias. N'ellesão, com effeito, expostas as diversas theorias sem recorrer a desenvolvimentos mathematicos e sem suppor no leitor outros conhecimentos além das noções elementares de Mecanica e de Physica.

A obra a que nos estamos referindo está dividida em cinco partes.

Na primeira parte é estudada a questão das temperaturas, e está dividida em tres capitulos respectivamente consagrados ao estudo da Actinometria, da temperatura do ar e da temperatura do solo e das aguas.

A segunda parte é consagrada ao estudo da pressão atmospherica e ao do vento. Encerra dous capitulos, um consagrado ao primeiro, o outro ao segundo d'estes assumptos.

Na terceira parte são estudados os phenomenos que dependem da agua existente na atmospherica. Contém quatro capitulos, o primeiro consagrado ao estudo da evaporação e da humidade

atmosphérica, o segundo ao estudo das nuvens e nevoeiros, o terceiro ao estudo da chuva, neve, saraiva, etc., o quarto ao estudo dos phenomenos opticos da atmosphera.

Na quarta parte são estudadas as perturbações atmosphéricas, sendo um capítulo consagrado ao estudo das tempestades nas latitudes medias e ao dos cyclones, outro ao estudo das trovoadas, outro ao estudo das trombas.

A quinta parte é consagrada á questão da previsão do tempo, sendo um capítulo consagrado á previsão racional do tempo por meio das ligações telegraphicas dos observatorios, e outro ás indagações sobre a periodicidade dos phenomenos meteorologicos e sobre as influencias cosmicas.

---

*W. de Fonvielle: Les ballons sondes et les ascensions internationales. Paris, Gauthier--Villars, 1899.*

Depois do Congresso de Aeronautica de Strasbourg e das ultimas experiencias simultaneas o sr. W. de Fonvielle acaba de publicar uma segunda edição do livro cujo titulo está acima indicado.

Encontra-se n'este livro interessante uma exposição completa das grandes operações aerostaticas nas quaes a França, a Belgica, a Allemanha, a Austria e a Russia têm reunido os seus esforços para estudar a constituição das partes elevadas da atmosphera e que serão renovados no Congresso da Exposição de Paris de 1900.

---

*C. A. Laisant et H. Fehr: L'enseignement mathématique. Revue internationale paraissant tous les deux mois. Paris. G. Carré et C. Naud.*

Com o titulo indicado acabam os srs. Laisant e Fehr de fundar uma revista internacional consagrada ao ensino das mathematicas. O programma d'esta revista é exposto pelos seus directores no primeiro numero, onde, depois de se referirem ás

transformações que se devem fazer no ensino das mathematicas para o aperfeiçoar, e á necessidade de não fazer estas transformações bruscamente, sem estudo prévio e sem o exame do que se passa a este respeito nos diversos paizes, chamar para este assumpto a attenção dos professores de todos elles, afim de reunirem os seus esforços para se realisarem estes aperfeiçoamentos. Ora a nova revista é para assim dizer destinada a ser o orgão d'esta especie de associação internacional e a crear uma especie de correspondencia mutua entre os que têm consagrado a sua vida ao ensino da mathematica.

Cada numero da nova revista conterà em principio: 1.º artigos geraes; 2.º estudos pedagogicos; 3.º uma chronica e correspondencias; 4.º uma parte bibliographica.

O primeiro numero de *l'Enseignement mathématique*, que acaba de ser publicado está conforme com este programma. Encerra primeiramente um artigo muito interessante do sr. Galdeano, professor na Universidade de Saragoça, sobre o ensino das mathematicas em Hespanha. Este artigo é o primeiro de uma serie de artigos, que os directores do jornal pretendem publicar, onde se dê noticia do ensino mathematico nos diversos paizes. Contém tambem o numero referido um artigo do sr. Laisant sobre questões de terminologia, outro do sr. A. Binet sobre pedagogia scientifica, outro do sr. Laurent sobre o ensino das mathematicas nas classes de mathematicas especiaes de França, um artigo do sr. Fehr sobre o ensino de Trigonometria, um artigo do sr. Fontené sobre o ensino da theoria dos vectores e finalmente uma chronica cheia de noticias interessantes e uma revista bibliographica.

Pelas indicações que acabamos de dar a respeito da nova publicação periodica vê-se que ella está destinada a representar um papel dos mais proveitosos e que com a sua fundação os srs. Laisant e Fehr fizeram um valiosissimo serviço.

---

A. R. Forsyth: *Partial Differential Equations of the Second Order involving three independent variables and possessing an intermediary integral* (Cambridge Philosophical Transactions, vol. XVI).

— *Memoir on the Integration of Partial Differential Equations*

*of the Second Order in Three Independent Variables when an Intermediary Integral does not exist in general (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. vol. 191).*

A. R. Forsyth: *On some differential equations in the theory of symmetrical algebra (Cambridge Philosophical transactions, vol. XVI).*

— *New Solutions of some of the partial differential Equations of Mathematical Physics (Messenger of Mathematics, 1897).*

— *Note on Surfaces Whose Radii of Curvatura are equal and of the same Sign (Messenger of Mathematics, 1898).*

As memorias, cujos titulos acabamos de indicar, referem-se á theoria das equações ás derivadas parciaes. São todas de alto valor scientifico e contêm indagações profundas sobre este assumpto difficil e importante.

Na primeira Memoria estuda o sr. Forsyth o problema da integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem com tres variaveis independentes no caso de existir integral intermedio. Resolve este problema com toda a generalidade e obtem alguns resultados anteriormente achados pelo sr. Vivanti, por methodos differentes, n'um caso particular d'este problema.

Collocando-se depois n'um ponto de vista mais geral dá o eminente geometra inglez, na segunda Memoria, um methodo para integrar as equações ás derivadas parciaes de segunda ordem, o qual é applicavel quer exista quer não exista integral intermedio. Este methodo é ainda applicavel, como o auctor o indica, quando as equações têm um numero qualquer de variaveis independentes e mesmo quando são de ordem superior á segunda. Encerra ainda esta Memoria notavel bellas applicações á integração de varias equações importantes em Physica mathematica.

Na terceira Memoria é esboçada a largos traços a extensão do methodo dado na segunda Memoria ao caso de uma equação de ordem  $m$  com  $n$  variaveis independentes e é applicado a uma equação importante da theoria algebrica das funções symetricas.

No quarto trabalho são integradas algumas equações ás derivadas parciaes, que apparecem tambem como exemplos na segunda das memorias referidas. Finalmente no quinto trabalho é integrada a equação das superficies minimas por um methodo differente do que empregou Monge para o mesmo fim.

*Alf. Guldberg: Sur la théorie des congruences différentielles linéaires. Christiania, 1897.*

— *Sur les équations aux différentielles totales (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1898).*

— *Sur la théorie des équations aux différentielles totales de second ordre. Christiania, 1898.*

No primeiro d'estes bellos e importantes trabalhos o sr. Guldberg estabelece uma theoria das congruencias differenciaes lineares fundada sobre os mesmos principios que servem de base á theoria das congruencias algebraicas e á theoria das congruencias arithmeticas. Define primeiramente o illustre geomerta o que se deve intender por producto de duas differenciaes lineares e mostra que uma expressão differencial linear com coefficients inteiros, segundo um módulo primo, está sujeita ás mesmas leis que um numero inteiro. Depois define o que se deve intender por congruencia differencial linear, segundo um duplo módulo primo, e desenvolve algumas propriedades de uma tal congruencia.

O segundo e o terceiro dos trabalhos referem-se a um mesmo assumpto. N'elles estuda o sr. Guldberg o problema da integração da equação differencial

$$Gd^2z + Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2$$

$$+ Ddx dy + Edx dz + Fdy dz = 0,$$

onde A, B, etc., são funcções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esta equação póde ser completamente integravel, póde ser incompletamente integravel (quando admite integral intermedio não integravel) ou póde não ser integravel. Todos estes casos são considerados pelo auctor.

---

*G. Vailati: Il metodo deduttivo como strumento di ricerca. Torino, Roux Frassati, 1898.*

Contém este interessante opusculo o assumpto de uma lição dada pelo auctor na Universidade de Turin como introdução a um Curso de historia de Mecanica. N'elle o auctor refere-se primeiramente a uma distincção fundamental que se pôde estabelecer entre os methodos de indagação scientifica. Depois considerava mais especialmente o methodo deductivo, para indicar os seus serviços na historia da sciencia e varias opiniões que têm sido apresentadas a respeito do seu valor como meio de indagação ou de demonstração; para analysar as causas dos seus triumphos n'umas sciencias e os seus insuccessos em outras; e finalmente para expôr as razões pelas quaes se pôde esperar o alargamento de sua esphera de acção.

---

*E. Pascal : Costumi ed usanze nelle Università italiane. Pavia, 1898.*

Contém este opusculo um discurso, cheio de interesse, pronunciado pelo sr. Pascal na Universidade de Pavia na occasião da abertura solemne do anno lectivo de 1897 a 1898. N'esse discurso refere-se o sr. Pascal franca e desassombradamente a muitos defeitos que se dão no funcionamento das universidades italianas. É curiosa a comparação com o que se passa nas escolas do nosso paiz onde se notam os mesmos defeitos.

---

*J. Duran Loriga : Notes de Géométrie (Association Française pour l'avancement des sciences. Congrès de Saint-Étienne, 1897).*

N'este trabalho interessante determina o seu illustre auctor as equações, em coordenadas barycentricas, dos circulos de Lemoine, Brocard, Tucker e Taylor e de muitos pontos notaveis do plano de um triangulo.

---

R. Guimarães: *On a Geometrical Problem (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1897-1898).*

O auctor resolve, por meio do theorema de Stewart, o problema que tem por objecto determinar um circulo que seja tangente a um outro e que passe por dois pontos dados.

Antonio Cabreira: *Sobre algumas applicações do theorema de Tinseau (Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa, 1897).*

— *Methodos novos para determinar o lado e a área de qualquer polygono regular (Ibidem, 1898).*

— *Sobre a theoria dos logarithmos de ordem  $n$  (Ibidem).*

O primeiro artigo encerra um grande numero de relações entre grandezas pertencentes a um circulo e grandezas correspondentes pertencentes á sua projecção sobre um plano. O segundo contém varias expressões do comprimento dos lados e da área dos polygonos regulares. O terceiro artigo contém algumas relações interessantes entre grandezas relativas á espiral logarithmica e outras relativas á espiral de Archimedes.

G. Peano: *Analisi della teoria dei vettori (Atti della R. Accademia di Torino, 1898).*

R. Mehmke: *Hilfstafel zur Auflözung quadratischer Gleichungen mit reellen Wurzeln (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1898).*

— *Über einen Apparat zur Auflözung numerischer Gleichungen mit vier fünf Gliedern (Ibidem).*

— *Beispiele graphischer Tafeln, mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte (Ibidem).*

*Ignar Schütz: Ein elementares Übungsbeispiel zur Potentialtheorie (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, VII).*

---

*S. Pincherle: Sull' operazione aggiunta (Rend. della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1899).*

— *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio (Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1898).*

---

*G. Vivanti: Sugli aggregati perfetti (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1899).*

— *Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili (Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1898).*

---

*G. Pirondini: Projection orthogonale sur une surface de révolution (Nouvelles Annales, 1898).*

---

*A. Capelli; Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche (Rend. della R. Accademia di Napoli, 1897 e 1898).*

---

*B. Bettazi: Generalizzazione dei sistemi di numerazione (Periodico di Matematica, t. XIII).*

G. T.

---

## INDICE

	Pag.
A. Gützmér : <i>Note sur certaines équations différentielles linéaires</i> .....	1
P. U. Schoute : <i>Les quartiques à trois points doubles d'inflexion</i> .....	10
R. Marcolongo : <i>Sur une propriété de deux mouvement à Poinsoit concor-</i> <i>dantes</i> .....	47
Juan J. Duran Loriga : <i>Segunda nota sobre los círculos radicales y anti-</i> <i>radicales</i> .....	33
<i>Congresso internacional dos mathematicos em Zurich</i> .....	47
Antonio Cabreira : <i>Sobre as velocidades na espiral</i> .....	49
J. Pedro Teixeira : <i>Sobre os coefficients do desenvolvimento da potencia</i> <i>do grão qualquer d'un polynomio</i> .....	65
Germiniano Pirondini : <i>Sur le cylindre orthogonal à quelques surfaces</i> ..	77
M. Lereh : <i>Remarque élémentaire sur la constante d'Euler</i> .....	129
R. Marcolongo : <i>Les composantes de déformation d'un milieu</i> .....	161
Bibliographia .....	22, 52, 68, 121, 134, 168, 176