

JORNAL
DE
SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

PROFESSOR DE MATHEMATICA NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA,
SOCIO CORRESPONDENTE DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA
E DA SOCIEDADE DE SCIENCIAS PHYSICAS E NATURAES DE BORDEAUX

~~~~~  
VOLUME V  
~~~~~

COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1883

JOURNAL

DE

SCIENCIAS MATEMATICAS E ASTRONOMICAS

NOTA SOBRE A INDEPENDENCIA DOS ZEROS NA FUNCAO ZERIANA

DE INTERESSE PARA OS MATHESMATICOS E FISICOS

1883

Dr. F. Gomes Teixeira

PROFESSOR DE MATHESMATICAS NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
MILITARY COLLEGE OF THE ARMY IN COIMBRA
E NA SOCIEDADE DE CIENCIAS PHYSICAS E MATHESMATICAS DE COIMBRA

COIMBRA 1883

VOLUME V

COIMBRA

IMPRESSA NA UNIVERSIDADE

1883

NOTA SOBRE A INDEPENDENCIA DOS ZEROS NA FUNÇÃO JACOBIANA
DE INTEGRAES ABELIANOS NORMAES DE PRIMEIRA ESPECIE

POB

J. A. MARTINS DA SILVA

Representemos por

$$F(x, y) = 0$$

uma equação algebraica do grão m e irreductivel; e por

$$n^{(i)}(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i(x, y)}{F'y(x, y)} dx \dots \dots \dots (a)$$

todos os integraes abelianos normaes de primeira especie, sendo Q_i um polynomio inteiro do grão $m-3$, satisfazendo ás condições necessarias para que o integral conserve um valor finito sobre toda a esphera, variando o indice i de 1 a p . Os periodos normaes de ordem par d'estes integraes dados por integraes definidos seguindo cyclos convenientemente escolhidos satisfazem á condição necessaria e sufficiente, para que com estas constantes possamos formar uma serie convergente, definindo uma funcção Θ de Jacobi de p variaveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Suppondo agora nesta funcção as p variaveis substituidas pelas quantidades (a),

diminuidas de G_i constantes arbitrárias, temos, segundo a definição de Θ , a expressão

$$\Theta [n^{(i)}(x, y) - G_i] = A$$

e

$$A = \sum_{i=1}^{i=p} m_i [n^{(i)}(x, y) - G_i] + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}.$$

Com respeito ás propriedades d'esta nova funcção, relativamente aos zeros, sabemos que admite p zeros satisfazendo as relações

$$\sum_{k=1}^{k=p} n^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i$$

nas quaes as quantidades C_i são independentes das p quantidades arbitrárias G_i , que podem ser determinadas de modo que a funcção dada admitta p zeros dados.

Conhecidas estas propriedades particulares de Θ , vamos dar mais outra, que nos parece ter escapado ao sr. Briot quando expoz a theoria das funcções abelianas:

A funcção

$$\Theta [G_i - n^{(i)}(\xi, \tau)] \dots \dots \dots (b)$$

admite $p - 1$ zeros independentes do zero (ξ, τ) .

Com effeito, consideremos a curva $Q = 0$ do grão $m - 3$ que satisfaz as condições relativas aos pontos criticos, passa por $p - 1$ pontos (x_k, y_k) , e corta a curva $F = 0$ em outros $p - 1$ pontos (x'_k, y'_k) . Precisamos chegar á funcção

$$\Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(\xi, \tau) - C_i \right] \dots \dots (c)$$

pois feita esta transformação a funcção (b) possuirá a propriedade bem conhecida de (c), isto é, ter o zero (ξ, τ) , e os $p - 1$ zeros restantes independentes de (ξ, τ) .

Como a somma dos valores do integral abeliano normal $n^{(i)}(x, y)$ nos pontos de intervenção da curva $F = 0$ e da curva $Q = 0$, satisfazendo as condições relativas aos pontos criticos é equivalente á quantidade constante $2C_i$, temos

$$K_i \equiv 2C_i.$$

Tambem quando as quantidades arbitrarías G_i tiverem valores quaesquer, a funcção em questão admite p zeros que coincidem com os p pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_{p-1}, y_{p-1}), (\xi, \eta)$, constituindo assim as funcções integraes das equações abelianas

$$(d) \dots \dots n^{(i)}(\xi, \eta) = G_i + C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k).$$

Por outro lado, a somma dos valores contidos n'um integral abeliano de primeira especie nos pontos de intersecção da curva $F = 0$ e d'uma curva algebraica variavel, conserva um valor constante. Esta propriedade geral notabilissima descoberta por Abel dá

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) = K_i.$$

Por consequencia

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) \equiv 2C_i.$$

Logo

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) &= G_i + C_i - n^{(i)}(\xi, \eta) \\ \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) &= -G_i + C_i + n^{(i)}(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}$$

d'onde podemos tirar

$$\left. \begin{aligned} G_i &= n^{(i)}(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(x'_k, y'_k)] \\ C_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) + n^{(i)}(x'_k, y'_k)]. \end{aligned} \right\}$$

Emfim, pelas relações acima consideradas achamos facilmente

$$\begin{aligned} &\ominus [n^{(i)} C(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \eta) + G_i] = \\ &= \ominus \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) - C_i \right] \end{aligned}$$

ou ainda, no segundo caso,

$$\begin{aligned} &\ominus [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \eta) + G_i] = \\ &= \ominus \left[n^{(i)}(x, y) - \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) + C_i \right]. \end{aligned}$$

Quando for $x = \xi$, $y = \eta$, resulta pois

$$\ominus [G_i - n^{(i)}(\xi, \eta)] = 0,$$

ficando os $p-1$ zeros restantes *independentes* de (ξ, η) , embora possamos determinar G_i de modo que a funcção dada admita p zeros dados.

Substituindo o valor de G_i em (b) obtemos

$$\Theta \left[\frac{\sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(x'_k, y'_k)]}{2} \right] = 0.$$

Se se substituir agora o ponto fixo por outro ponto fixo (ξ', η') sem mudar os $p-1$ pontos (x_k, y_k) , formamos uma nova função admitindo o zero (ξ', η') e $p-1$ zeros restantes eguaes aos da primeira função. Como as duas funções teem $p-1$ zeros comuns, a relação

$$f(x, y) = \frac{\Theta [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi', \eta') + G_i]}{\Theta [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \tau) + G_i]}$$

é uma função da variavel (x, y) admitindo um unico zero (ξ', τ') e um unico infinito (ξ, τ) .

Vem a proposito, visto ter-se considerado as equações abelianas (d), o caso conhecido da indeterminação, havendo coincidência dos pontos (x_k, y_k) com os p pontos respectivos (ξ_k, η_k) situados sobre a curva $Q=0$ satisfazendo as condições relativas aos pontos criticos. A curva $Q=0$ corta $F=0$ em $2(p-1)$ pontos diferentes dos pontos criticos, a saber: os p pontos (ξ_k, η_k) e $p-2$ pontos restantes representados por (α_k, β_k) ; como n'estas circumstancias

$$G_i \equiv C_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k)$$

podemos portanto apontar a condição seguinte para apparecer indeterminação

$$n^{(i)}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k);$$

resulta d'aqui

$$\Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) - C_i \right] =$$

$$= \Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) - C_i \right] =$$

$$= \Theta [n^{(i)}(x, y) - G_i] = 0.$$

NOTA SOBRE UM PROBLEMA DE MECANICA RACIONAL

POR

H. B.

Nos *Problemas de mecanica racional* do padre Jullien vem proposto (a pag. 158 do 2.º vol.) o seguinte exercicio, que foi estudado por Daniel Bernouilli nas *Memorias da Academia de Berlim*, em 1745:

«Introduzem-se diferentes pontos materiaes n'um tubo rectilineo, muito estreito mas pesado, que póde gyrar n'um plano horizontal, em torno de um dos seus pontos que está fixo. Tendo collocado os pontos a distancias conhecidas do centro de rotaçãõ, imprime-se ao tubo uma dada velocidade angular. Determinar o movimento do tubo e dos pontos materiaes.»

Daniel Bernouilli diz na sua *Memoria* que o problema lhe fôra proposto por Euler, no caso de um só ponto material, e que, tendo-o elle resolvido, propozera por sua vez a Euler o caso mais geral. Euler communicou-o tambem a Clairaut, e ambos o resolveram, mas não tinha ainda Bernouilli conhecimento das soluções quando publicou o seu estudo.

A mecanica moderna póde resolver este problema por uma simples applicação das suas equações geraes, como vamos vêr.

1. Seja M a massa do tubo e R o seu raio de geração em ordem á vertical do centro fixo, vertical que é o eixo da rotaçãõ. Designemos por θ o angulo que na epocha t o tubo fórma com a a sua posição inicial. A equação geral do movimento do tubo será

$$(1) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{N}{MR^2}$$

denotando por N a somma dos momentos das forças que sollicitam o tubo, em ordem ao eixo de rotaçãõ. Estas forças são: o peso

do tubo, cujo momento é zero, e as pressões dos diferentes pontos materiaes. Se P, P', P'', \dots forem projecções d'essas pressões sobre o plano horizontal, e r, r', r'', \dots as distancias dos pontos ao eixo, teremos

$$(2) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Pr + P'r' + P''r'' + \dots}{MR^2}$$

Para calcular P, P', P'', \dots , notemos que o movimento relativo de cada ponto sobre o tubo resulta da reacção R d'este ultimo e do peso do ponto (forças reaes), da força de inercia de arrestamento e da força centrífuga composta (forças ficticias). Esta ultima tem por valor $2m \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt}$, sendo m a massa do ponto (porque o movimento relativo é rectilíneo e tem a velocidade $\frac{dr}{dt}$); e actua no plano horizontal, perpendicularmente ao tubo e no sentido opposto ao da rotação. A força de inercia pôde decompor-se em

$$\text{centrífuga } m \frac{d\theta^2}{dt^2} r, \text{ e tangencial } m \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \text{ ou } mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(por isso que r deve aqui ser tomado como constante).

Esta componente tangencial de inercia tem evidentemente a mesma direcção e sentido que a força centrífuga composta; e como a componente centrífuga da força de inercia é a unica força que não é normal ao tubo, segue-se que a pressão do ponto m será a resultante do peso, da força centrífuga composta e da tangencial de inercia.

P será pois a somma d'estas duas ultimas forças, e P', P'', \dots terão valores analogos.

Substituindo em (2) e notando que os momentos de P, P', \dots são negativos, teremos

$$(3) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{m \left(2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + m' \left(2r' \frac{d\theta}{dt} \frac{dr'}{dt} + r'^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + \dots}{MR^2}$$

As equações do movimento relativo dos pontos serão evidentemente

$$(4) \dots\dots\dots \frac{d^2r}{dt^2} = r \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = r' \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

⋮
⋮
⋮

As equações (3) e (4) resolvem o problema.

2. É facil exprimir primeiro r' , r'' , . . . em r sómente. Assim, eliminando θ entre as duas primeiras equações (4), vem

$$r' \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d^2r'}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad r' \frac{dr}{dt} - r \frac{dr'}{dt} = \text{constante}$$

e como no começo do movimento é $\frac{dr}{dt} = 0 = \frac{dr'}{dt}$, segue-se que a constante é nulla.

Teremos pois

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr'}{r'} \quad \text{ou} \quad r = cr';$$

sejam a e a' os valores iniciaes de r e r' ; será

$$a = ca' \quad \text{ou} \quad c = \frac{a}{a'}$$

e portanto

$$\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'}$$

E como as outras equações (4) são da mesma forma, podemos concluir que é

$$\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'} = \frac{r''}{a''} = \dots \quad (4)$$

3. Substituindo agora em (3) r', r'', \dots e $\frac{dr'}{dt}, \frac{dr''}{dt} \dots$ pelos seus valores em função de r e $\frac{dr}{dt}$, vem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{\left(2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + \dots\right)}{MR^2},$$

equação que podemos escrever do seguinte modo, fazendo para abreviar $m + m' \frac{a'^2}{a^2} + \dots = A$

$$\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{2Ar \frac{dr}{dt}}{MR^2 + Ar^2}.$$

Integrando, temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{MR^2 + Ar^2},$$

e, para determinar C , notemos que é dada a velocidade angular inicial; designando-a por ω , será

$$\omega = \frac{C}{MR^2 + Aa^2}$$

e portanto

$$(2) \dots \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{MR^2 + a^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}{MR^2 + r^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}$$

Esta equação dá o valor da velocidade angular em função de r .

4. Substituindo na primeira equação (4) $\frac{d\theta}{dt}$ pelo seu valor (2), vem

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 \frac{(MR^2 + Aa^2)^2}{(MR^2 + Ar^2)^2} r;$$

ou, multiplicando por $2 \frac{dr}{dt}$ e integrando

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -\omega^2 (MR^2 + Aa^2)^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{MR^2 + Ar^2} + C.$$

Para determinar C fazamos $\frac{dr}{dt} = 0$ e $r = a$. Vem assim

$$C = \frac{MR^2 + Aa^2}{A} \omega^2$$

e portanto será

$$(3) \dots \frac{dr^2}{dt^2} = \omega^2 (r^2 - a^2) \frac{MR^2 + a^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}{MR^2 + r^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}$$

Esta equação dá o valor da velocidade relativa do ponto m , em função de r . Dividindo (α) pela raiz quadrada de (β) eliminamos o tempo, e temos assim a equação diferencial entre as coordenadas θ e r . O valor de θ em função de r fica dependente de uma quadratura; mas apenas examinaremos um caso particular, que Jullien também propõe. É o caso de se desprezar a massa do tubo.

Fazendo $M = 0$ nas fórmulas (α) e (β) teremos

$$(\alpha') \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2\omega}{r^2} \quad (\beta') \quad \frac{dr^2}{dt^2} = \omega^2 a^2 \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2}.$$

Eliminando o tempo vem

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \quad \text{ou} \quad d\theta = \frac{d \cdot \frac{r}{a}}{\frac{r}{a} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}}$$

ou ainda

$$\theta = \text{arc sec } \frac{r}{a} + C.$$

Para $\theta = 0$ é $r = a$; logo é $C = 0$, e portanto

$$a = r \cos \theta.$$

As trajetórias absolutas dos diferentes pontos materiais são pois linhas rectas, perpendiculares á posição inicial do tubo. A equação (β') ainda nos dá

$$a\omega dt = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

ou (por ser $r = a$ para $t = 0$)

$$r^2 = a^2 (1 + \omega^2 t^2).$$

Cada um dos moveis percorre pois a sua trajetoria absoluta com movimento uniforme, e a velocidade d'este movimento é $a\omega$ para o ponto m , $a'\omega$ para m' , etc.

Todos estes resultados eram faceis de prevêr, e por isso este caso particular pôde servir de verificação das fórmulas estabelecidas.

Outra solução

5. Em vez de determinar as pressões dos pontos sobre o tubo e de recorrer á equação (1), podemos applicar directamente a todo o systema constituido pelo tubo e pelos pontos a equação dos momentos

$$\sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX).$$

O segundo membro é nullo, porque as forças exteriores se reduzem ao peso, e por isso teremos

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{constante};$$

ou, passando ás coordenadas polares,

$$\sum mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} = \frac{d\theta}{dt} \sum mr^2.$$

Mas evidentemente é

$$\sum mr^2 = MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots;$$

logo será

$$(e) \dots \dots \frac{d\theta}{dt} (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots) = \text{constante}.$$

E como na epocha inicial é

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad r = a \quad r' = a' \quad \dots$$

teremos

$$(e') \dots\dots\dots \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{MR^2 + ma^2 + m'a'^2 + \dots}{MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots}$$

Se em (e') substituirmos como anteriormente r' , r'' , ... pelos seus valores em r , teremos immediatamente a equação (α).

6. O methodo seguido por Daniel Bernouilli reduz-se, no fundo, a este; porque o theorema que o eminente geometra estabelece na sua *Memoria* citada, e que lhe serve de base para a resolução do problema, não é mais do que a interpretação da equação (e).

SOBRE OS TRIEDROS HOMOLOGICOS

POR

A. F. ROCHA PEIXOTO

Professor na Universidade de Coimbra

Em geometria do espaço são fórmulas *correlativas* ou *reciprocas*:

- a) a *pontual* e o *feixe de planos*;
- b) o *plano pontual* e a *estrella*, sendo o plano o elemento movel gerador d'esta;
- c) o *plano regrado* e a *estrella*, sendo a recta o elemento movel gerador.

O *feixe de raios* é uma fórmula correlativa de si mesma; admite portanto dous elementos geradores.

Effectivamente da *pontual*, uma serie de *pontos* situados na mesma linha recta, deriva o *feixe de planos*, uma serie de *planos* que passam pela mesma linha recta — *eixo do feixe* —, por meio da substituição reciproca dos pontos por planos; pela mesma fórmula, do *plano pontual*, uma serie de *pontos* situados no mesmo plano, deriva uma serie de *planos* que passam pelo mesmo ponto, o qual é centro da fórmula geometrica derivada, a *estrella*; como emfim, tambem pela mesma substituição, do *plano regrado*, uma figura formada de linhas rectas e de pontos que estão no mesmo plano, deriva a *estrella*, sendo o seu elemento gerador o raio ou a linha recta, porque esta fórmula geometrica é composta de rectas e de *planos que passam pelo centro d'ella*, isto é, por um mesmo ponto.

Estas applicações da *dualidade geometrica* estendem-se ás propriedades das figuras, do que deriva immediatamente um processo prompto e fecundo de demonstração com o caracter generalizador.

Assim propriedades dos triangulos conduzem immediatamente ao descobrimento e á demonstração de propriedades dos triedros,

porque estas figuras, systemas de tres *planos* que passam pelo mesmo *ponto* sem que tenham uma linha commum, são *correlativas* dos triangulos, systemas de tres *pontos* que estão no mesmo *plano*, sem que estejam em linha recta. Consequentemente a *homologia* dos triedros é *correlativa* da dos triangulos.

As propriedades dos triangulos *homologicos*, as quaes subsistem sempre junctamente, sendo uma consequencia da outra, são as seguintes:

As intersecções dos lados correspondentes estão na mesma linha recta; e

Concorrem no mesmo ponto as rectas que unem os pontos correspondentes.

D'estas, pela substituição reciproca do *ponto* por *plano*, são derivadas as dos triedros *homologicos*:

Os planos das arestas correspondentes passam por uma mesma linha recta, formando portanto um feixe de tres planos; e

Estão situadas no mesmo plano as intersecções das faces correspondentes;

propriedades que subsistem conjunctamente com as dos triangulos *homologicos*.

Demonstra-se tambem directamente que uma d'estas propriedades dos triedros *homologicos* é consequencia da outra.

Sejam $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$ dous triedros homologicos, na notação de Cremona, que satisfaçam á primeira das duas referidas condições; isto é, cortem-se as arestas correspondentes $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$; $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$; $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. N'este caso o primeiro par d'arestas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determina um plano que passa pela linha dos vertices dos triedros *homologicos*; o segundo e o terceiro determinam dous planos, cada um dos quaes passa pela mesma linha recta.

Se estes triedros têm vertices diferentes, as intersecções das arestas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$, e $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um triangulo, porque cada um d'estes pontos está em cada uma das tres arestas de cada triedro. Estes tres pontos, vertices do triangulo considerado, são: $\alpha\beta$. $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$. $\alpha'\gamma'$ e $\beta\gamma$. $\beta'\gamma'$; o que mostra que o primeiro ponto é commum ás faces α , α' , β e β' ; o segundo ás faces α , α' , γ e γ' ; e o terceiro ás faces β , β' , γ e γ' . Pelo primeiro e pelo segundo d'estes pontos passa portanto a recta $\alpha\alpha'$; pelo primeiro e terceiro a recta $\beta\beta'$; pelo segundo e terceiro a recta $\gamma\gamma'$. Estas tres rectas estão portanto no mesmo plano.

Esta demonstração é de Cremona; deriva immediatamente da notação por elle adoptada. E assim é verificada tambem a grandissima importancia da mesma notação.

Sendo os mesmos os vertices dos triedros, a demonstração do theorema deriva immediatamente d'uma das duas operações fundamentaes de *geometria projectiva* — a de *projectar*. D'um ponto qualquer projectemos a figura que representa a primeira das propriedades acima mencionadas dos *tringulos homologicos*. Teremos assim dous triedros com o mesmo vertice, o centro de projecção; as intersecções das faces *correspondentes* existem todas tres no mesmo plano do eixo de *homologia* e do escolhido centro de projecção; e os planos das arestas *correspondentes* passam todos tres pela mesma recta, a que une o mesmo centro de projecção e o *centro d'homologia*.

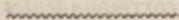
O transporte d'um de dous triedros *homologicos* de vertices differentes, parallelamente a elle mesmo, até que o seu vertice coincida com o do outro, demonstra isto mesmo. D'este modo as intersecções das faces *correspondentes* são transportadas parallelamente a si mesmas; e, se assim não ficarem no mesmo plano como antes da coincidencia dos vertices dos triedros, ha de succeder que uma das mesmas intersecções ha de ficar mais distante ou mais proxima do plano em que todas tres estavam situadas quando eram differentes os vertices dos triedros. Continuando o transporte no mesmo sentido, succederá que as intersecções consideradas estarão em planos differentes, em triedros de vertices differentes, contra o que está directamente demonstrado.

Se dous triedros $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$ têm no mesmo plano as rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ e $\gamma\gamma'$, intersecções das faces *correspondentes*, as rectas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um plano; as rectas $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$ outro; as rectas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$ um terceiro; e todos estes planos passam por uma mesma linha recta. As rectas $\alpha\alpha'$ e $\gamma\gamma'$ cortam-se n'um ponto $\alpha\alpha' \cdot \gamma\gamma'$; por este ponto passam os planos α , α' , γ , γ' e portanto as rectas $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$, que assim determinam um plano. Do mesmo modo se reconhece que as arestas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um plano; e que as arestas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$ determinam outro.

Se os triedros têm vertices differentes, é evidente que por ambos, e portanto pela recta que os une, passa cada um d'estes planos.

Transportando-se os mesmos triedros, de modo que os seus

vertices percorram a linha que os une, hão de chegar á posição de terem os mesmos vertices reunidos n'um só ponto. N'este transporte os planos das arestas *correspondentes* são levados parallelamente a elles mesmos; sendo portanto transportada parallelamente a si mesma a recta da intersecção commum aos mesmos planos. Assim fica demonstrado que ainda n'este caso os planos das arestas *correspondentes* constituem um feixe.



SOBRE ALGUNS INTEGRAES INDEFINIDOS

POR

DUARTE LEITE PEREIRA DA SILVA

Os integraes obtidos a pag. 87 do vol. IV d'este jornal podem-se achar por um outro processo mais directo e geral, o do methodo das substituiçoes.

Com effeito

$$\begin{aligned}
 au + bv &= \text{sen } x(ax + b) + \text{cos } x(a - bx) \\
 &= (ax + b) \frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}} + i(a - bx) \frac{e^{2ix} + 1}{2ie^{ix}} \\
 &= \frac{1}{2ie^{ix}} [e^{2ix}(x + i)(a - bi) + (i - x)(a + bi)] \\
 &= \frac{(i - x)(a + bi)}{2ie^{ix}} \left[e^{2ix} \frac{x + i}{i - x} \frac{a - bi}{a + bi} + 1 \right].
 \end{aligned}$$

Pondo

$$z = e^{2ix} \cdot \frac{x + i}{i - x} \cdot \frac{a - bi}{a + bi},$$

virá

$$dz = 2i \frac{a - bi}{a + bi} e^{2ix} \frac{x^2}{(i - x)^2} dx$$

e

$$(au + bv)^2 = \frac{(i - x)^2 (a + bi)^2}{-4e^{2ix}} [z + 1]^2.$$

D'onde

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)} = \int \frac{1}{[z + 1]^2} \cdot \frac{-4x^2 e^{2ix}}{(i-x)^2 (a+bi)^2} dx = \frac{2i}{a^2 + b^2} \int \frac{dz}{(z+1)^2}.$$

Logo

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{2i}{a^2 + b^2} \frac{1}{z+1} + \text{const.}$$

$$= -\frac{2i}{a^2 + b^2} \frac{(i-x)(a+bi)}{2ie^{ix}(au+bv)} + \text{const.}$$

$$= -\frac{1}{a-bi} \frac{(i-x)e^{-ix}}{au+bv} + \text{const.}$$

$$= -\frac{1}{a-bi} \frac{iu+v}{au+bv} + \text{const.}$$

$$[1] \quad = -\frac{1}{a-bi} \frac{iu+v}{au+bv} + \frac{1}{b(a-bi)} + \text{const.}$$

$$[2] \quad = -\frac{u}{b(au+bv)} + \text{const.}$$

No nosso artigo demos por engano de copia o valor

$$\int \frac{x^2 dx}{au + bv} = -\frac{u}{(au + bv)}.$$

Se se executarem os calculos indicados no alto da pag. 89, não se chegará a este valor; mas sim ao verdadeiro

$$[1 + z] \frac{u}{b(au + bv)} = \frac{u}{b(au + bv)}$$

Quanto aos outros integraes

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2},$$

deduzem-se facilmente de [1] ou [2] fazendo

$$a = b, b = 0; \quad a = 0, b = 1.$$

O integral

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2}$$

obtem-se, pondo

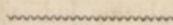
$$z = \operatorname{cotg} x + x,$$

d'onde

$$dz = -\frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} &= -\int \frac{adz}{[az + b]^2} = \frac{1}{az + b} \\ &= \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$



D. G. Lemaire, professeur à l'école normale de la ville de Bruxelles, 1882.

BIBLIOGRAPHIA

C. le Paige. — *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre.*
Bruxelles, 1882.

N'esta importante Memoria tracta o sabio professor da universidade de Liège de resumir e expôr ordenadamente as suas indagações sobre Geometria superior, publicadas em algumas das principaes Collecções scientificas da Europa.

O capitulo primeiro é destinado ao estudo das homographias de terceira ordem, e ahi faz o sr. Paige applicação dos seus estudos de Algebra moderna, relativos ás fórmãs trilineares simples e aos systemas de duas fórmãs trilineares.

No capitulo segundo tracta-se das involuções de terceira ordem. Poncelet concebeu estas involuções, e estudou detidamente as de primeira classe. O sr. Paige foi um dos primeiros a occupar-se das de classe superior na sua importante — *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie.*

A theoria de involução leva ao estudo das razões anharmonicas e dos grupos polares, para o que são destinados os capitulos quarto e quinto.

Como se vê, a Memoria do illustre geometra belga é muito importante, e damos por isso noticia d'ella aos leitores d'este jornal, tanto mais que principia hoje a publicar-se n'elle um trabalho importante sobre o mesmo assumpto com que o sr. Paige o quiz illustrar.

D. G. Vicuña. — *Introducción á la teoría matemática de la electricidad.* — *Madrid, 1885.*

N'este precioso opusculo o illustre professor de physica mathematica da universidade de Madrid, o sr. Vicuña, estuda d'uma

maneira clara, simples e precisa os problemas fundamentaes da theoria mathematica da electricidade, hoje quasi completamente constituida, graças aos trabalhos de muitos physicos e geometras d'este seculo.

A exposição é feita de modo que possa ser facilmente comprehendida pelos que conhecem apenas os elementos da analyse infinitesimal.

Não tendo espaço para darmos uma idéa completa de todas as questões de que o sr. Vicuña se occupa, indicaremos ao menos o assumpto de cada capitulo:

- Capitulo I. Potencial.
- Capitulo II. Equilibrio.
- Capitulo III. Condensadores.
- Capitulo IV. Energia e correntes.
- Capitulo V. Unidades electricas.
- Capitulo VI. Relações com a thermologia.

Quem quizer estudar esta parte importante da Physica tem um guia magnifico no livro do sr. Vicuña.

H. G. Zeuthen. — Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative.

N'este artigo, publicado nas *Actas mathematicas*, apresenta o eminente geometra dinamarquez theoremas importantes relativos ao problema da determinação do numero de intercessões de duas curvas, que se confundem no mesmo ponto.

A questão do meridiano universal. — Lisboa, 1885.

N'este folheto, publicado pela *Sociedade de Geographia de Lisboa*, está o parecer d'esta Sociedade relativamente ao meridiano a adoptar para origem da contagem das longitudes, bem

como os pareceres de algumas corporações doudas nacionaes que esta Sociedade consultou a este respeito.

Tanto a Sociedade de Geographia como a maior parte d'estas corporações acceitam o meridiano que passa pelo Observatorio de Greenwich, por ser este Observatorio um dos principaes do mundo, por estarem a elle referidas a maior parte das cartas nauticas usadas, por ter sido já adoptado pela Russia e pelos Estados Unidos da America no que respeita á navegação, etc.

G. T.

HOMOGRAPHIES ET INVOLUTIONS DES ORDRES SUPÉRIEURES

PAR LE

D^r. C. LE PAIGE

Professeur de Géométrie Supérieure à l'université de Liège

Homographies

I. *Définition: Lorsque n figures fondamentales du premier rang (Gebilde erster Stufe) et de même espèce sont telles que (n-1) éléments étant pris dans (n-1) de ces figures, un élément de la dernière est déterminé sans ambiguïté, ces n figures forment une homographie du n^{me} ordre et du (n-1)^{me} rang.*

Nous désignerons l'ensemble de tels groupes de n éléments par la notation H_{n-1}^n .

Pour éclaircir cette définition, considérons trois faisceaux de plans ayant respectivement pour axes trois droites X, Y, Z.

Si, lorsque l'on choisit un plan dans chacun des faisceaux X et Y, il ne leur correspond qu'un seul plan du faisceau Z, ces trois faisceaux forment une homographie H_2^3 .

La même chose aurait lieu pour trois ponctuelles.

Imaginons, par exemple, un système doublement infini de surfaces du second ordre passant par sept points a, b, c, d, x, y, z. Ces surfaces marqueront sur trois droites X, Y, Z passant par x, y, z des ponctuelles ξ, η, ζ appartenant à une H_2^3 .

Les groupes communs à deux, trois, ... n-k homographies H_{n-1}^n , forment une homographie $H_{n-2}^n, H_{n-3}^n, \dots H_k^n$.

D'après cela, il est visible que, dans une homographie H_k^n ,

chaque groupe de k éléments caractérise un nombre fini et déterminé de groupes de n éléments.

Il résulte, de la définition même, que si, dans une H_{n-1}^n , on laisse fixe un, deux, . . . p éléments, il correspond, à ces éléments une H_{n-2}^{n-1} , H_{n-3}^{n-2} , . . . H_{n-p-1}^{n-p} .

Par suite, dans une homographie H_k^n , à un groupe de k' éléments, $k' < k$, il correspond une $H_{k-k'}^{n-k'}$, car H_k^n , provenant de $(n-k)$ homographies H_{n-1}^n , si on choisit k' éléments, il leur correspondra les $(n-k)$ homographies $H_{n-1-k'}^{n-k'}$, et, par définition, les groupes communs à ces dernières constitueront une $H_{k-k'}^{n-k'}$.

Ces propriétés devant nous servir dans la suite, nous en donnerons un exemple particulier.

Supposons quatre droites arbitraires L, M, N, P situées d'une façon quelconque dans l'espace. Tous les plans de l'espace marquent, sur ces droites, des séries de points. Chaque groupe de quatre points est déterminé par trois d'entre eux. Il en résulte que l'ensemble des groupes de quatre points constitue une H_3^4 .

Cette homographie n'est pas la plus générale possible, comme nous avons eu l'occasion de le faire voir (*), mais elle suffit pour éclaircir les idées essentielles dont nous venons de parler.

Si, sur L nous choisissons un point l , il est visible que tous les plans passant par l coupent M, N, P suivant une H_2^3 .

Si nous considérons deux points l et m , tous les plans passant par lm marquent, sur N, P , deux séries homographiques dans le sens ordinaire, c'est-à-dire une H_1^2 .

Concevons maintenant sur L deux points l, l' . A chacun de ces points correspond une H_2^3 . Nous aurons donc, sur M, N, P deux homographies H_2^3, H_2^3 . L'ensemble des groupes communs à H_2^3, H_2^3 constitue une homographie H_1^3 .

Tous les plans passant par ll' marquent sur M, N, P des groupes de H_1^3 ; mais de plus toutes les droites qui s'appuient sur

(*) Voir *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. XVII.

M, N, P marquent aussi des groupes de H_1^3 , car par une de ces droites et l ou l' , on peut faire passer un plan.

A un point m de M, par exemple, correspond un groupe donné par le plan $l'm$ et un groupe donné par la droite qui passe par m et s'appuie sur N, P.

En général, dans une H_{n-1}^n , un groupe de $n - 1$ points étant donné, il ne lui correspond qu'un seul point, parfaitement déterminé, qui complète le groupe de n points. Cependant il peut arriver, par un choix convenable des $(n - 1)$ points que celui qui leur correspond soit indéterminé. Ces groupes de $(n - 1)$ points constituent des *éléments neutres*.

Dans une H_{n-1}^n , les éléments neutres forment une H_{n-3}^{n-1} (*).

Reprenons l'exemple du système doublement infini de surfaces du second ordre, qui marquent sur X, Y, Z une H_2^3 .

Par a, b, c, d, x, y, z , on peut faire passer une surface du second ordre ayant X pour génératrice: cette surface coupe Y, Z en des points y_x, z_x .

Nous aurons, de la même manière, $x_y, z_y; x_z, y_z$.

Maintenant, il est visible que, dans ce mode de représentation d'une H_2^3 , au couple (y_x, z_x) correspond un point quelconque de X.

Nous avons ainsi les trois couples neutres

$$(x_y, z_y), (x_z, y_z), (y_x, z_x);$$

mais, en outre, nous avons les trois autres couples neutres

$$(x_y, y_x), (y_z, z_y), (z_x, x_z).$$

Il suffira de le montrer pour l'un d'eux.

Si l'on considère les deux surfaces du système qui ont pour

(*) Il est bien évident qu'il s'agit des groupes de $(n - 1)$ éléments pris dans $(n - 1)$ séries, qui laissent indéterminé l'élément de la dernière série.

génératrices, respectivement X et Y, nous aurons les deux systèmes suivants de points appartenant chacun à une surface

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, x_z, y_x, z_x),$$

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, y_x, y_z, z_y).$$

Puisque, par les neuf points

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, y_z)$$

passent deux surfaces, ces points sont sur une courbe gauche G_4 de première espèce: donc par ces neuf points passeront une infinité de surfaces. L'une d'entre elles sera déterminée par G_4 et par un point quelconque de Z.

Dans l'homographie H_3^4 , que nous avons également mentionnée plus haut, l'homographie H_1^3 marquée sur M, N, P, dont nous avons parlé constitue précisément l'ensemble des éléments neutres lorsque le point de L doit rester indéterminée.

Dans une H_{n-1}^n , à un groupe de $(n-2)$ points correspond, en générale, une H_1^2 .

Cependant, il peut se faire que cette homographie H_1^2 soit complètement indéterminée.

Les groupes de $(n-2)$ points qui jouissent de cette propriété sont des *éléments doublement neutres*.

Dans une H_{n-1}^n , les éléments doublement neutres constituent une H_{n-6}^{n-2} .

A moins de relations particulières, les homographies H_{n-1}^n ne possèdent donc d'éléments doublement neutres qu'à partir de $n=6$.

Il peut exister, de même, des éléments duplement, quadruplement neutres, etc. Leur définition n'est pas nécessaires après ce qui précède.

Voici un exemple spécial d'éléments doublement neutres dans une H_3^4 .

Supposons que l'on ait un système triplement infini de surfaces du second ordre passant par six points l, m, n, p, a, b . Ce système de surfaces marquera sur quatre droites L, M, N, P passant par l, m, n, p une H_3^4 . Or, il peut se faire que par les six points donnés passe une surface du second ordre ayant L et M pour génératrices.

Cette surface coupera N et P en deux points formant un couple doublement neutre. On s'aperçoit en effet, sans peine, que deux points quelconques pris sur L et M complètent le groupe dont fait partie le couple neutre.

Homographies H_{n-2}^n . — Ces homographies étant déterminées par les groupes communs à deux homographies du même ordre et du rang $(n-1)$, on voit que si l'on choisit $(n-2)$ points, il leur correspond, dans chacune des homographies fondamentales, une H_1^2 . Les deux homographies ainsi définies ont, en général, deux couples communs. Par suite, à chaque groupe de $(n-2)$ points correspondent deux groupes complets de n points.

Par un choix convenable des $(n-2)$ points, il peut se faire que les deux homographies H_1^2 n'aient qu'un couple commun, on plutot que les deux couples coïncident.

Ces groupes de $(n-2)$ points sont des *groupes de ramification*; les points que leur correspondent sont des *éléments doubles*. $(n-3)$ points, pris arbitrairement, déterminent quatre groupes de ramification.

En général $(n-2)$ éléments déterminent, comme on vient de le voir, deux groupes complets de n éléments, ou un seul, dans le cas particulier où les $(n-2)$ points sont de ramification.

Il peut aussi arriver que les deux derniers points, sans être complètement arbitraires, constituent des couples, en nombre infini, appartenant à une homographie.

Il suffira, pour cela, que dans les deux homographies H_{n-1}^n il corresponde, à ce groupe, deux homographies H_1^2 identiques, c'est-à-dire ayant trois couples communs.

Ces groupes de $(n-2)$ points sont caractérisés par $(n-5)$ points que déterminent un ou plusieurs termes completant le groupe.

Nous dirons que de pareils groupes constituent des *éléments neutres de second espèce*.

Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations: nous aurons l'occasion de signaler, au fur et à mesure que nous avancerons dans notre étude des exemples particuliers de ces éléments spéciaux.

D'après ce qui précède, on comprend bien que dans les homographies du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang, il peut se présenter des éléments satisfaisant à ces diverses définitions. Nous aurons notamment, dans ces homographies, à tenir compte des éléments neutres, des éléments de ramification et des points doubles car nous verrons qu'ils jouent un rôle prépondérant.

Nous ne croyon pas utile d'étendre, pour le moment, ces remarques aux homographies H_{n-3}^n , H_{n-4}^n , etc.

Le lecteur suppléera facilement à ce qui peut manquer ici.

Jusqu'à présent nous avons supposé que les n séries d'éléments sont distribuées sur n supports distincts.

Une projection ou une section permet de les considérer sur un support unique.

Si, par exemple, on coupe trois faisceaux de plans en H_2^3 par une droite, on obtient sur celle-ci, trois séries homographiques superposées.

Dans ce cas, outre les éléments particuliers que nous avons signalés, il existe des *éléments unis*, qu'il ne faut pas, en général, confondre avec les *éléments doubles*.

Quand, en un point, sont réunis $(k+1)$ éléments appartenant à $(k+1)$ séries, d'une H_k^n , nous dirons qu'ils constituent un élément uni d'ordre $(k+1)$. En général, nous désignerons un tel élément par la notation U_{k+1} .

A moins de conditions particulières, l'ordre des éléments unis ne dépassera pas le rang de l'homographie, augmenté d'une unité.

Une H_{n-1}^n possède n éléments U_n , quand les n séries sont distribuées sur un support unique.

On peut déterminer, de même, les éléments unis dans des homographies H_k^n .

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une H_{n-2}^n .

D'après la définition, si nous choisissons arbitrairement les

$(n-2)$ premiers points, il leur correspond deux H_1^2 , ayant deux couples communs.

Par suite, la relation entre les séries d'éléments sera telle, que $(n-2)$ éléments étant choisis, il leur correspond deux éléments dans chacune des séries restantes.

Il en résulte que, pour chaque combinaison de $(n-1)$ séries, il existe $2(n-1)U_{n-1}$.

D'après cela, en général, il suffira de multiplier ce nombre par les combinaisons de $(n-1)$ séries prises parmi les n considérées.

Donc

Une H_{n-2}^n possède $1.2.(n-1)C_{n,n-1}U_{n-1}$.

Des considérations analogues nous mènent à la propriété suivante:

Une H_k^n possède $\frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots k+1} (n-k)(k+1)U_{k+1}$.

Ces éléments unis n'ont pas cependant, nous semble-t-il, une importance aussi grande, que les éléments spéciaux que nous avons signalés d'abord.

En premier lieu, on peut observer qu'ils ne jouissent pas de propriétés projectives, lorsque les centres ou les axes de projection varient pour chaque série. La considération de ces éléments n'aura donc qu'une importance secondaire, surtout tant qu'il s'agira des séries homographiques les plus générales. Il n'en sera plus tout à fait de même, dans le cas où ces homographies seront particularisées.

Définition algébrique des homographies. — Nous pouvons supposer que, sur chaque support, un élément soit défini par un paramètre unique, ou, en employant des coordonnées homogènes, par deux paramètres.

Alors, en partant de la définition que nous avons donnée en commençant, une homographie H_{n-1}^n sera définie par une relation de la forme

$$f = 0, \quad (1)$$

où f représente une forme binaire à n séries de variables.

$$f \equiv a_x a'_y a''_z \dots a_w^{(n-1)}$$

D'une manière explicite, nous écrivons

$$f \equiv \sum a_{ijkl\dots m} x_i y_k z_l \dots u_m.$$

Les indices i, k, l, \dots, m peuvent prendre les valeurs 1 et 2. De là résulte immédiatement que f a 2^n termes.

En conséquence

Une homographie H_{n-1}^n est caractérisée par $(2^n - 1)$ groupes de n éléments.

Il faut observer que ces groupes ne doivent pas dépendre les uns des autres, c'est-à-dire doivent être complètement arbitraires; en d'autres termes, les $(2^n - 1)$ équations linéaires que l'on obtiendra doivent admettre un système de solutions finies et déterminées pour les rapports des coefficients de f .

Il serait difficile, nous semble-t-il, dans l'état actuel de la Géométrie, de se passer de la considération de l'équation (1) pour établir, au moins en général, le théorème que nous venons d'énoncer et qui sert de fondement à une grande partie de la théorie de ces groupes d'éléments.

De cette propriété résulte immédiatement qu'une H_{n-2}^n est caractérisée par $(2^n - 2)$ groupes de n points.

En effet, si l'on choisit $(2^n - 1)$ groupes complètement arbitraires, ils ne pourront appartenir, à la fois, à deux H_{n-1}^n .

Cependant ces groupes ne peuvent être formés à l'aide de groupes neutres ou de groupes appartenant à une homographie de rang inférieur.

Ainsi, pour citer un exemple, nous avons vu qu'une H_2^3 possède six couples neutres. Ces couples et six autres points forment six ternes qui ne suffisent pas toujours pour caractériser une H_1^3 . Si l'on prend un septième terne quelconque, il pourra encore appartenir à deux homographies H_2^3 distinctes. Dans ce cas, ce ne sera plus qu'un huitième terne qui sera caractérisé par un de ses points.

De même encore, dans le cas où $n=3$, les six groupes ne peuvent appartenir à une H_0^3 , car ces groupes n'équivalent, en réalité, qu'à cinq ternes.

En continuant de la même manière, on voit qu'une H_{n-3}^n est déterminée par $(2^n - 3)$ groupes, ... une H_k^n , par $(2^n - n + k)$.

Des restrictions analogues, relatives aux éléments neutres et aux groupes appartenant à des homographies de rang inférieur, doivent être faites pour les éléments caractéristiques.

Nous abandonnerons maintenant ces considérations générales pour aborder l'étude d'un cas particulier des homographies, celui où $n = 3$.

Non seulement cette théorie aura l'avantage d'être à peu près complète; mais elle sera susceptible d'une représentation géométrique relativement simple.

En outre, nous aurons l'occasion de faire voir l'utilité que l'on peut retirer des propriétés de ces systèmes d'éléments, dans l'étude des figures géométriques.

Nous ne développerons cependant pas entièrement la théorie algébrique des formes trilinéaires qui contient celle des homographies du troisième ordre: nous renverrons, pour cela, aux mémoires spéciaux que nous avons publiés sur ce sujet.

II. Soit

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \dots$$

une forme trilinéaire (*).

Le système des covariants de cette forme est le suivant:

$$f, \sigma_0 = (a' b') (a'' b'') a_x b_x; \quad \sigma_1 = (a'' b'') (ab) a'_y b'_y;$$

$$\sigma_2 = (ab) (a' b') a''_z b''_z;$$

$$Q = (a' b') (a'' b'') (ac) b_x c'_y c''_z; \quad \Delta = (a' b') (c' d') (a'' b'') (c'' d'') (ad) (bc).$$

Entre ces six formes existe la relation

$$\frac{1}{2} \Delta f^2 + Q^2 = -\frac{1}{2} \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2. \quad (2)$$

(*) Voir nos *Essais de Géométrie Supérieure du troisième ordre*, p. 9-29.

Supposons Δ différent de zéro, et désignons par $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2$ les facteurs linéaires de $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$.
La relation 2) montre que f peut s'écrire

$$f = \alpha_{111} \xi_1 \eta_1 \zeta_1 + \alpha_{222} \xi_2 \eta_2 \zeta_2, \quad (3)$$

que nous regarderons comme son expression canonique.

Si l'on interprète la relation

$$f = 0,$$

en partant de l'expression 3), on remarque aisément que

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \eta_1 = 0, \eta_2 = 0; \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0,$$

associés de la manière suivante donnent les six couples neutres:

$$\xi_1 \eta_2, \xi_2 \eta_1, \eta_1 \zeta_2, \eta_2 \zeta_1, \zeta_1 \xi_2, \zeta_2 \xi_1.$$

Bien que la forme 3) soit en général impossible lorsque $\Delta = 0$, les trois covariants $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, qui sont alors des carrés, représentent des éléments neutres, c'est-à-dire que si dans l'équation

$$f = 0,$$

on donne à $x_1, x_2; y_1, y_2$, les valeurs déduites de

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0,$$

$\frac{z_1}{z_2}$ sera indéterminé.

Lorsque l'un des covariants σ est identiquement nul, il en existe un second nul; le troisième est en général différent de zéro.

Mais Δ étant le discriminant des trois covariants σ , celui des trois qui est différent de zéro est un carré, puisque $\Delta = 0$.

Dans ce cas, f est décomposable en deux facteurs: l'un bi-

linéaire, l'autre linéaire qui est la racine carré du covariant σ différent de zéro.

Enfin, il peu arriver que les trois covariants σ soient nuls en même temps: alors f est décomposable en trois facteurs linéaires.

Lorsque les trois séries d'éléments sont situées sur un même support, on peut les regarder comme susceptibles d'être soumises à une même substitution linéaire. Alors les expressions suivantes sont des covariants.

$$\chi_1 = (a'a'') \bar{a}_x, \quad \chi_2 = (a''a) a'_y, \quad \chi_3 = (aa') a''_z.$$

Si lon fait abstraction de la différence des variables, on a

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 0.$$

Les trois covariants χ , représentent des points aux quels correspond, au lieu d'une H_1^2 , une I_1^2 .

Si $\chi_1 \equiv 0$, $\chi_2 \equiv 0$, et, par suite, $\chi_3 \equiv 0$,

la forme f est symétrique par rapport aux trois séries de variables.

Outre la forme canonique 3), nous devons encore signaler une propriété importante de f .

Les covariants σ_0 , σ_1 , σ_2 ont, comme nous l'avons dit, un même discriminant Δ .

En conséquence, il sera toujours possible de projeter les trois séries d'éléments sur un support unique, de telle façon que les couples

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

coïncident.

Alors la forme f devient symétrique par rapport aux trois séries de variables.

En effet, appelons δ_0, δ'_0 ; δ_1, δ'_1 ; δ_2, δ'_2 , les racines des trois équations

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

la forme 3) devient explicitement:

$$f \equiv \alpha_{111} (x_1 - \delta_0 x_2) (y_1 - \delta_1 y_2) (z_1 - \delta_2 z_2) \\ + \alpha_{222} (x_1 - \delta'_0 x_2) (y_1 - \delta'_1 y_2) (z_1 - \delta'_2 z_2),$$

et si l'on suppose

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2; \quad \delta'_0 = \delta'_1 = \delta'_2,$$

on a bien le résultat annoncé.

Cette propriété sera d'ailleurs mise en lumière par l'exposition géométrique qui suivra.

En outre, on peut encore regarder cette propriété comme une conséquence de la suivante:

Il est toujours possible, par une triple substitution linéaire, de transformer une forme trilinéaire f , en une autre forme trilinéaire φ .

Les deux formes f et φ peuvent être quelconques: cependant il est bien évident que l'une des deux formes ne peut avoir son discriminant nul, si le discriminant de l'autre est différent de zéro.

Au surplus, la substitution ne sera réelle, c'est-à-dire susceptible d'être effectuée géométriquement que si les discriminants des deux formes f et φ ont le même signe.

Soient $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ deux ternes d'une H_2^3 et désignons par $\delta_1, \delta'_1; \delta_2, \delta'_2; \delta_3, \delta'_3$, les éléments neutres appartenant respectivement aux trois séries.

Alors, en se servant de la forme canonique, et en désignant par (a, b, c, d) le rapport anharmonique de quatre points, on arrive aisément à la relation suivante, donnée par M. Schubert:

$$(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta'_1) (\eta_1, \eta_2, \delta_2, \delta'_2) (\zeta_1, \zeta_2, \delta_3, \delta'_3) = 1.$$

Supposons maintenant que l'on se donne de l'homographie $f=0$, les points que viennent d'être employés et de l'homographie $\varphi=0$, les points

$$\Xi_1, H_1, Z_1; \Xi_2, H_2, Z_2; \Delta_1, \Delta'_1; \Delta_2, \Delta'_2; \Delta_3, \Delta'_3.$$

on peut établir les correspondances projectives entre les séries

$$\xi_1, \delta_1, \delta'_1; \Xi_1, \Delta_1, \Delta'_1; \eta_1, \delta_2, \delta'_2; H_1, \Delta_2, \Delta'_2;$$

$$\zeta_1, \delta_3, \delta'_3; Z_1, \Delta_3, \Delta'_3.$$

Si, dans ces séries, on cherche les points ξ_2, η_2, ζ_2 , correspondant respectivement à Ξ_2, H_2, Z_2 , on a

$$(\xi_1 \xi_2 \delta_1 \delta'_1) = (\Xi_1 \Xi_2 \Delta_1 \Delta'_1); \quad (\eta_1 \eta_2 \delta_2 \delta'_2) = (H_1 H_2 \Delta_2 \Delta'_2);$$

$$(\zeta_1 \zeta_2 \delta_3 \delta'_3) = (Z_1 Z_2 \Delta_3 \Delta'_3);$$

et il en résultera immédiatement que si la condition

$$(\xi_1 \xi_2 \delta_1 \delta'_1) (\eta_1 \eta_2 \delta_2 \delta'_2) (\zeta_1 \zeta_2 \delta_3 \delta'_3) = 1$$

est vérifiée, il en sera de même de

$$(\Xi_1 \Xi_2 \Delta_1 \Delta'_1) (H_1 H_2 \Delta_2 \Delta'_2) (Z_1 Z_2 \Delta_3 \Delta'_3) = 1.$$

Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Soit maintenant le système composé de deux formes trilineaires (*)

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \dots$$

$$\varphi = \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z = \beta_x \beta'_y \beta''_z = \dots$$

Ce système peut être regardé comme caractérisant une H_1^3 : nous allons énumérer quelques uns de ses covariants les plus importants.

(*) Voir *Atti dell' Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XXXV, p. 54.

Nous aurons d'abord les covariants de chaque forme isolée :

$$f, s_0, s_1, s_2, Q, D;$$

$$\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, K, \Delta.$$

Si nous formons les expressions analogues pour

$$\lambda f + p\varphi,$$

nous obtenons les covariants nouveaux :

$$(s_i)_{\lambda p} = \lambda^2 s_i + 2\lambda p S_i + p^2 \sigma_i$$

$$(Q)_{\lambda p} = \lambda^3 Q + 3\lambda^2 p Q' + 3\lambda p^2 K' + p^3 K.$$

$$D_{\lambda p} = \lambda^4 D + 4\lambda^3 p D' + 6\lambda^2 p^2 D'' + 4\lambda p^3 \Delta' + p^4 \Delta,$$

ce qui donne les covariants

$$S_0, S_1, S_2, Q', K' \text{ et les invariants } D', D'', \Delta'.$$

Enfin si nous formons le discriminant de $(s_i)_{\lambda p}$, regardé comme fonction de λ, p , nous aurons les trois covariants :

$$l_x^4 = 2[s_0 \sigma_0 - (S_0)^2], \quad m_y^4 = 2[s_1 \sigma_1 - (S_1)^2], \quad n_z^4 = 2[s_2 \sigma_2 - (S_2)^2].$$

Les trois covariants

$$l_x^4, m_y^4, n_z^4,$$

ont les mêmes invariants qui ne diffèrent pas, en outre de ceux de $D_{\lambda p}$ regardé comme fonction de λ, p .

Ces trois covariants, égaux à zéro, représentent les points de ramification.

Nous pouvons encore calculer les covariants qui, égaux à zéro, représentent les éléments doubles.

En convenant de désigner par h_F le hessien d'une forme F , les six groupes de points doubles seront représentés par les covariants suivants:

$$A_x^4 = l_x^4 + k h_l; \quad A'_x{}^4 = l_x^4 + k' h_l;$$

$$B_y^4 = m_y^4 + k_1 h_m; \quad B'_y{}^4 = m_y^4 + k'_1 h_m;$$

$$C_z^4 = n_z^4 + k_2 h_n; \quad C'_z{}^4 = n_z^4 + k'_2 h_n.$$

Ces six covariants se divisent en trois groupes de deux qui ont les mêmes invariants.

Enfin, si l'on élimine λ, p entre

$$D_{\lambda p} = 0, \quad \text{et} \quad (s_i)_{\lambda p} = 0,$$

on obtient trois nouveaux covariants réquadratiques du même type:

$$\Sigma_0 = l_x^4 + p'' h_l.$$

$$\Sigma_1 = m_y^4 + p'' h_m.$$

$$\Sigma_2 = n_z^4 + p'' h_n.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer

$$\lambda f + p \varphi,$$

comme une forme quadrilinéaire et d'appliquer les résultats que nous avons fait connaître relativement à cette forme (*).

(*) Voir *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. XVII, 1882.

Enfin considérons trois formes trilinéaires

$$f_1, f_2, f_3;$$

nous ne signalerons que trois covariants de ce système parce que ce sont les seuls qui ont quelque utilité dans ce qui va suivre.

Si l'on cherche les groupes de valeurs de $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}$, qui satisfont à la fois aux trois conditions

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0,$$

il suffit, par exemple, de considérer x_1, x_2 comme fixes et de chercher la condition suffisante pour que les trois homographies H_1^2 correspondantes aient un couple commun.

Pour cela, il faudra rappeler quelques résultats donnés ailleurs.

Si l'on a trois homographies H_1^2 , ou trois formes bilinéaires

$$f_1 = a_x a'_y, f_2 = b_x b'_y, f_3 = c_x c'_y,$$

il existe un covariant bilinéaire important θ , dont nous avons donné l'interprétation géométrique

$$\theta = \begin{vmatrix} x_2 y_2 & -x_2 y_1 & -x_1 y_2 & x_1 y_1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Il ressort évidemment de cette interprétation géométrique que les trois homographies auront un couple commun, si

$$(\theta, \theta)_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & -b_{12} & -b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & -c_{12} & -c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{21} & b_{12} & b_{11} \\ c_{22} & c_{21} & c_{12} & c_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on applique ce résultat aux trois formes f_1, f_2, f_3 , où l'on regarde successivement $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ comme constantes, on obtient les trois expressions suivantes:

$$p_x^6 = \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{01} & t_{12} & t_{12} \\ t_{02} & t_{12} & t_{12} \end{vmatrix}, \quad q_y^6 = \begin{vmatrix} t'_{00} & t'_{01} & t'_{02} \\ t'_{01} & t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{02} & t'_{12} & t'_{22} \end{vmatrix}, \quad r_z^6 = \begin{vmatrix} t''_{00} & t''_{01} & t''_{02} \\ t''_{01} & t''_{11} & t''_{12} \\ t''_{02} & t''_{12} & t''_{22} \end{vmatrix}.$$

Dans ces déterminants

$$t_{ik} = (f_i, f_k)_{z,y}$$

c'est-à dire, si

$$f_1 = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z =$$

$$f_2 = \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z = \beta_x \beta'_y \beta''_z = -$$

$$t_{12} = (a' \alpha') (a'' \alpha'') a_x \alpha_x,$$

$$t_{11} = (a' b') (a'' b'') a_x b_x, \text{ etc.}$$

Les expressions analogues pour les autres éléments n'ont pas besoin d'être expliquées davantage.

Les racines des équations

$$p_x^6 = 0, \quad q_y^6 = 0, \quad r_z^6 = 0,$$

convenablement associées donnent les six groupes de valeurs qui satisfont à

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0.$$

Nous pouvons observer, d'après cela, que toutes les homographies H_2^3 qui ont cinq groupes communs, en ont nécessairement une sixième.

En effet, si l'on se donne cinq groupes satisfaisant à une condition

$$f = 0,$$

on pourra déterminer cinq des sept coefficients indépendants, c'est-à-dire que f pourra s'écrire

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3.$$

Le sixième groupe commun à

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0,$$

donnera nécessairement

$$f = 0.$$

III. Supposons maintenant que l'on se donne trois faisceaux de plans dont les axes soient trois droites X, Y, Z.

Nous pouvons imaginer que ces trois faisceaux forment une homographie H_2^3 .

Alors, sur une droite quelconque, les plans des trois faisceaux marquent trois séries, en H_2^3 , superposées: d'après une propriété signalée plus haut, ces séries ont trois éléments triples, ou trois U_3 .

Il en résulte que trois faisceaux homographiques en H_2^3 se coupent sur une surface qui est coupée en trois points par une droite quelconque: c'est donc une surface de troisième ordre.

Réciproquement, si l'on joint tous les points d'une surface du

troisième ordre à trois droites de la surface, ne se coupant pas deux à deux, les trois faisceaux des plans ainsi obtenus sont en H_2^3 .

Comme on le sait, une surface du troisième ordre est déterminée par trois droites et sept points. Par conséquent, une telle surface caractérise une H_2^3 la plus générale, puis que, ainsi que nous l'avons vu plus haut, celle-ci est définie par sept ternes (*).

Nous pouvons aisément substituer, à cette surface, une surface du second ordre, à l'aide du théorème suivant:

Soient g_1, g_2, g_3 trois droites non situées deux à deux dans un même plan, et appartenant à une surface du troisième ordre S_3 ; par un point P de S_3 menons trois droites G_1, G_2, G_3 .

Les plans qui joignent g_1, g_2, g_3 à tous les points de S_3 marquent sur G_1, G_2, G_3 trois ponctuelles dont les jonctions enveloppent une surface de la seconde classe Σ_2 .

Le théorème corrélatif pour les surfaces de la seconde classe s'énonce bien facilement.

Quant à la démonstration, elle est excessivement simple.

En effet, le point P et six autres points de S_3 caractérisent l'homographie H_2^3 .

Les trois droites G_1, G_2, G_3 et les six points donneront neuf plans que déterminent une surface de la seconde classe.

Or tous les plans tangents à cette surface marqueront sur G_1, G_2, G_3 trois ponctuelles en H_2^3 et celle-ci aura, avec l'homographie caractérisée par S_3 , sept ternes communs.

Il en résultera que tous les autres groupes seront identiques.

Cette propriété des surfaces du troisième ordre peut être rapprochée de la propriété de l'hexagramme de Pascal, telle au moins qu'elle a été retrouvée par Maclaurin. Mais, pour le moment, nous ne nous étendrons pas sur ce sujet.

D'après ce que nous venons de dire, à la considération d'une

(*) Ce mode de génération des surfaces du troisième ordre est celui qui a été employé par M. August: *Disquisitiones de Superficiebus tertii ordinis*, Berlin, 1862, et qui, au surplus, peut-être regardé comme découlant de la seconde méthode de Steiner, Werke, 1^{er} Bd., p. 651. M. Schubert s'en est également servi dans un important travail inséré aux *Mathematische Annalen*, t. XVII.

surface S_3 pour la représentation d'une H_2^3 peut être substituée celle d'une surface du second ordre.

Soit donc un trièdre circonscrit à une surface Σ_2 .

Désignons les trois arêtes par X_1, Y_1, Z_1 ; son sommet par S . Les plans $X_1SY_1, Y_1SZ_1, Z_1SX_1$ sont tangents à Σ_2 en trois points $\delta, \delta', \delta''$, par lesquels passent deux génératrices, réelles ou imaginaires.

Les droites X_1, Y_1, Z_1 , rencontrant chacune la surface en deux points (réels ou imaginaires), les six génératrices forment un hexagone gauche $x_1y_2z_1x_2y_1z_2$.

Ces six génératrices marquent, sur X_1, Y_1, Z_1 , les couples neutres de l'homographie.

En effet, tout plan passant par x_1y_2 , par exemple, étant tangente à la surface, le point z correspondant au couple (x_1, y_2) est indéterminé.

Nous pouvons observer que les neuf points $x_1x_2y_1y_2z_1z_2\delta\delta'\delta''$ permettent de former six hexagones gauches inscrits à la surface.

D'après les théorèmes de Dandelin (*), les droites x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 se coupent en un point S ; $\delta z_2, \delta' x_2, \delta'' y_2$ en un point S_1 ; $\delta z_1, \delta' x_1, \delta'' y_1$ en un point S_2 ; $\delta \delta'', y_1 z_1, y_2 z_2$ en un point X ; $\delta' \delta', x_1 y_1, x_2 y_2$ en un point Z ; $\delta' \delta, z_1 x_1, z_2 x_2$ en un point Y .

Hesse qui, le premier, a signalé ces six hexagones, a fait observer que S, S_1, S_2 sont sur une droite l ; X, Y, Z sur une droite Δ .

On peut remarquer aussi que si le plan $\delta \delta' \delta''$ coupe respectivement X_1, Y_1, Z_1 en des points $\Delta' \Delta'' \Delta$, les deux triangles $\delta \delta' \delta'', \Delta' \Delta'' \Delta$ sont homologues. La droite Δ est l'axe d'homologie de ces deux triangles et l rencontre le plan $\delta \delta' \delta''$ en leur centre d'homologie.

Maintenant, si l'on joint la droite Δ aux ponctuelles marquées sur X_1, Y_1, Z_1 , on obtient trois faisceaux en H_2^3 .

Mais les plans $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$ se coupant suivant Δ , les éléments neutres des trois séries coïncident dans cette H_2^3 .

Par suite, d'après une remarque faite plus haut, ces trois séries sont symétriques par rapport aux trois séries d'éléments.

De même si l'on joint $\delta \delta', \delta' \delta'', \delta'' \delta$ à tous les points de la surface, les ternes de plans ainsi obtenus marquent sur l , trois

(*) *Mém. de l'Acad. Roy. de Belgique*, t. III.

séries homographiques superposées, où les éléments neutres des trois séries coïncident. Ici encore, l'homographie est symétrique par rapport aux trois séries d'éléments.

Ces propriétés fournissent, comme on le voit, le moyen géométrique de transformer la forme trilinéaire f en une forme symétrique l .

La réalité des éléments neutres n'est pas nécessaire, comme on le voit sans peine, pour permettre d'effectuer la transformation.

En effet, la détermination des droites l et Δ ne dépend que de la construction des triangles homologues $\delta \delta' \delta''$, $\Delta \Delta' \Delta''$.

Nous appliquerons plus loin ces théorèmes et nous ferons voir comment ils permettent de construire les couples neutres lorsqu'ils existent réellement.

Les remarques précédentes contiennent, on le voit, la vérification géométrique des résultats démontrés plus haut relativement à une H_2^3 ; ils permettraient d'exposer la théorie de ces groupes de points, sans faire usage de considérations analytiques.

Il nous faut maintenant faire connaître la représentation géométrique d'une H_1^3 .

Pour cela considérons deux H_2^3 .

Si nous prenons trois droites X, Y, Z comme axes de trois faisceaux de plans, chacune de ces H_2^3 , caractérisera une surface S_3 , contenant les trois droites X, Y, Z .

Appelons S_3, S'_3 les deux surfaces; outre les droites communes X, Y, Z , elles se couperont suivant une courbe gauche G_6 de genre un.

Les groupes de plans qui joindront les points de G_6 aux axes X, Y, Z formeront les ternes de l'homographie H_1^3 .

Nous pouvons observer qu'un plan quelconque, passant par X , coupe S_3 et S'_3 respectivement suivant deux coniques C_2, C'_2 .

Ces coniques ont quatre points communs; mais deux de ces points son évidemment ceux où Y et Z percent le plan mené par X .

Les deux autres points restants, joints à Y et Z , donnent les deux couples qui complètent les deux ternes de H_1^3 correspondant à une valeur du paramètre (x_1, x_2) , comme nous l'avons vu plus haut.

Nous ferons voir, dans la suite de ce travail, comment on peut construire ces couples de points.

Dès qu'un point commun à S_3 et S'_3 , ou un point de G_6 , est connu, il est aisé de substituer, à cette représentation de H_1^3 , une autre représentation plus familière.

Soit P ce point; si par P, nous menons trois droites X_1, Y_1, Z_1 , chacun des surfaces S_3, S'_3 caractérisera, comme nous l'avons montré, une surface de la seconde classe inscrite au trièdre $PX_1Y_1Z_1$.

A l'étude de la courbe G_6 , nous pouvons donc substituer celle de la développable de la quatrième classe circonscrite à deux surfaces Σ_2, Σ'_2 , ou, ce qui revient au même, celle d'une courbe gauche G_4 de première espèce.

Ceci nous permet d'interpréter géométriquement les résultats que nous avons rencontrés.

Sur une G_4 de première espèce, prenons trois points arbitraires A, B, C.

Désignons par X, Y, Z les cotés AB, BC, CA du triangle ainsi formé.

Les jonctions de ces droites à tous les points de G_4 constituent une H_1^3 .

Par X, on peut mener quatre plans tangents à G_4 , indépendamment de ceux qui ont leurs points de contact en A et B.

Les quatre plans représentent les points de ramification de la série des x .

Si l'on joint X aux points de contact des plans tangents menés par Y et Z, on obtient la représentation des deux groupes de points doubles de cette même série.

Si l'on observe que, par le théorème de Poncelet, il existe quatre cônes du second degré passant par G_4 , on a la représentation des quatre formes du faisceau

$$\lambda f + p\varphi,$$

pour lesquelles le discriminant s'annule.

Si, par les sommets de ces quatre cônes, et par la droite X, on mène des plans, on obtient un nouveau groupe de quatre plans.

D'après une remarque faite plus haut:

Les quatre plans tangents menés par X, les deux groupes de quatre plans passant par X et par les points de contact de plans tangents menés par Y et Z, et enfin les quatre plans que joignent X aux sommets de quatre cônes du second ordre passant par G₄, sont des groupes d'une série définie par une équation de la forme

$$F + kH_F = 0.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur ces sujets dans une dernière partie de ce mémoire, consacrée aux applications géométriques.

(à suivre).

D'après une remarque faite plus haut :
 Les quatre plans tangents menés par Z à ses deux groupes de plans
 tangents plans passant par X et par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

$$F - \epsilon H^2 = 0.$$

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à ses deux groupes de plans
 tangents plans passant par X et par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à ses deux groupes de plans
 tangents plans passant par X et par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à ses deux groupes de plans
 tangents plans passant par X et par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à ses deux groupes de plans
 tangents plans passant par X et par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

passar as rectas dadas pela fórmula [B], cujas posições é necessario determinar, a fim de serem obtidos os valores de w^n e w^m , ou a determinação geometrica das raizes reaes da equação proposta.

Estas rectas serão tangentes ao envolucro das linhas a que se refere a fórmula [C]; portanto, obtida esta curva, tirar-lhe-hemos pelo ponto $[p, q]$ todas as tangentes possíveis, cujos traços sobre os eixos coordenados definirão as potencias m e n das raizes reaes de [A].

Egualada a zero a derivada de [C] em ordem a w vem

$$\pm my = nx \cdot w^{m-n},$$

pondo em evidencia os signaes que se podem deparar, e por substituição em [C]

$$\frac{y}{\left(\pm \frac{my}{nx}\right)^{\frac{m}{m-n}}} + \frac{x}{\left(\pm \frac{my}{nx}\right)^{\frac{n}{m-n}}} = 1$$

d'onde podemos deduzir a equação do envolucro.

A equação [C] póde ser escripta sob qualquer das quatro fórmás

$$1 = \frac{x}{\pm w^n} + \frac{y}{\pm w^m}$$

ás quaes correspondem envolucros distinctos.

$$a) \quad 1 = \frac{x}{+w^n} + \frac{y}{+w^m}.$$

O envolucro será dado pela equação

$$x^m = (-1)^n \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D]$$

*

passar as retas dadas pela fórmula [B], cujas posições é necessário determinar, obtendo os valores de x^m e y^n ou a determinação geométrica das retas da equação proposta.

O envolturo será

$$x^m = \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D]$$

$$c) \quad 1 = \frac{x}{-w^n} + \frac{y}{+w^m}.$$

Resulta por envolturo

$$x^m = (-1)^{-m+n} \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D']$$

$$d) \quad 1 = \frac{x}{-w^n} + \frac{y}{-w^m}.$$

Obtem-se o envolturo da equação [C] pôde ser escrita sob qualquer das quatro fórmulas

$$x^m = (-1)^m \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D''']$$

Fazendo nas quatro equações dos envolturos

$$k = \pm \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n}$$

serão estes compreendidos na fórmula geral

$$x^m = \pm k y^n,$$

a qual, representando a parábola, número n , da ordem m , é por-

tanto a equação geral das parabolae. Do exposto conclue-se o seguinte:

A equação [C] é a das tangentes a uma parabola de qualquer ordem, sendo identicos aos da parabola os expoentes que entram nella.

Signaes de k

Consideradas as equações dos envolveros vê-se que, sendo m e n pares, tem k o signal positivo; as potencias w^n e w^m das raizes serão positivas; a equação [C] apresentará a fórmula (a), tanto para as raizes positivas, como para as negativas, e neste caso as equações de todos os envolveros apresentando coefficients positivos são identicas.

Sendo m impar e n par tem [C] a fórmula (a) para as raizes positivas, e a fórmula (b) para as negativas; correspondendo á primeira fórmula o envolvero [D] e á segunda o envolvero [D']; ambos identicos nesta hypothese, visto serem os coefficients positivos.

Quando m for par e n impar, a equação [C] terá a fórmula (a) para as raizes positivas e a fórmula (c) para as negativas; os envolveros correspondentes [D] e [D''] são identicos, vindo em ambos o coefficiente k com o signal negativo.

Sendo m e n impares, vem a fórmula (a) para as raizes positivas e (d) para as negativas; identicos os envolveros correspondentes [D] e [D''']; ambos de coefficiente negativo.

Ter-se-ha portanto:

Hypotheses	Fórmulas da equação (C)	Signaes de k
1. ^a .. m e n pares	{ (a) para as raizes positivas e negativas	positivo.
2. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ impar} \\ n \text{ par} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) raizes positivas	positivo.
	{ (b) » negativas	
3. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ par} \\ n \text{ impar} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) » positivas	negativo.
	{ (c) » negativas	
4. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ impar} \\ n \text{ impar} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) » positivas	negativo.
	{ (d) » negativas	

A qualquer d'estas hypotheses corresponde por consequencia um unico signal de k , ou uma só curva envolvero.

Quadrantes em que pôde estar situado o ponto (p, q) . Posições distintas da tangente

Os valores das coordenadas p e q devem ser respectivamente tomados sobre os eixos dos xx e dos yy , e em qualquer dos quadrantes por estes eixos determinados ha a considerar as quatro hypotheses precedentemente feitas.

Salvo casos particulares que serão estudados, a tangente tirada d'um ponto M , de coordenadas p e q á curva envolucro, qualquer que seja a situação d'este ponto sobre o plano, atravessará tres quadrantes; d'ahi resultam para cada quadrante tres posições distintas para a tangente que parte de M , as quaes podem ser designadas por ω , ω_1 , ω_2 .

Existindo o ponto no primeiro quadrante chamaremos ω á tangente que atravessa os quadrantes primeiro, segundo e quarto; ω_1 á que atravessa o primeiro, segundo e terceiro; ω_2 á que atravessa o primeiro, terceiro e quarto. É facil traçar as figuras que indicam as posições distintas da tangente, suppondo M situado em cada um dos outros quadrantes.

Na hypothese de se querer determinar as raizes reaes de $[A]$, e attendendo portanto só a estas, devemos considerar sempre positivas as potencias de w , de expoente par, e positivas ou negativas as outras; as primeiras tem de ser contadas na parte positiva de cada eixo; as segundas serão contadas na parte positiva quando as raizes correspondentes forem positivas, e na parte negativa quando ellas forem negativas. Posta esta condição vê-se bem que ha casos em que teremos de excluir uma ou mais tangentes pelo facto de a não preencherem, bastando para esse fim que um dos traços por ellas feitos sobre os eixos não exista do lado da origem que se requer.

Da condição estabelecida resulta que serão só admissíveis para a tangente as posições distintas, constantes da tabella seguinte:

1.º Quadrante. Coordenadas de M : $+p, +q$.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. ^a Hypothese | é só admissivel a posição ω . |
| 2. ^a » | são admissíveis ω e ω_1 . |
| 3. ^a » | » » » ω e ω_2 . |
| 4. ^a » | » » » ω , ω_1 e ω_2 . |

2.^o Quadrante. Coordenadas de M: $+p, -q$.

- 1.^a Hypothese..... é só admissivel ω .
- 2.^a » são admissíveis ω e ω_1 .
- 3.^a » é só admissivel ω .
- 4.^a » são admissíveis ω, ω_1 e ω_2 .

3.^o Quadrante. Coordenadas de M: $-p, -q$.

- 1.^a Hypothese..... não ha solução.
- 2.^a » é só admissivel ω_1 .
- 3.^a » » » ω_2 .
- 4.^a » são admissíveis ω_1, ω_2 e ω_3 .

4.^o Quadrante. Coordenadas de M: $-p, +q$.

- 1.^a Hypothese..... é só admissivel ω .
- 2.^a » »
- 3.^a » são admissíveis ω e ω_2 .
- 4.^a » » » ω, ω_2 e ω_3 .

Estas posições distinctas da tangente, como é claro, não significam precisamente raizes distinctas; póde dar-se a circumstancia de admittir o envolucro para a posição assignada ao ponto M duas tangentes de posição ω , ou de qualquer das outras posições $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; póde além d'isso haver duas raizes eguaes, do mesmo signal, que serão accusadas por uma só tangente.

Elaborada a tabella anterior, independentemente da consideração dos envolucros, as posições distinctas da tangente que foram escolhidas para cada caso só podem servir se o envolucro respectivo as admitte; portanto fica feita por esta tabella uma primeira exclusão, e só depois do estudo dos envolucros se poderá proceder ao apuramento definitivo das tangentes que são uteis e das raizes que lhes correspondem.

Da analyse precedente deduz-se já que ha um caso, em que não é possível o admittir a equação proposta nenhuma raiz real; tem este logar para a posição de M no 3.^o quadrante, dada a 1.^a hypothese, caso em que a equação [A] se póde escrever d'este modo

$$\omega^{2m'} + p\omega^{2(m'-n')} + q = 0;$$

effectivamente não ha raiz alguma real, positiva ou negativa, que possa satisfazer.

Deve notar-se sempre que os signaes assignados a p e q são os que estes parametros teem no segundo membro da equação [B]; ou os contrarios d'aquelles com que entram em [A].

Envolucros

Da equação $x^m = ky^n$, em que podemos suppôr k positivo ou negativo, vem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{nk}{m} \cdot \frac{y^{n-1}}{x^{m-1}} = \frac{nk^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot y^{\frac{n}{m}-1} = \pm \left[\left(\frac{m}{n} - 1 \right) y \right]^{-1 + \frac{n}{m}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{nk^{\frac{1}{m}}}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \frac{1}{y^{2 - \frac{n}{m}}}$$

$$= \pm \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 1 \right)^{-1 + \frac{n}{m}} \cdot y^{-2 + \frac{n}{m}}$$

podendo ser a segunda derivada, positiva ou negativa, as fórmulas precedentes teem o inconveniente de não indicarem quando lhe compete qualquer dos signaes; é portanto preferivel a seguinte

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{nk^2}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \frac{y^{2(n-1)}}{x^{2m-1}}$$

que se obtem derivando a primeira das expressões achadas para $\frac{dx}{dy}$ e substituindo no numerador da expressão resultante x^m por ky^n . Sendo k^2 sempre positivo, $n < m$ e $2m - 1$ um expoente impar, o signal de $\frac{d^2x}{dy^2}$ estará dependente do de x , vindo para

esta derivada o signal contrario ao de x^{2m-1} , ou ao de x ; visto que $\left(\frac{n}{m} - 1\right)$ é uma quantidade negativa.

As parabolae são pois tangentes na origem das coordenadas ao eixo dos XX ; podendo dizer-se, em geral, que a tangencia se effectua nesse ponto com o eixo, sobre o qual se marcam os valores da variavel a que na equação corresponde o maior ex-ponte, e, em relação a este eixo, todas as curvas obtidas são convexas.

Só pôde haver inflexão na origem das coordenadas, e excepto neste caso exige-se, para que o raio de curvatura seja infinito, que $m=n$; hypothese que transforma a equação das parabolae na d'uma recta.

A partir da origem a tangente vai mudando de inclinação, até se tornar parallelá ao eixo das abscissas, a uma distancia infinita d'aquelle ponto.

Considerando as quatro hypotheses feitas, e em cada uma d'ellas k positivo e negativo, obteremos as figuras (*):

Na 1. ^a hypothese, para k positivo.....	figura 1. ^a
(signal negativo de k dá valores imaginarios para x e y)	
Na 2. ^a hypothese, para k positivo.....	figura 2. ^a
» » k negativo.....	» 3. ^a
Na 3. ^a hypothese, » k positivo.....	» 4. ^a
» » k negativo.....	» 5. ^a
Na 4. ^a hypothese, » k positivo.....	» 6. ^a
» » k negativo.....	» 7. ^a

Estas figuras representam as diversas combinações que se podem fazer com os arcos 1, 2, 3 e 4, tomados dois a dois, con-

(*) Pedimos ao leitor que trace as figuras. Compõem-se de arcos de curva tangentes ao eixo dos xx e symmetricas relativamente a este eixo e ao dos yy . A figura 1.^a tem quatro arcos, um em cada quadrante; a figura 2.^a tem dois, um no primeiro quadrante, outro no segundo; a figura 3.^a tem um no terceiro quadrante, outro no quarto; a figura 4.^a tem um no primeiro quadrante, outro no quarto; a figura 5.^a tem um no segundo quadrante, outro no terceiro; a figura 6.^a tem um no primeiro quadrante, outro no terceiro; a figura 7.^a tem um no segundo quadrante, outro no quarto. Designaremos estes arcos pelos numeros que indicam o quadrante, onde estão situados.

servando-se tangentes no origem das coordenadas ao eixo dos XX; excepto a figura 5.^a que os apresenta todos.

Sendo k positivo na 1.^a e 2.^a hypotheses; negativo nas outras duas, nem todas as figuras precedentes, na pesquisa das raizes reaes, devem ser tomadas como envolucros, mas simplesmente as figuras 1.^a, 2.^a, 5.^a e 7.^a, resultantes as duas primeiras da hypothese de k positivo, e as duas ultimas de k negativo.

Determinação e construção das potencias das raizes w^m e w^n

Como devemos neste estudo distinguir os casos em que m e n são simultanea, ou separadamente, pares ou impares, é conveniente representar m por $2m'$ ou $(2m' \pm 1)$, segundo for par ou impar; da mesma sorte n póde ser designado por $2n'$ ou $(2n' \pm 1)$.

Representando as potencias w^m e w^n as distancias, que respectivamente separam da origem das coordenadas os traços das tangentes uteis sobre os eixos dos YY e dos XX, é-lhes applicavel a mesma lei de signaes que respeita a estas coordenadas.

Resulta portanto que, no caso de ser par o expoente d'uma d'estas potencias, a linha correspondente não póde ser tomada a partir da origem das coordenadas sobre a parte negativa do eixo em que essa potencia deve ser marcada.

Quando o expoente for impar, as potencias das raizes negativas serão contadas na parte negativa do eixo, e as das raizes positivas na parte positiva.

Sendo pares os dois expoentes m e n , ambas as potencias serão positivas e contadas como tal: mas como qualquer d'estas póde provir tanto d'uma raiz positiva como d'uma negativa, segue-se que a mesma tangente, apesar de indicar uma só potencia, corresponde a duas raizes eguaes e de signaes contrarios.

Sendo par um dos expoentes e impar o outro, já se não póde dar o caso da correspondencia da mesma tangente a duas raizes de signaes differentes, porque basta ser um dos expoentes impar, para que as potencias das raizes positivas que o admittem sejam distinctas das potencias das raizes negativas.

Percorreremos successivamente, para a construcção que se deseja effectuar, cada uma das quatro hypotheses, distinguindo em

cada uma d'ellas as posições que o ponto M de coordenadas p e q póde occupar em cada um dos quatro quadrantes.

Nos quadrantes em que exista um ramo de curva envolucro ha a considerar tres casos: ponto situado acima da curva, sobre ella, ou abaixo d'ella.

Antes de entrar porém na determinação das raizes, seguindo as diversas hypotheses, é indispensavel dizer duas palavras sobre um interessante caso particular que se apresenta neste estudo.

Raizes reaes, eguaes e do mesmo signal

Quando do ponto exterior á curva envolucro podemos tirar duas tangentes á parte situada n'um quadrante, a qual se póde considerar como um ramo distincto, attenta a symetria de configuração que existe nas parabolae das diversas ordens, determinaremos sobre a mesma parte, positiva ou negativa, de qualquer dos eixos duas potencias, de gráo m ou de gráo n , de duas raizes.

Á medida que o ponto M se approximar da curva, diminuirá a differença entre essas potencias até desaparecer de todo, quando o ponto estiver situado sobre a curva envolucro, obtendo-se neste caso duas raizes reaes, eguaes e do mesmo signal.

O valor d'estas raizes será dado pela fórmula

$$w = (-1)^n \left(\frac{-p(m-n)}{m} \right)^{\frac{1}{n}}$$

que se deduz facilmente da derivada de $[A]$, tendo alli o parametro p um signal contrario áquelle com que entra no primeiro membro de $[A]$.

Os valores de w só podem sahir imaginarios quando n for par, o que se dá na 1.^a hypothese e na 2.^a; mas em qualquer d'estas exige-se para esse fim que p seja negativo em $[B]$, ou no segundo membro de $[A]$, o que só se póde dar na 1.^a hypothese com os ramos (3) e (4), correspondentes a p negativo, os quaes não podem dar tangentes admissiveis, porque tanto num ramo como no

outro determinariam sobre o eixo dos XX valores negativos para a potencia w^n , que nesta hypothese é par.

Na 2.^a hypothese, sendo só admissivel a configuração correspondente a p positivo (figura 2.^a), as raizes eguaes que obtivermos não serão imaginarias.

Como a expressão $\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{1}{n}}$ no caso sujeito, em que n é par, vem affecta de dois signaes, segue-se que poderemos ter raizes eguaes, ambas positivas ou ambas negativas.

Quando n é impar e p positivo em [B] as raizes eguaes serão positivas, segundo a fórmula, e é effectivamente o que se póde dar nas figuras 1.^a e 3.^a

Sendo n impar e p negativo, as raizes eguaes serão negativas, o que nas mesmas figuras se reconhece ainda.

Como se depreheende facilmente, não só do que fica dicto, como da exposição que vai seguir, as considerações feitas sobre a fórmula deduzida veem justificar nesta parte o processo empregado.

Posto isto, passaremos á determinação das potencias w^m e w^n .

1.^a HYPOTHESE (m e n pares). [Fig. 1.^a]

Nesta hypothese a cada solução positiva corresponde uma outra negativa egual, e é claro que só as tangentes ao ramo (2) podem convir para a resolução do problema, por serem as unicas correspondentes a potencias positivas de w ; vê-se portanto que haverá as seguintes soluções:

1.^o Quadrante (coordenadas de M : $+p, +q$)

Só se póde tirar uma tangente ao ramo (2); teremos duas soluções reaes e eguaes: uma positiva e outra negativa. Qualquer que seja a posição occupada pelo ponto neste quadrante em relação á curva, o numero de soluções não varia.

2.^o Quadrante (coordenadas de M : $+p, -q$)

a) Ponto situado acima da curva.

Sempre é possível, dado este caso, o tirar duas tangentes ao

ramo (2), e haverá portanto duas soluções reaes positivas e outras duas negativas.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

As duas tangentes, precedentemente obtidas, confundir-se-hão n'uma unica; tornam-se eguaes as soluções positivas, bem como as negativas; haverá ainda quatro soluções, como no caso anterior, todas eguaes em valor absoluto, differindo apenas nos signaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

É impossivel tirar tangente alguma, e não ha portanto solução real.

3.º *Quadrante* (coordenadas de $M: -p, -q$)

Não podendo tirar-se tangentes ao ramo (2), não ha solução real.

4.º *Quadrante* (coordenadas de $M: -p, +q$)

Seja qual for a posição de M neste quadrante, sempre se póde tirar uma tangente ao ramo (2) e não mais do que uma. Ha pois sempre duas soluções reaes: uma positiva, outra negativa.

2.ª *HYPOTHESE* (m impar, n par). [Fig. 2.ª]

Todas as tangentes aos ramos (1) e (2), interceptando apenas a parte positiva do eixo dos XX , sobre a qual devem neste caso ser contadas as potencias de gráo n de w , satisfazem á questão.

1.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, +q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Ha duas tangentes para o ramo (1) e uma para o ramo (2); cada uma das primeiras corresponde a uma raiz negativa; a segunda tangente a uma raiz positiva. Neste caso obteem-se portanto duas raizes negativas e uma positiva.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

As duas tangentes ao ramo (1) confundem-se numa unica, resultando duas raizes negativas eguaes; a tangente ao ramo (2) dá logar a uma raiz positiva. Ha portanto duas raizes negativas e uma positiva.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Ha uma unica tangente, que é a tirada para o ramo (2), e portanto uma raiz positiva.

2.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

As duas tangentes ao ramo (2) determinarão duas raizes positivas, a tangente ao (1) uma negativa.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma unica tangente a (2) denuncia duas raizes positivas eguaes, havendo além d'isso pela tangente a (1) uma negativa.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Só se pôde tirar uma tangente para o ramo (1), resultando uma unica raiz negativa.

3.º *Quadrante* (coordenadas: $-p, -q$)

A tangente a (1) é a unica que se pôde tirar de qualquer ponto; vem sempre uma raiz negativa, e uma só.

4.º *Quadrante* (coordenadas: $-p, +q$)

Para todas as posições, occupadas pelo ponto M, haverá apenas uma raiz positiva, dada pela tangente ao ramo (2).

3.ª *HYPOTHESE* (m par, n impar). [Fig. 5.ª]

Todas as tangentes aos ramos (2) e (3), interceptando apenas a parte positiva do eixo dos YY, em que se devem contar as potencias de gráo m da variavel, satisfazem á questão.

1.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, +q$)

Qualquer que seja a posição de M, haverá uma tangente para (2), determinando uma raiz positiva, e uma tangente para (3) determinando uma outra negativa.

2.º Quadrante (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

As duas tangentes, que neste caso se podem tirar ao ramo (2), determinarão sempre duas raizes positivas.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma só tangente e duas raizes positivas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Não se pôde tirar tangente a nenhum dos ramos, e não haverá portanto raizes reaes.

3.º Quadrante (coordenadas: $-p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Não se pôde tirar tangente para ramo algum, e portanto não ha raizes.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma só tangente e duas raizes negativas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Sempre poderemos tirar duas tangentes ao ramo (3), e haverá duas raizes negativas.

4.º Quadrante (coordenadas: $-p, +q$)

Ha sempre, em todas as posições de M, uma tangente para o ramo (2) e outra para o ramo (3); resultando duas raizes: uma positiva e outra negativa.

4.ª HYPOTHESE (m e n impares). [Fig. 7.ª].

Todas as tangentes aos ramos (2) e (4), a que a figura está reduzida, satisfazem á questão, determinando o ramo (2) raizes positivas e (4) as negativas.

1.º Quadrante (coordenadas: $+p, +q$)

Em todas as posições de M haverá uma tangente a (2) e uma raiz positiva.

2.º Quadrante (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Das duas tangentes a (2) resultam duas raízes positivas; da tangente a (4) uma raiz negativa. Obteem-se assim tres raízes: duas positivas e uma negativa.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Da tangente que pelo ponto da curva se tira a (2) resultam duas raízes positivas eguaes; da tangente a (4) uma raiz negativa.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

A tangente a (4) produzirá uma raiz negativa, unica que satisfaz.

3.º Quadrante (coordenadas: $-p, -q$)

Qualquer que seja a posição de M ha uma unica tangente para o ramo (4) e uma raiz negativa.

4.º Quadrante (coordenadas: $-p, +q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Ha uma unica tangente para o ramo (2) e uma raiz positiva.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Da tangente a (2) resulta uma raiz positiva; da tangente a (4) duas raízes negativas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Das duas tangentes a (4) provém duas raízes negativas; da tangente a (2) uma raiz positiva.

Posição de M sobre os eixos

Eixo dos YY ($p = 0$)

1.ª *Hypothese.* Duas soluções eguaes, uma positiva outra negativa, quando o ponto está situado na parte positiva do eixo dos YY, dadas pela tangente ao ramo (2); não existe pelo contrario solução alguma, quando o ponto M estiver do outro lado da origem.

Ha portanto duas soluções quando q for positivo, e nenhuma quando for negativo.

2.^a *Hypothese.* Ha uma solução sempre, quer esteja o ponto d'um lado, quer do outro lado da origem das coordenadas; positiva ou negativa, segundo for q positivo ou negativo.

3.^a *Hypothese.* Existindo M á direita da origem, ou sendo q positivo, na tangente a (2) haverá uma raiz positiva; na tirada para (3) uma outra negativa e ambas eguaes. Sendo q negativo, é claro que não podemos ter solução alguma real.

4.^a *Hypothese.* Á direita da origem, ou quando q é positivo, haverá uma raiz positiva; á esquerda da origem, quando q é negativo, haverá uma raiz negativa.

O valor de q será em todos estes casos o da w^m .

Eixo dos XX ($q=0$)

1.^a *Hypothese.* Este eixo é tangente na origem das coordenadas a todos os ramos, o que dá um valor nullo para w ; consideração esta que se refere a todas as hypotheses.

De M póde tirar-se, quando situado acima da origem, uma tangente para (2), diversa do eixo dos XX, da qual provirá uma raiz positiva e uma negativa.

Quando situada abaixo da origem, esta segunda tangente não se póde tirar.

Sendo portanto p positivo haverá uma solução positiva e uma negativa; quando é negativo não ha solução alguma real.

2.^a *Hypothese.* Estando M abaixo da origem, ou sendo p negativo, não ha solução alguma; acima da origem, quando p é positivo, da tangente a (2) resulta uma raiz positiva, e da tangente a (1) uma negativa.

3.^a *Hypothese.* Ha sempre uma raiz real; positiva quando p é positivo, e negativa quando for p negativo.

4.^a *Hypothese.* Os valores positivos de p fazem achar uma raiz positiva; dos valores negativos resulta uma negativa.

Em todos estes casos a equação será satisfeita com o valor $w=0$.

Numero e signaes das raizes que admitte a equação

$$w^m \pm pw^{m-n} \pm q = 0$$

Sendo m e n simultaneamente pares, ou impares, scrá par a

diferença $m - n$; sendo porém um d'elles par, e impar o outro, a differença virá impar.

Nas considerações que seguem deve, mais uma vez, attender-se a que os signaes dos parametros na equação acima apresentada são os contrarios dos que se lhes attribuiram em [B] e em [C]. Por simplificação tomemos k pelo seu valor absoluto

$$\left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n}$$

e designem-se as diversas raizes que se obtiverem em cada caso por $R, R', R'' \dots$ com os seus respectivos signaes, repetindo-se o mesmo indice no caso de egualdade entre ellas.

1.^a HYPOTHESE: $w^{2m'} \pm pw^{2(m'-n')} \pm q = 0$

1.^o Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')} - q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, -R. \\ p^m = kq^n \dots + R, -R. \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

2.^o Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')} + q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, +R', -R, -R'. \\ p^m = kq^n \dots + R, +R, -R, -R. \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

3.^o Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')} + q = 0$. $\left\{ \dots \dots \dots \text{idem.} \right.$

4.^o Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')} - q = 0$. $\left\{ \dots \dots \dots + R, -R. \right.$

2.^a HYPOTHESE: $w^{2m'+1} \pm pw^{2(m'-n')+1} \pm q = 0$

1.^o Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')+1} - q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, -R', -R''. \\ p^m = kq^n \dots + R, -R', -R'. \\ p^m < kq^n \dots + R. \end{array} \right.$

2.^o Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')+1} + q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, +R', -R''. \\ p^m = kq^n \dots + R, +R, -R'. \\ p^m < kq^n \dots -R. \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots - R . \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R . \right.$

3.ª HYPOTHESE: $w^{2m'} \pm pw^{2(m'-n')+1} \pm q = 0$

1.º Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')+1} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R, - R' . \right.$

2.º Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, + R' . \\ p^m = kq^n \dots + R, + R . \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m < kq^n (*) \text{idem.} \\ p^m = kq^n \dots - R, - R' . \\ p^m > kq^n \dots - R, - R' . \end{array} \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')+1} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R, - R' . \right.$

4.ª HYPOTHESE: $w^{2m'+1} \pm pw^{2(m'-n')} \pm q = 0$

1.º Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R . \right.$

2.º Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, + R', - R'' . \\ p^m = kq^n \dots + R, + R, - R' . \\ p^m < kq^n \dots - R . \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots - R . \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')} - q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m < kq^n \dots + R . \\ p^m = kq^n \dots + R, - R', - R' . \\ p^m > kq^n \dots + R, - R', - R'' . \end{array} \right.$

(*) Por existir n'este caso o ponto M acima da curva fez-se $p^m < kq^n$; tomando-se para k o valor absoluto que se tem supposto.

Eixo dos YY: $w^m \pm q = 0$

1.^a Hypothese: $w^{2m'} \pm q = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2m'} + q = 0 \text{ não ha solução real.} \\ w^{2m'} - q = 0 + R, -R. \end{array} \right.$

2.^a Hypothese: $w^{2m'+1} \pm q = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2m'+1} + q = 0 - R, \\ w^{2m'+1} - q = 0 + R. \end{array} \right.$

Sendo a equação obtida pela 3.^a hypothese para este caso particular $w^{2m'} \pm q = 0$, é claro que devemos achar as mesmas soluções que pela 1.^a hypothese: e é effectivamente o que se deduz.

Da mesma sorte se acha que os resultados obtidos para a 4.^a hypothese são identicos aos obtidos pela 2.^a

Eixo dos XX: $w^n \pm pw^{m-n} = 0$ ou $w^n \pm p = 0$

1.^a Hypothese: $w^{2n'} \pm p = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2n'} - p = 0 + R, -R'. \\ w^{2n'} + p = 0 \text{ não ha solução real.} \end{array} \right.$

2.^a Hypothese: os resultados são analogos aos da 1.^a

3.^a Hypothese: $w^{2n'+1} \pm p = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2n'+1} - p = 0 + R. \\ w^{2n'+1} + p = 0 - R. \end{array} \right.$

4.^a Hypothese: o mesmo que na 3.^a

Construcção de w

Obtida a linha representativa d'uma qualquer das potencias de w , ou seja w^m ou w^n , seguindo o processo geral que foi adoptado para a determinação d'estas potencias, se pôde obter a de w .

O problema consiste em determinar uma linha que seja a raiz, indice m , d'uma outra linha dada.

Traçando n'um plano dois eixos coordenados orthogonaes, se tomarmos um ponto A sobre o eixo dos XX, a uma distancia w

da origem das coordenadas, e um outro ponto B sobre o eixo dos YY á distancia w^m da origem, será a equação da recta AB

$$1 = \frac{x}{w} + \frac{y}{w^m} \quad [C']$$

As rectas que satisfazem a [C'], terão por envolucro uma curva, cuja equação se obtem fazendo $n = 1$ na equação [D].

É claro que para a determinação desejada não é necessario o suppór a existencia de signaes negativos nos denominadores que entram no segundo membro de [C'].

Virá por envolucro a curva dada por

$$x^m = (-1)^n m^m (m-1)^{-m+1} \cdot y = -m^m (m-1)^{-m+1} y$$

visto ser $n = 1$.

A curva envolucro é a parabola, numero um, da ordem m ; a qual, no caso de ser m par, terá a fórma dada pela fig. 1.^a, e, quando impar, será a correspondente á da fig. 3.^a

O primeiro caso corresponde á 3.^a hypothese; o segundo á 4.^a; em qualquer d'elles se marca sobre o eixo dos YY e na parte positiva d'este um ponto B a uma distancia w^m da origem das coordenadas, a qual distancia é conhecida, e d'esse ponto tiram-se tangentes para a curva envolucro.

Pelo que se viu ao estudar na 3.^a hypothese o caso de estar o ponto situado sobre o eixo dos YY, na parte positiva d'este, se reconhece que sendo m par, ha duas soluções reaes, como se esperava, uma positiva e outra negativa.

Da 4.^a hypothese se conclue que, sendo m impar, haverá apenas uma solução negativa.

Dos expoentes das potencias que entram na equação trinomia resulta o envolucro a empregar; dos parametros as tangentes uteis para a resolução do problema.

Considerados os parametros como as coordenadas d'um ponto que se desloca sobre o plano, em consequencia das variações que lhes attribuirmos, precisa-se bem n'este movimento a influencia por elles exercida sobre as raizes reaes, cujos valores vemos variar, a par e passo, com os dos parametros.

Correspondendo uma parabola-envolucro só a um grupo de expoentes da equação trinomia, póde o caracteristico servir para designar esta; d'este modo será intitulada a equação [A]: equação numero n da ordem m , sendo n a differença dos expoentes,

$$x^m - (1 - m)x^{m-1} + (1 - m^2)x^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1}x = 0$$

visto ser $n = 1$.
 A curva envolucro é a parabola numero um, da ordem m ; a qual, no caso de ser m par, terá a forma dada pela fig. 1.ª, e quando impar, será a correspondente a da fig. 3.ª.
 O primeiro caso corresponde á 3.ª hypothese; e segundo á 4.ª; em qualquer d'elles se marca sobre o eixo dos YY' e em parte positiva d'este um ponto B a uma distancia 10^m da origem das coordenadas, a qual distancia é conhecida e conhecida em caso contrario para a curva envolucro.
 Pelo que se vê ao estudar na 3.ª hypothese o caso de estar o ponto situado sobre o eixo dos YY' em parte positiva d'este, se reconhece que sendo m par, ha duas soluções reaes, como se esperava, uma positiva e outra negativa.
 Na 4.ª hypothese se conclue que, sendo m impar, haverá apenas uma solução negativa.
 Dos expoentes das potencias que entram na equação trinomia resulta o envolucro a empregar; dos parametros as tangentes uteis para a resolução do problema.

BIBLIOGRAPHIA

D. G. Vicuña, D. J. Echegaray. — *Discursos lidos ante la Real Academia de Ciencias.* — Madrid, 1885.

Contem este opusculo, em primeiro logar, o discurso lido pelo illustre professor da universidade de Madrid, o sr. Vicuña, na occasião da sua recepção na Academia das Sciencias de Madrid. Depois de fazer o elogio do marquez do Socorro, a quem succedeu, o sr. Vicuña toma para thema do seu discurso as relações entre as theorias mathematicas da Physica, thema que desenvolve d'uma maneira notavel, como era de esperar do auctor de trabalhos importantes sobre Physica mathematica.

Principia por um resumo historico das descobertas relativas á applicação da mathematica á Physica, considerando successivamente a Optica, a Acustica, a Elasticidade, a Capillaridade, e as Sciencias do calor e da electricidade, tendo em vista principalmente as relações quantitativas entre estes ramos da Physica mathematica.

Em seguida, depois de estabelecer como é que a Mathematica e a Physica se unem para formar a Physica mathematica, passa á consideração d'aquellas relações quantitativas, isto é, á consideração da paridade dos algarithmos proprios dos differentes ramos da Physica mathematica. Occupa-se assim da *theoria do potencial*, do principio da *conservação da energia*, e finalmente das leis das vibrações.

O segundo discurso contido no opusculo foi lido na mesma Academia, em resposta ao precedente, pelo sr. Echegaray.

Ninguem melhor do que o sr. Echegaray, geometra e litterato eminente, poderia responder ao bello discurso do sr. Vicuña.

Tomando para thema o mesmo assumpto, isto é, a synthese dos diversos phenomenos physico-mathematicos, o eloquente orador occupa-se não só das relações entre os diversos ramos da Physica, mas tambem, e principalmente, da grande hypothese por meio da qual se pretende reduzir todos os problemas cos-

micos a problemas de Mecanica racional, admittindo tres entidades: *materia*, debaixo de fórma ponderavel e de ether; *forças* attractivas e repulsivas; e *movimento*, representando uma quantidade constante de energia.

Passa pois em revista os differentes ramos das sciencias physicas para mostrar que na actualidade os problemas de Mecanica Celeste, de Optica e de Elasticidade, estão reduzidos a problemas de Mecanica racional, e que tudo leva a crêr que, no futuro, a problemas d'esta natureza serão tambem reduzidos os problemas da Thermodynamica, da Electricidade e da Chymica. Termina com algumas considerações relativas a duas outras hypotheses cosmicas.

J. A. Martins da Silva. — *Sobre os sistemas hamiltoniano e canónico.* — Lisboa, 1885.

Na primeira parte d'este opusculo, o distincto collaborador d'este jornal tracta da transformação das equações fundamentaes da dinamica obtidas por Hamilton e Jacobi; do integral obtido por Jacobi das duas equações ás derivadas parciaes de Hamilton satisfeitas pela função principal e pela função característica; dos theoremas de Lagrange, Poisson e Liouville; etc.

Na segunda parte expõe as fórmulas da variação das constantes arbitrarías, e estuda as differentes fórmulas da função perturbadora.

D. M. Benitez y Parodi. — *Recuerdos de la Universidad de Coimbra.* — Madrid, 1885.

Contém este opusculo um bello discurso pronunciado pelo sr. Benitez y Parodi no *Centro do exercito e armada de Madrid*. Depois de fallar da importancia das sciencias mathematicas para as sciencias militares, a fim de justificar a oportunidade do seu discurso, o auctor menciona os nomes e as principaes obras dos mathematicos que n'este seculo tem havido em Portugal, tanto dentro como fóra da Universidade. Falla tambem dos principaes estabelecimentos annexos á Universidade.

J. Hoüel. — Études sur les méthodes d'enseignement dans les mathématiques. — Paris, 1885.

Contém este opusculo dois importantes trabalhos do bem conhecido professor da faculdade de sciencias de Bordeaux.

No primeiro tracta da generalisação successiva da idéa de quantidade na Analyse mathematica. Vai extendendo successivamente a definição de números, de modo porém que se lhes applique sempre os *principios característicos* das operações em Algebra. D'este modo vai considerando as operações sobre números inteiros; depois as operações sobre linhas tomadas na mesma direcção, d'onde resultam os números negativos; depois as operações sobre números funcçionarios e incommensuraveis; e enfim as operações sobre linhas tomadas em qualquer direcção, d'onde resultam os números imaginarios.

No segundo trabalho expõe o illustre mathematico reflexões muito sensatas sobre o ensino da Trigonometria.

Principia pelos dois meios por que póde ser ensinada a Trigonometria: ou seguindo o espirito da antiga Geometria, como se faz habitualmente, ou seguindo o methodo cartesiano. Opta pelo segundo meio como mais intuitivo, e como podendo servir de ponto de partida para a explicação das quantidades negativas.

Depois refere-se ao inconveniente de pôr nas mãos de alumnos noviços taboas de logarithmos das funcções angulares, em lugar de taboas d'estas funcções, e principalmente ao vicio capital de os obrigar a gastar muito tempo com calculos numericos pelo emprego de taboas com logarithmos de sete decimaes em lugar de empregar taboas com tres ou quatro decimaes.

Finalmente mostra que não ha vantagem alguma em transformar, por meio de angulos auxiliares, as fórmulas da Trigonometria em expressões monomias para as calcular por logarithmos, e que o calculo feito usando das fórmulas directas é em geral mais simples.

Termina pelo calculo dos erros dos resultados trigonometricos provenientes tanto da inexactidão necessaria das taboas, como dos erros dos dados da questão.

C. le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. — Stockholm, 1885.

Ainda ha pouco tempo annunciámos n'este jornal um trabalho importante do sr. C. le Paige sobre a involução e homographia da terceira ordem e de segunda classe, e já hoje temos a registrar uma applicação importante das theorias expostas n'aquelle trabalho ás superficies de terceira ordem definidas por dezanove pontos.

O illustre geometra faz preceder o estudo das superficies do estudo de algumas propriedades das cubicas e da resolução de alguns problemas relativos a estas curvas, de que depois faz uso.

Foi publicada esta memoria nas *Actas mathematicas* do sr. Mittag-Leffler.

SOBRE UMA FÓRMULA RELATIVA À THEORIA DAS FUNÇÕES ELLIPTICAS

(Extracto de uma carta ao sr. Gomes Teixeira)

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

No tomo II das *Actas mathematicas* do sr. Mittag-Leffler vem um artigo do sr. Hermite sobre uma equação interessante para a theoria das funcções ellipticas, que julga ter sido descoberta pelo sr. Cayley.

Esta equação é um caso particular da seguinte:

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & -K'^2 \cdot \operatorname{sn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{sn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{sn}(\gamma - \delta) + \\ & + \operatorname{cn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{cn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{cn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{cn}(\gamma - \delta) - \\ & - \frac{1}{K^2} \cdot \operatorname{dn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{dn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{dn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{dn}(\gamma - \delta) = \\ & = -\frac{K'^2}{K^2} \cdot 2 \cdot \frac{K'^2 \cdot (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \gamma) \cdot (\operatorname{sn}^2 \beta - \operatorname{sn}^2 \delta)}{(1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta) (1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \gamma \cdot \operatorname{sn}^2 \delta)} \end{aligned} \right.$$

devida ao sr. Glaisher (*Bulletim das sciencias mathematicas e astronomicas* de Darboux, pag. 215, 1882).

Vou mostrar que a fórmula (a) corresponde notavelmente a outra apresentada por Rosenhein nas Memorias do Instituto de França, tomo XI.

Com effeito, são conhecidas as fórmulas ellipticas

$$(b) \left\{ \begin{aligned} 1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta &= \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\alpha) \cdot \theta^2(\beta)} \cdot \theta(\alpha + \beta) \cdot \theta(\alpha - \beta) \\ 1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \gamma \cdot \operatorname{sn}^2 \delta &= \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\gamma) \cdot \theta^2(\delta)} \cdot \theta(\gamma + \delta) \cdot \theta(\gamma - \delta); \end{aligned} \right.$$

podemos deduzir ainda

$$(c) \quad \begin{cases} K(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \gamma) = \frac{\theta^2(\alpha)}{\theta^2(\gamma)} \cdot \theta_1(\alpha - \gamma) \cdot \theta_1(\alpha + \gamma) \\ K(\operatorname{sn}^2 \beta - \operatorname{sn}^2 \delta) = \frac{\theta^2(\alpha)}{\theta^2(\delta)} \cdot \theta_1(\beta - \delta) \cdot \theta_1(\beta + \delta). \end{cases}$$

Façamos agora

$$(d) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \omega, & \alpha + \gamma = u = \frac{1}{2}(\omega + \omega' + \omega'' + \omega'''), \\ \alpha - \beta = \omega', & \alpha - \gamma = u' = \frac{1}{2}(\omega + \omega' - \omega'' - \omega'''), \\ \gamma + \delta = \omega'', & \beta + \delta = u'' = \frac{1}{2}(\omega - \omega' + \omega'' - \omega'''), \\ \gamma - \delta = \omega''', & \beta - \delta = u''' = \frac{1}{2}(\omega - \omega' - \omega'' + \omega'''). \end{cases}$$

resulta, pela substituição de (b), (c) e (d) em (a), a fórmula

$$\begin{aligned} & 2\theta_1(u) \cdot \theta_1(u') \cdot \theta_1(u'') \cdot \theta_1(u''') = \\ & = \theta_1(\omega) \cdot \theta_1(\omega') \cdot \theta_1(\omega'') \cdot \theta_1(\omega''') + \\ & + \theta_2(\omega) \cdot \theta_2(\omega') \cdot \theta_2(\omega'') \cdot \theta_2(\omega''') + \\ & - \theta_3(\omega) \cdot \theta_3(\omega') \cdot \theta_3(\omega'') \cdot \theta_3(\omega''') \\ & - \theta_4(\omega) \cdot \theta_4(\omega') \cdot \theta_4(\omega'') \cdot \theta_4(\omega''') \end{aligned}$$

de Rosenhain.

HOMOGRAPHIES ET INVOLUTIONS DES ORDRES SUPERIEURS

PAR LE

D. C. LE PAIGE

Professeur de Géométrie Supérieure à l'université de Liège

(Suite)

Involution

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà supposé que les séries homographiques pouvaient être situées sur un même support. Chaque élément de ce dernier pouvait donc être, tour à tour, regardé comme appartenant aux différentes séries.

Nous allons faire une seconde restriction: nous imaginerons que les séries d'éléments puissent se permuter entre elles; dans ce cas, les groupes d'éléments constituent une *involution*.

Nous pourrions donc adopter la définition suivante:

Lorsque n séries d'éléments appartenant à une H_k^n sont situées sur un même support et sont telles que les groupes de n éléments qui la composent, restent les mêmes quelles que soient celles des séries auxquelles appartiennent les k éléments caractéristiques d'un groupe, pris dans ce groupe, ces séries forment une involution du n^{me} ordre et du k^e rang.

Nous désignerons une telle involution par le symbole I_k^n . Un exemple, emprunté à ce qui précède, viendra éclaircir cette définition.

Si l'on joint les trois côtés d'un triangle ABC, inscrit à une surface du second ordre, à tous les points de celle-ci, les ternes de plans qu'on obtient coupent une droite quelconque l en des groupes de trois points qui appartiennent à une H_2^3 .

Mais si la droite l a la position particulière qui a été définie p. 46, les groupes de trois points appartiennent à une I_2^3 .

Il sera inutile, d'après cela, de revenir sur ce que nous avons dit précédemment, les involutions n'étant que des homographies particularisées à la fois quant au support qui est unique, et quant aux séries elles-mêmes qui sont permutablement entre elles sans que les groupes varient.

Il ne sera donc pas nécessaire de répéter les définitions des *éléments neutres*, des *éléments de ramification*, etc.

Quelques mots suffiront aussi pour la classification des involutions. Les figures fondamentales, celles qui constituent les involutions du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang, sont formées par des groupes de n éléments, situés sur un même support rationnel ou unicursal, et caractérisés par $(n-1)$ de ces éléments.

Lorsque $n=3$, nous pouvons regarder, par exemple, tous les groupes en ligne droite d'une cubique plane rationnelle comme constituant une I_2^3 ; il en sera de même des points où les plans d'une gerbe rencontrent une cubique gauche R_3 .

Ce dernier mode sera particulièrement utile, comme nous le verrons plus loin.

Lorsque $n=4$, les groupes plans d'une courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce représentent une I_3^4 .

Les groupes communs à deux, trois, . . . $n-k$ involutions du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang constituent des involutions $I_{n-2}^n, I_{n-3}^n, \dots, I_k^n$.

Par exemple, tous les plans d'un faisceau coupent une R_3 en des points qui appartiennent à une I_1^3 ; ces plans sont en effet les plans communs de deux gerbes dont chacune définit une I_2^3 .

On voit encore que si, dans une I_k^n , on laisse fixe un groupe de p points ($p < k$), il lui correspond une I_{k-p}^{n-p} .

Si, par exemple, dans l'involution marquée sur R_3 par les plans d'une gerbe G_1 , on prend un point M , il est visible que tous les plans du faisceau G_1M coupent R_3 en des couples de points qui appartiennent à une I_1^3 .

Ces notions sont élémentaires et bien connues; nous les re-

produisons précisément à cause de ce caractère, pour rendre plus claires les propriétés que nous avons énoncées et qui découlent immédiatement de la définition des involutions.

Double définition algébrique des involutions. — Si nous supposons encore que chaque élément soit défini, sur un support uniserial, par un paramètre, ou plutôt par deux coordonnées homogènes, l'involution I_{n-1}^n sera définie par une relation

$$f = 0, \quad 3)$$

f représentant une forme binaire à n série de variables

$$f \equiv a_x a_y a_z \dots a_u.$$

Cette forme, contrairement à celle que nous avons employée précédemment, est symétrique par rapport aux n séries de variables.

Ainsi, lorsque l'on écrit explicitement

$$f \equiv \sum a_{ik\dots m} x_i x_k x_l \dots x_m,$$

$i, k, l, \dots m$ pouvant prendre les valeurs 1 et 2, le coefficient $a_{ik\dots m}$ ne varie pas par une permutation des indices.

Il en résulte que les coefficients de f sont seulement au nombre de $(n+1)$.

En conséquence:

Une involution I_{n-1}^n est caractérisée par n groupes de n éléments.

Comme pour les homographies, il est encore visible que les groupes de n points ne doivent pas dépendre les uns des autres; ou, ce qui revient au même, les équations linéaires que l'on devra résoudre pour obtenir les coefficients de f , doivent admettre un système de solutions finies et déterminées.

Nous en pouvons déduire qu'une I_{n-2}^n est caractérisée par $(n-1)$ groupes de n points et, en général, une I_k^n par $k+1$ groupes de n points.

Ces différents théorèmes vont nous permettre d'établir une seconde définition algébrique des involutions.

Observons qu'une involution du n^{me} ordre et du k^{me} rang est caractérisée par $(k+1)$ groupes de n éléments.

Or, si nous supposons que ces $(k+1)$ groupes soient définis par des équations

$f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_k = 0,$

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0,$$

qui est du n^{me} ordre, représentera des groupes de n éléments dont chacun est défini par k éléments, pris dans le groupe.

Les deux définitions que nous venons de faire connaître se prêtent toutes deux à l'étude des involutions supérieures: suivant les cas, l'une est plus avantageuse que l'autre, ce qui fait que nous les emploierons simultanément.

Nous avons vu déjà, dans la théorie de l'homographie, l'importance des éléments neutres: nous allons maintenant signaler l'existence de ces éléments pour les involutions.

A cet effet, nous démontrerons d'abord le théorème suivant, dû à Mr. Emile Weyr:

Lorsque k éléments d'une involution du k^{me} rang appartiennent à deux groupes de n points, ils sont contenus dans une infinité d'autres groupes, dont chacun est déterminé en adjoignant un élément aux k éléments considérés.

Supposons que le groupe de k éléments soit représenté par l'équation du k^{me} degré

$$\varphi = 0.$$

Nous pouvons écrire l'identité

$$\frac{f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k}{\varphi} = \psi + \frac{\psi_{k-1}}{\varphi},$$

ψ_{k-1} étant un polynôme de degré $(k-1)$ au plus, dont les coefficients contiennent les λ au premier degré.

On peut se servir des mêmes relations pour établir l'existence des groupes neutres.

En effet, le polynôme φ du k^{me} degré, contient k paramètres indéterminés. Les équations (4) permettent, en général, lorsque l'on a choisi à l'avance la forme φ de déterminer complètement les paramètres λ . De cette manière, on définit, d'une manière unique les $(n-k)$ éléments qui, joints aux k considérés, forment un groupe de n éléments.

Les coefficients p_{ik} contiennent les paramètres de φ .

Si donc on ne choisit pas arbitrairement ces paramètres, il est possible de les définir de telle sorte que le déterminant rectangulaire (5) soit composé de déterminants nuls.

Il serait même possible de déduire de là le nombre des groupes neutres, mais ceci exigerait une discussion trop longue pour prendre place ici.

Il sera plus aisé de discuter directement la question dans des cas particuliers maintenant que l'existence des groupes neutres est mise en évidence.

Nous nous bornerons à signaler deux de ces cas.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une involution I_{n-1}^n ; elle peut être définie par une relation unique

$$f = a_x a_y a_z \dots a_u = 0.$$

Cette relation peut s'écrire symboliquement

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} = 0.$$

Or, il est visible que x_1, x_2 est indéterminé si les $(n-1)$ éléments caractéristiques satisfont aux équations

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0.$$

Il en résulte que, dans une involution I_{n-1}^n , les groupes neutres de $(n-1)$ éléments appartiennent à une I_{n-2}^{n-1} .

Considérons encore en général une I_2^n .

Les couples neutres sont ceux qui figurent dans deux groupes, d'après ce que nous avons vu.

Or si nous prenons deux éléments X et Y, il correspond à chacun d'eux une I_1^{n-1} . D'après un théorème que nous démontrerons plus loin, ces deux I_1^{n-1} ont $(n-2)^2$ couples communs. Ces couples ne constituent pas tous des couples neutres. En effet X et Y déterminent $(n-2)$ points qui forment

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

de ces couples.

Il y aura donc, en tout,

$$(n-2)^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

couples neutres.

Ce théorème, sous sa forme générale, est encore dû à Mr. Em. Weyr auquel nous empruntons la démonstration qui précède.

Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations parce que nous n'avons pour but que d'indiquer aux lecteurs de ce *Journal* les principaux points d'une théorie si féconde en applications, sans prétendre, en quelques pages, épuiser une matière aussi vaste.

Il existe d'autres groupes d'éléments particuliers qui présentent aussi un grand intérêt et au sujet desquels nous allons démontrer un théorème général: ce sont les éléments unis ou multiples.

Une involution I_k^n possède $(k+1)(n-k)$ éléments multiples d'ordre $(k+1)$.

L'équation

$$f = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0,$$

*

définissant une I_k^n , pour que cette équation ait des racines $(k+1)$ ples, il faut évidemment que l'on ait :

$$\frac{d^k f_0}{dx_1^k} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_1^k} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_1^k} = 0,$$

$$\frac{d^k f_0}{dx_1^{k-1} dx_2} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_1^{k-1} dx_2} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_1^{k-1} dx_2} = 0,$$

.....

$$\frac{d^k f_0}{dx_2^k} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_2^k} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_2^k} = 0.$$

Pour que ces égalités puissent subsister, on doit donc avoir

$\frac{d^k f_0}{dx_1^k}$	$\frac{d^k f_1}{dx_1^k}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_1^k}$
$\frac{d^k f_0}{dx_1^{k-1} dx_2}$	$\frac{d^k f_1}{dx_1^{k-1} dx_2}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_1^{k-1} dx_2}$
$\frac{d^k f_0}{dx_2^k}$	$\frac{d^k f_1}{dx_2^k}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_2^k}$

ce qui justifie le théorème.
 A chaque point multiple d'ordre $(k+1)$ correspond un groupe de $(n-k-1)$ points.

Involutions conjuguées. — La double définition algébrique des involutions conduit à une notion importante: celle des involutions conjuguées.

Considérons une involution I_k^n définie par

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0.$$

Les formes f_0, f_1, \dots, f_k sont du n^{me} ordre et peuvent être représentées symboliquement par

$$a_x^n, b_x^n, \dots, l_x^n. \quad A)$$

Or soient les formes plurilinéaires

$$a_x a_y \dots a_u,$$

$$b_x b_y \dots b_u,$$

$$l_x l_y \dots l_u,$$

Si nous considérons les groupes de n points appartenant à la fois aux $(k + 1)$ involutions, on voit que ces groupes sont définis par $(n - k - 1)$ éléments et par suite appartiennent à une I_{n-k-1}^n .

Cette involution est dite *conjuguée* de la première.

Deux groupes de points, pris dans les deux involutions sont conjugus ou «apolaires» d'après la définition adoptée en général par les géomètres allemands (*).

Si n est impair, il existe deux involutions conjugues de même ordre et de même rang.

En effet, I_k^n et I_{n-k-1}^n étant conjugues, il suffit que

$$k = n - k - 1, \quad \text{ou} \quad k = \frac{n-1}{2}.$$

(*) Nous nous bornerons à rappeler les travaux de M.M. Reye, Rosanes, Sturm, F. Meyer.

Les deux systèmes A) et B) ayant les mêmes invariants et covariants, les éléments singuliers de chacune des deux involutions jouissent de propriétés projectives dans les deux involutions.

On peut définir la seconde involution par une équation

$$F_0 + p_1 F_1 + p_2 F_2 + \dots + p_{n-k-1} F_{n-k-1} = 0.$$

Nous trouvons ainsi un nouveau système

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-k-1} \quad C).$$

Il résulte immédiatement de là que les deux systèmes A) et C) qui peuvent être remplacés par A) et B) ont les mêmes covariants.

Il est quelque fois possible, à l'aide des éléments neutres de certaines involutions, de déduire le système C) de A): nous en mentionnerons un exemple particulier dans le cas des involutions du troisième ordre que nous étudierons plus loin avec quelque détail.

Lorsque $k = n - 1$, l'involution conjuguée est de rang 0, c'est-à-dire est constituée par un groupe unique de n points.

Représentons cette forme par A_x^n , et un groupe quelconque de l'involution I_{n-1}^n par l'équation $B_x^n = 0$.

On doit avoir, par ce qui précède,

$$(AB)^n = 0.$$

Lorsque n est impair, les propriétés des formes algébriques nous apprennent que

$$(AA)^n \equiv 0.$$

En outre, il est facile de voir que

$$A_x^n = 0,$$

représente les n points multiples de l'involution. (*)

Donc

Dans une involution I_{n-1}^n , d'ordre impair, les n points multiples constituent une groupe de l'involution.

Involutions situées sur un même support. — Considérons, sur un même support, deux involutions du premier rang, respectivement des ordres n et m .

La première sera définie par une équation

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0, \quad (6)$$

la seconde par

$$A_x^m + \mu B_x^m = 0. \quad (7)$$

Si nous observons que l'on doit avoir simultanément

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0,$$

$$a_y^n + \lambda b_y^n = 0,$$

pour que deux éléments appartiennent à un même groupe de (6), la relation entre x, y , doit être

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(x\mu)} = 0.$$

Cette relation peut donc être définie par une équation

$$(x, y)^{n-1} = 0,$$

$(x, y)^{n-1}$ représentant une forme binaire à deux séries de variables, du degré $(n-1)$ par rapport à chacune des séries.

La seconde involution sera de même caractérisée par une relation

$$(x, y)^{m-1} = 0.$$

Explicitement, on peut écrire ces deux équations

$$x_1^{n-1}P_0 + (n-1)x_1^{n-2}x_2P_1 + \dots + x_2^{n-1}P_{n-1} = 0, \quad (8)$$

$$x_1^{m-1}Q_0 + (m-1)x_1^{m-2}x_2P_1 + \dots + x_2^{m-1}P_{m-1} = 0, \quad (9)$$

les polynômes P et Q étant respectivement des degrés $(n-1)$ et $(m-1)$ en y_1, y_2 .

En général, si l'on donne à y_1, y_2 une valeur déterminée, dans les équations 8) et 9), les deux équations en x n'auront pas de racines communes: mais on peut choisir y de telle sorte que les équations aient une racine commune.

Cette condition s'obtiendra en égalant à zéro le résultant des deux équations 8) et 9).

Nous obtenons, de cette manière, une équation en y du degré $2(n-1)(m-1)$; mais à cause de la symétrie, on voit que ces $2(n-1)(m-1)$ points y , constituent $(n-1)(m-1)$ couples communs aux deux involutions.

Donc

Deux involutions I_1^n, I_1^m , situées sur un même support ont $(n-1)(m-1)$ couples communs.

C'est le théorème que nous avons invoqué plus haut pour déterminer les couples neutres d'une I_2^n .

On est conduit à cette propriété d'une manière différente qui a l'avantage d'introduire une autre notion importante.

Nous savons que les points d'une conique peuvent être définis individuellement par un paramètre unique: il en résulte que nous pouvons considérer une involution du n^{me} ordre comme définie par les sommets de polygones inscrits à une conique, chaque polygone caractérisant un groupe de l'involution.

Considérons donc l'équation

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0;$$

les équations

$$a_x^n = 0, \quad b_x^n = 0,$$

correspondent à deux polygones inscrits.

Nous aurons ainsi une série de n — gones inscrits à C_2 , dont chacun est caractérisé par un de ses sommets.

Ces polygones auront respectivement $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés et l'on

peut se proposer de rechercher la courbe enveloppée par ces côtés, lorsque l'on fait varier λ .

Or si nous considérons deux sommets $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ d'un même polygone, nous avons, comme il a été dit, la relation

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = 0.$$

Mais d'un autre côté, les paramètres $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}$ peuvent être considérés comme les coordonnées de la droite qui unit ces deux sommets: il résulte alors, de l'équation qui vient d'être écrite, que les côtés de tous ces polygones, inscrits à C_2 , sur laquelle ils marquent une I_1^n , enveloppent une courbe K de classe $(n-1)$.

Cette courbe a reçu le nom de *courbe d'involution* (*).

Si maintenant nous nous reportons à la question que nous nous sommes proposée d'abord, nous voyons que les deux involutions I_1^n, I_1^m donnent naissance à deux courbes d'involution dont la classe est respectivement $(n-1)$ et $(m-1)$.

Ces deux courbes ont $(n-1)(m-1)$ tangentes communes qui définissent un même nombre de couples communs.

Nous déterminerons encore les ternes communs à une I_1^m et à une I_2^n . Or soient X_1, X_2 deux points appartenant à un même

(*) Voir, sur ce sujet, le mémoire de M. Weyr, *Journ. de Crellé*, t. 72. le mémoire de Mr. Darboux: *Sur une classe remarquable de courbes, etc.*, p. 99 et 183, etc. Mr. Neuberg a résumé ces recherches, *Nouv. Corresp. Math.*, t. II.

groupe de I_1^m et désignons par Y les $(m-2)$ autres points du groupe.

X_1, X_2 , dans I_2^n , donnent naissance à $(n-2)$ points Z.

Si l'un des points Y coïncidait avec l'un des points Z, on aurait un terme commun: il faut donc établir la correspondance qui existe entre Y et Z.

Or, dans I_1^m , à un point Y correspondent $(m-1)$ points X formant $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ couples, à chacun desquels correspondent, dans I_2^n , $(n-2)$ points Z.

Donc, un point détermine $\frac{(m-1)(m-2)}{1-2}(n-2)$ points Z.

A Z au contraire correspond, dans I_1^m , une I_1^{n-1} qui a, avec I_1^m $(m-1)(n-2)$ couples communs; chacun de ces couples engendre $(m-2)$ points Y. Donc un point Z définit $(m-1)(m-2)(n-2)$ points Y.

La correspondance est donc de degré

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)(m-2)}{1-2}(n-2) + (m-1)(m-2)(n-2) \\ &= \frac{3(m-1)(m-2)}{2}(n-2). \end{aligned}$$

Ce dernier nombre exprime combien il y a de coïncidences entre Y et Z. Mais d'un autre côté, chaque terme commun $X_1 X_2 Y$ contient trois de ces coïncidences. Nous voyons donc que les deux involutions I_1^m, I_2^n , situées sur le même support, ont $\frac{(m-1)(m-2)(n-2)}{2}$ ternes communs (*).

(*) V. Em. Weyr, *Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 2^{me} série, t. x.

Au sujet des surfaces d'involutions et de l'avantage que l'on peut retirer de leur étude, voir des mémoires du même auteur: *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 8^{me} série, t. III, n.° 5, *Sitzb. der k. Wiener Akademie*, LXXXV, p. 840, etc.

On peut déduire de là une notion, due, pensons nous, à Mr. Em. Weyr, celle des *surfaces d'involution*.

Considérons, par exemple, une courbe rationnelle gauche d'ordre m , R_m , sur laquelle nous imaginons que l'on ait représenté une I_2^n . Chaque groupe de l'involution donne naissance à $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ plans formant un polyèdre. On peut se demander

quelle est l'enveloppe de tous ces plans lorsque les groupes de l'involution varient. Ce sera évidemment une surface, dont nous pouvons rechercher la classe.

Or, si par une droite quelconque l , nous menons un faisceau de plans, ces plans marquent sur R_m , une I_1^m .

Les deux involutions I_1^m, I_2^n ayant, d'après ce que nous avons vu, $\frac{(m-1)(m-2)(n-2)}{2}$ ternes communs, ce nombre exprime la

classe de la surface d'involution.

Si nous voulons, de cette manière, trouver la surface d'involution d'une I_1^n , nous voyons que cette surface sera la développable circonscrite à deux surfaces F caractérisant deux I_2^n .

On peut tirer de ces considérations une foule de conséquences importantes: nous ne pensons pas néanmoins que ce soit le lieu de les développer ici; pour terminer ce chapitre nous allons indiquer quelques constructions relatives aux involutions.

Constructions relatives aux involutions cubiques. — Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse d'une I_2^3 et nous prendrons comme support une cubique gauche R_3 .

Nous commencerons par rappeler un moyen connu de construire individuellement les points d'une R_3 dont on connaît six points $AB, A'B', MM'$.

Les plans $ABM, A'B'M'$ se coupent suivant une droite x , les plans $AB'M, A'BM$ suivant une droite y . Les deux droites x et y , passant par le point M , déterminent un plan ω .

En employant M' au lieu de M , on obtient un second plan ω' . ω et ω' se coupent suivant une droite d .

Alors tout plan ω_1 , passant par d , rencontre $AB, A'B', AB', A'B'$ respectivement en des points C, D, C', D' . Les deux droites $CD, C'D'$ se coupent en un point N qui appartient à R_3 .

Il est visible, en effet, que si $\bar{\omega}_1$ pivote autour de d , les droites CD , $C'D'$ engendrent chacun un hyperboloïde à une nappe: ces deux surfaces ayant en commun la droite d , le lieu du point N est une R_3 ; d'ailleurs $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ étant deux positions particuliers de $\bar{\omega}_1$, R_3 passe par M et M' et en outre, évidemment, par A , B , A' , B' .

D'après cela, il est facile de faire correspondre, point par point, les points d'une droite quelconque à ceux de R_3 , puisqu'il suffit de projeter les points de la droite, sur R_3 , à l'aide d'un faisceau de plans dont l'axe est d .

Supposons maintenant que sur une droite l on se donne trois groupes de trois points $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ caractérisant une I_2^3 ; on obtiendra aisément leurs images sur R_3 ; $A'_1A'_2A'_3$, ...

Les trois plans $A'_1A'_2A'_3$, $B'_1B'_2B'_3$, $C'_1C'_2C'_3$ se coupent en un point G , sommet d'une gerbe dont tous les plans coupent R_3 suivant des ternes de I_2^3 .

Il peut se faire que parmi les points d'un terne $A_1A_2A_3$, un groupe de deux points A_1A_2 par exemple soit défini comme le couple commun à deux involutions quadratiques I_1^2 , $I_1'^2$. Il est aisé, même dans ce cas, de trouver la sécante $A'_1A'_2$ de R_3 .

En effet, imaginons que la première involution I_1^2 soit déterminée, sur l , par deux couples M_1M_2 ; N_1N_2 , et la seconde $I_1'^2$ par P_1P_2 , Q_1Q_2 .

Construisons $M'_1M'_2$; $N'_1N'_2$; $P'_1P'_2$, $Q'_1Q'_2$ et par un point quelconque S de R_3 menons des droites qui s'appuient respectivement sur les deux premières sécantes de R_3 et sur les deux dernières. Ces droites déterminent un plan qui coupe R_3 au couple commun aux deux involutions, c'est-à-dire qui passe par $A'_1A'_2$. En employant un autre point T , on obtient un second plan que passe par $A'_1A'_2$ et cette droite est ainsi déterminée. Si, au surplus, la connaissance de la sécante $A'_1A'_2$ est inutile, comme dans le problème précédent, il suffira de prendre pour point S le point A_3 . Le plan $A'_1A'_2A'_3$ sera ainsi déterminé.

Il pourrait encore arriver que les points $A_1A_2A_3$ soient définis, à la fois, sur l , comme groupe commun à trois I_2^3 . Il suffirait de construire les gerbes G_1 , G_2 , G_3 correspondant à ces trois involutions et le plan $G_1G_2G_3$ représenterait $A'_1A'_2A'_3$.

Nous avons donc, avec toute la généralité possible, la représentation d'une I_2^3 sur un cubique gauche R_3 .

Nous venons de voir comment on peut construire le point G. A l'aide de ce point, on peut résoudre les problèmes fondamentaux relatifs à une I_2^3 .

La première question qui se présentera sera de construire le troisième point d'une terne dont on connaît deux éléments $D_1 D_2$.

Déterminons D'_1, D'_2 ou, ce qui est suffisant, la sécante $D'_1 D'_2$: le plan $GD'_1 D'_2$ coupera R_3 au troisième point cherché D'_3 , qui, à son tour, donnera D_3 . La construction de D'_3 est d'ailleurs linéaire car elle se ramène aisément à celle du quatrième point d'intersection de deux coniques déterminées, lorsque l'on connaît trois de ces intersections. Nous ne nous attarderons pas à traiter ce problème.

Il peut encore être utile de construire les éléments particuliers de l'involution I_2^3 , à savoir les deux éléments neutres et les points triples.

Les éléments neutres sont représentés par la sécante de R_3 issue de G.

Or rien n'est plus aisé que de construire cette sécante si l'on fait attention à ce que nous avons dit plus haut.

Prenons sur R_3 des points MA, M'A'; puis construisons les plans PMA, PMA' qui nous donnent les points toujours réels B, B'. M'AB, M'A'B' se coupent suivant une droite M'X.

Si, d'une façon analogue, nous construisons des plans PM'A₁B₁, PM'A'₁B'₁, MA₁B₁, MA'₁B'₁ nous donneront une droite MY.

L'intersection PZ des plans PM'X, PMY sera la sécante cherchée.

La démonstration résulte de ce que toutes les involutions quadratiques qui, dans une I_2^3 , correspondent à tous les éléments du support, ont un couple commun définissant les éléments neutres.

Quant aux éléments triples, il résulte immédiatement de ce que nous avons dit à propos des involutions conjuguées d'une I_{n-1}^n , qu'on peut les regarder comme le groupe commun à trois I_2^3 qui auraient chacun pour points triples les points d'un terne de l'involution.

Or supposons que l'on se donne trois ternes $A'_1A'_2A'_3$, $B'_1B'_2B'_3$, $C'_1C'_2C'_3$, composés d'éléments déterminés individuellement.

Les plans osculateurs en $A'_1A'_2A'_3$ se coupent en un point A' ; on obtient de même B' , C' et le plan $A'B'C'$ coupe R_3 aux points triples.

Il résulte d'une remarque faite tantôt que ce plan passera par G .

Nous laisserons au lecteur à voir comment ces constructions doivent se modifier lorsque l'involution est déterminée 1.^o par trois points triples, 2.^o par un ou deux points triples et deux ou un terne, 3.^o par les éléments neutres et un terne (*).

On peut d'ailleurs traiter ces problèmes dans le plan, en employant pour support une conique: nous renverrons pour cela à nos *Essais de Géométrie Supérieure du troisième ordre*.

On pourrait facilement, à l'aide de ce qui précède, résoudre les problèmes relatifs à une I_1^3 , en prenant une R_3 comme support; mais afin de varier les moyens de construction, sans donner à notre travail une longueur qui ne serait pas admissible, si nous voulions faire connaître tous les procédés de représentation d'une I_1^3 , nous emploierons comme support une conique.

Il est évident que toutes les coniques d'un faisceau, dont un des points communs se trouve sur une conique K , marquent sur celle-ci des ternes de points appartenant à une I_1^3 .

Supposons que l'involution soit définie par deux ternes $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, et supposons que l'on veuille définir un terne dont on connaît un point C_1 .

Menons les droites A_2A_3 , B_2B_3 que se coupent en P ; puis PC_1 , qui coupe K en un point Q . A_1Q , B_1Q coupent B_2B_3 , A_2A_3 , respectivement en A' , B' , et la droite $A'B'$ coupe K aux deux points cherchés: il est visible, en effet, que les couples de droites $A'B'$, C_1Q ; A_2A_3 , A_1Q ; B_2B_3 , B_1Q constituent trois coniques qui passent par les quatre points $A'B'PQ$ dont l'un, Q , est situé sur K .

(*) Le lecteur, qui voudrait étudier cette matière avec plus de détails, pourra consulter un mémoire de M. Appell, inséré au tome v des *Ann. de l'École normale supérieure*; un mémoire de M. R. Sturm, inséré au *Journal de Borchardt*, t. LXXXV; un travail de M. Em. Weyr, imprimé dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Vienne, t. LXXXIV, p. 4264, etc. Il verra, par ces travaux, toute l'importance de ces considérations, à différents points de vue.

Comme on le voit cette construction est applicable même si les couples $A_2A_3; B_2B_3$ sont imaginaires.

Il pourrait arriver que les points $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ soient donnés en même temp par deux coniques C, C' passant par un point Q de K : la solution ne serait guère plus compliquée dans ce cas, puisqu'il suffirait, par le point C_1 , de faire passer un conique du faisceau $[C, C']$: il serait aisé de déterminer la droite qui passerait par les deux intersections de cette conique avec K , différentes de C_1 et Q .

Nous pouvons nous proposer de construire les éléments singuliers d'une I_1^3 définie par deux ternes.

D'après ce que nous avons vu, une pareille involution possède quatre points doubles, et, par suite, quatre points de ramification.

Or nous savons aussi que la courbe d'involution est ici une conique K_1 . Tous les triangles inscrits à K et circonscrits à K_1 marquent sur K des ternes d'involution.

K_1 , comme on le voit, est facile à construire: deux ternes de points donnent six tangentes de K_1 .

Par chaque point de K , on peut mener à K_1 deux tangentes qui rencontrent K en deux points complétant un terne de l'involution: ces deux tangentes cessent d'être distinctes pour les points communs à K et K_1 . Ces quatre points d'intersection sont donc les quatre points de ramification de l'involution.

Soient V_1, V_2, V_3, V_4 ces quatre points: la tangente à K_1 , en V_1 , coupe K en un point D_1 qui est le point double correspondant à V_1 ; d'un autre côté $V_1D_1D_1$ constitue un triangle infiniment aplati inscrit à K et circonscrit à K_1 ; il en résulte que la tangente en D_1 à K doit aussi toucher K_1 .

En conséquence les quatre points d'intersection de K_1 et K marquent, sur cette dernière, les points de ramification de l'involution, et les points de contact des quatre tangentes communes à ces deux coniques en marquent, également sur K , les points doubles.

Nous ne nous occuperons pas des cas particuliers qui peuvent se présenter suivant que l'involution I_1^3 possède un ou deux points triples (*).

(* Pour ces cas spéciaux, et d'ailleurs pour tout ce qui concerne l'invo-

Nous avons défini, en général, ce que l'on entend par *involutions conjuguées*: nous allons en montrer un exemple particulier dans l'involution I_1^3 .

Supposons que l'on ait l'involution

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0;$$

l'involution conjuguée sera formée par tous les groupes communs aux deux I_2^3 caractérisées par les relations

$$a_x a_y a_z = 0,$$

$$b_x b_y b_z = 0.$$

Chacune de celles-ci possède un couple neutre: pour obtenir l'équation qui correspond à ce couple, il suffit, dans les covariants $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de la forme trilineaire la plus générale, d'introduire les hypothèses relatives à la symétrie des variables.

Nous trouvons ainsi que ces points neutres sont donnés respectivement, pour chacun de ces deux involutions, par

$$\Delta_x^2 = (aa')^2 a_x a'_x = 0,$$

$$\nabla_x^2 = (bb')^2 b_x b'_x = 0.$$

Pour obtenir un terme de l'involution I_1^3 , que vient d'être définie, il suffira, par conséquent, de chercher dans chacune des involutions I_2^3 le point qui correspond aux éléments neutres de l'autre.

On trouve ainsi, quel faut associer aux deux points donnés par $\Delta_x^2 = 0$, celui qui est représenté par $(\Delta b)^2 b_x = 0$, et de mêm-

lution I_1^3 voir un mémoire de Mr. Em. Weyr, *Prager Abhandl.*, 1874. Nous avons également résolu la plupart de ces questions dans nos «*Essais etc.*»

me, aux deux points que représente $\nabla_x^2 = 0$, celui que correspond à $(\nabla a)^2 a_x = 0$.

En posant

$$p_x = (\Delta b)^2 b_x, \quad \bar{\omega}_x = (\nabla a)^2 a_x,$$

on voit que l'équation de l'involution conjuguée à celle que nous avons considéré d'abord est

$$\Delta_x^2 \cdot p_x + \mu \nabla_x^2 \cdot \bar{\omega}_x = 0.$$

Cette équation permet d'arriver à une définition élégante de la conique d'involution correspondant à l'involution conjuguée d'une involution donnée.

Rappelons-nous, pour cela, que si trois points sont représentés sur une conique par l'équation

$$a_x^3 = 0,$$

les deux points donnés par

$$(aa')^2 a_x a'_x = 0,$$

sont ceux où la *polaire* (*) du triangle formé par un point, relative à la conique rencontre celle-ci.

Par suite, la conique d'involution K_2 , de l'involution conjuguée à l'involution donnée, est l'enveloppe des polaires de tous les triangles inscrits à K et circonscrits à K_1 .

Il est assez facile de voir que les deux involutions conjuguées ont les mêmes points doubles: en conséquence, si l'on rapproche cette propriété d'une remarque faite plus haut, il en résulte que K , K_1 , K_2 sont inscrites à un même quadrilatère.

On peut encore faire, sur deux involutions cubiques conjuguées, diverses observations que nous n'indiquerons pas ici (**).

(*) On entend par *polaire* d'un triangle la droite qui joint les points de rencontre de chaque côté du triangle avec la tangente à la conique au sommet opposé.

(**) Voir, sur ce sujet, nos «Essais» et diverses Notes de Mr. Weyr in-

Nous dirons encore quelques mots de l'involution I_3^4 , que nous représenterons encore sur une conique C_2 .

Il est visible que toutes les cubiques que passent par six points fixes, dont quatre en dehors de C_2 et deux sur C_2 , déterminent sur cette courbe une I_3^4 .

Le premier problème que nous devons nous poser est donc le suivant:

Connaissant quatre groupes de quatre points sur une conique C_2 , déterminer six points, dont quatre en dehors de C_2 et deux sur C_2 , de telle sorte que par ces six points et par chacun des groupes de quatre points on puisse faire passer une cubique.

Soient $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$, $c_1c_2c_3c_4$, $d_1d_2d_3d_4$ les quatre groupes donnés.

Par $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$ faisons passer deux coniques quelconques Σ_1 , Σ_2 qui se coupent en quatre points ABCD.

Toutes les cubiques du faisceau (ABCD $c_1c_2c_3c_4$) coupent C_2 suivant des couples de points formant une I_1^2 ; il en est de même des cubiques du faisceau (ABCD $d_1d_2d_3d_4$), qui définissent une involution I_1^2 .

Ces deux involutions quadratiques ont un couple commun EF qui complète les six points cherchés.

En effet Σ_1 et Σ_2 , avec la droite EF, constituent deux cubiques passant par les six points donnés ABCDEF.

Il sera facile maintenant de compléter un quaterne dont on se donne trois éléments $e_1e_2e_3$; il suffira, en effet, de construire la cubique (ABCDEF $e_1e_2e_3$) et de déterminer le sixième point e_4 d'intersection de cette cubique avec C_2 .

Les constructions qui précèdent exigent, on le voit, que l'on sache déterminer les points où une cubique rencontre une conique.

sérées aux *Sitzungsberichte* de Vienne, t. LXXIII, t. LXVXI, p. 162, t. LXXXIV, p. 1268, etc. Cf. C. le Paige, *Sitzb. der Wiener Akademie*, t. LXXXI, p. 159 et 845; t. LXXXIV, p. 233; t. LXXXV, p. 844.

(*) Sur l'involution I_3^4 , voir P. Serret, C. R., t. LXXXVII, p. 643. C. le Paige, *Sitzb. der kön. böhm. Gesells.*, 1881, p. 61. — Sur l'invol. I_2^4 , voir Em. Weyr, *Sitzb. der Wien. Akad.*, t. LXXXI. — Sur l'invol. I_1^4 , *ibid.*, t. LXXXI. Voir aussi le même recueil, *passim*, t. LXXII et suivants, pour différentes questions relatives aux involutions biquadratiques.

que lorsque l'on connaît déjà quatre ou cinq des intersections de ces deux courbes.

Bien que la solution de ces problèmes n'exige aucune difficulté, nous la différerons jusqu'au chapitre suivant où nous ferons connaître quelques unes des principales applications géométriques des involutions et des homographies.

A l'aide des procédés qui précèdent, on pourrait résoudre les problèmes relatifs aux involutions I_1^4, I_2^4 ; nous n'aborderons pas ces questions qui exigeraient de trop longs développements, et nous terminerons ici cet exposé rapide de la théorie des involutions et des homographies.

Nous n'avons pu, naturellement, aborder tous les problèmes que présente cette théorie; notre but d'ailleurs était seulement d'indiquer les principaux points de vue afin de donner aux lecteurs du *Journal* le désir d'approfondir une question aussi féconde en applications, comme nous tâcherons de le montrer prochainement.

Applications géométriques

Nous avons, dans les deux premières parties de ce travail, exposé rapidement les principales propriétés des homographies et des involutions: nous allons maintenant faire connaître quelques unes des applications qu'on en peut faire.

Ici encore nous devons nous borner à traiter quelques questions sans prétendre, en aucun façon, épuiser le sujet.

Un des problèmes fondamentaux de la géométrie plane est la détermination des courbes du n^{me} ordre dont on connaît $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

Posons $\frac{n(n+3)}{2} = \mu$ et supposons que l'on se donne, dans un plan, les points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$.

Divisons ces points en deux groupes: $G \equiv (A_1 A_2 \dots A_{\mu-n})$, $G' \equiv (A_{\mu-n+1} A_{\mu-n+2} \dots A_\mu)$.

Si nous adjoignons au groupe G successivement chacun des

*

points de G' , nous obtenons n groupes G_1, G_2, \dots, G_n , composés chacun de $\mu - n + 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ points.

Par chacun de ces groupes, nous pouvons donc faire passer des courbes du n^{me} ordre composés, chacune, d'une droite et d'une courbe du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Soit maintenant une transversale quelconque l .

Sur cette transversale, les courbes d'un groupe G_i déterminent des groupes de n points appartenant à une involution I_{n-1}^n .

Nous obtenons ainsi, sur cette transversale, n systèmes en involution et ces n systèmes ont, en général, un seul groupe commun: ce groupe de n points marque les intersections de l avec la courbe du n^{me} ordre que nous nous proposons de construire.

Si, sur cette transversale, on connaissait *a priori*, une, deux, $\dots, n-1$ intersections, il suffirait d'employer des involutions $I_{n-2}^{n-1}, I_{n-3}^{n-2}, \dots, I_0^1$.

Nous allons exposer plus complètement cette méthode générale dans le cas des cubiques planes.

Nous supposons, pour traiter le problème avec toute la généralité désirable, que, parmi les neuf points donnés, il y en ait huit $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'$ définis par couples sur quatre droites réelles données a, b, c, d ; nous embrassons ainsi le cas où, parmi les neuf points, il y en a huit imaginaires.

Soit P le neuvième point, toujours réel.

Deux cas devront être examinés particulièrement: 1.° Les droites a, b, c, d ne passent pas toutes par le point P ; 2.° elles concourent en ce point.

1.° Considérons les coniques décomposables

$$a(PBB'CC'), \quad b(PAA'CC'), \quad c(PAA'BB').$$

Ces cubiques marquent, sur une transversale quelconque l , trois ternes de points caractérisant une I_2^3 . Nous pourrions toujours représenter ces ternes sur une cubique gauche B_3 et cela à l'aide de simples constructions linéaires: nous définirons donc

aisément le sommet de la gerbe de plans qui caractérise l'involution (*).

Nous pouvons répéter ces constructions pour les groupes PAA'BB'DD', PAA'CC'DD'. Nous obtiendrons ainsi, sur R_3 , trois involutions I_2^3 et, par suite, trois gerbes G_1, G_2, G_3 . Le plan $G_1G_2G_3$ rencontre R_3 aux trois points qui correspondent aux intersections de l avec la cubique cherchée. (Voir plus haut.).

Si la droite l , au lieu d'être quelconque, était par exemple la droite DD', la détermination de G_1 suffirait pour construire le troisième point de l qui se trouve sur la cubique.

En effet, nous pourrions toujours définir la sécante de R_3 qui unit les deux points, réels ou imaginaires, correspondant à D et D'. Soit l_1 cette sécante. Le plan G_1l_1 coupera R_3 en un point dont il suffira de déterminer le correspondant sur l .

Une simplification analogue se présenterait si l'on connaissait un des points de la cubique plane, situé sur l .

2.° La solution précédente n'est évidemment plus applicable si les quatre droites a, b, c, d passent par le point P.

Prenons les conjugués harmoniques A_1, B_1, C_1, D_1 de P par rapport aux couples AA', BB', CC', DD'. (PA₁B₁C₁D₁) définit une conique, polaire de P par rapport à la cubique à construire.

Soit PX la tangente en P à cette conique; c'est aussi la tangente à la cubique cherchée.

D'après ce que nous venons de voir, il est facile de déterminer les ternes que des cubiques passant par AA'BB'CC'DD' marquent sur PX. Il suffit de déterminer ces cubiques à l'aide de neuvièmes points $P_1, P_2, P_3 \dots$ différents de P.

Toutes ces cubiques marquent sur PX une I_1^3 . Il est clair que si PX rencontre la cubique en O, P est un point double de l'involution I_1^3 et O le point de ramification correspondant.

Le point O se construit donc facilement et l'on a, ainsi, le point tangentiel de P. Ce point appartient donc à la cubique à construire.

(*) Pour plus de détails sur cette question voir *Acta Mathematica*, t. III, p. 183 et ss. On peut voir aussi, au même endroit, comment il faut déterminer les coniques définies par un point réel et quatre points imaginaires.

Supposons maintenant que par O , l'on mène des droites OX_1 , OX_2 , etc.

Sur chacune d'elles, on pourra déterminer l'involution I_1^3 définie par le faisceau $(AA'BB'CC'DD')$ et, par suite, le couple correspondant, sur chacune de ces droites au point O . Ces couples, réels ou imaginaires, appartiendront à la cubique cherchée.

Nous devons faire observer que ni les points des ternes de I_1^3 , ni les points des couples qui viennent d'être définis, ne doivent être construits isolément.

Le point O est donc, à l'égard des nouveaux couples dans la même situation que P par rapport aux couples donnés. Nous pourrions donc construire le point tangentiel O_1 de O .

Rien ne serait plus aisé, maintenant, que de déterminer le point Q où PO_1 coupe la cubique, puis le point Q_1 où OQ rencontre cette courbe et ainsi de suite.

Nous substituerons donc, au système des neuf points donnés, un autre système qui permettra d'appliquer la première solution.

Si nous connaissons isolément quatre points $T_1T_2T_3T_4$ de la courbe, en appliquant la méthode donnée dans 1.^o, nous pouvons construire les points T_{12} , T_{34} , T_{13} , T_{24} situés sur la courbe et sur T_1T_2 , T_3T_4 , T_1T_3 , T_2T_4 .

Les droites $T_{12}T_{34}$, $T_{13}T_{24}$ se couperont en un point T_0 appartenant à la courbe.

Nous aurons de cette façon neuf points, distribués sur deux systèmes de trois droites et formant deux *trilatères conjugués* à la cubique.

Ces trilatères permettront de construire effectivement la cubique (*).

On peut d'une manière analogue déterminer les intersections d'une cubique dont on connaît neuf points avec une conique, en supposant que deux des intersections soient déjà connues.

Soit C_3 la cubique et C_2 la conique donnée: désignons par A , B les deux points déjà connus et par $X_1X_2X_3X_4$ les points à construire.

Déterminons le point T où \overline{AB} rencontre C_3 ; joignons ce point

(*) Pour plus de détails, voir notre *Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, 2.^{de} partie, p. 42 (Mem. de l'Acad. roy. de Belgique, t. XLV, 1882).

T à un autre point quelconque P de C_3 et construisons la troisième intersection R de TP avec C_3 .

Les six points PRX₁X₂X₃X₄ sont sur une conique C_2^1 .

En effet les deux cubiques C_3 et (TRP) C_2 se coupent en neuf points dont trois ABT sont en ligne droite.

Pour construire C_2^1 , observons que C_3 , (TRP) C_2 , (ABT) C_2^1 sont trois cubiques d'un même faisceau.

Si donc, par un point quelconque I pris sur AB, nous menons une transversale quelconque, cette transversale rencontre les deux premières cubiques en deux groupes de trois points qui caractérisent une I_1^3 . Les deux points qui complètent le terne défini par I appartiennent à C_2^1 .

Deux groupes pareils, avec le point P, suffisent par construire C_2^1 . Les deux courbes C_2 et C_2^1 se coupent aux points cherchés.

Ce problème permet, comme on le voit, de construire les points de contact des tangentes menées à la cubique par un de ses points.

En effet, en appliquant une méthode donnée plus haut, nous pourrions construire la polaire conique d'un point A, la tangente en A et le point tangentiel O qui joue le rôle du point T dans le problème que nous venons de traiter.

La même construction se simplifie si l'on connaît déjà un, deux ou trois des points X.

Si l'on connaît par exemple X₁, la conique déterminée par X₁, PR et un couple situé sur une transversale issue de I résoudra la question; si l'on connaît en outre X₂, la point X₂ pourra remplacer R; enfin, si l'on se donne X₁, X₂, X₃ la conique C_2^1 sera déterminée par P, R, X₁, X₂, X₃.

C'est cette solution à laquelle nous faisons allusion plus haut, dans une question relative aux I_3^4 .

Nous venons de faire voir comment la théorie des involutions cubiques, combinée avec quelques propriétés des cubiques, se prête à la détermination de ces courbes.

Ces propriétés elles-mêmes peuvent se déduire des méthodes que nous avons exposées plus haut.

Supposons que l'on se donne une forme trilinéaire

$$f = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \quad (1)$$

et un triangle dont les côtés ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Les faisceaux de droites

$$x_2 \alpha - x_1 \beta = 0, \quad y_2 \beta - y_1 \gamma = 0, \quad z_2 \gamma - z_1 \alpha = 0,$$

liés par la relation (1) se coupent sur une cubique circonscrite au triangle donné.

Cette cubique a pour équation

$$(a_{111} + a_{222}) \alpha^2 \gamma + a_{112} \alpha^2 \beta + a_{121} \alpha \gamma^2 + a_{211} \beta^2 \gamma + \\ + a_{122} \alpha^2 \gamma + a_{212} \alpha \beta^2 + a_{221} \beta \gamma^2 = 0.$$

Maintenant, étant donnée une cubique quelconque, circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$, son équation sera de la forme

$$A_{112} \alpha^2 \beta + A_{113} \alpha^2 \gamma + A_{122} \alpha \beta^2 + A_{133} \alpha \gamma^2 + A_{233} \beta \gamma^2 + \\ + A_{223} \beta^2 \gamma + 2A_{123} \alpha \beta \gamma = 0.$$

Pour identifier cette équation avec la précédente, il suffira de faire

$$a_{111} = A_{123} + \lambda; \quad a_{112} = A_{112}, \quad a_{121} = A_{122}, \quad a_{211} = A_{223},$$

$$a_{122} = A_{113}, \quad a_{212} = A_{122}, \quad a_{221} = A_{233}, \quad a_{222} = A_{123} - \lambda.$$

La forme trilinéaire correspondante est donc de la forme

$$f + \lambda \varphi = 0.$$

Nous avons

$$\varphi \equiv x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2.$$

La relation

$$\varphi = 0,$$

est donc évidente: elle marque simplement que nous devons prendre les rayons concourants.

Il en résulte que les rayons des trois faisceaux qui, par leurs intersections, engendrent la cubique satisfont aux deux relations

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues d'une H_1^3 .

Ce théorème va nous être utile.

Supposons que l'on ait une seconde cubique ayant trois points communs avec une cubique donnée. Nous prendrons le triangle formé par ces trois points comme triangle de référence, et alors, les formes trilineaires correspondant aux deux cubiques seront

$$f + \lambda \varphi = 0, \quad f_1 + \mu \varphi = 0.$$

Or nous avons vu que

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad \varphi = 0,$$

ont six ternes communs.

Donc

Deux cubiques se coupent en neuf points.

Si l'on se donne huit points d'une cubique, l'on peut déterminer les coefficients de f à l'exception d'un seul.

La forme trilineaire correspondante sera donc

$$F + \mu F_1 + \lambda \varphi = 0.$$

Or, il existe un sixième terne commun à

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad \varphi = 0.$$

En conséquence

Toutes les cubiques qui passent par huit points passent par un même neuvième.

L'équation

$$f + \lambda \phi = 0,$$

nous conduit encore à d'autres résultats.

Pour chaque valeur de λ , nous pourrions déterminer le discriminant

$$D_\lambda = \lambda^4 + 6\lambda^2 D'' + 4\lambda \Delta' + \Delta \quad (*)$$

et les covariants

$$(S_i)_\lambda.$$

A l'aide de ceux-ci, et tant que D_λ sera différent de zéro, on pourra mettre $f + \lambda \phi$ sous la forme

$$u_1 v_1 w_1 + k u_2 v_2 w_2 = 0.$$

Ceci revient à mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$\alpha \beta \gamma + k \cdot \alpha'' \beta'' \gamma'' = 0.$$

Nous rapportons ainsi la courbe à deux trilatères conjugués.

En choisissant convenablement λ , on peut faire en sorte que les covariants $(S_i)_\lambda$, égaux à zéro, aient des racines réelles.

De cette manière, on aura des trilatères réels.

Si $D_\lambda = 0$, on n'a plus, comme il est facile de le voir, des trilatères conjugués, mais un triangle inscrit à la cubique.

Donc

Par trois points pris sur une cubique, on peut faire passer les côtés de quatre triangles inscrits à la courbe.

Rappelons encore quelques résultats relatifs à une H_1^3 .

Cette homographie possède trois groupes de points de ramifications représentés par

$$l_x^4 = 0, \quad m_y^4 = 0, \quad n_z^4 = 0.$$

(*) V. p. 40 et ss.

Ces éléments de ramification correspondent aux tangentes menées des sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$.

En conséquence

Par un point situé sur la courbe, on peut, en général, mener à celle-ci quatre tangentes.

Les trois covariants ayant mêmes invariants (v. p. 40), on en déduit:

Le rapport anharmonique des tangentes issues d'un point de la courbe est constant.

Les éléments doubles forment six groupes dont les formes bi-quadratiques correspondantes ont les mêmes invariants.

On en conclut: *Si A et B sont des points d'une cubique, les rayons menés par A aux points de contact des tangentes issues de B ont même rapport anharmonique que les rayons menés par B aux points de contact des tangentes issues de A.*

Enfin, si l'on se rappelle la forme de ces covariants (p. 41), on peut énoncer ce théorème (*):

Les faisceaux de rayons menés d'un point de la cubique aux points de contact des tangentes issues de tous les autres points de la courbe appartiennent à une involution biquadratique du premier rang. De plus, les tangentes issues du point donné font partie de cette involution.

L'équation d'involution étant de la forme

$$f + kh = 0,$$

on a en réalité trois involutions quadratiques.

Nous allons déduire de tout ceci quelques théorèmes connus. Soit A le point donné et P son point tangentiel. Toute droite passant par A rencontre la cubique en des couples de points B, C dont les points tangentiels Q, R sont en ligne droite avec P.

Tandisque PQR tourne autour de P, BC passe par A. Si Q et R coïncident, PQR est une tangente issue de P.

Soient A_1, A_2, A_3 les trois autres points de contact des tangentes menées par P.

Si par A_1 , nous menons les tangentes $A_1M, A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3$,

(*) Sitzungsberichte der kön. böhm. Gesells. der Wissenschaften, 9 juin 1882.

le théorème précédent fait voir que les droites MM_1 , M_2M_3 se couperont au point A. Pour la même raison MM_2 , M_1M_3 se couperont en A_2 , MM_3 , M_1M_2 en A_3 .

Les tangentes menées par A_1 , A_2 , A_3 donnent lieu, par suite, à six rayons menés par A et représentant le covariant T de la forme biquadratique qui est elle-même représentée par les tangentes issues de A.

Nous avons ce théorème, connu s'ailleurs :

Les couples de rayons qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes issues de A_1 , A_2 , A_3 , au point A, sont les rayons doubles des trois involutions quadratiques formées par les quatre tangentes menées par A.

Ce même théorème permet d'arriver à une notion plus importante. Par A, on peut mener une infinité de groupes de quatre rayons, en I_1^4 , correspondant à tous les points B de la courbe.

Cherchons combien de fois AB pourra faire partie de ces groupes. Si nous considérons un rayon $AB_0B'_0$, ce rayon détermine un groupe unique de I_1^4 . Mais nous aurons deux points tangentiels P_0 , P'_0 , $P_0P'_0$ rencontre la cubique en un point O, en général différent de A. Donc AP_0 , AP'_0 sont deux rayons distincts.

Si nous menons par A une droite ABB' , B et B' déterminent, chacun un groupe de l'involution.

En conséquence, à tout rayon AB_0 , correspondent deux rayons AB, et, à chaque rayon AB, huit rayons AB_0 .

Entre ces deux rayons, il existe une correspondance (2,8). Nous aurons donc dix coïncidences.

Si O est le point tangentiel de A, il est visible que O donne une de ces coïncidences.

Pour les neuf autres, il faut que B coïncide avec son point tangentiel, c'est-à-dire que nous ayons en B une tangente osculatrice ou un point d'inflexion.

Donc, en général, une cubique possède neuf points d'inflexion.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet: nous avons fait voir ailleurs (*) comment on en peut déduire les propriétés connues sur l'arrangement des points d'inflexion, l'influence des points singuliers sur le nombre de ces points, sur la classe de la courbe, etc.

(*) Bulletins de l'Acad. roy. de Belg., 3^{me} série, t. iv, octobre, 1882.

Nous avons aussi montré, dans un autre endroit, comment la théorie des homographies conduit à déterminer les conditions d'existence des points singuliers, de la décomposition de la courbe, du genre de celle-ci, etc. (*).

Nous ne pourrions exposer tous ces points sans dépasser les bornes que nous devons forcément nous imposer: ce que nous avons dit suffira pour permettre au lecteur de refaire toute la théorie des cubiques planes.

Une autre théorie que les involutions permettent d'aborder aisément est celle des courbes rationnelles.

Nous en citerons un exemple particulier emprunté aux cubiques planes à point double.

Toutes les droites du plan rencontrent la courbe en des ternes de points dont chacun est déterminé par deux de ces points.

Nous avons donc une I_2^3 .

L'involution I_2^3 possède trois points triples: donc la cubique à point double possède trois tangentes d'inflexion; les trois points triples d'une I_2^3 forment un groupe de l'involution.

Par suite les points d'inflexion sont en ligne droite.

Nous pourrions multiplier ces applications et nous occuper, par exemple, des quartiques à trois points doubles. Les droites du plan marquent, sur celles-ci, une involution I_2^4 .

Nous pouvons, de même, étudier les courbes rationnelles gauches.

Nous avons déjà fait observer que la théorie des cubiques gauches peut se déduire, tout entière, de celle des involutions du troisième ordre.

Ainsi, tous les plans d'une gerbe G marquent sur la cubique gauche R_3 des ternes en I_2^3 . L'existence des points neutres nous fait voir que par le point G , on ne peut mener qu'une sécante à la courbe.

Les éléments triples nous donnent les trois plans osculateurs issus de G et nous apprennent que les points de contact sont situés dans un plan passant par G .

(*) C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1 août et 26 septembre, 1881. Mémoires de l'Acad. roy. de Belg., t. XLV, 1882.

De là nous tirons toute la théorie du système polaire (*null-system*).

Les plans d'un faisceau l donnent, sur R_3 , une I_1^3 . L'involution conjuguée conduit à la détermination de la droite l' .

Nous en tirons aussi qu'une droite l_1 qui s'appuie sur l et l' détermine une involution qui est sa propre conjuguée. La droite l_1 se correspond donc à elle-même dans le système polaire.

De là découlent aisément les propriétés du complexe linéaire formé par les droites l_1 .

Si, au lieu d'une I_2^3 , nous considérons une I_2^4 représentée sur une R_3 , nous aurons un système de tétraèdres inscrits à R_3 et circonscrits à une surface du second ordre. (Surface d'involution, V. plus haut.)

Nous pouvons donc dire que les douze faces de trois tétraèdres inscrits à une R_3 sont douze plans tangents d'une surface de la seconde classe Σ_2 et qu'il existe une infinité d'autres tétraèdres inscrits à R_3 et circonscrits à Σ_2 .

L'existence des couples neutres nous apprend que Σ_2 a trois génératrices qui sont bisécantes de R_3 .

On voit avec quelle facilité on arrive par ces considérations à exposer les propriétés des cubiques gauches.

Les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre pourront être étudiées de la même manière.

Il est un autre point qui peut être étudié de la même manière: c'est la représentation conforme des courbes rationnelles les unes sur les autres: nous renverrons, pour cela, aux nombreux mémoires que notre savant ami Mr. Emile Weyr a publiés sur ces questions (*).

Nous allons maintenant reprendre quelques considérations déjà exposés précédemment (voir plus haut p. 45 et ss.) pour les compléter.

Le problème fondamental qui se présente dans une H_2^3 est le suivant:

Etant donnés sept ternes d'éléments, compléter un huitième terne dont on se donne deux éléments.

(*) Sitzb. der K. Akademie in Wien, années 1875 et suiv.

Nous pouvons supposer que les sept ternes soient représentés, sur trois droites x, y, z , par sept points $X_0X_1\dots X_6, Y_0Y_1\dots Y_6, Z_0Z_1\dots Z_6$.

Menons le plan $X_0Y_0Z_0$ dans lequel nous traçons trois droites x', y', z' formant un triangle ABC. Les jonctions de x', y', z' respectivement aux points X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) donnent six groupes de trois plans et, par suite, six points $A_1A_2\dots A_6$.

Si par les neuf points ABCA₁A₂...A₆ nous faisons passer une surface du second ordre, tout point de cette surface, joint à x', y', z' , donnera un terne de plans qui marquera, sur x, y, z , un nouveau groupe de l'homographie.

Si donc on se donne deux éléments X_8, Y_8 , il suffira de mener les plans $x'X_8, y'Y_8$ dont l'intersection rencontrera la surface en un point I. Le plan $z'I$ coupe z au point cherché Z_8 .

Tout ceci résulte de ce qui a été dit plus haut.

Mais pour achever les constructions, il est avantageux de tirer parti d'une remarque que nous avons faite et qui nous permet de remplacer les trois séries en H_2^3 par trois séries situées sur un même support et symétriques, c'est-à-dire en I_2^3 .

Pour cela, il suffit de construire la droite que nous avons désignée par l (p. 46).

Nous y arriverons en construisant le pôle P du plan ABC par rapport à la surface du second ordre; puis la section faite dans cette surface par le plan ABC.

Les tangentes, à cette section, menées par A, B, C, forment un nouveau triangle A'B'C', homologique avec le premier. Soit P' le centre d'homologie — qu'on appelle aussi le pôle du triangle ABC —, la droite PP' est la droite cherchée l .

Nous ne développerons pas ces constructions que nous avons exposées ailleurs (*).

Maintenant, sur la droite l , les plans qui joignent x', y', z' à tous les points de la surface marquent des séries en I_2^3 .

De nouveaux ternes de cette I_2^3 se déterminent aisément et permettent de construire de nouveaux points de la surface.

Si l'on a, sur l , un terne $X_kY_kZ_k$ de l'involution, on peut join-

(*) *Essais de Géom. Sup.*, etc., p. 120.

dre ces points à x', y', z' de six manières distinctes et l'on obtient ainsi six points de la surface.

Nous avons fait voir que ces six points sont situés dans un plan et sur une conique (*); par conséquent chaque terme de l'involution conduit à une section plane de la surface.

La détermination des éléments neutres de l'homographie dépend évidemment de celle du couple neutre de l'involution; il suffit, pour s'en convaincre de se rappeler ce que nous avons dit plus haut.

Le problème que nous nous étions posé est donc entièrement résolu et nous a permis, en outre, de résoudre cette autre question:

Construire une surface du second ordre dont on connaît neuf points.

Nous pouvons faire observer, en passant, que la question traitée donne une solution nouvelle de ce problème, déjà traité par M.M. de Jonquières et Kortum (**):

Étant donnés neuf points $p, q, 1, 2, \dots, 7$ et une série de sept éléments $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_7$, trouver deux points x, y , tels que les sept coniques

$$(p q y y) 1.2.3 \dots 7$$

soient projectives avec $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_7$.

Cette question importante se présente dans la détermination des courbes du quatrième ordre.

Nous pouvons considérer en même temps comme résolu le problème suivant:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois droites et sept points.

Cela ressort de ce que nous avons dit précédemment. (V. p. 45).

Le théorème énoncé à cet endroit peut prendre la forme suivante qui nous paraît assez élégante:

Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces tournent autour de trois droites fixes x, y, z , ne se coupant pas deux à deux tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe Σ_2 , et que les trois arêtes, appartenant à cette

(*) Bulletins de l'Acad. de Belgique, 3.^e série, t. v, mai 1883.

(**) De Jonquières, *Mém. des savants étrangers*, t. xvi. — Kortum, *Ueber geometrische aufgaben dritten und vierten Grades*, p. 50.

face, s'appuient sur les trois arêtes d'un trièdre P tangent à Σ_2 , le sommet opposé du tétraèdre décrit une surface du troisième ordre, qui passe par x, y, z et par P.

Il rappelle, comme l'on voit, le théorème de Maclaurin sur les coniques.

Considérons, pour un instant, un plan tangent à Σ_2 ; ce plan, en tournant autour d'une génératrice de la surface ne cesse pas d'être tangent à celle-ci. Mais, dans ce mouvement, le sommet du tétraèdre décrira, d'après un théorème connu, une cubique gauche. Cette cubique est d'ailleurs tout entière sur la surface et passe par le sommet P.

Nous voyons qu'à chaque génératrice de Σ_2 correspond, sur la surface S_3 une cubique gauche.

Les génératrices de Σ_2 se divisent en deux systèmes auxquels correspondent également, sur S_3 , deux systèmes de cubiques gauches. Deux cubiques gauches d'un même système se coupent au point P; deux cubiques gauches de systèmes différents ont, en outre, un second point commun; c'est celui que correspond, sur S_3 au plan tangent de Σ_2 donné par les deux génératrices de cette surface qui sont les homologues de deux cubiques gauches.

Nous étudierons donc, fort aisément, à l'aide de cette méthode, les cubiques tracées sur S_3 .

On en déduit de même l'existence des vingt-sept droites de la surface, étude faite d'ailleurs par M. August dans le mémoire que nous avons eu l'occasion de citer.

Le trièdre P étant tangent à Σ_2 , les trois faces coupent Σ_2 suivant trois coniques décomposables formant un hexagone gauche $X_1Y_2Z_1X_2Y_1Z_2X_1$.

Or, tous les plans menés par X_1Y_2 par exemple, étant tangents à Σ_2 , le plan correspondant dans la série des z est indéterminé.

Par suite la droite d'intersection des plans xX_1, yY_2 appartient tout entière à la surface S_3 . Il en sera de même de la droite donnée par les deux plans xX_2, yY_1 .

Nous aurons ainsi six droites de la surface différentes de x, y, z .

Ces droites forment, avec x, y, z , les neuf intersections de deux trièdres conjugués à la surface, et nous voyons que nous obtenons ainsi six plans tritangents à S_3 . Ces plans représentent les covariants s de la forme trilinéaire.

Mais nous pouvons aller plus loin,

A chaque plan du faisceau x correspondent des couples de plans de y et z , formant une H_1^2 et se coupant, par suite, suivant un hyperboloïde. La section de cet hyperboloïde par le plan choisi du faisceau x appartient à S_3 ; or, si cette section est composée de deux droites, les deux droites seront sur la surface.

Mais à chaque plan de x correspond un hyperboloïde et par suite deux plans tangents, menés par x .

A chaque plan tangent, correspondent trois surfaces passant par y , z , puisque toutes ces surfaces forment un faisceau.

Entre les plans tangents menés par x et les plans du faisceau x existe donc une correspondance (2,3). Nous aurons donc cinq coïncidences.

Mais nous devons observer que parmi les cinq plans du faisceau x qui coupent leur surface (yz) suivant deux droites, il n'y en a que trois qui touchent la surface.

En effet, appelons x' , y' , z' les arêtes de P.

Un plan quelconque de x marque, sur x' , un point X, sommet d'un cône circonscrit à Σ_2 et qui donne naissance à une surface (yz) non décomposable. Mais si nous prenons le plan X_1x , on ne peut, par X_1 , mener qu'un plan tangent à Σ_2 , qui est $X_2Y_1Z_2$.

La surface correspondante est donc formée des deux plans (yY_2) , (zZ_2) .

De même, au plan X_2x , correspond la surface décomposable (yY_1) , (zZ_1) .

Ces deux surfaces comptent parmi les cinq qui sont coupées par le plan correspondant suivant deux droites.

Il en résulte que, entre les plans singuliers des faisceaux x , y , z , il y a, pour chaque faisceau, trois plans qui coupent la surface S_3 suivant un triangle.

Chaque droite x , y , z est rencontrée par dix de ces droites.

Cela est évident pour x .

Pour y , nous avons les quatre droites (xX_1, yY_2) , (xX_2, yY_1) , (yY_1, zZ_2) , (yY_2, zZ_1) ; ensuite les trois plans tangents menés par x aux surfaces correspondantes donnent six génératrices des modes différents; trois de ces génératrices rencontrent y ; il y en aura trois également provenant de z .

Il est visible qu'il y a trois droites qui rencontrent à la fois x , y , z .

Mais ces trois droites appartiennent à l'hyperboloïde qui a pour directrices x , y , z .

On retrouve ainsi ce théorème de Steiner :

Lorsqu'une surface du second ordre rencontre une surface du troisième ordre suivant trois droites d'un mode, elle la coupe encore suivant trois droites de l'autre système.

Ce théorème peut encore se démontrer autrement et la démonstration donne le moyen de construire les plans de faisceaux x, y, z tangents à leurs surfaces correspondantes.

Nous verrons plus loin comment on peut construire la section de S_3 par un plan.

Or considérons l'hyperboloïde (x, y, z) et S_3 . Un plan coupe ces deux surfaces respectivement suivant une conique et une cubique, qui ont, en commun, les traces sur le plan de x, y, z . Les deux courbes se coupent en trois autres points, faciles à construire comme nous l'avons vu. Par ces trois points passent trois génératrices du second mode qui, ayant chacune quatre points communs avec S_3 , y sont contenues toute entières.

Nous arrivons ainsi à la construction des vingt sept droites de la surface.

En effet, nous pouvons disposer les trois axes x, y, z et les six droites données par les plans singuliers de la manière suivante :

x	y	z			
012	201	120			
021	102	210,			

de telle façon que trois droites situées dans une même colonne ou une même ligne horizontale ne se rencontrent pas deux à deux.

Alors chacune de ces lignes donne naissance à un hyperboloïde et, par suite, à trois nouvelles droites de la surface.

Nous avons ainsi le système :

x	y	z	a_1	a_2	a_3
012	201	120	b_1	b_2	b_3
021	102	210	c_1	c_2	c_3
a'_1	b'_1	c'_1			
a'_2	b'_2	c'_2			
a'_3	b'_3	c'_3			

*

Nous avons en tout vingt-sept droites.

Nous ne poursuivons pas plus loin cette étude; il nous suffit d'avoir montré comment à l'aide des trois droites x, y, z connues a priori, on peut construire les vingt-quatre autres.

Le lecteur pourra d'ailleurs aisément déduire de ce qui précède tout ce qui est relatif à la disposition des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.

Les constructions précédentes exigeaient, on l'a vu, que l'on sût déterminer la section faite par un plan dans une surface S_3 dont on connaît trois droites et sept points.

Or, les droites x, y, z , marquent, sur ce plan, trois points X, Y, Z qui appartiennent à la section.

Un plan du faisceau x donne une droite XM . A ce plan correspondent deux faisceaux y , et z en H_1^2 , dont on sait construire autant de couples que l'on veut, puis que nous savons résoudre le problème fondamental des homographies H_2^3 . Ces faisceaux donnent, dans le plan, deux faisceaux homographiques dont les intersections déterminent une conique. Cette conique coupe XM en deux points réels ou imaginaires. Nous avons donc la méthode de Chasles pour la génération de la cubique, à moins que nous ne préférions employer le procédé que nous avons exposé plus haut.

Nous pouvons, à l'aide de ce qui précède, résoudre cette question intéressante:

Construire une surface du troisième ordre dont on se donne dix-neuf points.

Nous exposerons pour cela une des deux méthodes que nous avons fait connaître ailleurs (*).

En effet, nous savons construire la section, par un plan quelconque, d'une surface définie par trois droites et sept points. Or, nous avons montré ci-dessus comment on peut construire le plan α qui coupe une cubique gauche R_3 aux trois points correspondant à ceux où une droite quelconque l rencontre la cubique.

Par suite, se l'on veut construire les intersections d'une droite l avec la surface du troisième ordre, il suffira, par cette droite, de mener un plan $\bar{\omega}$ et d'appliquer le problème qui vient d'être mentionné.

(*) Comptes-Rendus, 2 et 16 juillet 1883. *Acta Mathematica*, t. III, p. 181-200.

Supposons maintenant que la surface Σ_3 soit définie par une droite, trois groupes de trois points situés en ligne droite et six autres points.

Soit l_1 la droite donnée,

PP'P'', trois points situés sur une droite l_2

QQ'Q'', » » » » » » l_3

RR'R'', » » » » » » l_4

et ABCDEF les six points donnés.

Nous pourrions considérer les surfaces S_3, S'_3, S''_3 définies respectivement par les éléments

$l_1 l_2 l_3; RR'R'' ABCD;$

$l_1 l_3 l_4; PP'P'' ABCD;$

$l_1 l_4 l_2; QQ'Q'' ABCD.$

Les trois surfaces S_3, S'_3, S''_3 marquent, sur une droite arbitraire, une I_2^3 , à la quelle correspond une gerbe G dont les plans coupent la cubique gauche R_3 , correspondant à l , suivant l'involution I_2^3 correspondante.

En employant, au lieu de ABCD, les éléments ABCE, ABCF, nous obtenons deux autres gerbes G_1, G_2 et le plan $G G_1 G_2$, rencontre R_3 aux points, images de ceux où l rencontre Σ_3 .

Il est facile de voir comment cette solution doit être modifiée quand on connaît, à priori, une ou deux des intersections de l avec Σ_3 .

La détermination du plan $G G_1 G_2 \equiv \alpha$ suffit pour aborder le problème suivant:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît une droite, trois points en ligne droite et douze autres points.

Soit l_1 la droite donnée, PP'P'' situés sur une droite l_2 , et ABCDEFGHIKLM les douze points donnés.

Les droites $l_1, l_2, AB \equiv l_3, CD \equiv l_4$ et les six points EFGHIK déterminent, par le problème précédent, une surface S_3 .

En employant les autres couples de côtés opposés du tétraèdre ABCD, on obtient deux autres surfaces S'_3, S''_3 .

Ces trois surfaces caractérisent, sur une droite l , une I_2^3 , et, par suite, une gerbe G .

La substitution des points L et M à K , nous donne deux autres gerbes G_1, G_2 , et le plan $G G_1 G_2$ donnera les intersections de l avec la surface à construire Σ_3 .

Si les éléments caractéristiques de la surface étaient composés de trois points $RR'R''$ situés sur une droite l_1 et de seize points $ABCDEFGHIKLMNOPQR$, nous considérerions l_1 comme une droite de la surface, $AB \equiv l_2$ comme une seconde droite, et $CDEFGHILMNO$ comme douze points.

Nous obtiendrions ainsi une surface S_3 déterminée par ces éléments.

D'autres combinaisons des mêmes éléments nous conduiraient à des surfaces S'_3, S''_3 , qui marqueraient une I_2^3 sur une droite quelconque l .

En remplaçant successivement O par P et Q , on obtiendrait, sur l , deux autres I_2^3 et l'application des raisonnements déjà employés, nous donnerait l'intersection de l avec la surface Σ_3 à construire.

Le problème général n'offre plus maintenant de difficulté, car nous venons en réalité de résoudre cette question:

Par dix-huit points donnés faire passer une surface du troisième ordre.

On plutôt cette autre, équivalente:

Déterminer les intersections d'une droite l avec une des surfaces, en nombre infini, qui passent par dix-huit points.

Si donc par un dix-neuvième point P nous menons, dans un plan $\bar{\omega}$, des droites l , nous pourrions, sur chacune d'elles, déterminer les groupes de trois points en I_1^3 où elle est rencontrée par les surfaces passant par les dix-huit autres.

Si, dans cette I_1^3 , nous achevons le groupe qui correspond à P , nous avons les trois points où l est rencontrée par la surface cherchée Σ_3 .

La répétition de ce même procédé nous conduit à déterminer tous les éléments nécessaires pour la construction de la section de Σ_3 par $\bar{\omega}$.

En faisant varier $\bar{\omega}$, nous obtenons toute la surface.

On reconnaîtra d'ailleurs, avec un peu d'attention, que toutes les constructions employées sont linéaires. Le lecteur qui voudrait s'en convaincre pourrait recourir aux travaux que nous avons mentionnés ci-dessus.

Nous terminerons ici cet exposé de quelques applications des homographies et des involutions supérieures: nous avons dû laisser de côté bien des questions importantes.

Nous n'aurions pu d'ailleurs, sans excéder les limites que nous nous étions assignées, aborder toutes ces théories en détail. Notre but était plus modeste: nous voulions faire connaître aux lecteurs de ce Journal les principaux problèmes que ces méthodes permettent de traiter; nous serions heureux si notre mémoire, malgré ses nombreuses imperfections, contribuait à répandre en Portugal l'emploi de ces procédés élégants et souvent féconds que fournissent les involutions d'ordres supérieurs.

Nous ne finirons pas cette trop longue étude sans remercier notre savant ami, Mr. Gomes Teixeira, de la gracieuse obligeance avec laquelle il nous a permis de disposer de son Journal.

BIBLIOGRAPHIA

A. F. da Costa Lima. — *Estudo sobre a theoria mathematica da elasticidade. Membranas vibrantes.* — Lisboa, 1885.

Eis o assumpto dos diversos capitulos d'este trabalho, apresentado pelo auctor ao professorado da Escola Polytechnica de Lisboa, para o concurso a um logar de professor:

No capitulo I deduz as equações do equilibrio de um corpo elastico qualquer, decompondo-o em parallelipipedes, e o residuo que fica á superficie em tetraedros e procurando as equações d'equilibrio d'estes corpos. Depois procura a expressão das componentes da força elastica que actúa sobre um elemento plano em funcção do deslocamento d'este elemento. Finalmente acha as equações que dão as deformações de um meio homogeneo e de elasticidade constante, e acha as equações do movimento vibratorio d'este meio.

No capitulo II applica os principios do capitulo anterior á membrana vibrante. Como casos particulares considera a membrana rectangular e a membrana circular, determinando as equações differenciaes do movimento vibratorio, e integrando estas equações por meio das series periodicas.

No capitulo III occupa-se das coordenadas curvilineas, das quaes faz uso no capitulo IV para estudar a membrana elliptica.

F. A. de Brito Limpo. — *Instrucções para o exercicio dos nivelamentos geometricos de precisão.* — Lisboa, 1885.

N'este opusculo o sr. Brito Limpo dá instrucções sobre as linhas, atravessando Portugal, ao longo das quaes se deve fazer um nivelamento; sobre o pessoal e material para esse nivelamento;

e sobre as marcas a usar. Descreve depois os instrumentos que se devem empregar e suas rectificações. Finalmente tracta dos meios de fazer o nivelamento, e das reduções a fazer aos resultados.

G. Paxton Young. — *Principles of the Solution of Equations of the Higher de degrees.* — Baltimore, 1885.

— *Resolution of Solvable Equations of the Fifth Degree.* — Baltimore, 1885.

Na primeira das precedentes memorias o sr. Young, professor em Toronto (Canadá), apresenta uma serie de propriedades das equações soluveis algebricamente e das expressões algebricas que são raizes d'essas equações. Limitamo'-nos a citar esta memoria, que é muito rica em resultados importantes, para que se possa resumir em curto espaço.

Na segunda memoria faz o auctor applicação dos principios expostos na primeira á equação do quinto grão, procurando o criterio de solubilidade e tractando depois d'essa resolução.

Tanto uma como outra foram publicadas no *American Journal of Mathematics*.

A. Marre. — *Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet.* — Roma, 1885.

No principio d'este opusculo vem uma noticia escripta pelo illustre sr. Marre, a respeito d'estas cartas, encontradas nos archivos do Oratorio de Paris, e a respeito de Reynou e de Prestot, que foram, como Jaquemet, Padres do Oratorio, e que floreceram no seculo XVII.

Em seguida vêem as cartas, as quaes são relativas á theoria dos numeros, á geometria geral das curvas, etc.

Este artigo foi publicado no *Bolletino* do principe Boncompagni.

H. Narducci. — Sur un manuscript du Vatican. — Paris, 1885.

Contém este opusculo uma carta dirigida pelo sr. Narducci ao sr. A. Marre, em que aquelle auctor descreve um Tratado intitulado: *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam*, encontrado entre os manuscriptos da bibliotheca do Vaticano.

J. A. Serrasqueiro. — Tratado elementar de Arithmetica. — Coimbra, 1882, 2.ª ed.

— *Tratado de Geometria elementar. — Coimbra, 1882, 2.ª ed.*

— *Tratado de Algebra elementar. — Coimbra, 1883, 2.ª ed.*

— *Tratado elementar de Trigonometria rectilinea. — Coimbra, 1882, 5.ª ed.*

Votado com dedicação, ha muitos annos, ao ensino das mathematicas elementares, poucas pessoas egualam o illustre professor do Lyceu de Coimbra em competencia para redigir os compendios para o ensino d'estas sciencias. O modo como estes livros tem sido recebidos no paiz prova bem isto, pois tem sido adoptados pela maior dos professores para texto das suas lições.

Estão escriptas com muita clareza e as materias dispostas em boa ordem. Na escolha das materias de que se occupa seguiu os programmas officiaes; deixaremos por isso para um artigo, que sobre estes programmas publicaremos, algumas observações que teriamos a fazer a este respeito na parte que se refere aos imaginarios, ao desenvolvimento do binomio de Newton quando o expoente é negativo ou fraccionario, etc.

Observações feitas no Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra. — Coimbra, 1882.

Este volume contém as observações das passagens d'estrellas pelo primeiro vertical, feitas pelo empregado do Observatorio o sr. José Lucas, desde julho de 1879 até julho 1882. Contém

em seguida os valores da colatitude do Observatorio que resultam d'estas observações. Finalmente contém as observações do grande cometa de setembro de 1882, e as observações da passagem de Venus, que teve logar em 6 de dezembro de 1882.

H. Barros. — *Esboço da theoria thermo-dynamica.* — Lisboa, 1883.

Contém este opusculo em primeiro logar uma Introducção, onde o sr. Barros escreve um resumo da historia da doutrina que faz parte do opusculo. Na primeira parte occupa-se o auctor do calor nas suas relações com o trabalho mecanico, e ahi expõe as equações fundamentaes da thermo-dynamica, os principios de Mayer e Clausius, etc. Na segunda parte considera o calor como um modo particular de movimento das moleculas do corpo e do ether, e procura as consequencias que d'esta hypothese vem para a theoria de que se occupa. Finalmente n'uma nota faz applicação da Thermo-dynamica a um problema d'Astronomia — conservação da energia solar, e a um problema de Mecanica — movimento permanente d'um gaz perfeito que sae por um orificio.

A. d'Arzilla Fonseca. — *Principios elementares do calculo de quaterniões.* — Coimbra, 1884.

O calculo dos quaterniões, cuja descoberta data de 1884, tem sido objecto de muitas memorias e mesmo livros especiaes publicados nas differentes linguas da Europa. Em Portugal pessoa alguma se havia occupado d'elle, e por isso o sr. Arzilla fez um bom serviço tomando-o para assumpto de sua Dissertação inaugural. N'ella apresenta a parte elementar d'esta doutrina, isto é, a composição dos vectores, a multiplicação e divisão dos vectores, a resolução das equações do primeiro gráo de quaterniões, a diferenciação de quaterniões, etc.

J. Bruno de Cabedo.— *Integração das equações canonicas do movimento.*— *Coimbra, 1884.*

No primeiro capitulo tracta o auctor de reduzir á fórma canonica as equações differenciaes do movimento de um systema de pontos, considerando primeiro o movimento absoluto, e em seguida o movimento relativo, sem se limitar neste caso, como Bour, ao caso em que tem logar o principio de forças vivas.

Nos capitulos segundo, terceiro e quarto expõe os theoremas de Lagrange, Liouville e Poisson, e os methodos de Jacobi, Bertrand e Bour para integrar as equações da Dynamica.

Finalmente no capitulo quinto expõe os methodos de aproximação de Hamilton e Poisson para fazer esta integração.

H. Teixeira Bastos.— *Unidades electricas.*— *Coimbra, 1884.*

A questão da escolha do systema de unidades electricas tem occupado nos ultimos tempos a attenção dos physicos, e por isso o sr. Bastos a escolheu para assumpto de sua Dissertação inaugural. Expõe o systema de unidades adoptadas pelo Congresso de Paris e as considerações que levaram a adoptar este systema, a comparação d'estas unidades com uma unidade arbitraria, e finalmente a sua representação material.

**DETERMINAÇÃO GEOMETRICA DOS MOMENTOS DE INERCIA
DOS SOLIDOS DE REVOLUÇÃO**

POR

GUILHERME CARLOS LOPES BANHOS

Capitão d'artilheria

I

Considerações geraes

O momento de inertia de um solido em ordem a uma recta dada é igual á somma dos productos que se obteem multiplicando a massa de cada um dos elementos materiaes pelo quadrado da sua distancia á referida recta.

Sendo dm o elemento differencial da massa M do solido, r a distancia do elemento dm ao eixo fixo, e K o raio de geração, o momento de inertia de um solido qualquer será expresso analyticamente pela fórmula geral

$$MK^2 = \iiint r^2 dm.$$

Na generalidade dos casos os calculos relativos á determinação dos momentos de inertia são bastante complexos, e os valores numericos que d'elles resultam são apenas simples approximações.

O gráo de exactidão e a facilidade da determinação dos referidos valores dependem principalmente da fórmula que affecta o solido, e do modo como se acha distribuida a sua massa.

Sendo os solidos homogeneos e apresentando uma fórmula geometrica conhecida, ou suppondo-os formados pela reunião de di-

versos corpos de modo que cada um d'elles constitua um solido nas condições indicadas, o seu momento de inercia é susceptivel de uma solução rigorosa. A fóra estes casos, a determinação do referido elemento só se obtem por meios mais ou menos approximados, e n'estas circumstancias, sempre que as expressões analyticas envolverem integraes cujas funcções possam ser traduzidas geometricamente, convem traçar as curvas representativas das dictas funcções, e avaliar pelos methodos de quadratura conhecidos em geometria, ou por meio dos planímetros, as areas que as figuras derivadas contornam.

O processo geral para determinar o momento de inercia de qualquer solido, consiste em referil-o a tres eixos coordenados rectangulares, suppondo-o formado de parallelipipedos infinitamente pequenos de arestas parallelas aos eixos, e calcular por meio de integrações a somma dos momentos de inercia dos parallelipipedos elementares, entre os limites determinados pela superficie dos solidos.

Uma das difficuldades que apresenta este processo consiste na determinação dos limites entre os quaes se devem effectuar as integrações, o que não é geralmente possivel senão quando a superficie do solido é susceptivel de ser expressa por uma equação.

As mesmas difficuldades se offerecem ainda no caso dos solidos serem de revolução, pela impossibilidade de se poder sempre traduzir algebricamente as suas curvas meridianas; no emtanto, substituindo as dictas curvas por cordas que defiram dos arcos subtensos de quantidades pequenas, a superficie total do solido ficará dividida em superficies cylindricas e conicas, e n'estas condições o seu momento de inercia poderá ser expresso por approximação por uma fórmula algebrica em funcção dos raios das bases e alturas dos cylindros e pyramides conicas a que correspondem os troncos de cone inscriptos no solido.

Este processo, sendo excessivamente trabalhoso, quando se pretendesse obter o momento de inercia com muita approximação, seria pouco commodo para ser empregado practicamente.

O processo geometrico que passamos a expor, applicavel aos solidos de revolução em geral, é preferivel na practica ao processo anterior, não só por ser de extrema facilidade na sua execução, como tambem por offerecer resultados sufficientemente rigorosos.

Reduz-se principalmente ao traçado das curvas relativas ás funcções que encerram os integraes, e á quadratura das superficies planas definidas pelas dictas curvas.

O rigor dos resultados, como facilmente se reconhece, depende do traçado exacto das transformadas, da escala graphica adoptada e dos methodos practicos empregados na avaliação das areas.

II

Estabelecimento das fórmulas

Sendo M a massa de um solido, K o seu raio de giração em ordem a um eixo qualquer passando pelo centro de gravidade, e I o seu momento de inercia relativamente á parallela tirada á distancia a do referido eixo, teremos segundo a theoria dos momentos de inercia

$$I = MK^2 + Ma^2 \dots \dots \dots (1)$$

Esta equação mostra que para uma certa posição do eixo dos momentos o valor de I está dependente de M , e de MK^2 , cujo valor tambem depende de M . O valor de MK^2 , dependendo além d'isso do conhecimento do ellipsoide central de inercia, obter-se-ha procedendo-se á determinação previa do centro de gravidade do solido e á dos momentos de inercia principaes em ordem áquelle ponto.

Para se determinar o ellipsoide central, isto é, o ellipsoide de inercia relativamente ao centro de gravidade, torna-se necessario conhecer a grandeza dos tres eixos principaes.

Como nos solidos de revolução dois dos eixos principaes de inercia relativamente a um ponto qualquer do eixo de figura são eguaes, e portanto eguaes todos os que passando pelo mesmo ponto existirem no plano dos dictos eixos, basta construir a ellipse meridiana do ellipsoide central, para se obterem os diversos momentos de inercia do solido em ordem a quaesquer rectas passando pelo centro de gravidade.

Portanto, para se calcular o valor de I da equação (1), dever-se-ha determinar positivamente:

- 1.º a massa do solido;
- 2.º o centro de gravidade;
- 3.º o momento de inercia em ordem ao eixo de revolução; e
- 4.º o momento de inercia em ordem á perpendicular aquelle eixo, conduzida pelo centro de gravidade.

Seja *a'b'aba'* (fig. 1) a curva meridiana de um solido de revolução situada no plano dos *xy*, e *ox* e *oy* os dois eixos coordenados aos quaes ella se acha referida.

Tome-se para eixo de revolução o eixo das abscissas, e determinem-se sobre este e o dos *y* as coordenadas limites *oa*₁ = *x'*, *ea*₁ = *x''*, *ob*₁ = *y'* e *ob*₁' = *y''*, conduzindo parallelamente a cada um d'elles as tangentes *a*₁*a*, *a*₁'*a*', *b*₁*b* e *b*₁'*b*' á curva dada.

Representando por *C* uma constante equivalente ao producto da densidade especifica do solido por π , por *y* = *f*(*x*) e *x* = *F*(*y*) as equações das curvas correspondentes aos arcos exteriores (*a'b'a*, *b'ab'*) e por *y*₁ = *f*₁(*x*) e *x*₁ = *F*₁(*y*) as que se referem aos arcos interiores (*a'ba* e *bab'*), teremos para os quatro elementos indicados as seguintes expressões analyticas:

(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Massa} \dots \dots \dots \\ \text{M} = C \int_{x'}^{x''} (y^2 - y_1^2) dx \dots \dots \dots (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{M} = 2C \int_{y'}^{y''} y(x - x_1) dy \dots \dots \dots (3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{X}_y = \frac{\int_{x'}^{x''} (y^2 - y_1^2) x dx}{\int_{x'}^{x''} (y^2 - y_1^2) dx} \dots \dots \dots (4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abscissa} \\ \text{do centro de} \\ \text{gravidade} \dots \dots \dots \\ \text{X}_y = \frac{1}{2} \frac{\int_{y'}^{y''} (x^2 - x_1^2) y dy}{\int_{y'}^{y''} (x - x_1) y dy} \dots \dots \dots (5) \end{array} \right.$$

Momento de inercia em ordem ao eixo de figura ...

$$I_x = \frac{C}{2} \int_{x'}^{x''} (y^4 - y_1^4) dx \dots \dots \dots (6)$$

$$I_x = 2C \int_{y'}^{y''} y^3 (x - x_1^2) dy \dots \dots \dots (7)$$

Momento de inercia em ordem á recta perpendicular ao eixo da figura

$$I_y = \frac{1}{2} I_x + C \int_{x'}^{x''} x^2 (y^2 - y_1^2) dx \dots \dots \dots (8)$$

$$I_y = \frac{1}{2} I_x + \frac{2}{3} C \int_{y'}^{y''} y (x^3 - x_1^3) dy \dots \dots \dots (9)$$

As fórmulas analyticas fornecem pois duas soluções para cada elemento, e a questão, como das mesmas fórmulas se depreheende, acha-se apenas reduzida á determinação graphica do integral da forma $\int y^n x^m dx$, visto que, pela mudança reciproca das duas variaveis x e y , se obtem o integral geral correspondente ás segundas soluções.

III

Construcção graphica do integral $\int y^n x^m dx$, sendo conhecida geometricamente a curva expressa pela equação $y = f(x)$

1.º PROCESSO. — Traçado das transformadas por meio das auxiliares parabolicas. — Seja (fig. 2.ª) A_1B_1 a curva meridiana de um solido de revolução, expressa pela equação $y = f(x)$, ox e oy os dois eixos coordenados orthogonaes aos quaes ella se acha referida, e $MM_1 = y$ a ordenada de um ponto M_1 da curva.

Pretende-se representar geometricamente o integral $\int y^n x^m dx$, isto é, traçar a curva expressa pela equação

$$f(x)^n x^m = y^n x^m = Y,$$

sendo dada a funcção $y = f(x)$.

Por um ponto qualquer V do eixo dos xx conduza-se paralelamente a oy a recta NVR , e, em relação a esta recta e a ox como eixos principaes, descrevam-se com o parametro $VU = 1$ as parabolae VC_1S e VC_nR , expressas pelas equações

$$y^2 = x \dots \dots \dots (10)$$

$$y' = x^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (11)$$

Pela eliminação de x entre estas duas equações, resulta

$$y' = y^n \dots \dots \dots (12)$$

D'onde se deduz que para determinar os pontos $M_2, M_3, M_4 \dots M_n$ das transformadas da curva proposta A_1B_1 , para as diversas potencias de $y = MM_1$, basta conduzir do ponto dado M_1 uma parallela ao eixo dos xx até encontrar a primeira parabola; do ponto de intersecção C_1 tirar as perpendiculares $C_1C_2, C_1C_3, C_1C_4 \dots C_1C_n$ até encontrarem a segunda parabola, e transportar depois por meio de parallelas ao eixo dos xx , sobre o prolongamento da ordenada do ponto dado, os segmentos $CC_2, CC_3, CC_4 \dots CC_n$, comprehendidos entre o referido eixo e as transformadas auxiliares $VC_2R, VC_3R, VC_4R \dots VC_nR$.

Repetindo a construcção para diversos outros pontos da curva A_1B_1 , e unindo por um traço continuo os pontos assim determinados, acharemos as transformadas $A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 \dots A_nB_n$, as quaes, conjunctamente com as ordenadas extremas, definem as areas correspondentes ás expressões analyticas

$$A B A_2 B_2 = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx,$$

$$A B A_3 B_3 = \int_{x_0}^{x_1} y^3 dx,$$

.....

$$A B A_n B_n = \int_{x_0}^{x_1} y^n dx.$$

Os limites dos integraes correspondem ás abscissas $x_1=0A$ e $x_0=0B$.

Convém observar que é muito util na practica executar as construcções no papel millimetrico, e adoptar para unidade graphica quaesquer das unidades metricas n'elle já traçadas; isto com o fim de evitar a multiplicidade de linhas de construcção, e de simplificar o traçado das curvas auxiliares.

Construidas as parabolae, os pontos das transformadas que se procuram, sendo determinados pelo simples cruzamento de rectas dispostas em angulo recto, em direcção parallela aos eixos coordenados, obter-se-hão apenas com o auxilio das linhas já traçadas no papel quadriculado.

A representação graphica do integral $\int y^n dx$ ainda se póde obter por meio da linha $V's'$, e pela transformação auxiliar $V'c'_nR'$, expressas pelas equações

$$y = x \dots\dots\dots (13)$$

$$y' = x^n \dots\dots\dots (14)$$

visto que pela eliminação de x , entre estas duas equações, se obtem a equação (12).

A determinação das transformadas auxiliares parabolicas dadas pelas equações (11) e (14) é facil de obter, marcando sobre um certo numero de ordenadas comprimentos eguaes ás potencias n

e $\frac{n}{2}$ das abscissas correspondentes; no emtanto vejamos como se obteem geometricamente as grandezas das ordenadas expressas pelas dictas equações, para os valores particulares de $n=2$, $n=3$ e $n=4$.

A expressão (10), e a (11) depois de n'ella se substituirem os valores indicados, fornecem os tres systemas de equações

$$y^2 = x, \quad y^2 = x, \quad y^2 = x.$$

$$y' = x, \quad y' = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = x^2,$$

*

A primeira equação em cada um dos systemas corresponde na figura á parábola ordinaria VC_1S , e as restantes dizem respeito respectivamente á recta VC_2R inclinada de 45° , e ás parábolas VC_3R e VC_4R .

As parábolas ordinarias VC_1S e VC_4R constroem-se por qualquer dos processos conhecidos em geometria; comtudo, executando-se o desenho no papel quadriculado, convem adoptar aquelle que permita utilizar, das linhas já traçadas, as que mais convierem á construcção.

Depois de traçada a parábola VC_1S e a recta VC_2R , a construcção da parábola VC_3R não offerece difficuldade. Para este fim basta determinar os pontos de intersecção G e E da parábola e da recta com a parallela GE ao eixo dos YY , conduzida por um ponto qualquer Y do eixo dos XX ; tomar sobre este eixo a distancia $IF = IG$; unir F com E e tirar do ponto G a parallela GH a EF . Esta linha determinará sobre OX o segmento IH , que, sendo transportado para IG por meio do arco de circulo HI , dará um ponto I da parábola pedida. Esta construcção applicada a quaesquer outros pontos, tomados sobre o eixo dos XX , conduz-nos ao traçado da parábola VC_3R , expressa pela equação

$$y' = x^{\frac{3}{2}}.$$

Para os valores de $n=2$, $n=3$ e $n=4$ fornecem, similhantemente, as expressões (13) e (14) os tres grupos de equações

$$y = x, \quad y = x, \quad y = x.$$

$$y' = x^2, \quad y' = x^3, \quad y' = x^4.$$

Na figura a equação $y = x$ corresponde á linha $V'S$ inclinada de 45° , e as equações $y' = x^2$, $y' = x^3$ e $y' = x^4$ correspondem ás parábolas $V'C'_2R'$, $V'C'_3R'$ e $V'C'_4R'$, construidas com o parametro $VU' = 1$.

Os pontos da parábola relativa á equação $y' = x^3$ obteem-se por um processo analogo ao empregado para a parábola VC_3R , como se observa pela construcção indicada na figura para o ponto

V' ; a parábola VC_4R' , expressa pela equação $y = x^4$, obtem-se determinando para cada ponto da recta $V'R'$ o vertice Q do rectangulo formado sobre os segmentos PL e PT paralelos aos eixos coordenados, e comprehendidos entre a dicta recta e a parábola $V'C_2R'$.

Posto isto, represente-se por $A'B'$ a transformada relativa á potencia n das ordenadas de uma curva qualquer, expressa pela equação $y = f(x)$, e supponhamol-a referida aos eixos VX e VR . Determinando o ponto de intersecção e da parábola do 2.º grau VC_4R com a ordenada do ponto dado M' , ou com o seu prolongamento, e o ponto de intersecção d do eixo das abscissas com a circumferencia de raio mM' , descripta do pé m da mesma ordenada como centro, e, conduzindo parallelamente á linha que une a origem V com o ponto e a recta dm' , obteremos, sobre o prolongamento da referida ordenada, o segmento mm' , cujo valor é equivalente ao producto das coordenadas do ponto dado.

Portanto, teremos

$$mm' = \frac{me \times mM'}{Vm} = xy^n.$$

Se substituirmos a parábola ordinaria VC_4R pela parábola expressa pela equação $y' = x^{m+1}$, e se repetirmos a construção indicada para a mesma ordenada, acharemos a egualdade

$$mm' = x^m y^n = Y.$$

Procedendo-se semelhantemente com relação aos mais pontos da curva proposta $A'B'$, comprehendidos entre A' e B' , e unindo entre si os pontos da nova transformada $a'b'$, ficará definida a area plana $aa'b'b$ representativa do integral que se pretendia construir, isto é, será, designando Va por x_0 e Vb por x_1 ,

$$aa'b'b = \int_{x_0}^{x_1} y^n x^m dx.$$

2.º PROCESSO.— *Traçado das transformadas por meio da logarithmica.*— O integral $\int y^n x^m dx$ ainda pôde ser representado graphicamente, empregando para curva auxiliar a *logarithmica*.

Esta curva, que tem por equação $y = B^x$, corta o eixo dos YY a uma distancia da origem igual á unidade, e tem por asymptota o eixo dos XX.

Construe-se portanto fazendo variar as abscissas entre $-\infty$ e $+\infty$.

No traçado da referida curva segue-se geralmente o seguinte processo:

Sobre uma recta indefinida X'X' (fig. 3.ª) applique-se um certo numero de vezes o comprimento $O_1 O_b$ igual á unidade graphica, e pelos pontos de divisão $O_1, O_b, O_{b^2} \dots O_{b^n}$ e $O_1, O_1 \dots O_1$ levantem-se perpendiculares á mesma recta.

N'uma d'estas perpendiculares, por ex.: $O_1 Y'$, tome-se o comprimento $O_1 O'_1$ igual a uma divisão de X'X' e marque-se sobre as restantes, para a direita, grandezas eguaes a $B, B^2 \dots B^n$, e para a esquerda grandezas eguaes a $\frac{1}{B}, \frac{1}{B^2}, \frac{1}{B^3} \dots \frac{1}{B^n}$.

Suppondo a curva referida aos eixos Y'Y' e X'X', vê-se, pela construcção que acabamos de indicar, que os pontos extremos $O'_1, O'_2 \dots O'_n$ e $O'_1, O'_1 \dots O'_1$ das perpendiculares levantadas a X'X', satisfazem á equação $y = B^x$, e portanto pertencem á logarithmica que se procura.

Das ordenadas $O_1 O'_1 = 1$ e $O_b O'_b = B$ se deduzem graphicamente os valores das diversas potencias de B e $\frac{1}{B}$, construindo para um e outro lado da origem terceiras proporcionaes ás grandezas das referidas ordenadas, e ás que se forem obtendo por meio de construcções successivos.

Assim, achadas as grandezas B^n e B^{n+1} , ou as suas reciprocas $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$, deduzir-se-hão os valores de B^{n+2} e $\frac{1}{B^{n+2}}$, construindo terceiras proporcionaes a B^n e B^{n+1} e a $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$.

Os pontos intermedios da curva acham-se construindo, a meio do intervallo comprehendido entre quaesquer duas ordenadas co-

nhecidas, meias proporçionaes ás grandezas das mesmas ordenadas.

Assim, se na equação

$$y = B^x$$

se faz

$$x = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

obtem-se para y os seguintes valores:

$$y' = B^n \sqrt{B} = \sqrt{B^n B^{n+1}}$$

e

$$y' = \frac{1}{B^n} \sqrt{\frac{1}{B}} = \sqrt{\frac{1}{B^n} \times \frac{1}{B^{n+1}}},$$

os quaes, como se vê, são effectivamente as medias geometricas entre os valores das ordenadas expressos por B^n e B^{n+1} e por $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$.

Nem todas as logarithmicas podem vantajosamente servir para a determinação geometrica das transformadas, nem a construcção indicada precedentemente convem adoptar no traçado da logarithmica, quando se desejar obter esta com alguma exactidão.

A logarithmica decimal, expressa pela equação $y = 10^x$, é uma das mais facéis de construir, e obtem-se com sufficiente rigor, quando o seu traçado se executa no papel millimetrico; e n'estas condições convem então seguir na determinação das ordenadas um processo mais simples, e que offerece maior garantia de exactidão, como aquelle que passamos a expôr.

Suppondo que se toma para unidade graphica o decimetro, determinem-se em relação a dois eixos coordenados quaesquer $y'y'$ e $x'x'$ (fig. 3.^a) os pontos relativos ás coordenadas seguintes, deduzidas da equação

$$x = \lg y$$

$x = O_1 O_1 = 0$	$y = O_1 O'_1 = 1^{\delta}$
$x = O_1 a = -0^{\delta}, 1$	$y = a a' = 0, 7944$
$x = O_1 b = -0, 2$	$y = b b' = 0, 6310$
$x = O_1 c = -0, 3$	$y = c c' = 0, 5012$
$x = O_1 d = -0, 4$	$y = d d' = 0, 3982$
$x = O_1 e = -0, 5$	$y = e e' = 0, 3163$
$x = O_1 f = -0, 6$	$y = f f' = 0, 2512$
$x = O_1 g = -0, 7$	$y = g g' = 0, 1996$
$x = O_1 h = -0, 8$	$y = h h' = 0, 1585$
$x = O_1 i = -0, 9$	$y = i i' = 0, 1259$
$x = O_1 \frac{b}{b} = -1$	$y = O_1 O'_1 = 0, 1$

Unindo por um traço continuo os pontos $O'_1, a', b' \dots h', i'$ e O'_1 assim determinados, obteremos, entre as ordenadas $y = 1$ e $y = 0^{\delta}, 1$, a logarithmica $O'_1 O'_1$ expressa pela equação $y = 10^x$.

Como a razão geometrica entre as referidas ordenadas é 10, tambem todas as que guardarem entre si uma distancia igual á unidade devem variar igualmente na mesma razão, e portanto basta multiplicar ou dividir por 10, 100, 1000, etc., os valores de y a cima calculados, para se determinarem todas as mais ordenadas da curva, correspondentes ás abscissas, deduzidas da fórmula geral $x = \pm n \times 0^{\delta}, 1$.

Pretendendo-se traçar a curva com maior approximação, proceder-se-ha ao calculo das ordenadas entre O_1 e $O_1 \frac{b}{b}$, fazendo variar as abscissas n'uma razão inferior a $O_1 b - O_1 a = 0^{\delta}, 1$.

Vê-se, pois, como pelo processo que acabamos de indicar se obteem d'um modo rapido e simples os diversos pontos da logarithmica decimal.

Construida a logarithmica, vejamos agora como por meio d'ella se acham os productos das potencias m e n das coordenadas x e y dos diversos pontos de uma curva dada $A_1 B_1$, expressa pela equação $y = f(x)$.

Por um ponto qualquer de $x' x'$, conduza-se parallelamente a

$y'y'$ a recta yy , e, em relação a esta linha e a ox como eixos coordenados, supponha-se referida a curva A_1B_1 .

Sejam OM e MM_1 as coordenadas de um ponto qualquer M_1 d'esta curva; OS , O_1S_1 e $O'S_1$ as bissectrizes dos angulos IOB , $I'O_1O$ e $I'O_1O_b$, e O_1R , O_1R' , O_1T e O_1T' rectas, partindo da origem O_1 e formando com o eixo $y'y'$ os angulos

$$R_1Oy' = R'O_1y' = \alpha \quad \text{e} \quad TO_1y' = TO_1y' = \beta$$

expressos trigonometricamente pelas relações

$$\text{tg } \alpha = m \quad \text{e} \quad \text{tg } \beta = n.$$

Posto isto, examinemos agora como por meio dos dados estabelecidos se representam graphicamente os valores de $m \lg x$ e $n \lg y$, e como d'estas grandezas se deduz o valor de $y^n x^m$.

Do ponto de intersecção m da bissetriz OS com a ordenada MM_1 , e do ponto dado M_1 , conduzam-se ao eixo das abscissas as parallelas mm_1 e M_1m' até encontrarem a logarithmica; dos pontos de encontro m_1 e m'_1 levantem-se ás dictas rectas as perpendiculares m_1m_2 e $m'_1m'_2$ até á bissetriz OS_1 ; de m_2 e m'_2 tirem-se parallelamente ao referido eixo as rectas m_2m_3 e $m'_2m'_3$ até se obterem sobre as linhas OR e OT os pontos m_3 e m'_3 ; e dos extremos m_3 e m'_3 d'aquellas rectas levantem-se as perpendiculares m_3m_4 e $m'_3m'_4$.

A primeira d'estas perpendiculares, encontrando a bissetriz O_1S_1 no ponto m_4 , determinará a parallela m_4m_5 a $x'x'$, que interceptará a segunda perpendicular no ponto m'_5 , para o qual, como evidentemente se reconhece pela simples inspecção da figura, se verificam as seguintes relações:

$$x' = O_1m_6 = n \lg y,$$

$$y' = n_6m_5 = m \lg x.$$

Se agora, a partir de m_6 , marcarmos sobre $x'x'$ a distancia m_6m_7 igual a m_6m_5 e do extremo m_7 tirarmos a ordenada m_7m_8

da logarithmica e a transportarmos para a ordenada do ponto dado por meio da parallela m_8M' ao eixo dos xx , obteremos o segmento MM' correspondente á seguinte expressão

$$MM' = m_8 m_7 = 10^{(n \lg y + m \lg x)},$$

D'onde se deduz

$$\lg MM' = n \lg y + m \lg x$$

ou

$$MM' = y^n x^m.$$

Repetindo a mesma construcção para os mais pontos da curva comprehendidos entre A_1 e B_1 , teremos achada a area $AA'B'B$, relativa ao integral que se procura, entre os limites $x_0 = OA$ e $x_1 = OB$

$$AA'B'B = \int_{x_0}^{x_1} y^n x^m dx.$$

Quando as ordenadas MM_1 e Mm são superiores á unidade graphica, as parallelas ao eixo das abscissas, conduzidas pelos pontos M_1 e m , encontram a logarithmica acima do ponto O_1 , e n'este caso a determinação dos pontos das transformadas é feita com o auxilio das linhas O_1S' , O_1R' e O_1T' symetricas de O_1S_1 , O_1R e OT .

Com as mesmas linhas O_1R , O_1R' , O_1T e O_1T' póde igualmente obter-se o integral da fórma $\int y^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} dx$. Para este fim deverá proceder-se como se segue:

Dos pontos m_1 e m'_1 da logarithmica, determinados como se disse anteriormente, conduzem-se parallelamente ao eixo $y'y'$ as rectas m_1m_7 e $m'_1m'_4$ até encontrarem as linhas O_1R e O_1T , e dos pontos extremos m_7 e m'_4 d'aquellas rectas levantem-se as perpendiculares $m'_7m'_6$ e $m'_4m'_3$.

A primeira perpendicular, encontrando a bissetriz O_1S_1 no ponto m'_6 , determinará a parallela $m'_8m'_3$ a $y'y'$, que interce-

ptará a segunda perpendicular no ponto m'_5 , para o qual se verificarão similhantemente as seguintes relações:

$$m'_8 m'_5 = \frac{1}{n} \lg y,$$

$$O_1 m'_8 = \frac{1}{m} \lg x.$$

Portanto, se marcarmos sobre Ox' a distancia $m'_8 m'_9$ igual a $m'_8 m'_5$, e se do ponto m'_9 tirarmos a ordenada $m'_9 m_9$ da logarithmica e a transportarmos para a ordenada do ponto dado, acharemos como precedentemente

$$MM'' = y^n x^m$$

e

$$AA'' B'' B = \int_{x_0}^{x_1} y^n x^m dx.$$

Determinado, pois, o valor numerico do integral da fórmula $\int y^n x^m dx$ para os valores particulares de m e n das fórmulas (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) e (9), pela quadratura da area plana que lhe corresponde, teremos tambem determinada numericamente a massa, a abscissa do centro de gravidade, e os momentos de inercia principaes de qualquer solido de revolução, sendo conhecida geometricamente a sua curva meridiana.

Calculados aquelles elementos, facil é traduzir graphicamente os diversos valores de MK^2 , e portanto os de I da equação (1).

IV

Determinação geometrica do momento de inercia de um solido qualquer em ordem a uma recta dada, sendo conhecidos os valores de M , X , I_x e I_y

Tracem-se (fig. 4.^a) dois eixos coordenados XX e YY , e, em relação a elles, descreva-se a hyperbole equilatera expressa pela equação

$$xy = 1 \dots \dots \dots (15)$$

Esta hyperbole terá por asymptotas os dois eixos coordenados, e os seus eixos principaes achar-se-hão situados segundo as bissectrizes dos angulos formados pelos referidos eixos.

Tomando sobre a bissectriz OD , a partir da origem O , as duas distancias OC e OE , a primeira igual á diagonal do quadrado construido sobre a unidade linear oa , e a segunda equal ao dobro d'esta ultima grandeza, acharemos os pontos C e e , que corresponderão ao vertice e foco da hyperbole.

Tome-se sobre OX a distancia OG equal a $4M$, quadruplo do valor da massa do solido, e no extremo g tire-se a ordenada gf ; marque-se sobre OY a distancia of_1 equal a gf , e, em relação ao ponto f_1 como foco e ao ponto O como vertice, descreva-se a parabola OE .

Representando por x' e y' as coordenadas da parabola, teremos a equação

$$Mx'^2 = y' \dots \dots \dots (16)$$

Sendo a equação (15) satisfeita para $x = k$ (raio de giração) e $y = \frac{1}{k}$, e a (16) para $x' = x = k$ e $y' = Mk^2$, concluiremos que, se as abscissas representarem os valores do raio de giração, as ordenadas da hyperbole darão os valores reciprocos d'esses

raios, e as ordenadas da parabola darão os dos momentos de inercia, e reciprocamente.

Posto isto, designe-se por k_x e k_y os raios de giração relativos aos momentos de inercia principaes I_x e I_y , e sejam respectivamente op e oq as grandezas lineares correspondentes aos valores d'estes momentos.

Tirem-se dos pontos p e q , parallelamente a OX , as rectas pp_1 e qq_1 , até ao seu encontro com a parabola, e, determinando por meio das parallelas a OY , conduzidas pelos extremos p_1 e q_1 , as ordenadas p_2p_3 e q_2q_3 da hyperbole, construa-se sobre estas duas grandezas, como semi-eixos, transportados para oq_1 e op_1 , a semi-ellipse rp_1q_1 .

Suppondo que o centro de gravidade do solido coincide com a origem das coordenadas, e que o eixo de revolução está situado segundo OX , teremos, segundo a theoria dos momentos de inercia, que os raios que partem do centro do ellipsoide, gerado pela revolução da semi-ellipse $p_1q_1r_1$ em volta de OX , não só determinarão a posição dos eixos dos momentos passando pelo centro de gravidade, como tambem darão os diversos valores reciprocos dos raios de giração para cada um dos referidos eixos.

Do que deixámos expendido se conclue que, achando-se traçadas as tres curvas do 2.º grau pela fórma prescripta, e pretendendo-se determinar por meio d'ellas o valor do momento de inercia de um solido em ordem a uma recta qualquer, conduzida pelo centro de gravidade, com uma determinada inclinação α , sobre o eixo de revolução, proceder-se-ha do modo seguinte:

Construa-se sobre ox o angulo hop_1 igual a α , e com o centro em o e o raio igual ao semi-diametro oh descreva-se o arco de circulo hh_1 ; do ponto h_1 , onde este arco corta o eixo dos y , tire-se parallelamente a ox a recta h_1h_3 até encontrar a hyperbole, e do ponto de intersecção k_1 conduza-se a parallela h_3h_1 a oy até encontrar a parabola.

A ordenada h_2h_1 da parabola dará o momento de inercia do solido, e a abscissa oh_2 o raio de giração.

Se a recta em ordem á qual se pretende determinar o momento de inercia não passa pelo centro de gravidade, mas está á distancia a d'este ponto, então, depois de se ter construido como precedentemente o raio de giração $h_1h_3 = k_1$ e marcado sobre oy a distancia $ol_1 = a$, conduzir-se-hão dos pontos h_3 e l_1

as paralelas h_3l_3 e l_4l_3 aos eixos coordenados até se obter o seu ponto de intersecção l_3 , descrever-se-ha do ponto o como centro e com o raio igual a ol_3 o arco de circulo l_3l_2 e tirar-se-ha parallelamente do ponto de intersecção l_2 , determinado sobre ox , a ordenada l_2l_1 da parabola.

Esta grandeza dará o momento de inercia que se procura, e a abscissa da parabola o raio de giração.

Suppondo que pelo eixo de revolução passam dois planos orthogonaes, e que o eixo dos momentos é dado pelas suas projecções sobre os referidos planos, o valor do angulo α e o da distancia a serão determinados pelos processos graphicos da geometria descriptiva.

Da applicação das theorias expostas ás peças de bronze estriadas de praça de calibre 12 centimentros, suppondo a densidade especifica do bronze = 8,7, resultaram os seguintes valores numericos:

- $M = 167$ massa.
 $V = 0^{mc}, 189$. . volume.
 $P = 1640$ ^{kilogr.} . . peso.
 $X_c = 0^m, 2$ distancia do centro de gravidade ao plano, passando pela aresta do segundo reforço.
 $I_x = 2,6$ momento de inercia em ordem ao eixo da alma.
 $I_y = 109,267$. . momento de inercia em ordem ao eixo perpendicular, passando pelo centro de gravidade.
 $K_m = 0,813$ raio de giração em ordem ao eixo dos munhões.
 $I_m = 110$ momento de inercia em ordem ao mesmo eixo.
 $I = 97$ momento de inercia em ordem á recta, inclinada de um angulo $\alpha = 37^\circ$ e distanciada de $a = 0^m, 55$.

RECHERCHES RELATIVES AU CERCLE VARIABLE
QUI COUPE DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS (*)

PAR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

(Professeur à l'Ecole Polytechnique de Lisbonne)

Introduction

1. La publication de la suite de ces recherches ayant été retardée par des causes morales et matérielles fort justifiables, nous nous sommes fait un devoir de présenter premièrement un résumé ou récapitulation de la partie qui se trouve insérée dans le t. II (1879) de ce Journal (pp. 50, 150 et 174).

Il est bon d'observer que ces recherches se basant sur des objets depuis si longtemps connus, nous ne pouvons naturellement prétendre au mérite de l'invention.

D'ailleurs ce n'est pas en soi un ouvrage achevé, où l'on fait disparaître toutes les aspérités; mais à peine un ensemble de principes qui nous serviront à la suite pour rédiger convenablement un *mémoire sur les propriétés des coniques sous le point de vue de leur génération cycloïdale*; ce qui entraîne une manière analogue de faire l'étude des surfaces du second ordre, que nous présenterons plus tard.

Nous avons aussi adopté des termes que nous jugeons propres à abrégé le langage géométrique, et lesquels nous soumettons à l'appréciation du lecteur.

(*) Voir *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, tome II.

2. Lorsque nous avons présenté, dans ce journal, la *solution générale purement synthétique et élémentaire* du problème qui a pour objet de trouver une circonférence de cercle (x), qui coupe deux autres circonférences données (E) et (I) sous des angles également donnés e et i (*): problème proposé par l'illustre mathématicien M. Pedro Amorim Vianna, dans ce même Journal (dans le cas tout particulier où les circonférences données sont concentriques) (**), nous y avons dit, que, plus tard, nous étudierions les diverses propriétés remarquables, qui se déduisaient de la figure, soit dans le cas particulier, soit dans le cas général.

Ce problème est la base de la présente étude tant synthétique que analytique, que nous pourrions naturellement faire en partant du cas général pour en dériver ensuite tous les différents cas qui peuvent se présenter; mais comme l'étude *purement synthétique* est sans doute plus importante que *l'analytique*, et elle devient plus simple et plus élémentaire en partant du cas où les circonférences sont concentriques, nous considérerons d'abord ce cas et ensuite le cas général.

En tout cas nous jugeons aussi convenable de présenter ici la solution synthétique qu'alors nous avons donné de ce problème.

Soient donc (fig. 1) (E) et (I) les circonférences données, et (x) la circonférence demandée.

Supposons le problème résolu: soit b l'un des points où la circonférence (x) coupe la circonférence (E); et b' celui où elle coupe la circonférence (I). Si nous menons les tangentes tb et tb' aux points b et b' de la circonférence (x), et désignons par a le second point où tb coupe (E), et par d' le second point d'intersection de tb' avec (I), il est clair que, étant $tb = tb'$, la solution du problème proposé se trouve ramenée à la solution très-simple et générale du problème suivant:

Étant donnée une circonférence (E) et une de ses cordes ab , trouver dans une autre circonférence également donnée (I) une corde $b'd'$ de grandeur connue, telle que le point de concours t de ces deux cordes détermine sur l'une ab de celles-ci un segment tb égal à l'un des deux segments tb' , td' , qu'il forme sur l'autre corde $b'd'$.

D'après cela, menons par d' une droite parallèle à bb' ; repré-

(*) Voir p. 174 e suiv. du vol. I.

(**) Voir p. 460 du vol. I.

sentons par d le point où elle coupe la corde ab ; et par m et m' respectivement les points milieux du segment bd et de la corde $b'd'$, qui forment les côtés du trapèze isocèle $bdd'b'$.

La solution du problème *auxiliaire* se réduit alors à déterminer la circonférence (y) , touchant ce segment et cette corde aux points milieux, ou touchant ce segment au point milieu et une circonférence (I) , enveloppe des différentes positions de la corde $b'd'$ de la circonférence (I) .

Ainsi étant e et i les angles sous lesquels la circonférence (x) doit couper respectivement les circonférences données (E) et (I) , nous tracerons dans la circonférence (E) une corde ab , qui la coupe sous l'angle e , et dans la circonférence (I) la corde b_1d_1 , qui la coupe sous l'angle i ; et si, après cela, sur la corde ab , par exemple, nous marquons le segment bd égal à la corde b_1d_1 , et à son point milieu m lui élevons une perpendiculaire, sur laquelle nous prenons le segment mc égal au rayon de la circonférence (I) , et unissons son centre C_o au point c , la perpendiculaire élevée au point milieu n de $C_o c$ coupera mc en un point O , qui sera évidemment le centre de la circonférence (y) , et coupera ab au point t , par lequel doit passer la corde demandée $b'd'$: par suite le centre o de la circonférence (x) sera l'intersection de nt avec la perpendiculaire bo élevée à l'extrémité b de la corde ab .

3. Discussion. Puisque le segment mc peut être pris soit à la partie supérieure, soit à la partie inférieure de ab , il s'ensuit qu'il y a deux circonférences (x) et (x') correspondantes à cette position de la corde, lesquelles, passant par le point b de (E) , donnent la solution du problème proposé, tant pour le segment bd situé à droite que à gauche de ce point, comme on reconnaît tout de suite.

Si nous considérons l'autre corde ba_1 , qui, passant par le même point b , coupe (E) sous l'angle e , nous aurons deux autres circonférences (x_1) et (x'_1) égales aux circonférences (x) et (x') , et symétriquement placées par rapport à celles-ci.

Quand nous prendrons arbitrairement un point b'_1 de la circonférence (I) , nous trouverons analoguement quatre circonférences (z) , (z') et (z_1) , (z'_1) égales et symétriques deux à deux; mais qui, comme nous savons, ne seront point distinctes de celles des deux groupes, que nous avons trouvé pour chaque point de (E) .

Étant (E) la circonférence extérieure et (I) la circonférence intérieure, les circonférences (x) et (x') se trouveront de même côté et les circonférences (z) et (z') de côtés différents.

On voit, donc, que à chaque point des circonférences données répondent en général quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Si les angles e et i sont égaux, la solution devient très-simple: car, le segment bb' , étant égal à la somme ou différence de deux rayons C_0b et C_0b' de deux circonférences données, le centre o du cercle demandé sera l'intersection de bo avec la perpendiculaire élevée au point milieu de ce segment.

Remarque. — Comme on vient de le voir la méthode suivie est générale et par conséquent également applicable au cas où les circonférences (E) et (I) (fig. 2) ne sont pas concentriques.

En ce cas, il est évident que les quatre cercles passant par chaque point des circonférences données ne seront toujours égaux ni symétriques deux à deux, que pour des positions spéciales de ces points, comme on le verra.

Lorsqu'on a $e = i$ la corde bb' (fig. 2) coupant aussi les cercles donnés (E) et (I) sous même angle, passera toujours par un de leurs centres de similitude, ou d'homothétie, ce qui donne le moyen facile de trouver alors le centre o du cercle demandé (x), analoguement au cas précédent où les centres des circonférences et leurs centres de similitudes se confondent.

4. En passant nous allons encore présenter une autre solution générale, également synthétique et élémentaire du même problème, attendu que nous reviendrons sur elle à la suite.

Soient, donc, C et C_0 les centres des circonférences données (E) et (I) (fig. 2 bis). Supposons de même le problème résolu; étant b , b_1 et b' , b'_2 les couples de points où la circonférence demandée (x) coupe respectivement chacune de ces circonférences.

Représentons par E_s le rencontre des droites bb' et $b_1b'_2$, et par d_0 et d leurs seconds points d'intersection avec la circonférence (I). Désignons par b'' et d'' les points d'intersection des prolongements des rayons ob' et ob'_2 de (x) avec (I); et par d'_1 et i_1 l'extrémité du diamètre $d_0C_0d'_1$ de ce cercle et du point de rencontre de ce diamètre avec le prolongement du rayon ob .

D'après cela l'angle $C_0b'b''$ (égal à l'angle donné i ou à son supplément) sera aussi égal à la somme des angles $C_0b'd_0$ et

$d_0b'b''$ ou $bb'o$; mais les triangles $C_0b'd_0$ et obb' étant isocèles, donnent

$$\sphericalangle C_0b'd_0 = bd_0i_1$$

et

$$\sphericalangle d_0b'b'' = i_1bd_0$$

d'où

$$\sphericalangle C_0b'b'' = bd_0i_1 + i_1bd_0,$$

donc, l'angle $C_0b'b''$ est égal à l'angle extérieur bid'_1 du triangle i_1bd_0 .

De là cette construction :

Comme le problème est indéterminé on prend sur la circonférence (E), par exemple, un point quelconque b , par lequel on mène une droite bi_1 , formant l'angle donné e avec le rayon Cb , et dans la circonférence (I) on tire un diamètre $d_0C_0d'_1$, coupant la droite bi_1 sous l'angle donné i ; alors la droite d_0b , que unit l'une des extrémités d_0 de ce diamètre au point b , coupera (I) en un second point, appartenant au cercle demandé (x); et puisque le segment bb' est corde de cette circonférence, son centre sera l'intersection o de bi_1 avec la perpendiculaire p_xo élevée au point milieu p_x de ce segment.

5. Discussion. — Si on tire la droite bd'_1 , unissant le point b à l'autre extrémité d'_1 du diamètre $d_0d'_1$ de la circonférence (I), et on désigne par b''_1 le second point d'intersection de cette droite-là avec cette circonférence, la perpendiculaire $p'_x o'$ au point milieu du segment bb''_1 , coupera la droite bi_1 au point o' , qui sera le centre d'une autre circonférence (x'), satisfaisant au problème; étant b'' et b'_1 respectivement les seconds points d'intersection de cette circonférence avec celle-là, et avec la circonférence (E): ce qu'on peut prouver directement. En effet, étant ϵ''_1 et ϵ''_2 respectivement deux points du prolongement de ob''_1 et bb''_1 , pris vers le côté de b''_1 , l'angle $C_0b''_1\epsilon''_1$ [égal à $(180 - i)$ ou à i] sera aussi égal à la somme des angles $C_0b''_1\epsilon''_2$ et $\epsilon''_2b''_1\epsilon''_1$ ou bb''_1o' , et par suite, les triangles $C_0b''_1d'_1$ et $ob''_1b'_1$ étant isocèles, on a

$$\sphericalangle C_0b''_1\epsilon''_2 = bd'_1i_1$$

et

$$\sphericalangle \epsilon''_2b''_1\epsilon''_1 = i_1bd'_1$$

d'où

$$\sphericalangle C_0 b'{}_1 \epsilon''{}_1 = b d'{}_1 i_1 + i_1 b d'{}_1$$

ce qui montre que l'angle $C_0 b'{}_1 \epsilon''{}_1$ est égal à l'angle extérieur $b i d_0$ du triangle $i_1 b d'{}_1$.

Si, dans la circonférence (I), on tire le second diamètre $d'_0 C_0 d'_1$, coupant au point i'_1 la droite $b o$ sous l'angle donné i , les segments $b b'_2$ et $b b'$ des droites $b d'_0$ et $b d'_1$ seront encore cordes des cercles (x) et (x'), et par conséquent aux deux diamètres $d'_0 d'_1$ et $d'_0 d'_1$ répondront mêmes deux solutions.

En considérant la seconde droite $b o o'$, qui forme avec le rayon $C b$ l'angle donné e , on aura deux autres cercles ($\overset{1}{o}$) et ($\overset{1}{o'}$) passant par b .

Ainsi par ce procédé nous obtiendrons aussi facilement les quatre solutions du problème relatives à chaque point de la circonférence (E) ou (I).

Remarque. — Dans le cas où l'on considère seulement l'angle $C_0 b' b''$ égal à i , et non pas à son supplément, l'angle i pourra être égal à l'un angle extérieur ou intérieur du triangle $i b d_0$.

Il en sera de même de l'angle e , quand on prendra arbitrairement un point de la circonférence (I).

6. Il est inutile d'observer que les deux solutions présentées (n.ºs 2 et 4) sont également applicables aux cas où quelqueune des circonférences données a le *rayon nul* ou *infini*, c'est-à-dire quand cette circonférence se réduit à un *point* ou à *deux droites parallèles*, l'un à *distance finie* et l'autre à *l'infini*.

Quand les circonférences données ont toutes deux les rayons infinis, ou se réduisent à quatre droites étant deux à distance finie et les autres parallèles à celles-ci à l'infini, la solution du problème s'obtient à peu près de même manière, puisque quelque difficulté, qui se présente, à cause des points et des lignes qui alors passent à l'infini, sont à peine apparentes, comme on va le voir.

Dans ce cas les circonférences enveloppes (E') et (I') (fig. 1) des différentes positions des cordes $b a$ et $b' d'$ seront remplacées par ces mêmes cordes, que nous représentons par (E' $_\infty$) et (I' $_\infty$), et par deux autres droites à l'infini parallèles à celles-ci, et le segment $C_0 c$ passant aussi à l'infini, il n'est pas possible d'élever directement à son point milieu la perpendiculaire $t o$, dont l'inter-

section avec bo donne le centre de la circonférence demandée (x); mais comme elle se confond évidemment avec la bissectrice de l'angle btb' , nous avons ainsi un moyen très-facile de l'obtenir.

Soient donc (E_∞) et (I_∞) (fig. 2 *tris*) les deux droites, qui représentent les circonférences données de rayons infinis.

Par les points arbitraires b de la droite (E_∞), et b'_1 de la droite (I_∞) menons respectivement les droites (E'_∞) et (I'_∞), faisant avec celles-ci les angles donnés e et i , et dont le point d'intersection nous désignons par t_1 .

Cela étant, tirons la droite bp_xb' , parallèle à la bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle $bt_1b'_1$, qui coupera (I_∞) au point b' , par le quel passera le cercle demandé (x), et dont le centre sera évidemment l'intersection de la perpendiculaire bo au point b de (E_∞) avec la perpendiculaire tp_xo au point milieu p_x du segment bb' .

Si au point t où la perpendiculaire tp_xo coupe la droite (E_∞) on mène la droite tb'' coupant aussi (I_∞) sous l'angle i au point b'' , ou répondant à l'une seconde position de (I'_∞), la perpendiculaire tp''_xo' au point milieu du segment bb'' , ou la bissectrice de l'angle btb'' coupera bo au point o' , qui sera le centre d'une seconde circonférence (x') satisfaisant au problème.

En prenant l'autre position de la droite (E'_∞) où elle coupe encore (E_∞) au point b sous l'angle e , nous aurons les deux autres circonférences passant par ce point; et, par suite, nous obtiendrons ainsi les quatre solutions correspondantes.

Observation. — La seconde manière de résoudre le problème (n.º 4) est également applicable à ce cas particulier en la modifiant d'une manière analogue, et le chemin à suivre est tellement simple qu'il serait inutile de s'en occuper.

7. Nous résolvons aussi ensuite synthétiquement le problème, qui a pour objet de tracer un cercle qui coupe sous des angles égaux ou inégaux trois cercles donnés (\bar{x}), (x_1), (x_3) (*).

Comme on le verra, il peut exister, en général, dans le premier cas huit solutions, et dans le second quarante-huit.

Dans ces humbles recherches nous nous sommes spécialement servis des beaux travaux de géométrie de MM. Poncelet, Chasles, Serret, Clebsch, Salmon, Briot, Bouquet, Carnoy, etc.

(*) Nous avons déjà annoncé la solution de ce problème dans le t. iv (1882) de ce Journal (p. 106).

Nous avons aussi eu fréquemment recours aux intéressants et supérieurs ouvrages de M. Bellavitis sur la méthode des équipollences, dont, les principes remarquables et féconds, nous avons adopté quelquefois.

Nous nous sommes aussi livrés à l'étude de ses divers travaux sous le point de vue de leur extension à l'espace, en consultant spécialement les ouvrages notables de MM. Argant, Scheffler, Hamilton, Grassman, Sibeck, Dillner, Tait, Briot, Bouquet, Hoüel, etc.

Enfin nous devons observer que, les présentes recherches, ayant été rédigées de manière à dispenser de se présenter les figures, le lecteur est prié de faire les figures respectives.

I

Cas des cercles concentriques

§ 1

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE (*)

S. Soient R et r les grandeurs des rayons des cercles (E) et (I) (fig. 1); et traçons sur ces cercles respectivement les cordes ba et $b'_1d'_1$, qui les coupent sous les angles e et i , et dont les points milieux sont représentés par m_1 et m'_1 .

Comme le problème est indéterminé, si nous prenons le point arbitraire b du cercle (E), et voulons obtenir l'un (x) des cercles, qui, passant par ce point, coupe les deux cercles donnés, sous les angles également donnés, nous savons (***) que nous avons à prendre sur la corde ba un segment bm_d égal à la moitié de la corde $b'_1d'_1$, lui élever au point m_d la perpendiculaire $c_1m_dc_1$, en marquant sur celle-ci le segment m_dc_1 égal au rayon r' du cercle (I), enveloppe de la corde $b'_1d'_1$ du cercle (I); puis unir le point c_1 avec

(*) Ce paragraphe contient le résumé des pag. 54 à 58 du tome II.

(**) Voy. notre première solution pag. 117.

le centre C de ce même cercle (I), et alors la corde ba'_1 perpendiculaire en b à la corde ba , sera coupée par la perpendiculaire on_{st} , élevée sur le milieu n_s de Cc_s , au point o , centre de l'un (x) des cercles demandés.

Quand nous considérons, sur la perpendiculaire $c_i m_d c_s$, le segment $m_d c_i = c_s m_d$, la perpendiculaire $o' n_i t$, sur le milieu n_i de $C_o c_i$, coupera ba'_1 au point o' , qui sera le centre d'un second cercle demandé (x').

9. Si nous marquons sur la corde ba le segment $bm_e = m_d b$, et en m_e lui élevons la perpendiculaire $c'_s m_e c'_i$, en prenant sur celles-ci les segments $m_e c'_s$ et $c'_i m_e$, égaux au rayon r' , nous trouverons mêmes cercles (x) et (x'): car il est facile de reconnaître que les perpendiculaires $on'_s t$ et $o' n'_i t'$, élevées aux points milieux n'_s et n'_i de $C_o c'_s$ et $C_o c'_i$ coupent ba'_1 respectivement aux mêmes points o et o' , où cette droite est rencontrée par les perpendiculaires on_{st} et $o' n_i t$.

10. En considérant l'autre extrémité a'_1 de la corde ba'_1 , si on trace la corde $a'_1 b_3$, parallèle à ba et on fait des constructions analogues aux précédentes, nous trouverons deux points o_1 et o'_1 , représentant les centres de deux cercles (x_1) et (x'_1) respectivement égaux à (x) et (x'), et symétriquement placés à l'égard de ceux-ci.

11. Les centres t et t' des cercles (x_c) et (x'_c), qui coupent (E) et (I) sous les angles complémentaires des angles donnés sont déterminés respectivement par les droites $n_s o t$ et $n'_s o' t'$, ou $n_i o' t$ et $n'_i o' t'$.

12. En considérant aussi la corde ab_3 , parallèle à ba'_1 , nous trouvons des cercles égaux aux cercles (x), (x'); (x_1), (x'_1); (x_c), (x'_c), et symétriques de ceux-ci.

13. La seconde corde ba_1 , qui coupe le cercle (E) au point b , sous l'angle e , donnera aussi deux cercles (x_2), (x'_2) égaux aux cercles (x), (x') et symétriquement placés par rapport à ceux-ci.

14. Étant b' , b'_2 les points où le cercle (x) coupe le cercle (I), et b'' , b''_1 ses points de rencontre avec le cercle (x'): les tangentes $b't$ et $b'_2 t$, au cercle (x), aux points b' et b'_2 , coupent évidemment ba sur les points t et t' ; et les tangentes $b'' t$ et $b''_1 t$ au cercle (x') aux points b'' et b''_1 , passeront respectivement par ces points-là: toutes ces droites étant également tangentes au cercle (I). Semblablement les tangentes $b'o$ et $b'' o'$ au cercle (x_c)

coupent ba'_1 , aux points o et o' , par lesquels passent respectivement aussi les tangentes b'_2o et b''_1o' aux points b'_2 et b''_1 du cercle (x'_c) : toutes ces droites étant évidemment aussi tangentes au cercle (I') , enveloppe de la corde $b'_1d'_2$ perpendiculaire à la corde $b'_1d'_1$; et dont le rayon est représenté par r' .

Le cercle (x_c) passera donc par les points b' , b'' ; et le cercle (x'_c) par les points b'_2 , b''_1 .

15. Les lieux géométriques des centres o , o_1 , ..., de la suite de cercles (x) , (x_1) , ...; et des centres o' , o'_1 , ..., de la suite de cercles (x') , (x'_1) , ..., sont deux cercles (X) et (X') complètement déterminés.

16. Observation. — Ces deux cercles se transforment en deux autres coniques (Σ) et (Σ') , lorsque les cercles (E) et (I) laissent d'être concentriques.

17. Les centres des cercles (x_o) et (x'_o) , qui passeront par C_o et par les extrémités des côtés $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$, auront pour lieux géométriques les cercles (X) et (X') .

Il en sera de même des lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c) et de ceux qui passeront par C_o et par les extrémités des côtés $c_s c_i$ et $c'_s c'_i$.

18. Plusieurs autres propriétés dérivent immédiatement de la simple inspection de la figure; mais elles sont de peu de valeur pour être présentées.

19. Discussion. — Étant (E') et (E'') les cercles enveloppes des cordes complémentaires ou orthogonales ba et ba'_1 du cercle (E) ; et R' et R'' leurs rayons; si on considère soit les cercles auxiliaires (y) et (y') , qui touchent (I') aux points m' et m'' , et la corde ba au point m_a , soit le rectangle auxiliaire $c_s c_i c'_i c'_s$, en supposant toujours qu'on prend arbitrairement les points de (E) , par lesquels passent les circonférences demandées, on a:

1.° Étant $R' > r'$ les cercles (x) et (x') se trouvent de même côté de ba .

2.° Si on a $R' < r'$, il résulte que les cercles (x) et (x') se trouvent de côtés différents de ba .

3.° Dans le cas où $R' = r'$ l'un (x') des cercles demandés aura le rayon infini, et par suite le cercle correspondant (X') passera tout à fait à l'infini.

4.° Étant $R' = 0$, ou $R'' = R$, ou bien $e = 90^\circ$ les cercles (x) et (x') sont égaux et se trouvent de côtés différents de ba ; d'où

il résulte que les cercles (X) et (X') se confondent en un cercle unique.

5.° Quand on a $r' = 0$, ou $r'' = r$, ou bien $i = 90^\circ$ ou encore $r = 0$, les cercles (x) et (x') se confondent, et il en sera de même des cercles (X) et (X').

6.° Étant en même temps $R' = 0$ et $r' = 0$, ou $R'' = R$ et $r'' = r$, les cercles (x) et (x'), se confondant, auront des rayons infinis ou se réduiront à l'un des diamètres des cercles donnés, et à l'une droite parallèle à celui-ci située à l'infini.

Il en sera de même pour $R' = 0$ et $r = 0$ ou $R'' = R$ et $r = 0$. Le cercle (X) et (X') passeront donc à l'infini.

Ainsi, dans les trois premiers cas, pour chaque point arbitraire b, \dots , du cercle (E), il y aura toujours quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Dans le quatrième et cinquième cas il y aura seulement deux solutions égales et symétriques.

Pour le sixième cas nous n'aurons qu'une solution.

Quand on aura $e = i$, il vient

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''}.$$

Enfin, on pourrait considérer d'autres cas qu'il serait inutile de s'en occuper, en égard à leur simplicité.

20. Si les centres des cercles demandés devaient se trouver sur une ligne donnée (L) le problème laisserait d'être indéterminé, et les centres des cercles demandés seraient les points d'intersection (réels ou imaginaires) de (X) et (X') avec (L).

§ 2

ÉTUDE ANALYTIQUE (*)

21. Voyons maintenant comment nous pourrions trouver l'expression du rayon d'un quelconque des cercles demandés.

(*) Ce § contient le résumé des pag. 59 à 64 du tome II.

En considérant le cercle (x) (fig. 1), soit m'_2 le point milieu de la corde $b'b''$ du cercle (I), menée par o et tangente à (I'); et soit m_2 le point milieu de ba'_1 , qui contient ce même point o .

Les triangles rectangles C_0m_2o et $C_0m'_2o$ donnent

$$\overline{C_0o}^2 - \overline{C_0m_2}^2 = \overline{m_2o}^2 \dots \dots \dots (1)$$

et

$$\overline{C_0o}^2 - \overline{C_0m'_2}^2 = \overline{m'_2o}^2 \dots \dots \dots (2)$$

d'où

$$\overline{C_0m_2}^2 - \overline{C_0m'_2}^2 = \overline{m'_2o}^2 - \overline{m_2o}^2 \dots \dots \dots (3)$$

et si nous faisons tourner la droite m'_2o autour de o , jusqu'à ce que le point b' coïncide avec b , et prenons ce point pour origine des segments, que nous considérons positifs, quand ils seront comptés de b vers m_2 , cette formule donnera

$$bo = \frac{\overline{bC_0}^2 - \overline{b'C_0}^2}{2(bm_2 - b'm'_2)} \dots \dots \dots (6)$$

En tenant compte du signe du segment $b'm'_2$, et en représentant par r_x les rayons bo et bo' des cercles (x) et (x'), l'expression générale, qui donne ces rayons en grandeur et en direction, sera

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R \pm r')} \dots \dots \dots (8)$$

Observation. — Nous pouvons aussi déduire l'expression de r_x , en considérant dans le cercle (E) la corde ba'_1 , et la corde $B'B''$, déterminée par le prolongement de corde $b'b''$ du cercle (I).

22. Étant évidemment

$$R = R \cdot \cos. e, \quad \text{et} \quad r' = r \cdot \cos. i$$

la formule (8) devient

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos . e \pm r \cdot \cos . i)} \dots \dots \dots (14)$$

Nous pouvons de même arriver à cette formule qui donne r_x en fonction de R, r et e, i , d'une manière directe en considérant les triangles obC_o et $ob'C_o$.

23. En représentant par r_{x_c} les rayons bt, bt' des cercles $(x_c), (x'_c)$, complémentaires de $(x), (x')$, ou qui les coupent orthogonalement, nous trouverons analogiquement les expressions

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} \dots \dots \dots (15)$$

et

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \text{sen} . e \pm r \cdot \text{sen} . i)} \dots \dots \dots (16)$$

24. Considéront les formules (8) et (14), dont la construction peut se réduire à la détermination d'une troisième ou quatrième proportionnelle.

Si nous considérons r_x comme une troisième proportionnelle, nous menons par b une tangente $b\beta$ au cercle (I), et marquons sur ba le segment $b\beta'$ égal au longueur $b\beta$ de cette tangente; puis il ne s'agira plus que de prendre sur ba'_1 les segments bx et bx' égaux au double de $R' + r'$ et de $R' - r'$, ou au double de $R \cdot \cos . e + r \cdot \cos . i$ et de $R \cdot \cos . e - r \cdot \cos . i$ (pris dans la direction due), joindre le point β' à α et α' , et élever les perpendiculaires $\beta'o$ et $\beta'o'$ à $\beta'\alpha$ et $\beta'\alpha'$ au point β' lesquelles détermineront sur ba'_1 les centres o et o' des cercles demandés (x) et (x') .

D'une manière analogue on construira les expressions (15) et (16).

25. La discussion de ces formules est tellement facile qu'il serait inutile de s'en occuper.

26. En variant l'angle e autour du point b , le lieu géométrique décrit par le point o , centre du cercle (x) sera une conique (*),

(*) Voy. la seconde partie.

dont le point fixe b est un des foyers: car, la formule (14) peut prendre la forme générale

$$r_x = \frac{p}{1 + f \cdot \cos . e} \dots \dots \dots (17)$$

équation polaire d'une conique, rapportée aux foyers.

Il en sera de même pour les points t et t' , centres des cercles (x_c) et (x'_c) .

27. La relation entre les rayons des cercles complémentaires considérés, sera évidemment

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R'' \pm r''}{R' \pm r'} \dots \dots \dots (18)$$

ou

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R \cdot \text{sen} . e \pm r \cdot \text{sen} . i}{R \cdot \text{cos} . e \pm r \cdot \text{cos} . i} \dots \dots \dots (19)$$

28. Pour déterminer l'équation polaire des lieux géométriques (X) et (X') des centres o, o_1, \dots ; et o', o'_1, \dots ; des cercles (x) et (x') , nous pouvons, ou recourir directement aux formules (1) et (2), ou substituer, dans une quelconque de celles-ci, la valeur du rayon des cercles (x) et (x') .

Ainsi, en faisant $C_0o = \rho_o$, nous aurons

$$\rho_o^2 = R''^2 + \left[\frac{R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} - \frac{1}{2} (R' \pm r') \right]^2 \dots \dots (23)$$

ou

$$\rho_o^2 = r''^2 + \left[\frac{R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} + \frac{1}{2} (R' \pm r') \right]^2 \dots \dots (24)$$

ou

$$\rho_o^2 = \frac{(R''^2 - r''^2)^2}{4(R' \pm r')^2} + \frac{2(R''^2 + r''^2) + (R' \pm r')^2}{4} \dots \dots (25)$$

Si nous voulons tenir ρ_0 en fonction de R , r et de e , i , ces expressions deviennent

$$\rho_0^2 = R^2 \cdot \text{sen}^2 \cdot e + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos \cdot e \pm r \cdot \cos \cdot i)} - R \cdot \cos \cdot e \right]^2 \dots (29)$$

$$\rho_0^2 = r^2 \cdot \text{sen}^2 \cdot i + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos \cdot e \pm r \cdot \cos \cdot i)} \pm r \cdot \cos \cdot i \right]^2 \dots (30)$$

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \left[\frac{R^2 \cdot \text{sen}^2 \cdot e - r^2 \cdot \text{sen}^2 \cdot i}{2(R \cdot \cos \cdot e \pm r \cdot \cos \cdot i)} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{4} [2(R^2 + r^2) - (R \cdot \cos \cdot e \mp r \cdot \cos \cdot i)^2] \dots (31) \end{aligned}$$

29. Il en sera de même pour les lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c).

30. Quant aux constructions de ρ_0 , elles sont une conséquence de celles de r_x ; d'ailleurs elles peuvent dériver directement des expressions respectives en considérant ρ_0 comme l'hypoténuse de triangles dont la grandeur des cathètes sera la racine carrée de chacun des deux termes du second membre de ces mêmes expressions.

31. Observation. — Nous jugeons inutile d'ajouter rien de plus, en vue de l'étude générale, dont nous passons à nous occuper.

II

Cas de cercles non concentriques

§ 1

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

32. En considérant, dans le cas précédent (fig. 1), les constructions relatives à chaque point b , b_1 , ..., du cercle (E), il est

évident que, quand nous donnerons à l'autre cercle (I) *un mouvement de translation quelconque*, le premier cercle restant fixe, *tous les points et tous les lignes de la figure prendront leurs positions relatives correspondantes à la solution du problème dans le cas général*, que nous allons étudier.

Désignons, donc, par C_0 la position finale du centre du cercle (I) (fig. 2), et par C le centre du cercle (E), dans lequel nous considérons les deux points b et a'_1 correspondants à sa corde ba'_1 .

Pendant le mouvement du cercle (I) les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tourneront autour des sommets c_s et c'_s du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c_i c'_i$, et les perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$ élevées sur les points milieux n_s et n'_s de ces rayons se coupant constamment sur la corde ba'_1 , leur point d'intersection o sera le centre du cercle (x), qui passe par b ; et il en sera de même quand nous considérerons le déplacement des rayons, qui déterminent le centre o_1 du cercle (x_1), lequel passe par l'autre extrémité a'_1 de la corde considérée.

Il en résulte que le cercle (X) (fig. 1) se transformera en une courbe (Σ) (fig. 2), que continuera à couper la droite ba'_1 en deux points o et o_1 , et par conséquent cette courbe sera une conique. La transformée du cercle (X) sera de même une autre conique (Σ').

Lorsque le cercle (I) se réduit au centre C_0 les coniques (Σ) et (Σ') se confondront en une seule et même conique (σ).

De là ce théorème:

THÉORÈME I. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle (x) variable de grandeur, assujéti à couper continuellement sous des angles donnés e et i , deux cercles également donnés (E) et (I); ou à passer par un point donné C_0 et à couper, sous un angle donné e , un cercle également donné (E).

En faisant $(90^\circ - e) = e'$ et $(90 - i) = i'$, ce théorème se transformera dans le suivant

THÉORÈME II. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le point d'intersection o de deux cordes ba'_1 , et $b'b''$, appartenant respectivement à deux cercles donnés (E) et (I), et les coupant continuellement sous des angles également donnés e' et i' , de manière que le point d'intersection considéré se trouve équidistant de deux extrémités b et b' de ces cordes; ou cette conique peut être considérée comme la courbe

parcourue par le point o de la corde ba'_1 d'un cercle donné (E), coupé par celle-ci sous un angle également donné e' de manière que ce point se trouve équidistant d'un point donné C_0 , et d'une des extrémités b de cette corde.

33. En considérant les tangentes om_2 et om'_2 aux circonférences enveloppes (E') et (I') de ces cordes, la somme algébrique de ces tangentes sera constante, ou égale à la somme ou à la différence des segments bm_2 et $b'm'_2$, ou des demi-cordes des cercles (E) et (I), égales aux rayons R' et r' des cercles enveloppes (E') et (I') des cordes ba et $b'd'$ (perp. à ces demi-cordes), en tenant toujours compte du signe des segments respectifs.

Si nous représentons par M_1 et M'_1 les points milieux des côtes $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du rectangle auxiliaire, le segment $b'm'_2$ étant égal à bM_1 ou à bM'_1 , sera constamment positif ou constamment négatif, selon que le point o décrira l'une ou l'autre des coniques (Σ), (Σ'). Ainsi, en représentant par τ et τ' les segments variables om_2 et om'_2 , on aura pour l'une (Σ) des coniques:

$$\tau \pm \tau' = R' + r' \dots \dots \dots (35)$$

et pour l'autre conique (Σ')

$$\tau \pm \tau' = R' - r' \dots \dots \dots (36)$$

Donc:

THÉORÈME III. — *Étant donnés deux cercles (E') et (I'), si deux tangentes à ceux-ci se déplacent de manière que la somme algébrique des distances τ et τ' des points de contact au point d'intersection o de ces tangentes soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique (Σ) donnée de forme et de position.*

Dans le cas où le cercle directeur (I) se réduit à son centre C_0 , on a $r' = 0$, et la tangente respective se confondra avec le vecteur $C_0o = \rho'$, il vient

$$\tau \pm \rho' = R' \dots \dots \dots (38)$$

Ainsi les deux coniques se confondront en une seule conique (σ), et le point C_0 sera l'un des foyers.

Donc:

THÉORÈME IV. — Étant donné un cercle (E'') et un point C_0 , si l'une tangente à ce cercle et un rayon vecteur, partant de ce point, se déplacent de manière que la somme algébrique des distances τ et ρ' , du point de contact et du point donné à celui de l'intersection o de ces droites variables, soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique (σ) donnée de forme et de position.

34. D'après cela, nous pouvons donner aux cercles enveloppes (E'') et (I') le nom de *cercles focaux* ou *foyers tangentiels*, et à leurs tangentes τ et τ' le nom de *vecteurs tangentiels* ou *roulants*.

Dans le cas où ces cercles se réduisent à leurs centres, ils peuvent recevoir le nom de *points focaux* ou *foyers rayonnants* et les vecteurs correspondants le nom de *vecteurs pivotants* ou *rayonnants*: en réservant la dénomination ordinaire de *foyers* et de *vecteurs* pour exprimer les foyers et les vecteurs, quels qu'ils soient.

Si plusieurs coniques ont un même *cercle focal*, nous les appelons *monocyclomofocales* ou *monocycloconfocales*.

Quand les coniques auront un même *point focal*, elles seront nommées *monostigmoconfocales*.

Les coniques ayant les deux mêmes *cercles focaux* nous les appellerons *cyclomofocales* ou *cycloconfocales*; et nous donnerons aux coniques le nom de *stigmoconfocales*, quand elles auront les deux mêmes *points focaux*.

Enfin, ces courbes seront dites *monomofocales* et *homofocales* ou *confocales* suivant qu'elles aient un ou deux mêmes foyers, quels qu'ils soient.

35. Tracé de la tangente en un point quelconque. — Il résulte de l'application de la méthode de Roberval que, si, sur les deux couples de vecteurs tangentiels m_{2o} , m'_{2o} et m''_{2o} , nous marquons respectivement les deux couples de segments égaux ob , ob_1 et ob' , ob'_2 , les segments $bb_1 \doteq bo - b_1o$ (*) et $b'b'_2 \doteq b'o - b'_2o$, se coupant en f , nous donneront la tangente of .

Comme on le voit, le point f est le centre radical des cercles (E), (I) et (o).

(*) Cette notation de la *somme géométrique* des segments est celle que M. Bellavitis adopte dans sa méthode des équipollences, dont les principes seront quelquefois employés dans cette étude.

36. Nous pouvons aussi arriver directement à cette construction en regardant le point o comme appartenant successivement à chacun des vecteurs tangentiels m_2o , m''_2o et m'''_2o .

37. Le point M_1 , situé sur le vecteur m_2o , étant symétrique des extrémités m'_2 et m''_2 des vecteurs m'_2o et m''_2o , par rapport aux bissectrices des angles m'_2oM_1 et m''_2oM_1 , décrit évidemment un cercle (CM_1) , ayant le centre en C et le rayon égal au segment $CM_1 \doteq Cm_2 - M_1m_2$.

De même si nous marquons sur le vecteur m'_2o le segment $m'_2\dot{M}$ égal à m_2M_1 , ou à la somme $om_2 - om'_2$, le point \dot{M} sera la symétrique de m_2 et m''_2 , par rapport aux bissectrices des angles $m_2o\dot{M}$ et $m''_2o\dot{M}$, et décrira un cercle dont le centre sera C_o et le rayon $C_o\dot{M}$.

En considérant l'autre conique (Σ') , nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

Nous pouvons donner au cercle (CM_1) le nom de *cercle directeur relatif au foyer* (I').

La conique (Σ) a deux cercles directeurs relatifs à ses deux foyers; et il en sera de même de sa confocale (Σ') .

38. Lorsque (fig. 2) les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tournent autour de C_0 , leurs points milieux n_s et n'_s décrivent deux cercles (σ_0n_s) et $(\sigma_0n'_s)$, dont le centre σ_0 sera le point milieu du segment CC_0 ; et les perpendiculaires n_so et n'_so envelopperont deux coniques *stigmoconfocales* (ε) et (ε') , ayant pour points focaux les points C et C_0 .

Les points N_s et N'_s où les rayons Cc_s et Cc'_s des cercles (Cc_s) et (Cc'_s) rencontrent les perpendiculaires n_so et n'_so sont les points de contact de celles-ci avec leurs enveloppes (ε) et (ε') .

D'après cela nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME V. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le point de rencontre o de deux tangentes N_so et N'_so à deux coniques stigmoconfocales (ε) et (ε') , dont les points de contact N_s et N'_s soient vus de l'un C des points focaux sous un angle vecteur constant $N_sCN'_s$; les points focaux C et C_0 des coniques directrices étant les centres de cercles focaux de la conique engendrée.

39. Le point o se trouvant, par construction, équidistant des points C_0 , c_s et c'_s , on a ce théorème:

THÉORÈME VI. — Une conique quelconque (Σ) peut être considérée

comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle (oC_0) assujetti à passer continuellement par un point donné C_0 et par deux autres points c_s et c'_s de deux cercles concentriques (Cc_s) et (Cc'_s) également donnés, la distance $c_s c'_s$ entre ces derniers points étant constante.

40. Quand, sans la distance $c_s c'_s = 2r'$ être nulle, les cercles (Cc_s) et (Cc'_s) se confondront, il en sera de même des coniques (Σ) et (Σ'), et nous aurons les deux théorèmes suivants, comme cas particuliers des théorèmes V et VI :

THÉORÈME VII. — Si, autour de l'un des points focaux d'une conique (ε_0), on fait tourner un angle vecteur de grandeur constante, et que par les points où ses côtés rencontrent la conique on mène deux tangentes à la courbe, le point d'intersection o de ces deux tangentes aura pour lieu géométrique une seconde conique (σ), donnée de forme et de position (*).

THÉORÈME VIII. — Une conique quelconque (σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle (oC_0) assujetti à passer continuellement par un point donné C_0 et à couper un cercle également donné suivant une corde $c_s c'_s$ de grandeur constante.

41. Les cercles (x) et (x'), et leurs cercles complémentaires (x_c) et (x'_c), passant par un même point b du cercle (E), se coupent deux à deux sur le cercle (I) aux points b' , b'' , b'_1 , b'_2 (comme dans la fig. 1), étant maintenant de même applicable au cas général, ou à la figure transformée (fig. 2), ce que nous avons dit au n.° 9 sur les tangentes à ces cercles dans leurs points d'intersection.

Il est clair que, analoguement à ce que l'on a noté au n.° 6, les droites on_s et $o'n_s$ dans la figure transformée concourent encore en un même point t de la corde ba et les droites on'_s et $o'n'_s$ au point t' ; ces points étant les intersections des tangentes $b't$, $b''t$ et $b'_1 t'$, $b'_2 t'$ aux cercles (x) et (x') aux points b' , b'' et b'_1 , b'_2 , ou les centres des cercles (x_c) et (x'_c), qui décrivent deux autres coniques (Σ_c) et (Σ'_c), en général, distinguées des coniques (Σ) et (Σ') décrites par les centres des deux premiers cercles.

Nous pouvons donner aux coniques (Σ_c) et (Σ'_c) le nom de *com-*

(*) Voy. *Traité des propriétés projectives des figures*, par M. Poncelet, 2.° édition, t. I, n.° 480.

plémentaires des coniques (Σ) et (Σ'), attendu la denomination adoptée pour leurs cercles générateurs.

42. Considérons (fig. 3) les deux cercles générateurs (x_3) et (x'_3) des coniques (Σ) et (Σ'), lesquels touchent à l'extrémité a la corde ba du cercle (E), et désignons par o_3 et o'_3 leurs centres évidemment situés sur la corde ab_3 de ce même cercle, équidistante à la corde ba'_1 , sur laquelle se trouvent les centres o et o' des cercles générateurs (x) et (x').

Les droites oo_3 et $o'o'_3$ se couperont évidemment en un même point T de la corde ba , et les perpendiculaires m_1PE et $m_1P'E'$, abaissées du point milieu m_1 de cette corde sur ces droites, qui les rencontrent en P et P' , étant E et E' leurs points de rencontre sur CC_0 , seront les sécantes (réelles ou idéales) communes aux deux couples de cercles générateurs (x), (x_3) et (x'), (x'_3), ou leurs axes radicaux; et à ces cercles, de chaque couple ainsi déterminés, nous donnerons le nom de cercles générateurs correspondants.

43. Les cordes m_1PE et $m_1P'E'$ communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (x), (x_3) et (x'), (x'_3) passent par les extrémités n_s et n_i du diamètre $n_sC_0n_i$ du cercle (I'), perpendiculaire à la corde ba du cercle (E) (tangente commune à ces cercles-là).

Quand la corde ba du cercle (E) tournera autour de C simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites m_1En_i et m_1n_sE' tourneront aussi autour des points E et E' , qui, comme on sait, divisent harmoniquement la distance CC_0 , entre les centres des cercles donnés, et représentent les points de concours des tangentes (réelles ou imaginaires) communes aux cercles enveloppes (E') et (I'), ou leurs centres d'homothétie.

En considérant deux quelconques des couples de cercles (x), (x_3) et (x_1), (x_4), appartenant à la première suite de cercles, qui coupent les cercles fixes (E) et (I) sous les angles constants e et i , on reconnaîtra que les axes radicaux de ces quatre cercles, pris deux à deux, se coupent aussi au point fixe E , et, par suite, ce point sera le centre radical de trois cercles quelconques de la série considérée.

De même les axes radicaux de la seconde série de cercles générateurs (x'), (x'_1), (x'_3), (x'_4), ..., pris deux à deux, passent par le point fixe E' , qui sera donc le centre radical de trois cercles quelconques de cette série.

Cela étant on a ce théorème:

THÉORÈME IX. — *Étant donnés deux cercles (E) et (I), chacune des deux séries de cercles $(x), (x_1), (x_2), (x_3), \dots$, et $(x'), (x'_1), (x'_2), (x'_3), \dots$, qui les coupent sous les angles constants ϵ et ϵ' , étant pris trois par trois, ont respectivement pour centres radicaux les centres d'homothétie E et E' des cercles enveloppes (E') et (I') des cordes, qui coupent les cercles donnés sous ces mêmes angles.*

44. En faisant varier les rectangles auxiliaires, ou les cercles (I) et (I') de manière que les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') deviennent égaux (fig. 3), les coniques cyclomofocales (Σ), (Σ'), et les stigmoconfocales (ϵ_1), (ϵ'_1), engendrées par les points o, o' , et par les points d'intersection N'_s, N'_i des vecteurs $C_o c_s, C_o c_i$ avec les droites on'_s, on'_i , perpendiculaires aux points milieux n'_s, n'_i des vecteurs $C_o c'_s, C_o c'_i$, seront respectivement remplacées par les cyclomofocales (Ω), (Ω'), et les stigmoconfocales (Ω_o), (Ω'_o), décrites par les centres des deux cercles générateurs (ω), (ω') (fig. 3 a), qui remplacent (x) , (x') , et des deux cercles (μ''), (μ''') qui touchent les cercles enveloppes (E') et (I').

Ainsi (fig. 3 a et 4) les droites $\theta\omega\omega_3$ et $\theta\omega'\omega'_3$, qui unissent les centres des deux couples de cercles générateurs correspondants (ω, ω_3) et (ω', ω'_3) des coniques (Ω), (Ω') toucheront les coniques (Ω_o), (Ω'_o) aux points μ'', μ''' , lesquelles seront aussi les transformées des premières, quand on aura $R = R'$ et $r = r'$, et par suite ces transformées auront pour cercles générateurs les cercles doubles (μ''), (μ'''), tangents au cercle (E') au point m_1 et au cercle (I') aux points n'_i et n'_{s_0} , évidemment situés sur les axes radicaux $m_1 E$ et $m_1 E'$, ou sécantes communes à ces deux couples de cercles générateurs.

Les points de contact n'_i et n'_{s_0} entre ces cercles doubles et le cercle enveloppe (I') étant les points de ce cercle anti-homologues du point m_1 du cercle (E'), par rapport aux centres d'homothétie E et E', le point θ sera le centre d'un cercle (θm_1), qui coupera orthogonalement les cercles (E') et (I'); et par suite ce point, pendant la rotation de la corde ab, décrira l'axe radical $\theta\Omega_m$ de ces cercles, ou leur sécante commune située à distance finie.

Considérons le rectangle auxiliaire $MM'M_oM_o$ (fig. 4) dans le quel se transforme le rectangle auxiliaire $c'_s c'_i c_i c_s$ (fig. 3), quand le côté considéré constant $c'_s c'_i$ vient coïncider avec le segment MM' du rayon Cm_1 , ou quand les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') sont égaux; et soit $M_o M'_o$ (fig. 4) la position cor-

respondante de l'autre côté constant parallèle $c_i c_i$; étant M_1 et M'_1 les intersections de ba'_1 avec les autres côtés MM_0 et $M'M'_0$.

Cela étant, nous devons observer que les coniques (Ω) et (Ω') , peuvent avoir pour cercles directeurs les cercles (CM_1) et (I') , et pour cercles générateurs les cercles (ωM_1) et $(\omega' M'_1)$, dont les cercles enveloppes respectifs sont le cercle (CM) et le cercle limite C_0 , ayant pour axe radical $\tau \Omega_c$.

De même nous pouvons prendre pour cercles directeurs les cercles (CM'_1) et (I'') et pour cercles générateurs les cercles $(\omega M'_1)$ et $(\omega' M'_1)$, les cercles enveloppes respectifs étant le cercle (CM') et le cercle limite C_c , qui ont pour axe radical $\tau' \Omega'_c$.

Les cercles enveloppes (E'_i) et (I'_e) des cercles directeurs (E_i) et (I_e) , symétriquement égaux aux cercles directeurs (I) et (E) , par rapport au point milieu σ_0 de C_0 , ont pour axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_2$; et les cercles enveloppes des deux autres couples de cercles directeurs symétriquement égaux aux deux couples de cercles directeurs (CM_1) , (I') et (CM'_1) , (I'') , ont pour axes radicaux $\theta_c \Omega_c$ et $\theta'_c \Omega'_c$.

D'ailleurs il est facile de voir que le point d'intersection τ des droites $\tau M_1 M M_2$ et $\tau \theta \omega \mu' \omega_3 \theta_c$ décrira l'axe radical $\tau \Omega_c$ du cercle CM et du cercle limite C_0 ; et que de même le point d'intersection τ' des droites $\tau' M'_1 M'_1 M'_2$ et $\theta \tau' \mu''' \theta'_c \omega'_3 \theta'_2$ décrira l'axe radical $\tau' \Omega'_c$ du cercle (CM') et de ce même cercle limite (*).

45. Si nous considérons les tangentes $n_s \theta'_1$ et $n_i \theta'_2$ du cercle (I') , aux extrémités de son diamètre $n_s C_0 n_i$, coupant la droite $\theta \Omega_m \theta_0$ aux points θ'_1 et θ'_2 ; et le rayon $C_0 \theta_c$ perpendiculaire à ce diamètre, coupant les droites $\tau \Omega_c$ et $\tau' \Omega'_c$ aux points θ_c et θ'_c , nous aurons le quadrilatère $\theta_c \theta'_1 \theta'_2 \theta_0$ inversement égal au quadrilatère $\theta_c \theta_1 \theta'_c \theta_2$, par rapport au point milieu σ_0 du segment CC_0 .

On voit donc que l'axe radical $\theta \theta'_1 \Omega_m \theta'_2 \theta_0$ des cercles (E') et (I') ; et l'axe radical $\theta' \theta_1 \Omega_m \theta_2 \theta'_0$ des cercles (E'_i) et (I'_e) sont décrits en même temps par les sommets θ_1, θ_2 ; θ', θ'_0 et θ, θ_0 ; θ'_1, θ'_2 de ces quadrilatères, et sont conjugués harmoniques des axes radicaux $\theta_c \Omega_c$ et $\theta'_c \Omega'_c$ relatifs au cercle limite C et à chacun des cercles $(C_0 M_c)$ et $(C_0 M'_c)$; ainsi qu'ils seront conjugués harmo-

(*) Le résumé de la partie de ce §, publiée dans le t. III de ce Journal, de pag. 130 à 137 et de pag. 174 à 182, termine ici.

riques des axes radicaux $\theta_{c_0}\Omega_{c_0}$ et $\theta'_{c_0}\Omega_{c_0}$, relatifs au cercle limite C_0 et à chacun des cercles (CM) et (CM').

Ainsi étant $\Omega_c, \Omega_m, \Omega'_c, \Omega'_{c_0}, \Omega_{m_0}$, et Ω_{c_0} les points d'intersections de la droite C_0C avec les axes radicaux considérés $\theta_c\Omega_c, \theta_1\Omega_m, \theta'_c\Omega'_c, \tau'\Omega'_{c_0}, \theta\Omega_{m_0}$ et $\tau\Omega_{c_0}$, nous aurons

$$\frac{\Omega_m\Omega_c}{\Omega_m\Omega'_c} = -\frac{\Omega_{m_0}\Omega_c}{\Omega_{m_0}\Omega'_c} \dots\dots\dots (40)$$

et

$$\frac{\Omega_m\Omega_{c_0}}{\Omega_m\Omega'_{c_0}} = -\frac{\Omega_{m_0}\Omega_{c_0}}{\Omega_{m_0}\Omega'_{c_0}} \dots\dots\dots (41)$$

et par suite

$$\left(\frac{\Omega_m\Omega_{m_0}}{2}\right)^2 = \sigma_0\Omega_m = \sigma_0\Omega_c \cdot \sigma_0\Omega'_c = \sigma_0\Omega_{c_0} \cdot \sigma_0\Omega'_{c_0} \dots (42)$$

46. Les deux tangentes $\theta\beta_0\alpha_0$ et $\theta\beta'_0\alpha'_0$ (fig. 4) communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3), qui concourent dans le point θ , déterminant dans le cercle (I) les cordes $\beta_0\alpha_0$ et $\beta'_0\alpha'_0$ évidemment égales entre elles et à la corde ba du cercle directeur (E), on a

$$\theta\beta_0 \cdot \theta\alpha_0 = \theta\beta'_0 \cdot \theta\alpha'_0 = \theta b \cdot \theta a \dots\dots\dots (43)$$

d'où il résulte que l'axe radical $\theta\Omega_{m_0}$ des deux cercles enveloppes (E') et (I') sera en même temps l'axe radical des cercles directeurs donnés (E) et (I) (*).

On reconnaîtra aussi que la droite $\theta\Omega_m$ sera en même temps l'axe radical des deux couples de cercles (E_i), (I_e) et (E_i), (I_e).

Les deux cercles (CM₁) et (I'') considérés comme cercles direc-

(*) Il est inutile d'observer que, au contraire, les points d'intersection des couples de cercles (E), (I) et (E'), (I') sont distincts, et que, par suite, il en est de même des cordes communes à ces couples de cercles, pouvant être toutes deux réelles ou idéales, ou l'une réelle et l'autre idéale.

teurs, les cercles générateurs correspondants (ωM_1) et ($\omega_3 M_2$), ou qui touchent la corde $M_1 M_2$ du premier cercle directeur à ces extrémités, auront pour points de contact avec leur tangente commune $\tau m^{\vee_2} m^{\vee_2}$ les extrémités du diamètre $m^{\vee_2} m^{\vee_2}$ du second cercle directeur, et par conséquent étant ce diamètre constamment égal à la corde considérée, nous aurons

$$\tau M_1 \cdot \tau M_2 = \tau m^{\vee_2} \cdot \tau m^{\vee_2}, \dots \dots \dots (44)$$

et alors la droite $\tau \Omega_{c_0}$ étant l'axe radical du cercle limite C_0 et du cercle (CM), enveloppe de la corde $M_1 M_2$ du cercle CM_1 , sera aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (I'').

De même on reconnaîtra que la droite $\theta_c \Omega_c$ étant l'axe radical du cercle limite C et du cercle enveloppe ($C_0 M_c$) de la corde $M_{c_1} M_{c_2}$ du cercle ($C_0 M_{c_1}$) sera aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (E'').

D'une manière analogue on verra que l'axe radical $\tau' \theta'_{c_0}$ du cercle limite C_0 et du cercle enveloppe (CM') de la corde $M'_1 M'_2$ du cercle (CM'_1) sera de même l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (I'').

Finalement nous avons de même que la droite $\theta'_c \Omega'_c$ étant l'axe radical du cercle limite C et du cercle enveloppe ($C_0 M'_c$) de la corde $M'_{c_1} M'_{c_2}$ du cercle ($C_0 M'_{c_1}$), sera aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (E'').

47. Considérons maintenant deux cercles générateurs correspondants quelconques (ω) et (ω_3) (fig. 4 et 5), qui coupent le cercle directeur (E) respectivement aux deux couples de points b, β et a, α ; et le cercle directeur (I) aux deux couples de points β', β_0 et α', α_0 . Alors les points de concours φ_1 et φ'_1 des deux couples de cordes $b\beta, \beta'\beta_0$ et $a\alpha, \alpha_0\alpha'$ (fig. 5), lesquelles se trouvent sur la sécante $\theta \Omega_m \theta_0$, commune aux deux cercles directeurs, détermineront les tangentes $\omega \varphi_1$ et $\omega_3 \varphi'_1$ aux points ω et ω_3 de la conique engendrée (Ω) n.° 35.

Dans les cercles (ω) et (ω_3) les cordes βb et $a\alpha$ seront évidemment *anti-homologues* par rapport au centre de similitude θ de ces cercles, ainsi que les cordes $\beta_0 \beta'$ et $\alpha_0 \alpha'$.

Si les cercles générateurs (ω) et (ω_3) sont cencés fixes ainsi que les points φ_1 et φ'_1 , lorsque les deux couples de cordes anti-homologues $a\alpha, b\beta$ et $\alpha_0 \alpha', \beta_0 \beta'$ tourneront autour de ces points,

leurs points de concours ε_0 et ε_1 se trouveront continuellement sur l'axe radical Em_1 de ces cercles, et on aura toujours

$$\theta\alpha.\theta\beta = \theta\alpha'.\theta\beta' = \theta a.\theta b = \theta\alpha_0.\theta\beta_0 = \text{const.} \dots (45)$$

d'où il résulte que les cercles directeurs (E) et (I) varieront, étant remplacés par d'autres cercles $(E_1), (E_2), \dots, (I_1), (I_2), \dots$, ayant même corde commune que les deux cercles directeurs donnés, et, par suite, seront coupés par les cercles générateurs $(\omega), (\omega_1), \dots$, de la conique Ω sous des angles constants. Il en sera de même par rapport aux cercles générateurs $(\omega'), (\omega'_1), \dots$, de la seconde conique (Ω') .

En prenant pour cercles directeurs les cercles (E) et (I_n) de la suite (E), $(E_1), \dots, (I), (I_1), \dots, (I_n), \dots$, le cercle (ω) de la première suite de cercles générateurs, et le cercle (ω') de la seconde suite de cercles générateurs seront coupés par le dernier cercle directeur sous deux angles inégaux. Alors, si nous faisons varier le cercle générateur (ω') jusqu'à ce que ces angles deviennent égaux, nous aurons un nouveau cercle générateur (ω'') , engendrant une autre conique (Ω'') , et jouissant aussi des mêmes propriétés que le cercle (ω) ; et la figure respective étant analogue au cas général de la fig. 3, nous pouvons énoncer ce théorème:

THÉORÈME X. — *Les deux séries de cercles $(x), (x_1), (x_3), \dots$, et $(x'), (x'_1), (x'_3), \dots$, qui coupent deux cercles fixes (E) et (I) sous des angles constants e et i , couperont aussi sous des angles constants tous les cercles $(E_1), (E_2), \dots, (I_1), (I_2), \dots$, ayant même corde commune que les deux cercles fixes.*

48. Toutes les fois que des points d'intersection $\varphi_1, \varphi'_1, \dots$ (fig. 5) de la corde commune aux cercles (E) et (I) avec les tangentes $\omega\varphi_1, \omega_3\varphi'_1, \dots$, à la conique (Ω) , on peut tirer des tangentes $\varphi_1\psi, \varphi_1\psi'; \varphi'_1\psi_3, \varphi'_1\psi'_3; \dots$; aux cercles générateurs $(\omega), (\omega_3), \dots$, de cette conique, nous aurons dans la suite de cercles directeurs (E), $(E_1), \dots, (I), (I_1), \dots$, deux cercles qui toucheront tous ces cercles générateurs. De même il y aura deux autres cercles directeurs, qui toucheront les cercles générateurs $(\omega), (\omega'_3), \dots$, de la seconde conique (Ω') .

En menant dans le cercle (ω) les rayons $\omega\psi$ et $\omega\psi'$, qui vont aux points de contact ψ et ψ' des tangentes $\varphi_1\psi$ et $\varphi_1\psi'$ à ce cercle, ils couperont la droite CC_0 [qui unit les centres C et C_0 des

cercles (E) et (I)] aux points f_1 et f'_1 , lesquels seront les centres des cercles (ψf_1) et $(\psi' f'_1)$ tangents à tous les cercles générateurs de la conique (Ω): D'ailleurs ces points f_1 et f'_1 seront évidemment les points focaux de cette conique, et la droite CC_0 représentera la direction de son *axe focal* ou *principal*.

Les cercles générateurs (ω') , (ω'_3) , ..., de la seconde conique (Ω'), étant de même tangents à deux autres cercles de la série (E), (E_1) , ..., (I), (I_1) , ..., les centres de ces deux cercles seront donc les points focaux de cette conique.

Quand on ne saura tirer les tangentes considérées aux cercles générateurs, ou les points focaux de (Ω) et (Ω') sur CC_0 sont imaginaires, la détermination des points focaux réels situés alors sur l'autre axe est très-facile, comme nous le verrons à la suite.

En prenant, comme précédemment, les cercles (E) et (I_n) pour cercles directeurs et en faisant varier le cercle (ω') jusqu'à ce qu'il coupe ce second cercle directeur sous le même angle que le cercle (ω) , la figure respective deviendra tout à fait analogue au cas général de la fig. 3. Donc:

THÉORÈME XI. — *Étant donnés deux cercles (E) et (I), chacune des deux séries de cercles (x), (x_1) , ..., et (x') , (x'_1) , ..., qui les coupent sous des angles constantes e et i, touchera deux autres cercles (réels ou imaginaires) ayant même corde commune que les cercles donnés.*

49. Tirons (fig. 5) dans les cercles générateurs (ω) et (ω_3) les deux couples de cordes anti-homologues bb_e , aa_e et $\beta\beta_e$, $\alpha\alpha_e$, par rapport au centre de similitude θ , et qui concourent au point E. D'après cela les cordes $b_e\beta_e$ et $a_e\alpha_e$ des cercles (ω) et (ω_3) , étant aussi anti-homologues se couperont au point ϵ'_i sur la corde Em_1 commune à ces cercles, et les droites $a_e b_e$ et $\alpha_e \beta_e$ passeront par leur centre de similitude θ , ou seront leurs *vecteurs de similitude*.
Or, étant

$$Ea \times Ea_e = E\alpha \times E\alpha_e = Eb \times Eb_e = E\beta \times E\beta_e$$

les points α_e , a_e , b_e , β_e se trouveront sur un cercle (I_n) , ce cercle et le cercle (E) ayant pour un des centres d'homothétie le point E; et, puisque le centre du premier cercle se trouve évidemment sur la droite CE, la sécante commune à ce couple de cercles, passant par θ , sera encore la sécante commune $\theta\Omega_m$ de la série

de cercles directeurs considérés (E), (E₁), ..., (I), (I₁), Donc, dans les deux cercles (I_n) et (E) les couples de cordes anti-homologues ax , $a_e\alpha_e$ et $b\beta$, $b_e\beta_e$, par rapport au centre d'homothétie E, se couperont encore aux points φ_1 et φ'_1 ; et le premier cercle appartiendra à cette même série de cercles directeurs.

Considérons encore dans les cercles (ω) et (ω_3) les deux couples de cordes anti-homologues $\beta_i\beta_o$, $\alpha_i\alpha_o$ et $\beta'_i\beta'_o$, $\alpha'_i\alpha'_o$, s'entre-coupant en E. Alors nous reconnaitrons analogiquement que les cordes anti-homologues $\beta_i\beta'_i$ et $\alpha_i\alpha'_i$, se coupant en ϵ'_e sur la corde Em_1 commune à ces cercles, passeront de même par les points φ_1 et φ'_1 de la corde $\varphi_1\varphi'_1$ commune à la série de cercles directeurs, et que par conséquent elles seront en même temps cordes d'un cercle (E_m) de cette série. Le point E sera donc l'un des centres de similitude du couple de cercles (I) et (E_m); et les droites $\alpha'\beta'$ et $\alpha'_i\beta'_i$ passant par θ seront deux cordes anti-homologues de ce couple de cercles directeurs par rapport à ce centre de similitude.

On voit donc que si les cordes anti-homologues $b\beta$ et za des cercles (ω) et (ω_3) tournent autour des points φ_1 et φ'_1 décrivant, par suite, la corde Em_1 commune à ces cercles les deux couples de cordes anti-homologues bb_e , aa_e et $\beta\beta_e$, $\alpha\alpha_e$ tourneront autour du point fixe E; les cordes anti-homologues $b_e\beta_e$ et $a_e\alpha_e$ décrivant la corde commune Em_1 , tourneront aussi autour des points φ_1 et φ'_1 ; et le couple de cercles directeurs ($\beta baz...$) et ($\beta_e b_e z_e a_e...$) auront le point fixe E pour centre d'homothétie ou de similitude.

Il résulte de là que il y a une série de couples de cercles directeurs qui ont le point fixe E pour centre d'homothétie ayant pour cordes anti-homologues deux couples de vecteurs de similitude des cercles générateurs (ω) et (ω_3) et qui, par suite, passeront par leur centre de similitude θ .

En considérant les cercles générateurs (ω') et (ω'_3) de la seconde série de cercles générateurs, ainsi que leur centre radical E', nous arriverons évidemment à des conséquences analogues.

Ainsi deux cercles générateurs quelconques d'une des séries auront toujours un de leurs centres de similitude sur la sécante commune aux cercles directeurs donnés (E) et (I), laquelle sera alors un des quatre axes de similitude de trois quelconques des cercles générateurs de la série considérée. D'après cela, ces propriétés seront également applicables au cas de la fig. 3, et donc:

THÉORÈME XII. — *Les séries de cercles qui coupent trois cercles fixes (x) , (x_1) , (x_2) , ..., sous des angles égaux ont pour sécantes (réelles ou idéales) communes, ou pour axes radicaux les axes de similitude de ces trois cercles.*

Comme corollaire on a ce théorème :

THÉORÈME XIII. — *Quand un cercle (I_n) variable de grandeur coupe trois cercles fixes (x) , (x_1) , (x_2) , sous des angles égaux, le centre de ce cercle variable se trouvera sur quelque'une des droites passant par le centre radical E de ces trois cercles, et coupant orthogonalement leurs axes de similitude.*

50. Comme on sait, lorsqu'on fait varier dans le cercle (ω) (fig. 5) les cordes βb , $\beta_0 \beta'$, $\beta_e b_e$, ..., qui passent par le point φ_1 , les points d'intersection des cordes $b\beta'$ et $\beta\beta_0$, $b\beta_0$ et $\beta\beta'$, $b\beta_e$ et $\beta\beta_e$, ..., se trouveront sur la polaire de ce point φ_1 , laquelle, par suite, passera par le point fixe E , et on reconnaîtra de même que la polaire du point φ'_1 , par rapport au cercle (ω_3) , passera aussi par E . Il en résulte que pour la série de cercles générateurs (ω) , (ω_1) , (ω_3) , ..., les polaires des centres radicaux φ_1 , φ'_1 , ..., de ces cercles directeurs (E) et (I) et de chaque cercle générateur passera par le centre radical E de cette série de cercles générateurs. Nous serons évidemment entraînés aux mêmes résultats pour la seconde série de cercles générateurs (ω') , (ω'_1) , (ω'_3) , ...

Or cette propriété étant également applicable à la fig. 3, ou au cas général, nous pouvons énoncer cette proposition :

THÉORÈME XIV. — *Étant donnés deux cercles (E) et (I) , la polaire du centre radical de ces cercles et d'un cercle quelconque d'une des deux séries de cercles, qui les coupent sous des angles constants e et i , relative à ce dernier cercle, passera par le centre radical de la série considérée.*

51. Prenons encore le couple de cercles directeurs $(\beta b a x)$ et $(\beta_e b_e a_e x_e)$ ou (E) et (I_n) , ayant le point E pour centre de similitude. Or, comme on sait, le vecteur de similitude $E b_e b$ coupant ces cercles sous un même angle, et le cercle (ω) passant par les points anti-homologues b et b_e , les angles sous lesquels ce cercle coupe les deux autres seront égaux, et par conséquent les cercles de la série de cercles directeurs (E) , (E_1) , ..., (I) , (I_1) , ..., seront coupés deux à deux, ou par couples, sous un angle constant par la série de cercles générateurs (ω) , (ω_1) , (ω_3) , ..., dont le centre radical sera en même temps le centre d'homothétie ou de similitude de chacun de ces couples de cercles directeurs. Il

en sera de même par rapport à l'autre série de cercles générateurs (ω') , (ω'_1) , (ω'_3) , ...

D'ailleurs si les centres radicaux E et E' des deux séries de cercles générateurs, ou centres de similitude des couples de cercles directeurs sont extérieurs aux cercles générateurs, ces deux centres seront donc les seuls points du plan d'où l'on puisse mener respectivement à chacune de ces deux séries de cercles générateurs des tangentes égales, d'où il résulte que ces points seront aussi les centres des seuls cercles qui puissent couper *orthogonalement* chacune de ces mêmes séries de cercles.

Ces cercles orthogonaux, répondant à deux couples de cercles directeurs *coïncidents*, seront vraiment *cercles directeurs doubles*; et les cercles enveloppes de chaque série de cercles générateurs seront donc deux couples de *cercles directeurs tangentiels*.

Cela étant on peut évidemment passer, comme précédemment, au cas général de la fig. 3; donc:

THÉORÈME XV. — *Les cercles d'une quelconque des deux séries de cercles, qui coupent un couple de cercles fixes (E) et (I_n) sous un angle constant, couperont aussi sous un angle constant d'autres couples de cercles ayant même corde commune, que le couple de cercles fixes; et le centre radical de la série de cercles sécants coïncidera avec un des centres de similitude du couple de cercles fixes et de chacun des autres couples de cercles, entre lesquels il y aura un couple de cercles tangentiels (réels ou imaginaires), ainsi que un cercle double orthogonal (réel ou imaginaire).*

Comme on voit ce théorème enveloppe les théorèmes X et XI.

Nous pouvons aussi énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME XVI. — *Quand trois cercles fixes (x), (x_1), (x_3), sont coupés en même temps par deux cercles variables (E) et (I_n) sous les mêmes angles, l'axe radical et un des centres de similitude de ce couple de cercles variables coïncideront respectivement avec un quelconque des axes de similitude et avec le centre radical des trois cercles fixes; ce couple pouvant se composer de cercles tangentiels (réels ou imaginaires), ou se réduire à l'un cercle double orthogonal (réel ou imaginaire).*

Ce théorème enveloppera donc celui-ci:

THÉORÈME XVII. — *Si deux cercles (E), (I_n) sont coupés sous des angles égaux par deux autres cercles (x), (x_3), l'axe radical de chacun de ces deux couples de cercles passe par un centre de similitude de l'autre couple.*

52. Comme une conséquence immédiate des principes exposés plus haut on a ce théorème :

THÉORÈME XVIII. — *Les six centres de similitude de trois cercles donnés (x), (x₁), (x₃), considérés deux à deux, forment les sommets d'un quadrilatère complet, dont les points de concours des trois diagonales sont les centres de ces cercles.*

53. Considérons actuellement (fig. 6 et 7) trois cercles quelconques (ω), (ω₁), (ω₃), et un de leurs axes de similitude θθ'.

Soient p_ω, p_{ω₁}, p_{ω₃} respectivement les pôles de cet axe, par rapport à ces cercles, lequel coupe aux points δ_ω, δ_{ω₁}, δ_{ω₃} les diamètres v'ωp_ωv, v'₁ω₁p_{ω₁}v₁, v'₃ω₃p_{ω₃}v₃ passant par ces pôles.

Si l'axe de similitude n'est pas coupé par les cercles (fig. 6), leurs demi-cordes idéales δ_ωh_ω, δ_{ω₁}h_{ω₁}, δ_{ω₃}h_{ω₃}, ou les demi-cordes réelles de leurs coniques supplémentaires vh_ω...; v₁h_{ω₁}...; v₃h_{ω₃}...; par rapport aux diamètres vv', v₁v'₁, v₃v'₃, seront, comme on sait, égales aux tangentes δ_ωb', δ_{ω₁}a''₁, δ_{ω₃}a' à ces cercles, dont les points de contact nous désignons par b', a''₁, a'. Ainsi les droites p_ωh_ω, p_{ω₁}h_{ω₁}, p_{ω₃}h_{ω₃} représenteront les tangentes aux points h_ω, h_{ω₁}, h_{ω₃} de ces coniques supplémentaires ou hyperboles équilatères. En considérant les couples de triangles semblables θωδ_ω, θω₃δ_{ω₃}; θωv, θω₃v₃; et θ'ω₁δ_{ω₁}, θ'ω₃δ_{ω₃}; θ'ω₁v₁, θ'v₃, on a

$$\frac{\omega\delta_{\omega}}{\omega v} = \frac{\omega_3\delta_{\omega_3}}{\omega_3 v_3} = \frac{\omega_1\delta_{\omega_1}}{\omega_1 v_1}, \dots \dots \dots (46)$$

d'où

$$\frac{\omega\delta_{\omega}}{\omega b'} = \frac{\omega_3\delta_{\omega_3}}{\omega_3 a'} = \frac{\omega_1\delta_{\omega_1}}{\omega_1 a''_1} \dots \dots \dots (47)$$

D'après cela les triangles rectangles ωδ_ωb', ω₁δ_{ω₁}a'', ω₃δ_{ω₃}a', seront semblables et il en sera de même des triangles rectangles b'δ_ωp_ω, a''₁δ_{ω₁}p_{ω₁}, a'δ_{ω₃}p_{ω₃} et par suite les triangles rectangles p_ωh_ωδ_ω, p_{ω₁}h_{ω₁}δ_{ω₁}, p_{ω₃}h_{ω₃}δ_{ω₃} seront aussi semblables.

Donc, les angles p_ωh_ωδ_ω, p_{ω₁}h_{ω₁}δ_{ω₁}, p_{ω₃}h_{ω₃}δ_{ω₃}, sans lesquels les hyperboles équilatères vh_ω...; v₁h_{ω₁}...; v₃h_{ω₃}...; rencontrent l'axe de similitude considéré, seront égaux. Ces angles pourront être només idéaux, et représenteront alors les angles sous lesquels les cercles donnés coupent idéalement l'axe de similitude choisi.

Considérons maintenant le cas où l'axe de similitude $\theta\theta'$ coupe réellement les cercles donnés (fig. 7); et représentons par h_ω , h_{ω_1} , h_{ω_3} les points de contact des tangentes $p_\omega h_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3}$. Les points h_ω et h_{ω_3} des cercles (ω) et (ω_3) étant homologues par rapport au centre d'homothétie ou de similitude θ , les rayons ωh_ω et $\omega_3 h_{\omega_3}$ seront parallèles. De même dans les cercles (ω) et (ω_1) les points h_ω et h_{ω_1} étant homologues par rapport au centre de similitude θ' des rayons ωh_ω et $\omega_1 h_{\omega_1}$ seront également parallèles. Donc, ces trois rayons seront parallèles entre eux, ainsi que les tangentes considérées, et par suite les angles $p_\omega h_\omega \delta_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1} \delta_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3} \delta_{\omega_3}$, sous lesquels les cercles coupent réellement l'axe de similitude choisi, seront égaux.

Nous pourrions aussi arriver au même résultat d'une manière analogue à la précédente, en prouvant la similitude des triangles rectangles $h_\omega \delta_\omega p_\omega$, $h_{\omega_1} \delta_{\omega_1} p_{\omega_1}$, $h_{\omega_3} \delta_{\omega_3} p_{\omega_3}$.

D'ailleurs nous pouvons encore considérer ce résultat comme un cas particulier du théorème XII.

Donc :

THÉORÈME XIX. — *Trois cercles quelconques coupent (réellement ou idéalement) chacun de leurs axes de similitude sous des angles égaux.*

Et réciproquement :

THÉORÈME XX. — *Les droites qui coupent (réellement ou idéalement) sous des angles égaux trois cercles donnés, sont des axes de similitude de ces cercles.*

D'ailleurs, si nous faisons varier le cercle (ω_3) (fig. 6 e 7), les deux couples d'axes de similitude $\theta''\theta$, $\theta''\theta'''$ et $\theta^{iv}\theta$, $\theta^{iv}\theta'''$ tourneront respectivement autour des centres de similitude θ'' et θ^{iv} , continuant à couper sous des angles égaux les cercles (ω) et (ω_1) cencés fixes, et donc :

THÉORÈME XXI. — *Les droites menées par l'un ou l'autre des centres de similitude de deux cercles sont coupées (réellement ou idéalement) sous des angles égaux par ces cercles.*

Et réciproquement :

THÉORÈME XXII. — *Toutes droites coupant (réellement ou idéalement) deux cercles sous des angles égaux, passent par l'un ou l'autre des centres de similitude de ces cercles.*

54. Tirons (fig. 3) aux deux couples de cercles générateurs (x) , (x_3) et (x') , (x'_3) les tangentes communes $Tb_o a_o$ et $Tb'_o a'_o$, dont les points de contact nous désignons respectivement par

b_o, a_o et b'_o, a'_o , et soient v_{i_o} et v'_{s_o} les points milieux des segments $b_o a_o$ et $b'_o a'_o$, ou les points d'intersection des cordes Em_1 et $E'm_1$, communes à chacun de ces couples de cercles, avec les tangentes considérées. Tirons encore les droites $M''v_{i_o}\gamma_o$ et $v'_{s_o}M'''\gamma'_o$, perpendiculaires à ces tangentes; étant γ_o et γ'_o les points de rencontre de ces perpendiculaires avec la droite CC_o , et M'' et M''' les points de rencontre de celles-ci avec la droite Cm_1 ; et menons par ces points les perpendiculaires $\gamma_o p\mu$ et $\gamma'_o p'\mu'$ aux droites Too_3 et $To'o'_3$, qui les coupent aux points p et p' , lesquels seront les points milieux des segments $\gamma_o\mu$ et $\gamma'_o\mu'$ déterminés sur ces perpendiculaires par leurs points d'intersection μ et μ' avec le diamètre m_1m_o du cercle (E') .

Cela étant, faisons coïncider (fig. 3 et 3 a) les séries de cercles $(\omega), (\omega_3), \dots$, et $(\omega'), (\omega'_3), \dots$, avec les séries de cercles $(x), (x_3), \dots$, et $(x'), (x'_3), \dots$. D'après cela, quand les cercles correspondants (ω) et (ω_3) coïncideront avec les cercles correspondants (x) et (x_3) , les droites $\theta\omega\omega_3, \theta\theta_o, C_oM, \theta\beta_o\alpha_o, \dots$, et les cercles $(I), (C_o\beta_o)$ se confondront respectivement avec les droites $Too_3, TT_o, \gamma_o\mu, Tb_o a_o, \dots$, et avec les cercles $(\gamma_o v_{i_o}), (\gamma_o b_o)$; et alors le côté MM_o du rectangle auxiliaire $M_oMM'M'_o$ se déplacera parallèlement à lui-même jusqu'à prendre la position $\mu\mu'$, où il est coupé au point milieu μ_1 par la corde ba'_1 du cercle (E) , étant, comme nous savons,

$$m_1\mu = \gamma_o v_{i_o}$$

et

$$\mu_1\mu = v_{i_o}b_o.$$

Les cercles correspondants $(\omega'), (\omega'_3)$ coïncidant avec les cercles $(x'), (x'_3)$, les droites $\theta\omega'\omega'_3, \theta\theta_o, C_oM', \theta\beta'_o\alpha'_o, \dots$, et les cercles $(I'), (C_o\beta'_o)$ se confondront respectivement avec les droites $To'o'_3, TT_o, \gamma'_o\mu', Tb'_o a'_o, \dots$, et avec les cercles $(\gamma'_o v'_{s_o}), (\gamma'_o b'_o)$, d'où il résulte que le côté M'_oM' se déplacera parallèlement à lui-même de manière à prendre la position $\mu'\mu'$ où il est coupé au point milieu μ'_1 par la corde ba'_1 , étant

$$m_1\mu' = \gamma'_o v'_{s_o}$$

et

$$\mu_1\mu' = v'_{s_o}b'_o.$$

On voit, donc, que lorsque la corde *ab* du cercle directeur (E) tournera autour de C, simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les côtés $M'v_{i_0}$ et $M''v_{i_0}$ des triangles isocèles $m_1M'v_{i_0}$ et $m_1M''v_{i_0}$ tourneront autour des deux points γ_0 et γ'_0 , et les sommets v_{i_0} et v'_{i_0} décriront deux cercles $(\gamma_0v_{i_0})$ et $(\gamma'_0v'_{i_0})$, enveloppes des tangentes Tb_0a_0 et $Ta'_0b'_0$ communes aux couples de cercles générateurs correspondants (x) , (x_3) ; ...; et (x') , (x'_3) ; ...; ou enveloppes des cordes b_0a_0 et $b'_0a'_0$ des deux cercles (γ_0b_0) et $(\gamma'_0b'_0)$.

Ces cercles enveloppes, et le cercle enveloppe (E') auront évidemment même axe radical que les cercles directeurs (n.º 46 note). Chacun des points fixes E et E' sera encore respectivement un des centres d'homothétie de chacun des cercles $(\gamma_0v_{i_0})$ et $(\gamma'_0v'_{i_0})$, par rapport au cercle (E').

Ainsi (fig. 3), les droites $\gamma_0\mu$ et $\gamma'_0\mu'$ tournant autour des centres γ_0 et γ'_0 étant toujours coupées orthogonalement aux points milieux p et p' par les droites To_3 et To'_3 , les points milieux M'' et M''' des cordes correspondantes oo_3 et $o'o'_3$ des coniques (Σ) et (Σ') décriront deux coniques (M'') et (M''') , enveloppes de ces cordes ayant pour point focal commun le centre du cercle directeur donné (E) et pour seconds points focaux respectivement les centres γ_0 et γ'_0 de ces nouveaux cercles directeurs (γ_0b_0) et $(\gamma'_0b'_0)$.

Les points p et p' décriront évidemment deux cercles (s_0p) et (s'_0p') , dont les centres sont les points milieux s_0 et s'_0 des distances focales $C\gamma_0$ et $C\gamma'_0$, ou les centres de ces coniques enveloppes (M'') et (M''') , dont les axes focaux sont évidemment égaux aux segments $C\mu$ et $C\mu'$, de grandeur double des rayons s_0p et s'_0p' .

Si du point focal commun C nous abaissons les perpendiculaires sur les droites oo_3 et $o'o'_3$, tangentes à ces coniques, leurs points d'intersection se trouveront de même respectivement sur les deux cercles engendrés (s_0p) et (s'_0p') .

D'après cela nous avons démontré incidemment que le lieu géométrique des projections des points focaux d'une conique sur ses tangentes, ou la podaire de ces points focaux est un cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre. Telle est la propriété très-connue à laquelle nous avons recouru au n.º 33.

Les coniques (M'') et (M''') seront, donc, monostigmoconfocales et auront les axes focaux communs en direction.

Pour abrégé nous dirons que les coniques sont monosynaxoniennes, lorsqu'elles ont un de leurs axes commun en direction;

et qu'elles sont *disynaxoniennes* s'elles ont les deux axes communs en direction. Nous pouvons aussi adopter seulement le nom de *synaxoniennes*, pour exprimer indifféremment l'un ou l'autre cas.

55. Des points γ_o et γ'_o (fig. 3) abaissons les perpendiculaires $\gamma_o m_\gamma$ et $\gamma'_o m'_\gamma$ sur les rayons ob_o et $o'b'_o$ des cercles (x) et (x') ou (o) et (o') et soient respectivement m_γ et m'_γ les points d'intersection de ces droites, étant évidemment

$$Cm_2 = \gamma_o m_\gamma = \gamma'_o m'_\gamma.$$

D'après cela les coniques (Σ) et (Σ') auront le cercle (E'') pour cercle focal commun et les cercles $(\gamma_o m_\gamma)$ et $(\gamma'_o m'_\gamma)$, égaux au premier, pour seconds cercles focaux.

Ainsi ces coniques, qui étaient cycloconfocales relativement aux cercles directeurs donnés (E) et (I) , ou par rapport aux cercles focaux (E'') et (I'') , deviendront monocycloconfocales relativement au cercle directeur (E) et à chacun des deux nouveaux cercles directeurs $(\gamma_o b_o)$ et $(\gamma'_o b'_o)$ que viennent remplacer le cercle directeur (I) , ou par rapport au cercle focal (E'') et à chacun des nouveaux cercles focaux $(\gamma_o m_\gamma)$ et $(\gamma'_o m'_\gamma)$ égaux au premier et qui viennent remplacer le cercle focal (I'') .

Les cercles (o) et (o') coupant évidemment sous des angles inégaux les nouveaux cercles directeurs $(\gamma_o b_o)$ et $(\gamma'_o b'_o)$, si nous considérons la seconde suite de cercles qui rencontrent les cercles (E) et $(\gamma_o b_o)$ sous les mêmes angles constants que le cercle (o) , les centres des cercles de cette suite se trouveront sur une conique (Σ_o) qui, par rapport à ces cercles directeurs, sera cycloconfocale à la conique (Σ) , les cercles focaux respectifs étant égaux entre-eux. En considérant de même la seconde suite de cercles qui coupent les cercles (E) et $(\gamma'_o b'_o)$ sous les mêmes angles constants que le cercle (o') , les centres de ces nouveaux cercles seront sur une conique (Σ'_o) cycloconfocale à la conique (Σ') , par rapport à ces cercles directeurs, les cercles focaux respectifs étant égaux entre-eux.

Les deux couples de coniques (Σ) , (Σ_o) et (Σ') , (Σ'_o) se trouveront donc aux mêmes conditions que les conique (Ω) et (Ω') des figures 4 et 5. Cela étant, nous pouvons continuer très-facilement à déduire des cas particuliers relatifs à ces figures toutes propriétés qui ont lieu pour la figure 3.

56. Tirons (fig. 3) la corde b_2b'' du cercle donné (I), laquelle touche le cercle générateur (o) au point b'_2 , où ces cercles s'entrecoupent; le cercle générateur correspondant, ou qui touche la corde à l'autre extrémité b''' , sera, en général, distinct du cercle (o_3); et cette corde, tangente en m'_1 au cercle enveloppe (I'), deviendra l'une tangente commune à ces cercles générateurs. La seconde tangente commune correspondante (extérieure ou intérieure ainsi que la première) touchera ces cercles aux points qui représentent de même les extrémités de la corde d'un nouveau cercle directeur, le cercle enveloppe de cette corde et le cercle enveloppe (I') ayant aussi même axe radical TT_o , que les trois cercles enveloppes (E') ($\gamma_o v'_{i_o}$) et ($\gamma'_o v''_{s_o}$).

Pour le cercle générateur (o') nous trouverons par rapport au cercle (I) un autre cercle correspondant, en général, distinct de (o'_3); et trouverons de même un nouveau cercle directeur et un nouveau cercle enveloppe. Ces deux nouveaux cercles enveloppes et le cercle enveloppe (I') auront de même TT_o pour axe radical.

On voit donc que, deux cercles générateurs correspondants (o) et (o_3), par rapport à l'un cercle directeur (E) seuls seront en même temps des cercles correspondants par rapport à l'autre cercle directeur ($\gamma_o b_o$), quand les cordes correspondantes ba et $b_o a_o$ seront égales, lesquelles représenteront alors les grandeurs des diamètres de cercles focaux égaux des coniques engendrées, qui par rapport à ces cercles focaux pourront être nommées isocycloconfocales.

Deux cercles directeurs par rapport auxquels deux cercles générateurs sont en même temps correspondants nous les appelons cercles directeurs correspondants.

De même, pour abrégé, deux cercles directeurs seront dits isogoniques, par rapport aux deux suites de cercles générateurs; et, réciproquement, ces cercles générateurs isogoniques par rapport aux cercles directeurs, toutes les fois que les angles e et i sur lesquels ils s'entrecoupent, sont égaux.

Dans le cas général, ou d'inégalité des angles e et i , les cercles directeurs et générateurs pourront aussi être nommés anisogoniques, les uns par rapport aux autres.

57. Si nous considérons (fig. 5) un cercle générateur quelconque (ω) les tangentes $\beta\theta$ et $\beta'\theta$ aux points β et β' de ce cercle seront aussi tangentes à son cercle correspondant (ω), et par

suite l'intersection θ de ces tangentes se trouvera sur l'axe radical $\theta\theta_0$ des cercles directeurs (Cb) et $(C_0\beta')$.

Donc, les couples de tangentes θb , $\theta\beta_0$ et $\theta_0\beta$, $\theta_0\beta'$ au cercle générateur considéré (ω) aux sommets opposés b , β_0 et β , β' du quadrilatère complet $\beta b\beta'\beta_0$, $\varphi_1\varphi_2$ inscrit dans ce cercle se coupant sur l'axe radical $\theta\theta_0$ des cercles directeurs correspondants (Cb) et $(C_0\beta)$, ce quadrilatère aura deux sommets φ_1 et φ_2 sur cet axe.

Soit θ' le point de concours du couple de tangentes $\alpha\theta'$, $\alpha'\theta'$ au cercle générateur (ω_3) aux sommets α et α' du quadrilatère complet $\alpha a'\alpha\alpha_0$, $\varphi'_1\varphi'_2$ inscrit dans ce cercle et φ'_1 et φ'_2 deux sommets de ces quadrilatères situés avec le point θ sur l'axe radical $\theta\theta_0$ des cercles directeurs correspondants; et représentons par φ_ω et φ_{ω_3} les points de rencontre des deux couples de diagonales $\alpha\alpha_0$, $\alpha\alpha'$ et $b\beta_0$, $\beta\beta'$ de ce quadrilatère et du quadrilatère $b\beta_0\beta'\beta$, $\varphi_1\varphi_2$.

Les points φ_ω et φ_{ω_3} seront évidemment les pôles de l'axe radical $\theta\Omega_{m,\theta_0}$ relatifs aux cercles générateurs correspondants (ω) et (ω_3), et, par suite, les droites $\omega\varphi_\omega$ et $\omega_3\varphi_{\omega_3}$ couperont cet axe orthogonalement aux points ψ_ω et ψ_{ω_3} .

Par le point μ' tirons, parallèlement aux droites $\omega\varphi_\omega\psi_\omega$ et $\omega_3\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}$, la droite $\mu'\varphi_\mu\psi_\mu$, étant φ_μ et ψ_μ les points où cette droite coupe les droites Em_1 et $\theta\theta_0$. Les triangles $\omega b\beta_0$, $\mu'm_1n_i$, et $\omega_3a\alpha_0$ étant évidemment homothétiques, les points homologues φ_ω , φ_μ et φ_{ω_3} seront en ligne droite avec le point θ , ou se trouveront sur un des vecteurs d'homothésie $\theta\varphi_\omega\varphi_\mu\varphi_{\omega_3}$; et puisque μ' est le point milieu du segment $\omega\omega_3$, il en sera de même de φ_μ relativement au segment $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$.

Représentons par Θ le rencontre des tangentes $\varphi_1\omega$ et $\varphi'_1\omega_3$ à la conique engendrée (Ω), et par Θ_φ et σ les rencontres des couples de droites $\varphi_1\varphi_\omega$, $\varphi'_1\varphi_{\omega_3}$ et $\varphi_2\omega$, $\varphi'_2\omega_3$ issues des couples de points φ_1 , φ'_1 et φ_2 , φ'_2 ; et enfin soit ψ_θ le point où s'entre-coupent les droites $\Theta\Theta_\varphi$ et $\theta\theta_0$. Alors les triangles $\omega\omega_3\sigma$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}E$ étant tels, que leurs côtés se coupent deux à deux ($\omega\omega_3$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$, $\omega\sigma$ et $\varphi_\omega E$, $\omega_3\sigma$ et $\varphi_{\omega_3} E$) sur la droite $\theta\theta_0$ aux points θ , φ_2 et φ'_2 , leurs sommets seront situés deux à deux sur trois droites $\omega\varphi_\omega\psi_\omega$, $\omega_3\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}$ et σE congruentes, ou concourant en un même point; mais, comme nous avons vu plus haut, les deux premières droites étant parallèles, les points de concours de ces trois droites se

trouvera à l'infini dans la direction de la droite CC_0 ; et, par suite, le sommet σ du triangle $\omega\sigma\omega_3$ se trouvera sur cette droite.

Comme on sait, les deux triangles $\omega\omega_3\sigma$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}E$ sont homologues, la droite $\theta\theta_0$ étant l'axe de concours ou d'homologie et le centre étant à l'infini dans la direction CC_0 ; et par conséquent on a

$$\frac{\omega\psi_\omega}{\varphi_\omega\psi_\omega} = \frac{\omega_3\psi_{\omega_3}}{\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}} = \frac{\mu'\psi_\mu}{\varphi_\mu\psi_\omega} = \frac{\sigma\Omega_{m_0}}{E\Omega_{m_0}},$$

d'où il résulte que le point E étant fixe il en sera de même du point σ , et par suite

$$\frac{\sigma\Omega_{m_0}}{E\Omega_{m_0}} = \text{const.}$$

Donc, quand la corde ba du cercle directeur (E) tournera autour de C simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées les triangles $\omega\sigma\omega_3$ et $\varphi_\omega E \varphi_{\omega_3}$ tournant autour des sommets σ et E , les sommets libres ω , ω_3 et φ_ω , φ_{ω_3} décriront un couple de coniques (Ω) et (Ω_h); et les côtés $\omega\omega_3$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$ envelopperont un autre couple de coniques (Ω_0) et (Ω_{h_0}); chacun de ces couples de coniques ayant l'axe radical $\theta\Omega_{m_0}\theta_0$ des cercles directeurs (E) et (I) pour sécante (réelle ou idéale) commune, ou pour axe d'homologie par rapport auquel un des centres d'homologie se trouvent à l'infini; et ainsi les droites $\varphi_1\varphi_\omega$ et $\varphi'_1\varphi'_{\omega_3}$ seront deux tangentes à la conique (Ω_h) homologues ou homologiques aux tangentes $\varphi_1\omega$ et $\varphi'_1\omega_3$ de la conique (Ω), les points φ_ω et φ_{ω_3} étant les points de contact respectifs.

Dans ce cas les coniques (Ω), (Ω_h) pourront être dites homologosyngènes, par rapport à l'axe d'homologie $\theta\Omega_{m_0}\theta_0$, qui alors sera dit de syngénie. Il en sera de même des coniques enveloppes (Ω_0), (Ω_{h_0}), par rapport à ce même axe.

58. Considérons maintenant (fig. 5) les quadrilatères homologues $\beta b\beta'\beta_0$, $\varphi_1\varphi_2$ et $\alpha a\alpha'\alpha_0$, $\varphi'_1\varphi'_2$, dont l'axe et le centre d'homologie sont la droite Em_1 et le point θ .

D'après cela les droites $\varphi_1\varphi_\omega$ et $\varphi'_1\varphi'_{\omega_3}$ étant homologues se couperont en un même point θ_φ de cet axe Em_1 ; et puisque les

quadrilatères (simples) $\omega\Theta\omega_3E$ et $\varphi_\omega\Theta_\varphi\varphi_{\omega_3}\sigma$ sont de même homologues, ayant pour axe et pour centre d'homologie la droite $\theta\theta_0$ et un point à l'infini, la droite $\sigma\mu''$ passera par le point de rencontre Θ des tangentes $\varphi_1\omega$ et $\varphi'_1\omega_3$, comme diagonale du premier quadrilatère, et, par conséquent, coupera la diagonale homologique $E\Theta_\varphi$ de l'autre quadrilatère en un point φ_θ de l'axe $\theta\theta_0$, lequel sera ainsi coupé orthogonalement par la droite $\Theta\Theta_\varphi\psi_\theta$.

Quand les droites Em_1 et $\sigma\mu''$ seront parallèles entre elles et par suite parallèles à $\theta\theta_0$ ou perpendiculaires à CC_0 , la seconde droite $\sigma\mu''$ deviendra alors la conjuguée harmonique de la tangente $\mu''\theta$ de la conique (Ω_0) , par rapport à ses vecteurs $C\mu''$ et $C_0\mu''$; et le point σ étant toujours fixe, comme nous venons de le voir, représentera le point conjugué harmonique de l'infini, par rapport aux points conjugués C et C_0 ; et, donc, il ne sera que le point σ_0 lui-même, c'est-à-dire il se confondra avec le point milieu de la distance focale CC_0 , ou avec le centre de cette conique.

Cela étant la droite CC_0 qui joint les centres des deux cercles directeurs correspondants $(C\beta)$ et $(C_0\beta_0)$ étant l'un des axes communs en direction aux deux coniques (Ω_0) et (Ω) ; et la droite $\sigma_0\Theta$, coupant alors orthogonalement la corde $\omega\omega_3$ de la conique (Ω) au point milieu μ'' , deviendra la direction du second axe de cette courbe.

D'après le n.º 44, nous sommes arrivés au même résultat.

En effet, les coniques (Ω) et (Ω') (fig. 4) pouvant encore être engendrées par les centres des cercles des deux suites de cercles générateurs, qui coupent sous les angles constants e et i les cercles directeurs correspondants (I_e) et (E_i) , symétriquement égaux aux cercles directeurs donnés (E) et (I) , par rapport au point σ_0 , la perpendiculaire $\sigma_0\sigma_1$, en ce point, sur l'axe de symétrie CC_0 de cette figure, sera un autre axe de symétrie de ces coniques, ainsi que des coniques enveloppes (Ω_0) et (Ω'_0) .

Donc, la conique (Ω) (fig. 5) et la conique enveloppe (Ω_0) sont concentriques ou homocentriques et synaxoniennes; et le point E est le centre de la conique (Ω_h) .

Comme on voit, dans les coniques (Ω) et (Ω_h) les droites $\Theta\sigma_0$ et $\Theta_\varphi E$ sont les directions de leurs diamètres respectivement conjugués aux cordes $\omega\omega_3$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$, et dont les points Θ et Θ_φ sont les pôles; et comme on sait aussi, les intersections de ces diamètres avec la droite CC_0 seront les centres σ_0 et E de ces mêmes coniques.

D'ailleurs, nous pouvons encore obtenir le centre de la conique (Ω) [quels que soient les cercles directeurs (E) et (I)] en déterminant le pôle φ_ω de la sécante $\theta\Omega_m\theta_0$ (commune à ces cercles) par rapport à l'un cercle générateur quelconque (ω); puis tirer la droite $E\varphi_\omega\varphi_2$, passant par ce pôle et par le centre radical E de la série de cercles générateurs (ω), (ω_3), ...; et par le point d'intersection de cette droite avec cette sécante mener la droite $\varphi_2\omega\sigma_0$, passant par le centre ω du cercle générateur considéré, laquelle coupera la droite CC_0 au point demandé.

Puisque le centre de (Ω) ou (Ω_0) est aussi le point milieu de la distance entre ces centres de deux cercles directeurs correspondants, il en résulte que, étant donnés deux cercles directeurs quelconques (E) et (I_n), si par les points d'intersection b et β d'un (E) de ces cercles directeurs avec un cercle générateur (ω), et par le pôle φ_ω de la sécante $\theta\Omega_m\theta_0$ (commune aux cercles directeurs) par rapport à ce cercle générateur nous tirons ses cordes $b\beta_0$ et $\beta\beta'$, la perpendiculaire $\omega\varphi_0C$ abaissée du centre ω sur la corde $\beta_0\beta'$ coupera CC_0 au point C_0 , centre du cercle directeur ($C_0\beta_0$) ou (I) correspondant du cercle (E); et par conséquent en prenant le point milieu σ_0 de la distance CC_0 entre les centres de ce couple de cercles correspondants, on a le centre de la conique engendrée (Ω), ou de la conique enveloppe (Ω_0).

Lorsque les cordes $b\beta_0$ et $\beta\beta'$ coïncident avec la polaire $\varphi_1\varphi_\omega$ du point φ_2 (fig. 5), le point σ_0 sera l'intersection de la droite CC_0 avec le rayon de (ω) perpendiculaire à cette droite; et alors nous n'aurons qu'un cercle directeur correspondant, qui représentera deux cercles coïncidents, et par suite il sera vraiment un cercle double, ayant le même centre que la conique (Ω).

Si nous considérons la conique (Ω') nous aurons un autre cercle directeur correspondant double.

Dans le cas où le point φ_2 est intérieur à (ω) (fig. 5 a) sa polaire étant extérieure le cercle directeur double deviendra imaginaire.

Donc:

A chaque série de cercles générateurs répond un cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire) dont le centre σ_0 est l'intersection de la droite CC_0 , qui joint les centres des cercles directeurs donnés (E) et (I) avec le rayon $\omega\sigma_0$ d'un quelconque (ω) de ces cercles générateurs, perpendiculaire à la droite $\varphi_1\varphi_\omega$ menée par le pôle φ_ω de l'axe radical des cercles directeurs, relatif au cercle gé-

nérateur considéré, et par le centre radical φ_1 de ces trois cercles (ω) , (E) , (I) .

On reconnaît de même que la tangente $\varphi_1\varphi_\omega$ à la conique (Ω_h) au point φ_ω coupe orthogonalement en p_φ le diamètre $\omega\sigma_o$ de sa conique homologique (Ω) lequel passe par le point ω homologue à ce point φ_ω ; et, réciproquement, la tangente $\varphi_1\omega$ à cette conique en ω coupe orthogonalement en p_ω le diamètre $\varphi_\omega E$ de cette conique-là.

Enfin, dans les coniques enveloppes et homologosyngènes (Ω_o) , (Ω_{h_o}) , étant respectivement les droites $\sigma\mu''$ et $E\varphi_\mu$ deux diamètres homologiques, nous aurons analoguement que, la tangente $\theta\varphi_\mu$ en φ_μ à (Ω_{h_o}) coupe orthogonalement en π_μ le premier diamètre; et, réciproquement, la tangente $\theta\mu''$ en μ'' à (Ω_o) coupe orthogonalement en π le second diamètre.

De tout ce qui précède il résulte ce théorème:

THÉORÈME XXIII. — Étant donnés deux cercles (E) et (I) le lieu géométrique des pôles de leur axe radical relatifs aux cercles d'une quelconque des deux séries de cercles qui les coupent sous des angles constants e et i est une conique (Σ_h) , ayant pour centre le centre radical de cette série de cercles. De plus, l'axe radical des cercles donnés, la tangente en un point quelconque de cette conique, et la droite passant par ce point et par le centre de cette courbe déterminent un triangle autopolaire par rapport au cercle sécant respectif, c'est-à-dire un triangle tel, que chaque sommet est le pôle du côté opposé; enfin cet axe radical coïncidera avec une sécante (réelle ou idéale) commune à cette même conique et à la conique (Σ) engendrée par les centres des cercles sécants et sera l'un axe de concours ou d'homologie de ces courbes, qui, par rapport à cet axe, sont homologosyngènes. D'ailleurs la tangente à l'une de ces coniques coupera orthogonalement dans l'autre conique le diamètre passant par le point homologue du point de contact de cette tangente.

59. En représentant (fig. 5) par ε_ψ , ε_φ et ε'_φ , ε'_ψ les deux couples de points d'intersection des tangentes $\theta\beta$ et $\theta\beta'$ au cercle (ω) aux points β et β' avec les deux tangentes θb et $\theta\beta_o$ aux points b et β_o nous auront le quadrilatère $\varepsilon_\varphi\varepsilon_\psi\varepsilon'_\varphi\varepsilon'_\psi$, $\theta\theta$ circonscrit à ce cercle, ayant pour diagonale les côtés $\varphi_\omega\varphi_2$, $\varphi_1\varphi_\omega$ et $\theta\theta_o$ du triangle autopolaire $\varphi_1\varphi_\omega\varphi_2$.

D'après cela le théorème mentionné en dernier lieu peut prendre l'énoncé suivant:

THÉORÈME XXIV. — *Étant donnée une série de cercles ayant même axe radical, tout cercle appartenant à l'une des deux séries de cercles qui les coupent sous des angles constants, coupera chaque couple de cercles correspondants de la série de cercles donnée en des points tels, que le quadrilatère complet circonscrit à ce cercle et le touchant à ces points aura cet axe radical pour diagonale, et les deux autres diagonales se couperont sur une conique, ayant l'une de ces diagonales pour tangente, l'autre diagonale passant par le centre de cette conique, ou par le centre radical de la série de cercles sécants.*

En outre, le quadrilatère complet, inscrit dans le cercle sécant, et ayant les points d'intersection considérés pour sommets, aura les deux autres sommets sur l'axe radical de la série de cercles donnés, ou coïncidant avec les points de concours des trois diagonales du quadrilatère circonscrit considéré; et des deux droites qui joignent ces sommets au centre du cercle sécant l'une sera tangente à la conique, lieu géométrique de ce centre, et l'autre passera par le centre de cette conique, ou par le centre du cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire).

(à suivre).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 23

Sommar a serie

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2^i \cdot x}{e^{2^i \cdot x} + 1}$$

onde é $k = 2^i$.

Temos primeiramente, decompondo a fracção

$$\frac{2x}{e^{2x} - 1} = \frac{2x}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$$

a identidade seguinte:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x + 1} + \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

Do mesmo modo será:

$$\frac{2x}{e^{2x} - 1} = \frac{2x}{e^{2x} + 1} + \frac{2^2x}{e^{4x} - 1}$$

$$\frac{2^2x}{e^{4x} - 1} = \frac{2^2x}{e^{4x} + 1} - \frac{2^3x}{e^{8x} - 1}$$

$$\frac{2^3x}{e^{8x} - 1} = \frac{2^3x}{e^{8x} + 1} + \frac{2^4x}{e^{16x} - 1}$$

.....

Das fórmulas precedentes deduz-se pois

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x + 1} + \frac{2x}{e^{2x} + 1} + \frac{4x}{e^{4x} + 1} + \dots +$$

$$+ \frac{kx}{e^{kx} + 1} + R,$$

pondo $k = 2^i$ e

$$R = \frac{2kx}{e^{2kx} - 1}.$$

Mas, por ser

$$e^{2kx} = 1 + 2kx + \frac{(2kx)^2}{1.2} + \frac{(2kx)^3}{1.2.3} + \dots,$$

temos

$$R = \frac{1}{1 + \frac{2kx}{1.2} + \frac{(2kx)^2}{1.2.3} + \dots},$$

logo será, para $i = \infty$,

$$\lim R = 0,$$

e portanto

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x + 1} + \frac{2x}{e^{2x} + 1} + \frac{4x}{e^{4x} + 1} + \dots$$

F. GOMES TEIXEIRA.

BIBLIOGRAPHIA

- M. d'Ocagne. — *Sur un algorithme algébrique.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.^o série, t. II).
 — *Théorie élémentaire des séries récurrentes.* (*Item*, t. III).

No primeiro artigo o sr. d'Ocagne faz applicação da theoria das funcções *aleph* ao desenvolvimento da fracção

$$\frac{1}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_p)}$$

em serie, mostrando que o coefficente de z^{-p-m} é a funcção *aleph* $(a_1 a_2 \dots a_p)^{(m)}$, d'onde deduz a funcção generatriz da funcção *aleph* $(a_1 a_2 \dots a_p)^{(m)}$, e uma relação notavel entre esta funcção e o denominador d'aquella fracção.

No segundo artigo o distincto geometra francez faz applicação das fórmulas obtidas no primeiro artigo ao calculo dos termos das series definidas pela lei de recurrencia

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2} + \dots + lU_{n-p},$$

e ao calculo da somma de um numero qualquer de termos d'estas series.

- L. Cordeiro. — *De como navegavam os portuguezes no começo do seculo XVI.* (Boletim da sociedade de geographia de Lisboa, vol. IV, 1883).

Estudo bibliographico a respeito de um livro encontrado na bibliotheca publica de Evora. Mostra o illustre secretario da sociedade de geographia de Lisboa que a primeira parte do livro intitulado *Tratado da Spera do mundo* não é outra cousa senão a

primeira traducção portugueza do Tractado da esphera de Sacrobosto, de que Pedro Nunes deu a segunda.

A segunda parte do livro considerado contem uma serie de regimentos astronomicos, que foram com certeza os usados pelos navegantes portuguezes do principio do seculo XVI, antes das descobertas de Pedro Nunes.

Mostra em seguida o sr. L. Cordeiro que o auctor do livro foi Gaspar Nicolas, natural de Guimarães, que floreceu no seculo XVI; e mostra tambem que provavelmente foi impresso em 1519 ou 1520.

Em seguida vem a transcripção dos regimentos, que são documentos importantes para a historia das sciencias nauticas, e que provam que os navegantes portuguezes não iam á sciencia estrangeira procurar as regras para se dirigirem sobre os mares.

L. Woodhouse. — Da integração das equações differenciaes da Dynamica. — Porto, 1883.

N'este trabalho, o distincto professor da Escola polytechnica do Porto expõe os principaes pontos da doutrina da integração das equações da Dynamica. Deduz as equações de Lagrange e a transformação de Hamilton; os theoremas de Liouville, Donkin e Poisson; o methodo de Jacobi para achar os integraes das equações da Dynamica; finalmente o abaixamento das variaveis effectuado por Bour, que o sr. Woodhouse expõe sem fazer, como este geometra, a restricção de que tem logar o principio das forças vivas.

Roberto Mendes. — Resistencia dos arcos metalicos. — Porto, 1883.

O estudo da resistencia dos arcos metalicos é muito importante em engenharia pela applicação que tem na construcção das pontes metalicas, e por isso o sr. Roberto Mendes escolheu este assumpto para a sua dissertação de concurso a uma cadeira da Escola polytechnica do Porto.

Na primeira parte do seu interessante opusculo estuda o auctor o problema da resistencia dos arcos metallicos com toda a generalidade, determinando as forças interiores desenvolvidas pela acção das forças exteriores, e determinando a deformação produzida por estas forças.

Na segunda parte considera especialmente os arcos circulares.

Tanto na primeira como na segunda parte segue principalmente os trabalhos de Bresse e Albaret.

J. M. Rodrigues. — *Memoria sobre a theoria da Balística* (Memorias da academia real das sciencias de Lisboa, 1884).

Tracta o sr. Rodrigues n'esta importante Memoria da integração das equações differenciaes do movimento da translação dos projecteis, suppondo a resistencia do meio uma funcção qualquer da velocidade.

Não podendo integrar estas equações differenciaes, Didion, Saint-Robert e Mayevski procuraram uma solução approximada do problema, substituindo as equações propostas por outras em que se póde fazer a separação das variaveis. O nosso illustre geometra faz notar na *Introduccão* que estes auctores não fizeram sentir a verdadeira natureza do erro commettido, e chega por varios processos á conclusão importante de que este erro consiste no desprezo do peso do projectil avaliado segundo a tangente á trajectoria.

Depois, na primeira parte da memoria, por uma analyse elegante, reduz a quadraturas o problema da integração das equações differenciaes do movimento dos projecteis esphericos, e dos resultados a que chega deduz os resultados achados por Mayevski e os erros d'estes resultados expressos por integraes definidos.

Na segunda parte da sua memoria faz o sr. Rodrigues applicação das fórmulas achadas na primeira parte ás leis adoptadas para exprimir a resistencia do ar, considerando as leis de Newton, Euler, e J. Bernouilli.

Na terceira parte estuda, por uma analyse semelhante, o movimento de translação dos projecteis oblongos.

Por esta curta noticia vê-se a importancia do trabalho do sr.

Rodrigues, pois que além de completar os trabalhos de Didion, Saint-Robert e Mayevski, dá uma solução completa do problema difficil da Balística.

J. A. Albuquerque.— Primeiros principios da theoria dos determinantes.— Paris, 1884.

É muito difficil escrever livros para o ensino. A escolha das materias, a ordem pela qual se distribuem, a fórma porque se expõem exigem tal attenção, que taes livros não devem ter publicidade sem serem maduramente pensados.

O opusculo do sr. Albuquerque satisfaz a todos os requisitos que se exigem em taes livros, e faz-nos desejar vivamente a publicação da Algebra, que promete no prefacio, e da qual o opusculo actual constitue um capitulo.

O seu auctor destina-o ao ensino dos lyceus, entendendo com razão que nos programmas da instrucção secundaria se deveria introduzir os principios da theoria dos determinantes para se poder estudar completamente a resolução das equações do primeiro grão com um numero qualquer d'incognitas.

Eis o assumpto de cada paragrapho:

- § I. Preliminares.
- § II. Definição de determinantes, sua notação e lei de formação.
- § III. Propriedades fundamentaes dos determinantes.
- § IV. Determinantes menores; suas propriedades.
- § V. Propriedades dos determinantes relativos á addição de linhas ou columnas. Decomposição dos determinantes de elementos polynomicos.
- § VI. Applicação á resolução das equações lineares.

No fim de cada paragrapho vem uma bem escolhida collecção de exercicios, correspondendo quasi todos a theoremas importantes na theoria dos determinantes.

Em quanto o estudo dos determinantes se não introduz nos lyceus, o livro do sr. Albuquerque é um excellente texto para se principiar o estudo dos determinantes nas nossas escolas supe-

riores, supprindo o professor verbalmente alguns pontos importantes de que o auctor se não occupou por ter só em vista a parte necessaria na Algebra elementar.

INDICE

M. A. Gonçalves.—*Equilibrio electrico nos conductores.*—Porto, 1884.

Foi escripto o presente opusculo para dissertação de concurso a uma cadeira da Escola polytechnica do Porto.

Principia o sr. Gonçalves por expôr a theoria geral do equilibrio electrico. Considera depois o equilibrio electrico no caso de duas esferas concentricas, de dois cylindros circulares com o mesmo eixo, de dois planos parallelos e das superficies de segunda ordem com centro.

Expõe depois o methodo das imagens electricas, do qual faz applicação á distribuição da electricidade sobre duas esferas que se cortam segundo um angulo submultiplo de dois rectos, ao caso de duas esferas que se não cortam, ao caso de duas esferas tangentes e ao caso de dois cylindros que não tem o mesmo eixo, mas cujas geratrizes são parallelas.

Termina pelo estudo do equilibrio electrico, no caso particular em que o potencial é funcção só de duas variaveis.

L. F. Marrecas Ferreira.—*Nota sobre uma questão de hydraulica* (*Revista de obras publicas*, tomo xv, 1884).

N'este artigo o nosso distincto engenheiro expõe um processo geometrico para determinar o ponto de escoamento nas rodas de cubos, mais simples e mais rigoroso do que o processo graphico habitualmente empregado. Do resultado a que chega deduz as condições para a roda dar um bom rendimento, e chega assim theoreticamente ás regras que a practica tem aconselhado.

G. T.

INDICE

- Nota sobre a independencia dos zeros da funcção Jacobiana de integraes abelianos normaes de primeira especie, por J. A. Martins da Silva, pag. 3.
- Nota sobre um problema de Mecanica Racional, pag. 9.
- Sobre os triedros homologicos, por A. F. Rocha Peixoto, pag. 17.
- Sobre alguns integraes definidos, por Duarte Leite Pereira da Silva, pag. 21.
- Homographies et involutions des ordres supérieurs, par le D.^r C. le Paige, pag. 27, 77.
- Sobre as equações trinomias, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 50.
- Sobre uma fórmula relativa á theoria das funcções ellipticas, por J. A. Martins da Silva, pag. 75.
- Determinação geometrica dos momentos de inercia dos solidos de revolução, por G. C. Lopes Banhos, pag. 125.
- Recherches relatives au cercle variable qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés, par A. Schiappa Monteiro, pag. 143.
- Solução da questão proposta n.º 23, por F. Gomes Teixeira, pag. 185.
- Bibliographia, pag. 24, 71, 120, 187.