

JORNAL
DE
SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. F. Gomes Teixeira

PROFESSOR DE MATHEMATICA NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA,
SOCIO CORRESPONDENTE DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA
E DA SOCIEDADE DE SCIENCIAS PHYSICAS E NATURAES DE BORDEAUX

~~~~~  
VOLUME V  
~~~~~

COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1883

JOURNAL

DE

SCIENCIAS MATEMATICAS E ASTRONOMICAS

NOTA SOBRE A INDEPENDENCIA DOS SEBROS NA FUNCAO LOGARITMA

DE INTERESSE PARA OS MATHEMATICOS E ASTRONOMICOS

1883

Dr. F. Gomes Teixeira

PROFESSOR DE MATHEMATICA NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
MILITARY COLLEGE OF THE ARMY IN THE UNIVERSITY OF LONDON
E NA SOCIEDADE DE CIENCIAS PHYSICAS E MATHEMATICAS DE COIMBRA

VOLUME V

COIMBRA

IMPRESSA NA UNIVERSIDADE

1883

NOTA SOBRE A INDEPENDENCIA DOS ZEROS NA FUNÇÃO JACOBIANA
DE INTEGRAES ABELIANOS NORMAES DE PRIMEIRA ESPECIE

POB

J. A. MARTINS DA SILVA

Representemos por

$$F(x, y) = 0$$

uma equação algebraica do grão m e irreductivel; e por

$$n^{(i)}(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q_i(x, y)}{F'y(x, y)} dx \dots \dots \dots (a)$$

todos os integraes abelianos normaes de primeira especie, sendo Q_i um polynomio inteiro do grão $m-3$, satisfazendo ás condições necessarias para que o integral conserve um valor finito sobre toda a esphera, variando o indice i de 1 a p . Os periodos normaes de ordem par d'estes integraes dados por integraes definidos seguindo cyclos convenientemente escolhidos satisfazem á condição necessaria e sufficiente, para que com estas constantes possamos formar uma serie convergente, definindo uma função Θ de Jacobi de p variaveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Suppondo agora nesta função as p variaveis substituidas pelas quantidades (a),

diminuidas de G_i constantes arbitrárias, temos, segundo a definição de Θ , a expressão

$$\Theta [n^{(i)}(x, y) - G_i] = A$$

e

$$A = \sum_{i=1}^{i=p} m_i [n^{(i)}(x, y) - G_i] + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=p} m_i m_k \alpha_{ik}.$$

Com respeito ás propriedades d'esta nova funcção, relativamente aos zeros, sabemos que admite p zeros satisfazendo as relações

$$\sum_{k=1}^{k=p} n^{(i)}(x_k, y_k) - G_i \equiv C_i$$

nas quaes as quantidades C_i são independentes das p quantidades arbitrárias G_i , que podem ser determinadas de modo que a funcção dada admitta p zeros dados.

Conhecidas estas propriedades particulares de Θ , vamos dar mais outra, que nos parece ter escapado ao sr. Briot quando expoz a theoria das funcções abelianas:

A funcção

$$\Theta [G_i - n^{(i)}(\xi, \tau)] \dots \dots \dots (b)$$

admite $p - 1$ zeros independentes do zero (ξ, τ) .

Com effeito, consideremos a curva $Q = 0$ do grão $m - 3$ que satisfaz as condições relativas aos pontos criticos, passa por $p - 1$ pontos (x_k, y_k) , e corta a curva $F = 0$ em outros $p - 1$ pontos (x'_k, y'_k) . Precisamos chegar á funcção

$$\Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(\xi, \tau) - C_i \right] \dots \dots (c)$$

pois feita esta transformação a funcção (b) possuirá a propriedade bem conhecida de (c), isto é, ter o zero (ξ, τ) , e os $p - 1$ zeros restantes independentes de (ξ, τ) .

Como a somma dos valores do integral abeliano normal $n^{(i)}(x, y)$ nos pontos de intervenção da curva $F = 0$ e da curva $Q = 0$, satisfazendo as condições relativas aos pontos criticos é equivalente á quantidade constante $2C_i$, temos

$$K_i \equiv 2C_i.$$

Tambem quando as quantidades arbitrarías G_i tiverem valores quaesquer, a funcção em questão admite p zeros que coincidem com os p pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_{p-1}, y_{p-1}), (\xi, \eta)$, constituindo assim as funcções integraes das equações abelianas

$$(d) \dots \dots n^{(i)}(\xi, \eta) = G_i + C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k).$$

Por outro lado, a somma dos valores contidos n'um integral abeliano de primeira especie nos pontos de intersecção da curva $F = 0$ e d'uma curva algebraica variavel, conserva um valor constante. Esta propriedade geral notabilissima descoberta por Abel dá

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) = K_i.$$

Por consequencia

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) \equiv 2C_i.$$

Logo

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) &= G_i + C_i - n^{(i)}(\xi, \eta) \\ \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) &= -G_i + C_i + n^{(i)}(\xi, \eta) \end{aligned} \right\}$$

d'onde podemos tirar

$$\left. \begin{aligned} G_i &= n^{(i)}(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(x'_k, y'_k)] \\ C_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) + n^{(i)}(x'_k, y'_k)]. \end{aligned} \right\}$$

Emfim, pelas relações acima consideradas achamos facilmente

$$\begin{aligned} &\ominus [n^{(i)} C(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \eta) + G_i] = \\ &= \ominus \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) - C_i \right] \end{aligned}$$

ou ainda, no segundo caso,

$$\begin{aligned} &\ominus [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \eta) + G_i] = \\ &= \ominus \left[n^{(i)}(x, y) - \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) + C_i \right]. \end{aligned}$$

Quando for $x = \xi$, $y = \eta$, resulta pois

$$\ominus [G_i - n^{(i)}(\xi, \eta)] = 0,$$

ficando os $p-1$ zeros restantes *independentes* de (ξ, η) , embora possamos determinar G_i de modo que a funcção dada admita p zeros dados.

Substituindo o valor de G_i em (b) obtemos

$$\Theta \left[\frac{\sum_{k=1}^{k=p-1} [n^{(i)}(x_k, y_k) - n^{(i)}(x'_k, y'_k)]}{2} \right] = 0.$$

Se se substituir agora o ponto fixo por outro ponto fixo (ξ', η') sem mudar os $p-1$ pontos (x_k, y_k) , formamos uma nova função admitindo o zero (ξ', η') e $p-1$ zeros restantes eguaes aos da primeira função. Como as duas funções teem $p-1$ zeros comuns, a relação

$$f(x, y) = \frac{\Theta [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi', \eta') + G_i]}{\Theta [n^{(i)}(x, y) - 2n^{(i)}(\xi, \tau) + G_i]}$$

é uma função da variavel (x, y) admitindo um unico zero (ξ', τ') e um unico infinito (ξ, τ) .

Vem a proposito, visto ter-se considerado as equações abelianas (d), o caso conhecido da indeterminação, havendo coincidência dos pontos (x_k, y_k) com os p pontos respectivos (ξ_k, η_k) situados sobre a curva $Q=0$ satisfazendo as condições relativas aos pontos criticos. A curva $Q=0$ corta $F=0$ em $2(p-1)$ pontos diferentes dos pontos criticos, a saber: os p pontos (ξ_k, η_k) e $p-2$ pontos restantes representados por (α_k, β_k) ; como n'estas circumstancias

$$G_i \equiv C_i - \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k)$$

podemos portanto apontar a condição seguinte para apparecer indeterminação

$$n^{(i)}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k);$$

resulta d'aqui

$$\Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-2} n^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) - C_i \right] =$$

$$= \Theta \left[n^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{k=p-1} n^{(i)}(x'_k, y'_k) - n^{(i)}(\xi, \eta) - C_i \right] =$$

$$= \Theta [n^{(i)}(x, y) - G_i] = 0.$$

NOTA SOBRE UM PROBLEMA DE MECANICA RACIONAL

POR

H. B.

Nos *Problemas de mecanica racional* do padre Jullien vem proposto (a pag. 158 do 2.º vol.) o seguinte exercicio, que foi estudado por Daniel Bernouilli nas *Memorias da Academia de Berlim*, em 1745:

«Introduzem-se diferentes pontos materiaes n'um tubo rectilineo, muito estreito mas pesado, que póde gyrar n'um plano horizontal, em torno de um dos seus pontos que está fixo. Tendo collocado os pontos a distancias conhecidas do centro de rotaçãõ, imprime-se ao tubo uma dada velocidade angular. Determinar o movimento do tubo e dos pontos materiaes.»

Daniel Bernouilli diz na sua *Memoria* que o problema lhe fôra proposto por Euler, no caso de um só ponto material, e que, tendo-o elle resolvido, propozera por sua vez a Euler o caso mais geral. Euler communicou-o tambem a Clairaut, e ambos o resolveram, mas não tinha ainda Bernouilli conhecimento das soluções quando publicou o seu estudo.

A mecanica moderna póde resolver este problema por uma simples applicação das suas equações geraes, como vamos vêr.

1. Seja M a massa do tubo e R o seu raio de geração em ordem á vertical do centro fixo, vertical que é o eixo da rotaçãõ. Designemos por θ o angulo que na epocha t o tubo fórma com a a sua posição inicial. A equação geral do movimento do tubo será

$$(1) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{N}{MR^2}$$

denotando por N a somma dos momentos das forças que sollicitam o tubo, em ordem ao eixo de rotaçãõ. Estas forças são: o peso

do tubo, cujo momento é zero, e as pressões dos diferentes pontos materiaes. Se P, P', P'', \dots forem projecções d'essas pressões sobre o plano horizontal, e r, r', r'', \dots as distancias dos pontos ao eixo, teremos

$$(2) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Pr + P'r' + P''r'' + \dots}{MR^2}$$

Para calcular P, P', P'', \dots , notemos que o movimento relativo de cada ponto sobre o tubo resulta da reacção R d'este ultimo e do peso do ponto (forças reaes), da força de inercia de arrestamento e da força centrífuga composta (forças ficticias). Esta ultima tem por valor $2m \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt}$, sendo m a massa do ponto (porque o movimento relativo é rectilíneo e tem a velocidade $\frac{dr}{dt}$); e actua no plano horizontal, perpendicularmente ao tubo e no sentido opposto ao da rotação. A força de inercia pôde decompor-se em

$$\text{centrífuga } m \frac{d\theta^2}{dt^2} r, \text{ e tangencial } m \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \text{ ou } mr \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(por isso que r deve aqui ser tomado como constante).

Esta componente tangencial de inercia tem evidentemente a mesma direcção e sentido que a força centrífuga composta; e como a componente centrífuga da força de inercia é a unica força que não é normal ao tubo, segue-se que a pressão do ponto m será a resultante do peso, da força centrífuga composta e da tangencial de inercia.

P será pois a somma d'estas duas ultimas forças, e P', P'', \dots terão valores analogos.

Substituindo em (2) e notando que os momentos de P, P', \dots são negativos, teremos

$$(3) \dots\dots\dots \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{m \left(2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + m' \left(2r' \frac{d\theta}{dt} \frac{dr'}{dt} + r'^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + \dots}{MR^2}$$

As equações do movimento relativo dos pontos serão evidentemente

$$(4) \dots\dots\dots \frac{d^2r}{dt^2} = r \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = r' \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

⋮
⋮
⋮

As equações (3) e (4) resolvem o problema.

2. É facil exprimir primeiro r' , r'' , . . . em r sómente. Assim, eliminando θ entre as duas primeiras equações (4), vem

$$r' \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d^2r'}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad r' \frac{dr}{dt} - r \frac{dr'}{dt} = \text{constante}$$

e como no começo do movimento é $\frac{dr}{dt} = 0 = \frac{dr'}{dt}$, segue-se que a constante é nulla.

Teremos pois

$$\frac{dr}{r} = \frac{dr'}{r'} \quad \text{ou} \quad r = cr';$$

sejam a e a' os valores iniciaes de r e r' ; será

$$a = ca' \quad \text{ou} \quad c = \frac{a}{a'}$$

e portanto

$$\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'}$$

E como as outras equações (4) são da mesma forma, podemos concluir que é

$$\frac{r}{a} = \frac{r'}{a'} = \frac{r''}{a''} = \dots \quad (4)$$

3. Substituindo agora em (3) r', r'', \dots e $\frac{dr'}{dt}, \frac{dr''}{dt} \dots$ pelos seus valores em função de r e $\frac{dr}{dt}$, vem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{\left(2r \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + \dots\right)}{MR^2},$$

equação que podemos escrever do seguinte modo, fazendo para abreviar $m + m' \frac{a'^2}{a^2} + \dots = A$

$$\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{2Ar \frac{dr}{dt}}{MR^2 + Ar^2}.$$

Integrando, temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{MR^2 + Ar^2},$$

e, para determinar C , notemos que é dada a velocidade angular inicial; designando-a por ω , será

$$\omega = \frac{C}{MR^2 + Aa^2}$$

e portanto

$$(2) \dots \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{MR^2 + a^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}{MR^2 + r^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}$$

Esta equação dá o valor da velocidade angular em função de r .

4. Substituindo na primeira equação (4) $\frac{d\theta}{dt}$ pelo seu valor (2), vem

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 \frac{(MR^2 + Aa^2)^2}{(MR^2 + Ar^2)^2} r;$$

ou, multiplicando por $2 \frac{dr}{dt}$ e integrando

$$\frac{dr^2}{dt^2} = -\omega^2 (MR^2 + Aa^2)^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{MR^2 + Ar^2} + C.$$

Para determinar C fazamos $\frac{dr}{dt} = 0$ e $r = a$. Vem assim

$$C = \frac{MR^2 + Aa^2}{A} \omega^2$$

e portanto será

$$(3) \dots \frac{dr^2}{dt^2} = \omega^2 (r^2 - a^2) \frac{MR^2 + a^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}{MR^2 + r^2 \left(m + m' \frac{a'^2}{a^2} + m'' \frac{a''^2}{a^2} + \dots \right)}$$

Esta equação dá o valor da velocidade relativa do ponto m , em função de r . Dividindo (α) pela raiz quadrada de (β) eliminamos o tempo, e temos assim a equação diferencial entre as coordenadas θ e r . O valor de θ em função de r fica dependente de uma quadratura; mas apenas examinaremos um caso particular, que Jullien também propõe. É o caso de se desprezar a massa do tubo.

Fazendo $M = 0$ nas fórmulas (α) e (β) teremos

$$(\alpha') \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2\omega}{r^2} \quad (\beta') \quad \frac{dr^2}{dt^2} = \omega^2 a^2 \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2}.$$

Eliminando o tempo vem

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \quad \text{ou} \quad d\theta = \frac{d \cdot \frac{r}{a}}{\frac{r}{a} \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}}$$

ou ainda

$$\theta = \text{arc sec } \frac{r}{a} + C.$$

Para $\theta = 0$ é $r = a$; logo é $C = 0$, e portanto

$$a = r \cos \theta.$$

As trajetórias absolutas dos diferentes pontos materiais são pois linhas rectas, perpendiculares á posição inicial do tubo. A equação (β') ainda nos dá

$$a\omega dt = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

ou (por ser $r = a$ para $t = 0$)

$$r^2 = a^2 (1 + \omega^2 t^2).$$

Cada um dos moveis percorre pois a sua trajectoria absoluta com movimento uniforme, e a velocidade d'este movimento é $a\omega$ para o ponto m , $a'\omega$ para m' , etc.

Todos estes resultados eram faceis de prevêr, e por isso este caso particular pôde servir de verificação das fórmulas estabelecidas.

Outra solução

5. Em vez de determinar as pressões dos pontos sobre o tubo e de recorrer á equação (1), podemos applicar directamente a todo o systema constituido pelo tubo e pelos pontos a equação dos momentos

$$\sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX).$$

O segundo membro é nullo, porque as forças exteriores se reduzem ao peso, e por isso teremos

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{constante};$$

ou, passando ás coordenadas polares,

$$\sum mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} = \frac{d\theta}{dt} \sum mr^2.$$

Mas evidentemente é

$$\sum mr^2 = MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots;$$

logo será

$$(e) \dots \dots \frac{d\theta}{dt} (MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots) = \text{constante}.$$

E como na epocha inicial é

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad r = a \quad r' = a' \quad \dots$$

teremos

$$(e') \dots\dots\dots \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{MR^2 + ma^2 + m'a'^2 + \dots}{MR^2 + mr^2 + m'r'^2 + \dots}$$

Se em (e') substituirmos como anteriormente r' , r'' , ... pelos seus valores em r , teremos immediatamente a equação (α).

6. O methodo seguido por Daniel Bernouilli reduz-se, no fundo, a este; porque o theorema que o eminente geometra estabelece na sua *Memoria* citada, e que lhe serve de base para a resolução do problema, não é mais do que a interpretação da equação (e).

SOBRE OS TRIEDROS HOMOLOGICOS

POR

A. F. ROCHA PEIXOTO

Professor na Universidade de Coimbra

Em geometria do espaço são fórmulas *correlativas* ou *reciprocas*:

- a) a *pontual* e o *feixe de planos*;
- b) o *plano pontual* e a *estrella*, sendo o plano o elemento movel gerador d'esta;
- c) o *plano regrado* e a *estrella*, sendo a recta o elemento movel gerador.

O *feixe de raios* é uma fórmula correlativa de si mesma; admite portanto dous elementos geradores.

Effectivamente da *pontual*, uma serie de *pontos* situados na mesma linha recta, deriva o *feixe de planos*, uma serie de *planos* que passam pela mesma linha recta — *eixo do feixe* —, por meio da substituição reciproca dos pontos por planos; pela mesma fórmula, do *plano pontual*, uma serie de *pontos* situados no mesmo plano, deriva uma serie de *planos* que passam pelo mesmo ponto, o qual é centro da fórmula geometrica derivada, a *estrella*; como emfim, tambem pela mesma substituição, do *plano regrado*, uma figura formada de linhas rectas e de pontos que estão no mesmo plano, deriva a *estrella*, sendo o seu elemento gerador o raio ou a linha recta, porque esta fórmula geometrica é composta de rectas e de *planos que passam pelo centro d'ella*, isto é, por um mesmo ponto.

Estas applicações da *dualidade geometrica* estendem-se ás propriedades das figuras, do que deriva immediatamente um processo prompto e fecundo de demonstração com o caracter generalizador.

Assim propriedades dos triangulos conduzem immediatamente ao descobrimento e á demonstração de propriedades dos triedros,

porque estas figuras, systemas de tres *planos* que passam pelo mesmo *ponto* sem que tenham uma linha commum, são *correlativas* dos triangulos, systemas de tres *pontos* que estão no mesmo *plano*, sem que estejam em linha recta. Consequentemente a *homologia* dos triedros é *correlativa* da dos triangulos.

As propriedades dos triangulos *homologicos*, as quaes subsistem sempre junctamente, sendo uma consequencia da outra, são as seguintes:

As intersecções dos lados correspondentes estão na mesma linha recta; e

Concorrem no mesmo ponto as rectas que unem os pontos correspondentes.

D'estas, pela substituição reciproca do *ponto* por *plano*, são derivadas as dos triedros *homologicos*:

Os planos das arestas correspondentes passam por uma mesma linha recta, formando portanto um feixe de tres planos; e

Estão situadas no mesmo plano as intersecções das faces correspondentes;

propriedades que subsistem conjunctamente com as dos triangulos *homologicos*.

Demonstra-se tambem directamente que uma d'estas propriedades dos triedros *homologicos* é consequencia da outra.

Sejam $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$ dous triedros homologicos, na notação de Cremona, que satisfaçam á primeira das duas referidas condições; isto é, cortem-se as arestas correspondentes $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$; $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$; $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. N'este caso o primeiro par d'arestas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determina um plano que passa pela linha dos vertices dos triedros *homologicos*; o segundo e o terceiro determinam dous planos, cada um dos quaes passa pela mesma linha recta.

Se estes triedros têm vertices diferentes, as intersecções das arestas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$, e $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um triangulo, porque cada um d'estes pontos está em cada uma das tres arestas de cada triedro. Estes tres pontos, vertices do triangulo considerado, são: $\alpha\beta$. $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$. $\alpha'\gamma'$ e $\beta\gamma$. $\beta'\gamma'$; o que mostra que o primeiro ponto é commum ás faces α , α' , β e β' ; o segundo ás faces α , α' , γ e γ' ; e o terceiro ás faces β , β' , γ e γ' . Pelo primeiro e pelo segundo d'estes pontos passa portanto a recta $\alpha\alpha'$; pelo primeiro e terceiro a recta $\beta\beta'$; pelo segundo e terceiro a recta $\gamma\gamma'$. Estas tres rectas estão portanto no mesmo plano.

Esta demonstração é de Cremona; deriva immediatamente da notação por elle adoptada. E assim é verificada tambem a grandissima importancia da mesma notação.

Sendo os mesmos os vertices dos triedros, a demonstração do theorema deriva immediatamente d'uma das duas operações fundamentaes de *geometria projectiva* — a de *projectar*. D'um ponto qualquer projectemos a figura que representa a primeira das propriedades acima mencionadas dos *tringulos homologicos*. Teremos assim dous triedros com o mesmo vertice, o centro de projecção; as intersecções das faces *correspondentes* existem todas tres no mesmo plano do eixo de *homologia* e do escolhido centro de projecção; e os planos das arestas *correspondentes* passam todos tres pela mesma recta, a que une o mesmo centro de projecção e o *centro d'homologia*.

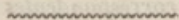
O transporte d'um de dous triedros *homologicos* de vertices differentes, parallelamente a elle mesmo, até que o seu vertice coincida com o do outro, demonstra isto mesmo. D'este modo as intersecções das faces *correspondentes* são transportadas parallelamente a si mesmas; e, se assim não ficarem no mesmo plano como antes da coincidencia dos vertices dos triedros, ha de succeder que uma das mesmas intersecções ha de ficar mais distante ou mais proxima do plano em que todas tres estavam situadas quando eram differentes os vertices dos triedros. Continuando o transporte no mesmo sentido, succederá que as intersecções consideradas estarão em planos differentes, em triedros de vertices differentes, contra o que está directamente demonstrado.

Se dous triedros $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$ têm no mesmo plano as rectas $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ e $\gamma\gamma'$, intersecções das faces *correspondentes*, as rectas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um plano; as rectas $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$ outro; as rectas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$ um terceiro; e todos estes planos passam por uma mesma linha recta. As rectas $\alpha\alpha'$ e $\gamma\gamma'$ cortam-se n'um ponto $\alpha\alpha' \cdot \gamma\gamma'$; por este ponto passam os planos α , α' , γ , γ' e portanto as rectas $\alpha\gamma$ e $\alpha'\gamma'$, que assim determinam um plano. Do mesmo modo se reconhece que as arestas $\beta\gamma$ e $\beta'\gamma'$ determinam um plano; e que as arestas $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$ determinam outro.

Se os triedros têm vertices differentes, é evidente que por ambos, e portanto pela recta que os une, passa cada um d'estes planos.

Transportando-se os mesmos triedros, de modo que os seus

vertices percorram a linha que os une, hão de chegar á posição de terem os mesmos vertices reunidos n'um só ponto. N'este transporte os planos das arestas *correspondentes* são levados parallelamente a elles mesmos; sendo portanto transportada parallelamente a si mesma a recta da intersecção commum aos mesmos planos. Assim fica demonstrado que ainda n'este caso os planos das arestas *correspondentes* constituem um feixe.



SOBRE ALGUNS INTEGRAES INDEFINIDOS

POR

DUARTE LEITE PEREIRA DA SILVA

Os integraes obtidos a pag. 87 do vol. IV d'este jornal podem-se achar por um outro processo mais directo e geral, o do methodo das substituições.

Com effeito

$$\begin{aligned} au + bv &= \text{sen } x(ax + b) + \text{cos } x(a - bx) \\ &= (ax + b) \frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}} + i(a - bx) \frac{e^{2ix} + 1}{2ie^{ix}} \\ &= \frac{1}{2ie^{ix}} [e^{2ix}(x + i)(a - bi) + (i - x)(a + bi)] \\ &= \frac{(i - x)(a + bi)}{2ie^{ix}} \left[e^{2ix} \frac{x + i}{i - x} \frac{a - bi}{a + bi} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Pondo

$$z = e^{2ix} \cdot \frac{x + i}{i - x} \cdot \frac{a - bi}{a + bi},$$

virá

$$dz = 2i \frac{a - bi}{a + bi} e^{2ix} \frac{x^2}{(i - x)^2} dx$$

e

$$(au + bv)^2 = \frac{(i - x)^2 (a + bi)^2}{-4e^{2ix}} [z + 1]^2.$$

D'onde

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)} = \int \frac{1}{[z + 1]^2} \cdot \frac{-4x^2 e^{2ix}}{(i-x)^2 (a+bi)^2} dx = \frac{2i}{a^2 + b^2} \int \frac{dz}{(z+1)^2}.$$

Logo

$$\int \frac{x^2 dx}{(au + bv)^2} = -\frac{2i}{a^2 + b^2} \frac{1}{z+1} + \text{const.}$$

$$= -\frac{2i}{a^2 + b^2} \frac{(i-x)(a+bi)}{2ie^{ix}(au+bv)} + \text{const.}$$

$$= -\frac{1}{a-bi} \frac{(i-x)e^{-ix}}{au+bv} + \text{const.}$$

$$= -\frac{1}{a-bi} \frac{iu+v}{au+bv} + \text{const.}$$

$$[1] \quad = -\frac{1}{a-bi} \frac{iu+v}{au+bv} + \frac{1}{b(a-bi)} + \text{const.}$$

$$[2] \quad = -\frac{u}{b(au+bv)} + \text{const.}$$

No nosso artigo demos por engano de copia o valor

$$\int \frac{x^2 dx}{au+bv} = -\frac{u}{(au+bv)}.$$

Se se executarem os calculos indicados no alto da pag. 89, não se chegará a este valor; mas sim ao verdadeiro

$$[1] + [2] = \frac{u}{b(au+bv)}.$$

Quanto aos outros integraes

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2},$$

deduzem-se facilmente de [1] ou [2] fazendo

$$a = b, b = 0; \quad a = 0, b = 1.$$

O integral

$$\int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2}$$

obtem-se, pondo

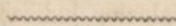
$$z = \operatorname{cotg} x + x,$$

d'onde

$$dz = -\frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{adx}{[a + (ax + b) \operatorname{tg} x]^2} &= -\int \frac{adz}{[az + b]^2} = \frac{1}{az + b} \\ &= \frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$



D. G. Lemaire, professeur à l'école normale de la ville de Bruxelles, 1882.

BIBLIOGRAPHIA

C. le Paige. — *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre.*
Bruxelles, 1882.

N'esta importante Memoria tracta o sabio professor da universidade de Liège de resumir e expôr ordenadamente as suas indagações sobre Geometria superior, publicadas em algumas das principaes Collecções scientificas da Europa.

O capitulo primeiro é destinado ao estudo das homographias de terceira ordem, e ahi faz o sr. Paige applicação dos seus estudos de Algebra moderna, relativos ás fórmãs trilineares simples e aos systemas de duas fórmãs trilineares.

No capitulo segundo tracta-se das involuções de terceira ordem. Poncelet concebeu estas involuções, e estudou detidamente as de primeira classe. O sr. Paige foi um dos primeiros a occupar-se das de classe superior na sua importante — *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie.*

A theoria de involução leva ao estudo das razões anharmonicas e dos grupos polares, para o que são destinados os capitulos quarto e quinto.

Como se vê, a Memoria do illustre geometra belga é muito importante, e damos por isso noticia d'ella aos leitores d'este jornal, tanto mais que principia hoje a publicar-se n'elle um trabalho importante sobre o mesmo assumpto com que o sr. Paige o quiz illustrar.

D. G. Vicuña. — *Introducción á la teoría matemática de la electricidad.* — *Madrid, 1885.*

N'este precioso opusculo o illustre professor de physica mathematica da universidade de Madrid, o sr. Vicuña, estuda d'uma

maneira clara, simples e precisa os problemas fundamentaes da theoria mathematica da electricidade, hoje quasi completamente constituida, graças aos trabalhos de muitos physicos e geometras d'este seculo.

A exposição é feita de modo que possa ser facilmente comprehendida pelos que conhecem apenas os elementos da analyse infinitesimal.

Não tendo espaço para darmos uma idéa completa de todas as questões de que o sr. Vicuña se occupa, indicaremos ao menos o assumpto de cada capitulo:

- Capitulo I. Potencial.
- Capitulo II. Equilibrio.
- Capitulo III. Condensadores.
- Capitulo IV. Energia e correntes.
- Capitulo V. Unidades electricas.
- Capitulo VI. Relações com a thermologia.

Quem quizer estudar esta parte importante da Physica tem um guia magnifico no livro do sr. Vicuña.

H. G. Zeuthen. — Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative.

N'este artigo, publicado nas *Actas mathematicas*, apresenta o eminente geometra dinamarquez theoremas importantes relativos ao problema da determinação do numero de intercessões de duas curvas, que se confundem no mesmo ponto.

A questão do meridiano universal. — Lisboa, 1885.

N'este folheto, publicado pela *Sociedade de Geographia de Lisboa*, está o parecer d'esta Sociedade relativamente ao meridiano a adoptar para origem da contagem das longitudes, bem

como os pareceres de algumas corporações doudas nacionaes que esta Sociedade consultou a este respeito.

Tanto a Sociedade de Geographia como a maior parte d'estas corporações acceitam o meridiano que passa pelo Observatorio de Greenwich, por ser este Observatorio um dos principaes do mundo, por estarem a elle referidas a maior parte das cartas nauticas usadas, por ter sido já adoptado pela Russia e pelos Estados Unidos da America no que respeita á navegação, etc.

G. T.

HOMOGRAPHIES ET INVOLUTIONS DES ORDRES SUPÉRIEURES

PAR LE

D^r. C. LE PAIGE

Professeur de Géométrie Supérieure à l'université de Liège

Homographies

I. *Définition: Lorsque n figures fondamentales du premier rang (Gebilde erster Stufe) et de même espèce sont telles que (n-1) éléments étant pris dans (n-1) de ces figures, un élément de la dernière est déterminé sans ambiguïté, ces n figures forment une homographie du n^{me} ordre et du (n-1)^{me} rang.*

Nous désignerons l'ensemble de tels groupes de n éléments par la notation H_{n-1}^n .

Pour éclaircir cette définition, considérons trois faisceaux de plans ayant respectivement pour axes trois droites X, Y, Z.

Si, lorsque l'on choisit un plan dans chacun des faisceaux X et Y, il ne leur correspond qu'un seul plan du faisceau Z, ces trois faisceaux forment une homographie H_2^3 .

La même chose aurait lieu pour trois ponctuelles.

Imaginons, par exemple, un système doublement infini de surfaces du second ordre passant par sept points a, b, c, d, x, y, z. Ces surfaces marqueront sur trois droites X, Y, Z passant par x, y, z des ponctuelles ξ, η, ζ appartenant à une H_2^3 .

Les groupes communs à deux, trois, ... n-k homographies H_{n-1}^n , forment une homographie $H_{n-2}^n, H_{n-3}^n, \dots H_k^n$.

D'après cela, il est visible que, dans une homographie H_k^n ,

chaque groupe de k éléments caractérise un nombre fini et déterminé de groupes de n éléments.

Il résulte, de la définition même, que si, dans une H_{n-1}^n , on laisse fixe un, deux, . . . p éléments, il correspond, à ces éléments une H_{n-2}^{n-1} , H_{n-3}^{n-2} , . . . H_{n-p-1}^{n-p} .

Par suite, dans une homographie H_k^n , à un groupe de k' éléments, $k' < k$, il correspond une $H_{k-k'}^{n-k'}$, car H_k^n , provenant de $(n-k)$ homographies H_{n-1}^n , si on choisit k' éléments, il leur correspondra les $(n-k)$ homographies $H_{n-1-k'}^{n-k'}$, et, par définition, les groupes communs à ces dernières constitueront une $H_{k-k'}^{n-k'}$.

Ces propriétés devant nous servir dans la suite, nous en donnerons un exemple particulier.

Supposons quatre droites arbitraires L, M, N, P situées d'une façon quelconque dans l'espace. Tous les plans de l'espace marquent, sur ces droites, des séries de points. Chaque groupe de quatre points est déterminé par trois d'entre eux. Il en résulte que l'ensemble des groupes de quatre points constitue une H_3^4 .

Cette homographie n'est pas la plus générale possible, comme nous avons eu l'occasion de le faire voir (*), mais elle suffit pour éclaircir les idées essentielles dont nous venons de parler.

Si, sur L nous choisissons un point l , il est visible que tous les plans passant par l coupent M, N, P suivant une H_2^3 .

Si nous considérons deux points l et m , tous les plans passant par lm marquent, sur N, P , deux séries homographiques dans le sens ordinaire, c'est-à-dire une H_1^2 .

Concevons maintenant sur L deux points l, l' . A chacun de ces points correspond une H_2^3 . Nous aurons donc, sur M, N, P deux homographies H_2^3, H_2^3 . L'ensemble des groupes communs à H_2^3, H_2^3 constitue une homographie H_1^3 .

Tous les plans passant par ll' marquent sur M, N, P des groupes de H_1^3 ; mais de plus toutes les droites qui s'appuient sur

(*) Voir *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. XVII.

M, N, P marquent aussi des groupes de H_1^3 , car par une de ces droites et l ou l' , on peut faire passer un plan.

A un point m de M, par exemple, correspond un groupe donné par le plan $l'm$ et un groupe donné par la droite qui passe par m et s'appuie sur N, P.

En général, dans une H_{n-1}^n , un groupe de $n - 1$ points étant donné, il ne lui correspond qu'un seul point, parfaitement déterminé, qui complète le groupe de n points. Cependant il peut arriver, par un choix convenable des $(n - 1)$ points que celui qui leur correspond soit indéterminé. Ces groupes de $(n - 1)$ points constituent des *éléments neutres*.

Dans une H_{n-1}^n , les éléments neutres forment une H_{n-3}^{n-1} (*).

Reprenons l'exemple du système doublement infini de surfaces du second ordre, qui marquent sur X, Y, Z une H_2^3 .

Par a, b, c, d, x, y, z , on peut faire passer une surface du second ordre ayant X pour génératrice: cette surface coupe Y, Z en des points y_x, z_x .

Nous aurons, de la même manière, $x_y, z_y; x_z, y_z$.

Maintenant, il est visible que, dans ce mode de représentation d'une H_2^3 , au couple (y_x, z_x) correspond un point quelconque de de X.

Nous avons ainsi les trois couples neutres

$$(x_y z_y), (x_z y_z), (y_x z_x);$$

mais, en outre, nous avons les trois autres couples neutres

$$(x_y y_x), (y_z z_y), (z_x x_z).$$

Il suffira de le montrer pour l'un d'eux.

Si l'on considère les deux surfaces du système qui ont pour

(*) Il est bien évident qu'il s'agit des groupes de $(n - 1)$ éléments pris dans $(n - 1)$ séries, qui laissent indéterminé l'élément de la dernière série.

génératrices, respectivement X et Y, nous aurons les deux systèmes suivants de points appartenant chacun à une surface

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, x_z, y_x, z_x),$$

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, y_x, y_z, z_y).$$

Puisque, par les neuf points

$$(a, b, c, d, x, y, z, x_y, y_z)$$

passent deux surfaces, ces points sont sur une courbe gauche G_4 de première espèce: donc par ces neuf points passeront une infinité de surfaces. L'une d'entre elles sera déterminée par G_4 et par un point quelconque de Z.

Dans l'homographie H_3^4 , que nous avons également mentionnée plus haut, l'homographie H_1^3 marquée sur M, N, P, dont nous avons parlé constitue précisément l'ensemble des éléments neutres lorsque le point de L doit rester indéterminée.

Dans une H_{n-1}^n , à un groupe de $(n-2)$ points correspond, en générale, une H_1^2 .

Cependant, il peut se faire que cette homographie H_1^2 soit complètement indéterminée.

Les groupes de $(n-2)$ points qui jouissent de cette propriété sont des *éléments doublement neutres*.

Dans une H_{n-1}^n , les éléments doublement neutres constituent une H_{n-6}^{n-2} .

A moins de relations particulières, les homographies H_{n-1}^n ne possèdent donc d'éléments doublement neutres qu'à partir de $n=6$.

Il peut exister, de même, des éléments duplement, quadruplement neutres, etc. Leur définition n'est pas nécessaires après ce qui précède.

Voici un exemple spécial d'éléments doublement neutres dans une H_3^4 .

Supposons que l'on ait un système triplement infini de surfaces du second ordre passant par six points l, m, n, p, a, b . Ce système de surfaces marquera sur quatre droites L, M, N, P passant par l, m, n, p une H_3^4 . Or, il peut se faire que par les six points donnés passe une surface du second ordre ayant L et M pour génératrices.

Cette surface coupera N et P en deux points formant un couple doublement neutre. On s'aperçoit en effet, sans peine, que deux points quelconques pris sur L et M complètent le groupe dont fait partie le couple neutre.

Homographies H_{n-2}^n . — Ces homographies étant déterminées par les groupes communs à deux homographies du même ordre et du rang $(n-1)$, on voit que si l'on choisit $(n-2)$ points, il leur correspond, dans chacune des homographies fondamentales, une H_1^2 . Les deux homographies ainsi définis ont, en général, deux couples communs. Par suite, à chaque groupe de $(n-2)$ points correspondent deux groupes complets de n points.

Par un choix convenable des $(n-2)$ points, il peut se faire que les deux homographies H_1^2 n'aient qu'un couple commun, on plutot que les deux couples coïncident.

Ces groupes de $(n-2)$ points sont des *groupes de ramification*; les points que leur correspondent sont des *éléments doubles*. $(n-3)$ points, pris arbitrairement, déterminent quatre groupes de ramification.

En général $(n-2)$ éléments déterminent, comme on vient de le voir, deux groupes complets de n éléments, ou un seul, dans le cas particulier où les $(n-2)$ points sont de ramification.

Il peut aussi arriver que les deux derniers points, sans être complètement arbitraires, constituent des couples, en nombre infini, appartenant à une homographie.

Il suffira, pour cela, que dans les deux homographies H_{n-1}^n il corresponde, à ce groupe, deux homographies H_1^2 identiques, c'est-à-dire ayant trois couples communs.

Ces groupes de $(n-2)$ points sont caractérisés par $(n-5)$ points que déterminent un ou plusieurs termes completant le groupe.

Nous dirons que de pareils groupes constituent des *éléments neutres de second espèce*.

Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations: nous aurons l'occasion de signaler, au fur et à mesure que nous avancerons dans notre étude des exemples particuliers de ces éléments spéciaux.

D'après ce qui précède, on comprend bien que dans les homographies du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang, il peut se présenter des éléments satisfaisant à ces diverses définitions. Nous aurons notamment, dans ces homographies, à tenir compte des éléments neutres, des éléments de ramification et des points doubles car nous verrons qu'ils jouent un rôle prépondérant.

Nous ne croyon pas utile d'étendre, pour le moment, ces remarques aux homographies H_{n-3}^n , H_{n-4}^n , etc.

Le lecteur suppléera facilement à ce qui peut manquer ici.

Jusqu'à présent nous avons supposé que les n séries d'éléments sont distribuées sur n supports distincts.

Une projection ou une section permet de les considérer sur un support unique.

Si, par exemple, on coupe trois faisceaux de plans en H_2^3 par une droite, on obtient sur celle-ci, trois séries homographiques superposées.

Dans ce cas, outre les éléments particuliers que nous avons signalés, il existe des *éléments unis*, qu'il ne faut pas, en général, confondre avec les *éléments doubles*.

Quand, en un point, sont réunis $(k+1)$ éléments appartenant à $(k+1)$ séries, d'une H_k^n , nous dirons qu'ils constituent un élément uni d'ordre $(k+1)$. En général, nous désignerons un tel élément par la notation U_{k+1} .

A moins de conditions particulières, l'ordre des éléments unis ne dépassera pas le rang de l'homographie, augmenté d'une unité.

Une H_{n-1}^n possède n éléments U_n , quand les n séries sont distribuées sur un support unique.

On peut déterminer, de même, les éléments unis dans des homographies H_k^n .

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une H_{n-2}^n .

D'après la définition, si nous choisissons arbitrairement les

$(n-2)$ premiers points, il leur correspond deux H_1^2 , ayant deux couples communs.

Par suite, la relation entre les séries d'éléments sera telle, que $(n-2)$ éléments étant choisis, il leur correspond deux éléments dans chacune des séries restantes.

Il en résulte que, pour chaque combinaison de $(n-1)$ séries, il existe $2(n-1)U_{n-1}$.

D'après cela, en général, il suffira de multiplier ce nombre par les combinaisons de $(n-1)$ séries prises parmi les n considérées.

Donc

Une H_{n-2}^n possède $1.2.(n-1)C_{n,n-1}U_{n-1}$.

Des considérations analogues nous mènent à la propriété suivante:

Une H_k^n possède $\frac{1.2.3 \dots n}{1.2.3 \dots k+1} (n-k)(k+1)U_{k+1}$.

Ces éléments unis n'ont pas cependant, nous semble-t-il, une importance aussi grande, que les éléments spéciaux que nous avons signalés d'abord.

En premier lieu, on peut observer qu'ils ne jouissent pas de propriétés projectives, lorsque les centres ou les axes de projection varient pour chaque série. La considération de ces éléments n'aura donc qu'une importance secondaire, surtout tant qu'il s'agira des séries homographiques les plus générales. Il n'en sera plus tout à fait de même, dans le cas où ces homographies seront particularisées.

Définition algébrique des homographies. — Nous pouvons supposer que, sur chaque support, un élément soit défini par un paramètre unique, ou, en employant des coordonnées homogènes, par deux paramètres.

Alors, en partant de la définition que nous avons donnée en commençant, une homographie H_{n-1}^n sera définie par une relation de la forme

$$f = 0, \quad (1)$$

où f représente une forme binaire à n séries de variables.

$$f \equiv a_x a'_y a''_z \dots a_w^{(n-1)}$$

D'une manière explicite, nous écrivons

$$f \equiv \sum a_{ijkl\dots m} x_i y_k z_l \dots u_m.$$

Les indices i, k, l, \dots, m peuvent prendre les valeurs 1 et 2. De là résulte immédiatement que f a 2^n termes.

En conséquence

Une homographie H_{n-1}^n est caractérisée par $(2^n - 1)$ groupes de n éléments.

Il faut observer que ces groupes ne doivent pas dépendre les uns des autres, c'est-à-dire doivent être complètement arbitraires; en d'autres termes, les $(2^n - 1)$ équations linéaires que l'on obtiendra doivent admettre un système de solutions finies et déterminées pour les rapports des coefficients de f .

Il serait difficile, nous semble-t-il, dans l'état actuel de la Géométrie, de se passer de la considération de l'équation (1) pour établir, au moins en général, le théorème que nous venons d'énoncer et qui sert de fondement à une grande partie de la théorie de ces groupes d'éléments.

De cette propriété résulte immédiatement qu'une H_{n-2}^n est caractérisée par $(2^n - 2)$ groupes de n points.

En effet, si l'on choisit $(2^n - 1)$ groupes complètement arbitraires, ils ne pourront appartenir, à la fois, à deux H_{n-1}^n .

Cependant ces groupes ne peuvent être formés à l'aide de groupes neutres ou de groupes appartenant à une homographie de rang inférieur.

Ainsi, pour citer un exemple, nous avons vu qu'une H_2^3 possède six couples neutres. Ces couples et six autres points forment six ternes qui ne suffisent pas toujours pour caractériser une H_1^3 . Si l'on prend un septième terne quelconque, il pourra encore appartenir à deux homographies H_2^3 distinctes. Dans ce cas, ce ne sera plus qu'un huitième terne qui sera caractérisé par un de ses points.

De même encore, dans le cas où $n=3$, les six groupes ne peuvent appartenir à une H_0^3 , car ces groupes n'équivalent, en réalité, qu'à cinq ternes.

En continuant de la même manière, on voit qu'une H_{n-3}^n est déterminée par $(2^n - 3)$ groupes, ... une H_k^n , par $(2^n - n + k)$.

Des restrictions analogues, relatives aux éléments neutres et aux groupes appartenant à des homographies de rang inférieur, doivent être faites pour les éléments caractéristiques.

Nous abandonnerons maintenant ces considérations générales pour aborder l'étude d'un cas particulier des homographies, celui où $n = 3$.

Non seulement cette théorie aura l'avantage d'être à peu près complète; mais elle sera susceptible d'une représentation géométrique relativement simple.

En outre, nous aurons l'occasion de faire voir l'utilité que l'on peut retirer des propriétés de ces systèmes d'éléments, dans l'étude des figures géométriques.

Nous ne développerons cependant pas entièrement la théorie algébrique des formes trilinéaires qui contient celle des homographies du troisième ordre: nous renverrons, pour cela, aux mémoires spéciaux que nous avons publiés sur ce sujet.

II. Soit

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \dots$$

une forme trilinéaire (*).

Le système des covariants de cette forme est le suivant:

$$f, \sigma_0 = (a' b') (a'' b'') a_x b_x; \quad \sigma_1 = (a'' b'') (ab) a'_y b'_y;$$

$$\sigma_2 = (ab) (a' b') a''_z b''_z;$$

$$Q = (a' b') (a'' b'') (ac) b_x c'_y c''_z; \quad \Delta = (a' b') (c' d') (a'' b'') (c'' d'') (ad) (bc).$$

Entre ces six formes existe la relation

$$\frac{1}{2} \Delta f^2 + Q^2 = -\frac{1}{2} \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2. \quad (2)$$

(*) Voir nos *Essais de Géométrie Supérieure du troisième ordre*, p. 9-29.

Supposons Δ différent de zéro, et désignons par $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2$ les facteurs linéaires de $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$.
La relation 2) montre que f peut s'écrire

$$f = \alpha_{111} \xi_1 \eta_1 \zeta_1 + \alpha_{222} \xi_2 \eta_2 \zeta_2, \quad (3)$$

que nous regarderons comme son expression canonique.

Si l'on interprète la relation

$$f = 0,$$

en partant de l'expression 3), on remarque aisément que

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \eta_1 = 0, \eta_2 = 0; \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0,$$

associés de la manière suivante donnent les six couples neutres:

$$\xi_1 \eta_2, \xi_2 \eta_1, \eta_1 \zeta_2, \eta_2 \zeta_1, \zeta_1 \xi_2, \zeta_2 \xi_1.$$

Bien que la forme 3) soit en général impossible lorsque $\Delta = 0$, les trois covariants $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, qui sont alors des carrés, représentent des éléments neutres, c'est-à-dire que si dans l'équation

$$f = 0,$$

on donne à $x_1, x_2; y_1, y_2$, les valeurs déduites de

$$\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0,$$

$\frac{z_1}{z_2}$ sera indéterminé.

Lorsque l'un des covariants σ est identiquement nul, il en existe un second nul; le troisième est en général différent de zéro.

Mais Δ étant le discriminant des trois covariants σ , celui des trois qui est différent de zéro est un carré, puisque $\Delta = 0$.

Dans ce cas, f est décomposable en deux facteurs: l'un bi-

linéaire, l'autre linéaire qui est la racine carré du covariant σ différent de zéro.

Enfin, il peu arriver que les trois covariants σ soient nuls en même temps: alors f est décomposable en trois facteurs linéaires.

Lorsque les trois séries d'éléments sont situées sur un même support, on peut les regarder comme susceptibles d'être soumises à une même substitution linéaire. Alors les expressions suivantes sont des covariants.

$$\chi_1 = (a'a'') \bar{a}_x, \quad \chi_2 = (a''a) a'_y, \quad \chi_3 = (aa') a''_z.$$

Si lon fait abstraction de la différence des variables, on a

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 0.$$

Les trois covariants χ , représentent des points aux quels correspond, au lieu d'une H_1^2 , une I_1^2 .

Si $\chi_1 \equiv 0$, $\chi_2 \equiv 0$, et, par suite, $\chi_3 \equiv 0$,

la forme f est symétrique par rapport aux trois séries de variables.

Outre la forme canonique 3), nous devons encore signaler une propriété importante de f .

Les covariants σ_0 , σ_1 , σ_2 ont, comme nous l'avons dit, un même discriminant Δ .

En conséquence, il sera toujours possible de projeter les trois séries d'éléments sur un support unique, de telle façon que les couples

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

coïncident.

Alors la forme f devient symétrique par rapport aux trois séries de variables.

En effet, appelons δ_0, δ'_0 ; δ_1, δ'_1 ; δ_2, δ'_2 , les racines des trois équations

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

la forme 3) devient explicitement:

$$f \equiv \alpha_{111} (x_1 - \delta_0 x_2) (y_1 - \delta_1 y_2) (z_1 - \delta_2 z_2) \\ + \alpha_{222} (x_1 - \delta'_0 x_2) (y_1 - \delta'_1 y_2) (z_1 - \delta'_2 z_2),$$

et si l'on suppose

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2; \quad \delta'_0 = \delta'_1 = \delta'_2,$$

on a bien le résultat annoncé.

Cette propriété sera d'ailleurs mise en lumière par l'exposition géométrique qui suivra.

En outre, on peut encore regarder cette propriété comme une conséquence de la suivante:

Il est toujours possible, par une triple substitution linéaire, de transformer une forme trilinéaire f , en une autre forme trilinéaire φ .

Les deux formes f et φ peuvent être quelconques: cependant il est bien évident que l'une des deux formes ne peut avoir son discriminant nul, si le discriminant de l'autre est différent de zéro.

Au surplus, la substitution ne sera réelle, c'est-à-dire susceptible d'être effectuée géométriquement que si les discriminants des deux formes f et φ ont le même signe.

Soient $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ deux ternes d'une H_2^3 et désignons par $\delta_1, \delta'_1; \delta_2, \delta'_2; \delta_3, \delta'_3$, les éléments neutres appartenant respectivement aux trois séries.

Alors, en se servant de la forme canonique, et en désignant par (a, b, c, d) le rapport anharmonique de quatre points, on arrive aisément à la relation suivante, donnée par M. Schubert:

$$(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta'_1) (\eta_1, \eta_2, \delta_2, \delta'_2) (\zeta_1, \zeta_2, \delta_3, \delta'_3) = 1.$$

Supposons maintenant que l'on se donne de l'homographie $f=0$, les points que viennent d'être employés et de l'homographie $\varphi=0$, les points

$$\Xi_1, H_1, Z_1; \Xi_2, H_2, Z_2; \Delta_1, \Delta'_1; \Delta_2, \Delta'_2; \Delta_3, \Delta'_3.$$

on peut établir les correspondances projectives entre les séries

$$\xi_1, \delta_1, \delta'_1; \Xi_1, \Delta_1, \Delta'_1; \eta_1, \delta_2, \delta'_2; H_1, \Delta_2, \Delta'_2;$$

$$\zeta_1, \delta_3, \delta'_3; Z_1, \Delta_3, \Delta'_3.$$

Si, dans ces séries, on cherche les points ξ_2, η_2, ζ_2 , correspondant respectivement à Ξ_2, H_2, Z_2 , on a

$$(\xi_1 \xi_2 \delta_1 \delta'_1) = (\Xi_1 \Xi_2 \Delta_1 \Delta'_1); \quad (\eta_1 \eta_2 \delta_2 \delta'_2) = (H_1 H_2 \Delta_2 \Delta'_2);$$

$$(\zeta_1 \zeta_2 \delta_3 \delta'_3) = (Z_1 Z_2 \Delta_3 \Delta'_3);$$

et il en résultera immédiatement que si la condition

$$(\xi_1 \xi_2 \delta_1 \delta'_1) (\eta_1 \eta_2 \delta_2 \delta'_2) (\zeta_1 \zeta_2 \delta_3 \delta'_3) = 1$$

est vérifiée, il en sera de même de

$$(\Xi_1 \Xi_2 \Delta_1 \Delta'_1) (H_1 H_2 \Delta_2 \Delta'_2) (Z_1 Z_2 \Delta_3 \Delta'_3) = 1.$$

Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Soit maintenant le système composé de deux formes trilineaires (*)

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \dots$$

$$\varphi = \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z = \beta_x \beta'_y \beta''_z = \dots$$

Ce système peut être regardé comme caractérisant une H_1^3 : nous allons énumérer quelques uns de ses covariants les plus importants.

(*) Voir *Atti dell' Accad. Pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XXXV, p. 54.

Nous aurons d'abord les covariants de chaque forme isolée :

$$f, s_0, s_1, s_2, Q, D;$$

$$\varphi, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, K, \Delta.$$

Si nous formons les expressions analogues pour

$$\lambda f + p\varphi,$$

nous obtenons les covariants nouveaux :

$$(s_i)_{\lambda p} = \lambda^2 s_i + 2\lambda p S_i + p^2 \sigma_i$$

$$(Q)_{\lambda p} = \lambda^3 Q + 3\lambda^2 p Q' + 3\lambda p^2 K' + p^3 K.$$

$$D_{\lambda p} = \lambda^4 D + 4\lambda^3 p D' + 6\lambda^2 p^2 D'' + 4\lambda p^3 \Delta' + p^4 \Delta,$$

ce qui donne les covariants

$$S_0, S_1, S_2, Q', K' \text{ et les invariants } D', D'', \Delta'.$$

Enfin si nous formons le discriminant de $(s_i)_{\lambda p}$, regardé comme fonction de λ, p , nous aurons les trois covariants :

$$l_x^4 = 2[s_0 \sigma_0 - (S_0)^2], \quad m_y^4 = 2[s_1 \sigma_1 - (S_1)^2], \quad n_z^4 = 2[s_2 \sigma_2 - (S_2)^2].$$

Les trois covariants

$$l_x^4, m_y^4, n_z^4,$$

ont les mêmes invariants qui ne diffèrent pas, en outre de ceux de $D_{\lambda p}$ regardé comme fonction de λ, p .

Ces trois covariants, égaux à zéro, représentent les points de ramification.

Nous pouvons encore calculer les covariants qui, égaux à zéro, représentent les éléments doubles.

En convenant de désigner par h_F le hessien d'une forme F , les six groupes de points doubles seront représentés par les covariants suivants:

$$A_x^4 = l_x^4 + k h_l; \quad A'_x{}^4 = l_x^4 + k' h_l;$$

$$B_y^4 = m_y^4 + k_1 h_m; \quad B'_y{}^4 = m_y^4 + k'_1 h_m;$$

$$C_z^4 = n_z^4 + k_2 h_n; \quad C'_z{}^4 = n_z^4 + k'_2 h_n.$$

Ces six covariants se divisent en trois groupes de deux qui ont les mêmes invariants.

Enfin, si l'on élimine λ, p entre

$$D_{\lambda p} = 0, \quad \text{et} \quad (s_i)_{\lambda p} = 0,$$

on obtient trois nouveaux covariants réquadratiques du même type:

$$\Sigma_0 = l_x^4 + p'' h_l.$$

$$\Sigma_1 = m_y^4 + p'' h_m,$$

$$\Sigma_2 = n_z^4 + p'' h_n.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer

$$\lambda f + p \varphi,$$

comme une forme quadrilinéaire et d'appliquer les résultats que nous avons fait connaître relativement à cette forme (*).

(*) Voir *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. XVII, 1882.

Enfin considérons trois formes trilinéaires

$$f_1, f_2, f_3;$$

nous ne signalerons que trois covariants de ce système parce que ce sont les seuls qui ont quelque utilité dans ce qui va suivre.

Si l'on cherche les groupes de valeurs de $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}$, qui satisfont à la fois aux trois conditions

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0,$$

il suffit, par exemple, de considérer x_1, x_2 comme fixes et de chercher la condition suffisante pour que les trois homographies H_1^2 correspondantes aient un couple commun.

Pour cela, il faudra rappeler quelques résultats donnés ailleurs.

Si l'on a trois homographies H_1^2 , ou trois formes bilinéaires

$$f_1 = a_x a'_y, f_2 = b_x b'_y, f_3 = c_x c'_y,$$

il existe un covariant bilinéaire important θ , dont nous avons donné l'interprétation géométrique

$$\theta = \begin{vmatrix} x_2 y_2 & -x_2 y_1 & -x_1 y_2 & x_1 y_1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Il ressort évidemment de cette interprétation géométrique que les trois homographies auront un couple commun, si

$$(\theta, \theta)_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{21} & a_{22} \\ b_{11} & -b_{12} & -b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & -c_{12} & -c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & b_{21} & b_{12} & b_{11} \\ c_{22} & c_{21} & c_{12} & c_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on applique ce résultat aux trois formes f_1, f_2, f_3 , où l'on regarde successivement $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ comme constantes, on obtient les trois expressions suivantes:

$$p_x^6 = \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{01} & t_{12} & t_{12} \\ t_{02} & t_{12} & t_{12} \end{vmatrix}, \quad q_y^6 = \begin{vmatrix} t'_{00} & t'_{01} & t'_{02} \\ t'_{01} & t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{02} & t'_{12} & t'_{22} \end{vmatrix}, \quad r_z^6 = \begin{vmatrix} t''_{00} & t''_{01} & t''_{02} \\ t''_{01} & t''_{11} & t''_{12} \\ t''_{02} & t''_{12} & t''_{22} \end{vmatrix}.$$

Dans ces déterminants

$$t_{ik} = (f_i, f_k)_{z,y}$$

c'est-à dire, si

$$f_1 = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z =$$

$$f_2 = \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z = \beta_x \beta'_y \beta''_z = -$$

$$t_{12} = (a' \alpha') (a'' \alpha'') a_x \alpha_x,$$

$$t_{11} = (a' b') (a'' b'') a_x b_x, \text{ etc.}$$

Les expressions analogues pour les autres éléments n'ont pas besoin d'être expliquées davantage.

Les racines des équations

$$p_x^6 = 0, \quad q_y^6 = 0, \quad r_z^6 = 0,$$

convenablement associées donnent les six groupes de valeurs qui satisfont à

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0.$$

Nous pouvons observer, d'après cela, que toutes les homographies H_2^3 qui ont cinq groupes communs, en ont nécessairement une sixième.

En effet, si l'on se donne cinq groupes satisfaisant à une condition

$$f = 0,$$

on pourra déterminer cinq des sept coefficients indépendants, c'est-à-dire que f pourra s'écrire

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3.$$

Le sixième groupe commun à

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0,$$

donnera nécessairement

$$f = 0.$$

III. Supposons maintenant que l'on se donne trois faisceaux de plans dont les axes soient trois droites X, Y, Z.

Nous pouvons imaginer que ces trois faisceaux forment une homographie H_2^3 .

Alors, sur une droite quelconque, les plans des trois faisceaux marquent trois séries, en H_2^3 , superposées: d'après une propriété signalée plus haut, ces séries ont trois éléments triples, ou trois U_3 .

Il en résulte que trois faisceaux homographiques en H_2^3 se coupent sur une surface qui est coupée en trois points par une droite quelconque: c'est donc une surface de troisième ordre.

Réciproquement, si l'on joint tous les points d'une surface du

troisième ordre à trois droites de la surface, ne se coupant pas deux à deux, les trois faisceaux des plans ainsi obtenus sont en H_2^3 .

Comme on le sait, une surface du troisième ordre est déterminée par trois droites et sept points. Par conséquent, une telle surface caractérise une H_2^3 la plus générale, puis que, ainsi que nous l'avons vu plus haut, celle-ci est définie par sept ternes (*).

Nous pouvons aisément substituer, à cette surface, une surface du second ordre, à l'aide du théorème suivant:

Soient g_1, g_2, g_3 trois droites non situées deux à deux dans un même plan, et appartenant à une surface du troisième ordre S_3 ; par un point P de S_3 menons trois droites G_1, G_2, G_3 .

Les plans qui joignent g_1, g_2, g_3 à tous les points de S_3 marquent sur G_1, G_2, G_3 trois ponctuelles dont les jonctions enveloppent une surface de la seconde classe Σ_2 .

Le théorème corrélatif pour les surfaces de la seconde classe s'énonce bien facilement.

Quant à la démonstration, elle est excessivement simple.

En effet, le point P et six autres points de S_3 caractérisent l'homographie H_2^3 .

Les trois droites G_1, G_2, G_3 et les six points donneront neuf plans que déterminent une surface de la seconde classe.

Or tous les plans tangents à cette surface marqueront sur G_1, G_2, G_3 trois ponctuelles en H_2^3 et celle-ci aura, avec l'homographie caractérisée par S_3 , sept ternes communs.

Il en résultera que tous les autres groupes seront identiques.

Cette propriété des surfaces du troisième ordre peut être rapprochée de la propriété de l'hexagramme de Pascal, telle au moins qu'elle a été retrouvée par Maclaurin. Mais, pour le moment, nous ne nous étendrons pas sur ce sujet.

D'après ce que nous venons de dire, à la considération d'une

(*) Ce mode de génération des surfaces du troisième ordre est celui qui a été employé par M. August: *Disquisitiones de Superficiebus tertii ordinis*, Berlin, 1862, et qui, au surplus, peut-être regardé comme découlant de la seconde méthode de Steiner, Werke, I^{er} Bd., p. 651. M. Schubert s'en est également servi dans un important travail inséré aux *Mathematische Annalen*, t. XVII.

surface S_3 pour la représentation d'une H_2^3 peut être substituée celle d'une surface du second ordre.

Soit donc un trièdre circonscrit à une surface Σ_2 .

Désignons les trois arêtes par X_1, Y_1, Z_1 ; son sommet par S . Les plans $X_1SY_1, Y_1SZ_1, Z_1SX_1$ sont tangents à Σ_2 en trois points $\delta, \delta', \delta''$, par lesquels passent deux génératrices, réelles ou imaginaires.

Les droites X_1, Y_1, Z_1 , rencontrant chacune la surface en deux points (réels ou imaginaires), les six génératrices forment un hexagone gauche $x_1y_2z_1x_2y_1z_2$.

Ces six génératrices marquent, sur X_1, Y_1, Z_1 , les couples neutres de l'homographie.

En effet, tout plan passant par x_1y_2 , par exemple, étant tangente à la surface, le point z correspondant au couple (x_1, y_2) est indéterminé.

Nous pouvons observer que les neuf points $x_1x_2y_1y_2z_1z_2\delta\delta'\delta''$ permettent de former six hexagones gauches inscrits à la surface.

D'après les théorèmes de Dandelin (*), les droites x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 se coupent en un point S ; $\delta z_2, \delta' x_2, \delta'' y_2$ en un point S_1 ; $\delta z_1, \delta' x_1, \delta'' y_1$ en un point S_2 ; $\delta\delta'', y_1z_1, y_2z_2$ en un point X ; $\delta'\delta', x_1y_1, x_2y_2$ en un point Z ; $\delta'\delta, z_1x_1, z_2x_2$ en un point Y .

Hesse qui, le premier, a signalé ces six hexagones, a fait observer que S, S_1, S_2 sont sur une droite l ; X, Y, Z sur une droite Δ .

On peut remarquer aussi que si le plan $\delta\delta'\delta''$ coupe respectivement X_1, Y_1, Z_1 en des points $\Delta'\Delta''\Delta$, les deux triangles $\delta\delta'\delta'', \Delta'\Delta''\Delta$ sont homologues. La droite Δ est l'axe d'homologie de ces deux triangles et l rencontre le plan $\delta\delta'\delta''$ en leur centre d'homologie.

Maintenant, si l'on joint la droite Δ aux ponctuelles marquées sur X_1, Y_1, Z_1 , on obtient trois faisceaux en H_2^3 .

Mais les plans $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$ se coupant suivant Δ , les éléments neutres des trois séries coïncident dans cette H_2^3 .

Par suite, d'après une remarque faite plus haut, ces trois séries sont symétriques par rapport aux trois séries d'éléments.

De même si l'on joint $\delta\delta', \delta'\delta'', \delta''\delta$ à tous les points de la surface, les ternes de plans ainsi obtenus marquent sur l , trois

(*) *Mém. de l'Acad. Roy. de Belgique*, t. III.

séries homographiques superposées, où les éléments neutres des trois séries coïncident. Ici encore, l'homographie est symétrique par rapport aux trois séries d'éléments.

Ces propriétés fournissent, comme on le voit, le moyen géométrique de transformer la forme trilinéaire f en une forme symétrique l .

La réalité des éléments neutres n'est pas nécessaire, comme on le voit sans peine, pour permettre d'effectuer la transformation.

En effet, la détermination des droites l et Δ ne dépend que de la construction des triangles homologiques $\delta \delta' \delta''$, $\Delta \Delta' \Delta''$.

Nous appliquerons plus loin ces théorèmes et nous ferons voir comment ils permettent de construire les couples neutres lorsqu'ils existent réellement.

Les remarques précédentes contiennent, on le voit, la vérification géométrique des résultats démontrés plus haut relativement à une H_2^3 ; ils permettraient d'exposer la théorie de ces groupes de points, sans faire usage de considérations analytiques.

Il nous faut maintenant faire connaître la représentation géométrique d'une H_1^3 .

Pour cela considérons deux H_2^3 .

Si nous prenons trois droites X, Y, Z comme axes de trois faisceaux de plans, chacune de ces H_2^3 caractérisera une surface S_3 , contenant les trois droites X, Y, Z .

Appelons S_3, S'_3 les deux surfaces; outre les droites communes X, Y, Z , elles se couperont suivant une courbe gauche G_6 de genre un.

Les groupes de plans qui joindront les points de G_6 aux axes X, Y, Z formeront les ternes de l'homographie H_1^3 .

Nous pouvons observer qu'un plan quelconque, passant par X , coupe S_3 et S'_3 respectivement suivant deux coniques C_2, C'_2 .

Ces coniques ont quatre points communs; mais deux de ces points son évidemment ceux où Y et Z percent le plan mené par X .

Les deux autres points restants, joints à Y et Z , donnent les deux couples qui complètent les deux ternes de H_1^3 correspondant à une valeur du paramètre (x_1, x_2) , comme nous l'avons vu plus haut.

Nous ferons voir, dans la suite de ce travail, comment on peut construire ces couples de points.

Dès qu'un point commun à S_3 et S'_3 , ou un point de G_6 , est connu, il est aisé de substituer, à cette représentation de H_1^3 , une autre représentation plus familière.

Soit P ce point; si par P, nous menons trois droites X_1, Y_1, Z_1 , chacun des surfaces S_3, S'_3 caractérisera, comme nous l'avons montré, une surface de la seconde classe inscrite au trièdre $PX_1Y_1Z_1$.

A l'étude de la courbe G_6 , nous pouvons donc substituer celle de la développable de la quatrième classe circonscrite à deux surfaces Σ_2, Σ'_2 , ou, ce qui revient au même, celle d'une courbe gauche G_4 de première espèce.

Ceci nous permet d'interpréter géométriquement les résultats que nous avons rencontrés.

Sur une G_4 de première espèce, prenons trois points arbitraires A, B, C.

Désignons par X, Y, Z les cotés AB, BC, CA du triangle ainsi formé.

Les jonctions de ces droites à tous les points de G_4 constituent une H_1^3 .

Par X, on peut mener quatre plans tangents à G_4 , indépendamment de ceux qui ont leurs points de contact en A et B.

Les quatre plans représentent les points de ramification de la série des x .

Si l'on joint X aux points de contact des plans tangents menés par Y et Z, on obtient la représentation des deux groupes de points doubles de cette même série.

Si l'on observe que, par le théorème de Poncelet, il existe quatre cônes du second degré passant par G_4 , on a la représentation des quatre formes du faisceau

$$\lambda f + p\varphi,$$

pour lesquelles le discriminant s'annule.

Si, par les sommets de ces quatre cônes, et par la droite X, on mène des plans, on obtient un nouveau groupe de quatre plans.

D'après une remarque faite plus haut:

Les quatre plans tangents menés par X, les deux groupes de quatre plans passant par X et par les points de contact de plans tangents menés par Y et Z, et enfin les quatre plans que joignent X aux sommets de quatre cônes du second ordre passant par G₄, sont des groupes d'une série définie par une équation de la forme

$$F + kH_F = 0.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur ces sujets dans une dernière partie de ce mémoire, consacrée aux applications géométriques.

(à suivre).

D'après une remarque faite plus haut :
 Les quatre plans tangents menés par Z à par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

$$F - \epsilon H^2 = 0.$$

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

On voit donc que les quatre plans tangents menés par Z à par les points de contact de plans
 tangents menés par Y et X et enfin les quatre plans qui joignent X
 aux sommets de quatre cônes de second ordre passant par Z
 sont des groupes F sans être définis par une équation de la forme

passar as rectas dadas pela fórmula [B], cujas posições é necessario determinar, a fim de serem obtidos os valores de w^n e w^m , ou a determinação geometrica das raizes reaes da equação proposta.

Estas rectas serão tangentes ao envolucro das linhas a que se refere a fórmula [C]; portanto, obtida esta curva, tirar-lhe-hemos pelo ponto $[p, q]$ todas as tangentes possíveis, cujos traços sobre os eixos coordenados definirão as potencias m e n das raizes reaes de [A].

Egualada a zero a derivada de [C] em ordem a w vem

$$\pm my = nx \cdot w^{m-n},$$

pondo em evidencia os signaes que se podem deparar, e por substituição em [C]

$$\frac{y}{\left(\pm \frac{my}{nx}\right)^{\frac{m}{m-n}}} + \frac{x}{\left(\pm \frac{my}{nx}\right)^{\frac{n}{m-n}}} = 1$$

d'onde podemos deduzir a equação do envolucro.

A equação [C] póde ser escripta sob qualquer das quatro fórmas

$$1 = \frac{x}{\pm w^n} + \frac{y}{\pm w^m}$$

ás quaes correspondem envolucros distinctos.

$$a) \quad 1 = \frac{x}{+w^n} + \frac{y}{+w^m}.$$

O envolucro será dado pela equação

$$x^m = (-1)^n \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D]$$

*

passar as retas dadas pela fórmula [B], cujas posições é necessário determinar, obtendo os valores de x^m e y^n ou a determinação geométrica das raízes da equação proposta.

O envolvero será

$$x^m = \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D]$$

$$c) \quad 1 = \frac{x}{-w^n} + \frac{y}{+w^m}.$$

Resulta por envolvero

$$x^m = (-1)^{-m+n} \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D']$$

$$d) \quad 1 = \frac{x}{-w^n} + \frac{y}{-w^m}.$$

Obtem-se o envolvero da equação [C] pôde ser escrita sob qualquer das quatro fórmulas

$$x^m = (-1)^m \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n} \cdot y^n \dots \dots [D'']$$

Fazendo nas quatro equações dos envolveros

$$k = \pm \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n}$$

serão estes compreendidos na fórmula geral

$$x^m = \pm k y^n,$$

a qual, representando a parábola, numero n , da ordem m , é por-

tanto a equação geral das parabolae. Do exposto conclue-se o seguinte:

A equação [C] é a das tangentes a uma parabola de qualquer ordem, sendo identicos aos da parabola os expoentes que entram nella.

Signaes de k

Consideradas as equações dos envolucros vê-se que, sendo m e n pares, tem k o signal positivo; as potencias w^n e w^m das raizes serão positivas; a equação [C] apresentará a fórmula (a), tanto para as raizes positivas, como para as negativas, e neste caso as equações de todos os envolucros apresentando coefficients positivos são identicas.

Sendo m impar e n par tem [C] a fórmula (a) para as raizes positivas, e a fórmula (b) para as negativas; correspondendo á primeira fórmula o envolucro [D] e á segunda o envolucro [D']; ambos identicos nesta hypothese, visto serem os coefficients positivos.

Quando m for par e n impar, a equação [C] terá a fórmula (a) para as raizes positivas e a fórmula (c) para as negativas; os envolucros correspondentes [D] e [D''] são identicos, vindo em ambos o coefficiente k com o signal negativo.

Sendo m e n impares, vem a fórmula (a) para as raizes positivas e (d) para as negativas; identicos os envolucros correspondentes [D] e [D''']; ambos de coefficiente negativo.

Ter-se-ha portanto:

Hypotheses	Fórmulas da equação (C)	Signaes de k
1. ^a .. m e n pares	{ (a) para as raizes positivas e negativas	positivo.
2. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ impar} \\ n \text{ par} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) raizes positivas	positivo.
	{ (b) » negativas	
3. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ par} \\ n \text{ impar} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) » positivas	negativo.
	{ (c) » negativas	
4. ^a .. $\left. \begin{matrix} m \text{ impar} \\ n \text{ impar} \end{matrix} \right\}$..	{ (a) » positivas	negativo.
	{ (d) » negativas	

A qualquer d'estas hypotheses corresponde por consequencia um unico signal de k , ou uma só curva envolucro.

Quadrantes em que pôde estar situado o ponto (p, q) . Posições distintas da tangente

Os valores das coordenadas p e q devem ser respectivamente tomados sobre os eixos dos xx e dos yy , e em qualquer dos quadrantes por estes eixos determinados ha a considerar as quatro hypotheses precedentemente feitas.

Salvo casos particulares que serão estudados, a tangente tirada d'um ponto M , de coordenadas p e q á curva envolucro, qualquer que seja a situação d'este ponto sobre o plano, atravessará tres quadrantes; d'ahi resultam para cada quadrante tres posições distintas para a tangente que parte de M , as quaes podem ser designadas por ω , ω_1 , ω_2 .

Existindo o ponto no primeiro quadrante chamaremos ω á tangente que atravessa os quadrantes primeiro, segundo e quarto; ω_1 á que atravessa o primeiro, segundo e terceiro; ω_2 á que atravessa o primeiro, terceiro e quarto. É facil traçar as figuras que indicam as posições distintas da tangente, suppondo M situado em cada um dos outros quadrantes.

Na hypothese de se querer determinar as raizes reaes de $[A]$, e attendendo portanto só a estas, devemos considerar sempre positivas as potencias de w , de expoente par, e positivas ou negativas as outras; as primeiras tem de ser contadas na parte positiva de cada eixo; as segundas serão contadas na parte positiva quando as raizes correspondentes forem positivas, e na parte negativa quando ellas forem negativas. Posta esta condição vê-se bem que ha casos em que teremos de excluir uma ou mais tangentes pelo facto de a não preencherem, bastando para esse fim que um dos traços por ellas feitos sobre os eixos não exista do lado da origem que se requer.

Da condição estabelecida resulta que serão só admissíveis para a tangente as posições distintas, constantes da tabella seguinte:

1.º Quadrante. Coordenadas de M : $+p, +q$.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. ^a Hypothese | é só admissivel a posição ω . |
| 2. ^a » | são admissíveis ω e ω_1 . |
| 3. ^a » | » e ω_2 . |
| 4. ^a » | » ω , ω_1 e ω_2 . |

2.º Quadrante. Coordenadas de M: $+p, -q$.

- 1.ª Hypothese..... é só admissivel ω .
- 2.ª » são admissíveis ω e ω_1 .
- 3.ª » é só admissivel ω .
- 4.ª » são admissíveis ω, ω_1 e ω_2 .

3.º Quadrante. Coordenadas de M: $-p, -q$.

- 1.ª Hypothese..... não ha solução.
- 2.ª » é só admissivel ω_1 .
- 3.ª » » » ω_2 .
- 4.ª » são admissíveis ω_1, ω_2 e ω_3 .

4.º Quadrante. Coordenadas de M: $-p, +q$.

- 1.ª Hypothese..... é só admissivel ω .
- 2.ª » »
- 3.ª » são admissíveis ω e ω_2 .
- 4.ª » » » ω, ω_2 e ω_3 .

Estas posições distinctas da tangente, como é claro, não significam precisamente raizes distinctas; póde dar-se a circumstancia de admittir o envolucro para a posição assignada ao ponto M duas tangentes de posição ω , ou de qualquer das outras posições $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; póde além d'isso haver duas raizes eguaes, do mesmo signal, que serão accusadas por uma só tangente.

Elaborada a tabella anterior, independentemente da consideração dos envolucros, as posições distinctas da tangente que foram escolhidas para cada caso só podem servir se o envolucro respectivo as admitte; portanto fica feita por esta tabella uma primeira exclusão, e só depois do estudo dos envolucros se poderá proceder ao apuramento definitivo das tangentes que são uteis e das raizes que lhes correspondem.

Da analyse precedente deduz-se já que ha um caso, em que não é possível o admittir a equação proposta nenhuma raiz real; tem este logar para a posição de M no 3.º quadrante, dada a 1.ª hypothese, caso em que a equação [A] se póde escrever d'este modo

$$\omega^{2m'} + p\omega^{2(m'-n')} + q = 0;$$

effectivamente não ha raiz alguma real, positiva ou negativa, que possa satisfazer.

Deve notar-se sempre que os signaes assignados a p e q são os que estes parametros teem no segundo membro da equação [B]; ou os contrarios d'aquelles com que entram em [A].

Envolucros

Da equação $x^m = ky^n$, em que podemos suppôr k positivo ou negativo, vem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{nk}{m} \cdot \frac{y^{n-1}}{x^{m-1}} = \frac{nk^{\frac{1}{m}}}{m} \cdot y^{\frac{n}{m}-1} = \pm \left[\left(\frac{m}{n} - 1 \right) y \right]^{-1 + \frac{n}{m}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{nk^{\frac{1}{m}}}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \frac{1}{y^{2 - \frac{n}{m}}}$$

$$= \pm \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 1 \right)^{-1 + \frac{n}{m}} \cdot y^{-2 + \frac{n}{m}}$$

podendo ser a segunda derivada, positiva ou negativa, as fórmulas precedentes teem o inconveniente de não indicarem quando lhe compete qualquer dos signaes; é portanto preferivel a seguinte

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{nk^2}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right) \frac{y^{2(n-1)}}{x^{2m-1}}$$

que se obtem derivando a primeira das expressões achadas para $\frac{dx}{dy}$ e substituindo no numerador da expressão resultante x^m por ky^n . Sendo k^2 sempre positivo, $n < m$ e $2m - 1$ um expoente impar, o signal de $\frac{d^2x}{dy^2}$ estará dependente do de x , vindo para

esta derivada o signal contrario ao de x^{2m-1} , ou ao de x ; visto que $\left(\frac{n}{m} - 1\right)$ é uma quantidade negativa.

As parabolae são pois tangentes na origem das coordenadas ao eixo dos XX ; podendo dizer-se, em geral, que a tangencia se effectua nesse ponto com o eixo, sobre o qual se marcam os valores da variavel a que na equação corresponde o maior ex-ponte, e, em relação a este eixo, todas as curvas obtidas são convexas.

Só pôde haver inflexão na origem das coordenadas, e excepto neste caso exige-se, para que o raio de curvatura seja infinito, que $m=n$; hypothese que transforma a equação das parabolae na d'uma recta.

A partir da origem a tangente vai mudando de inclinação, até se tornar parallelá ao eixo das abscissas, a uma distancia infinita d'aquelle ponto.

Considerando as quatro hypotheses feitas, e em cada uma d'ellas k positivo e negativo, obteremos as figuras (*):

Na 1. ^a hypothese, para k positivo.....	figura 1. ^a
(signal negativo de k dá valores imaginarios para x e y)	
Na 2. ^a hypothese, para k positivo.....	figura 2. ^a
» » k negativo.....	» 3. ^a
Na 3. ^a hypothese, » k positivo.....	» 4. ^a
» » k negativo.....	» 5. ^a
Na 4. ^a hypothese, » k positivo.....	» 6. ^a
» » k negativo.....	» 7. ^a

Estas figuras representam as diversas combinações que se podem fazer com os arcos 1, 2, 3 e 4, tomados dois a dois, con-

(*) Pedimos ao leitor que trace as figuras. Compõem-se de arcos de curva tangentes ao eixo dos xx e symmetricas relativamente a este eixo e ao dos yy . A figura 1.^a tem quatro arcos, um em cada quadrante; a figura 2.^a tem dois, um no primeiro quadrante, outro no segundo; a figura 3.^a tem um no terceiro quadrante, outro no quarto; a figura 4.^a tem um no primeiro quadrante, outro no quarto; a figura 5.^a tem um no segundo quadrante, outro no terceiro; a figura 6.^a tem um no primeiro quadrante, outro no terceiro; a figura 7.^a tem um no segundo quadrante, outro no quarto. Designaremos estes arcos pelos numeros que indicam o quadrante, onde estão situados.

servando-se tangentes no origem das coordenadas ao eixo dos XX; excepto a figura 5.^a que os apresenta todos.

Sendo k positivo na 1.^a e 2.^a hypotheses; negativo nas outras duas, nem todas as figuras precedentes, na pesquisa das raizes reaes, devem ser tomadas como envolucros, mas simplesmente as figuras 1.^a, 2.^a, 5.^a e 7.^a, resultantes as duas primeiras da hypothese de k positivo, e as duas ultimas de k negativo.

Determinação e construcção das potencias das raizes w^m e w^n

Como devemos neste estudo distinguir os casos em que m e n são simultanea, ou separadamente, pares ou impares, é conveniente representar m por $2m'$ ou $(2m' \pm 1)$, segundo for par ou impar; da mesma sorte n póde ser designado por $2n'$ ou $(2n' \pm 1)$.

Representando as potencias w^m e w^n as distancias, que respectivamente separam da origem das coordenadas os traços das tangentes uteis sobre os eixos dos YY e dos XX, é-lhes applicavel a mesma lei de signaes que respeita a estas coordenadas.

Resulta portanto que, no caso de ser par o expoente d'uma d'estas potencias, a linha correspondente não póde ser tomada a partir da origem das coordenadas sobre a parte negativa do eixo em que essa potencia deve ser marcada.

Quando o expoente for impar, as potencias das raizes negativas serão contadas na parte negativa do eixo, e as das raizes positivas na parte positiva.

Sendo pares os dois expoentes m e n , ambas as potencias serão positivas e contadas como tal: mas como qualquer d'estas póde provir tanto d'uma raiz positiva como d'uma negativa, segue-se que a mesma tangente, apesar de indicar uma só potencia, corresponde a duas raizes eguaes e de signaes contrarios.

Sendo par um dos expoentes e impar o outro, já se não póde dar o caso da correspondencia da mesma tangente a duas raizes de signaes differentes, porque basta ser um dos expoentes impar, para que as potencias das raizes positivas que o admittem sejam distinctas das potencias das raizes negativas.

Percorreremos successivamente, para a construcção que se de-seja effectuar, cada uma das quatro hypotheses, distinguindo em

cada uma d'ellas as posições que o ponto M de coordenadas p e q póde occupar em cada um dos quatro quadrantes.

Nos quadrantes em que exista um ramo de curva envolucro ha a considerar tres casos: ponto situado acima da curva, sobre ella, ou abaixo d'ella.

Antes de entrar porém na determinação das raizes, seguindo as diversas hypotheses, é indispensavel dizer duas palavras sobre um interessante caso particular que se apresenta neste estudo.

Raizes reaes, eguaes e do mesmo signal

Quando do ponto exterior á curva envolucro podemos tirar duas tangentes á parte situada n'um quadrante, a qual se póde considerar como um ramo distincto, attenta a symetria de configuração que existe nas parabolae das diversas ordens, determinaremos sobre a mesma parte, positiva ou negativa, de qualquer dos eixos duas potencias, de gráo m ou de gráo n , de duas raizes.

Á medida que o ponto M se approximar da curva, diminuirá a differença entre essas potencias até desaparecer de todo, quando o ponto estiver situado sobre a curva envolucro, obtendo-se neste caso duas raizes reaes, eguaes e do mesmo signal.

O valor d'estas raizes será dado pela fórmula

$$w = (-1)^n \left(\frac{-p(m-n)}{m} \right)^{\frac{1}{n}}$$

que se deduz facilmente da derivada de [A], tendo alli o parametro p um signal contrario áquelle com que entra no primeiro membro de [A].

Os valores de w só podem sahir imaginarios quando n for par, o que se dá na 1.^a hypothese e na 2.^a; mas em qualquer d'estas exige-se para esse fim que p seja negativo em [B], ou no segundo membro de [A], o que só se póde dar na 1.^a hypothese com os ramos (3) e (4), correspondentes a p negativo, os quaes não podem dar tangentes admissiveis, porque tanto num ramo como no

outro determinariam sobre o eixo dos XX valores negativos para a potencia w^n , que nesta hypothese é par.

Na 2.^a hypothese, sendo só admissivel a configuração correspondente a p positivo (figura 2.^a), as raizes eguaes que obtivermos não serão imaginarias.

Como a expressão $\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{1}{n}}$ no caso sujeito, em que n é par, vem affecta de dois signaes, segue-se que poderemos ter raizes eguaes, ambas positivas ou ambas negativas.

Quando n é impar e p positivo em [B] as raizes eguaes serão positivas, segundo a fórmula, e é effectivamente o que se póde dar nas figuras 1.^a e 3.^a

Sendo n impar e p negativo, as raizes eguaes serão negativas, o que nas mesmas figuras se reconhece ainda.

Como se depreheende facilmente, não só do que fica dicto, como da exposição que vai seguir, as considerações feitas sobre a fórmula deduzida veem justificar nesta parte o processo empregado.

Posto isto, passaremos á determinação das potencias w^m e w^n .

1.^a HYPOTHESE (m e n pares). [Fig. 1.^a]

Nesta hypothese a cada solução positiva corresponde uma outra negativa egual, e é claro que só as tangentes ao ramo (2) podem convir para a resolução do problema, por serem as unicas correspondentes a potencias positivas de w ; vê-se portanto que haverá as seguintes soluções:

1.^o Quadrante (coordenadas de M : $+p, +q$)

Só se póde tirar uma tangente ao ramo (2); teremos duas soluções reaes e eguaes: uma positiva e outra negativa. Qualquer que seja a posição occupada pelo ponto neste quadrante em relação á curva, o numero de soluções não varia.

2.^o Quadrante (coordenadas de M : $+p, -q$)

a) Ponto situado acima da curva.

Sempre é possível, dado este caso, o tirar duas tangentes ao

ramo (2), e haverá portanto duas soluções reaes positivas e outras duas negativas.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

As duas tangentes, precedentemente obtidas, confundir-se-hão n'uma unica; tornam-se eguaes as soluções positivas, bem como as negativas; haverá ainda quatro soluções, como no caso anterior, todas eguaes em valor absoluto, differindo apenas nos signaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

É impossivel tirar tangente alguma, e não ha portanto solução real.

3.º *Quadrante* (coordenadas de $M: -p, -q$)

Não podendo tirar-se tangentes ao ramo (2), não ha solução real.

4.º *Quadrante* (coordenadas de $M: -p, +q$)

Seja qual for a posição de M neste quadrante, sempre se póde tirar uma tangente ao ramo (2) e não mais do que uma. Ha pois sempre duas soluções reaes: uma positiva, outra negativa.

2.ª *HYPOTHESE* (m impar, n par). [Fig. 2.ª]

Todas as tangentes aos ramos (1) e (2), interceptando apenas a parte positiva do eixo dos XX , sobre a qual devem neste caso ser contadas as potencias de gráo n de w , satisfazem á questão.

1.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, +q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Ha duas tangentes para o ramo (1) e uma para o ramo (2); cada uma das primeiras corresponde a uma raiz negativa; a segunda tangente a uma raiz positiva. Neste caso obteem-se portanto duas raizes negativas e uma positiva.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

As duas tangentes ao ramo (1) confundem-se numa unica, resultando duas raizes negativas eguaes; a tangente ao ramo (2) dá logar a uma raiz positiva. Ha portanto duas raizes negativas e uma positiva.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Ha uma unica tangente, que é a tirada para o ramo (2), e portanto uma raiz positiva.

2.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

As duas tangentes ao ramo (2) determinarão duas raizes positivas, a tangente ao (1) uma negativa.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma unica tangente a (2) denuncia duas raizes positivas eguaes, havendo além d'isso pela tangente a (1) uma negativa.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Só se pôde tirar uma tangente para o ramo (1), resultando uma unica raiz negativa.

3.º *Quadrante* (coordenadas: $-p, -q$)

A tangente a (1) é a unica que se pôde tirar de qualquer ponto; vem sempre uma raiz negativa, e uma só.

4.º *Quadrante* (coordenadas: $-p, +q$)

Para todas as posições, occupadas pelo ponto M, haverá apenas uma raiz positiva, dada pela tangente ao ramo (2).

3.ª *HYPOTHESE* (m par, n impar). [Fig. 5.ª]

Todas as tangentes aos ramos (2) e (3), interceptando apenas a parte positiva do eixo dos YY, em que se devem contar as potencias de gráo m da variavel, satisfazem á questão.

1.º *Quadrante* (coordenadas: $+p, +q$)

Qualquer que seja a posição de M, haverá uma tangente para (2), determinando uma raiz positiva, e uma tangente para (3) determinando uma outra negativa.

2.º Quadrante (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

As duas tangentes, que neste caso se podem tirar ao ramo (2), determinarão sempre duas raizes positivas.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma só tangente e duas raizes positivas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Não se pôde tirar tangente a nenhum dos ramos, e não haverá portanto raizes reaes.

3.º Quadrante (coordenadas: $-p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Não se pôde tirar tangente para ramo algum, e portanto não ha raizes.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Uma só tangente e duas raizes negativas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Sempre poderemos tirar duas tangentes ao ramo (3), e haverá duas raizes negativas.

4.º Quadrante (coordenadas: $-p, +q$)

Ha sempre, em todas as posições de M, uma tangente para o ramo (2) e outra para o ramo (3); resultando duas raizes: uma positiva e outra negativa.

4.ª HYPOTHESE (m e n impares). [Fig. 7.ª].

Todas as tangentes aos ramos (2) e (4), a que a figura está reduzida, satisfazem á questão, determinando o ramo (2) raizes positivas e (4) as negativas.

1.º Quadrante (coordenadas: $+p, +q$)

Em todas as posições de M haverá uma tangente a (2) e uma raiz positiva.

2.º Quadrante (coordenadas: $+p, -q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Das duas tangentes a (2) resultam duas raízes positivas; da tangente a (4) uma raiz negativa. Obteem-se assim tres raízes: duas positivas e uma negativa.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Da tangente que pelo ponto da curva se tira a (2) resultam duas raízes positivas eguaes; da tangente a (4) uma raiz negativa.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

A tangente a (4) produzirá uma raiz negativa, unica que satisfaz.

3.º Quadrante (coordenadas: $-p, -q$)

Qualquer que seja a posição de M ha uma unica tangente para o ramo (4) e uma raiz negativa.

4.º Quadrante (coordenadas: $-p, +q$)

a) *Ponto situado acima da curva.*

Ha uma unica tangente para o ramo (2) e uma raiz positiva.

b) *Ponto situado sobre a curva.*

Da tangente a (2) resulta uma raiz positiva; da tangente a (4) duas raízes negativas eguaes.

c) *Ponto situado abaixo da curva.*

Das duas tangentes a (4) provém duas raízes negativas; da tangente a (2) uma raiz positiva.

Posição de M sobre os eixos

Eixo dos YY ($p = 0$)

1.ª *Hypothese.* Duas soluções eguaes, uma positiva outra negativa, quando o ponto está situado na parte positiva do eixo dos YY, dadas pela tangente ao ramo (2); não existe pelo contrario solução alguma, quando o ponto M estiver do outro lado da origem.

Ha portanto duas soluções quando q for positivo, e nenhuma quando for negativo.

2.^a *Hypothese.* Ha uma solução sempre, quer esteja o ponto d'um lado, quer do outro lado da origem das coordenadas; positiva ou negativa, segundo for q positivo ou negativo.

3.^a *Hypothese.* Existindo M á direita da origem, ou sendo q positivo, na tangente a (2) haverá uma raiz positiva; na tirada para (3) uma outra negativa e ambas eguaes. Sendo q negativo, é claro que não podemos ter solução alguma real.

4.^a *Hypothese.* Á direita da origem, ou quando q é positivo, haverá uma raiz positiva; á esquerda da origem, quando q é negativo, haverá uma raiz negativa.

O valor de q será em todos estes casos o da w^m .

Eixo dos XX ($q=0$)

1.^a *Hypothese.* Este eixo é tangente na origem das coordenadas a todos os ramos, o que dá um valor nullo para w ; consideração esta que se refere a todas as hypotheses.

De M póde tirar-se, quando situado acima da origem, uma tangente para (2), diversa do eixo dos XX, da qual provirá uma raiz positiva e uma negativa.

Quando situada abaixo da origem, esta segunda tangente não se póde tirar.

Sendo portanto p positivo haverá uma solução positiva e uma negativa; quando é negativo não ha solução alguma real.

2.^a *Hypothese.* Estando M abaixo da origem, ou sendo p negativo, não ha solução alguma; acima da origem, quando p é positivo, da tangente a (2) resulta uma raiz positiva, e da tangente a (1) uma negativa.

3.^a *Hypothese.* Ha sempre uma raiz real; positiva quando p é positivo, e negativa quando for p negativo.

4.^a *Hypothese.* Os valores positivos de p fazem achar uma raiz positiva; dos valores negativos resulta uma negativa.

Em todos estes casos a equação será satisfeita com o valor $w=0$.

Numero e signaes das raizes que admite a equação

$$w^m \pm pw^{m-n} \pm q = 0$$

Sendo m e n simultaneamente pares, ou impares, scrá par a

diferença $m - n$; sendo porém um d'elles par, e impar o outro, a differença virá impar.

Nas considerações que seguem deve, mais uma vez, attender-se a que os signaes dos parametros na equação acima apresentada são os contrarios dos que se lhes attribuiram em [B] e em [C]. Por simplificação tomemos k pelo seu valor absoluto

$$\left(\frac{m}{n}\right)^m \left(\frac{m}{n} - 1\right)^{-m+n}$$

e designem-se as diversas raizes que se obtiverem em cada caso por $R, R', R'' \dots$ com os seus respectivos signaes, repetindo-se o mesmo indice no caso de egualdade entre ellas.

1.^a HYPOTHESE: $w^{2m'} \pm pw^{2(m'-n')} \pm q = 0$

1.^o Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')} - q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, -R. \\ p^m = kq^n \dots + R, -R. \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

2.^o Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')} + q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, +R', -R, -R'. \\ p^m = kq^n \dots + R, +R, -R, -R. \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

3.^o Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')} + q = 0$. $\left\{ \dots \dots \dots \text{idem.} \right.$

4.^o Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')} - q = 0$. $\left\{ \dots \dots \dots + R, -R. \right.$

2.^a HYPOTHESE: $w^{2m'+1} \pm pw^{2(m'-n')+1} \pm q = 0$

1.^o Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')+1} - q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, -R', -R''. \\ p^m = kq^n \dots + R, -R', -R'. \\ p^m < kq^n \dots + R. \end{array} \right.$

2.^o Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')+1} + q = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, +R', -R''. \\ p^m = kq^n \dots + R, +R, -R'. \\ p^m < kq^n \dots -R. \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots - R . \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R . \right.$

3.ª HYPOTHESE: $w^{2m'} \pm pw^{2(m'-n')+1} \pm q = 0$

1.º Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')+1} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R, - R' . \right.$

2.º Quadrante $w^{2m'} - pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, + R' . \\ p^m = kq^n \dots + R, + R . \\ p^m < kq^n \dots \text{não ha solução real.} \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')+1} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m < kq^n (*) \text{idem.} \\ p^m = kq^n \dots - R, - R' . \\ p^m > kq^n \dots - R, - R' . \end{array} \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'} + pw^{2(m'-n')+1} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R, - R' . \right.$

4.ª HYPOTHESE: $w^{2m'+1} \pm pw^{2(m'-n')} \pm q = 0$

1.º Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')} - q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots + R . \right.$

2.º Quadrante $w^{2m'+1} - pw^{2(m'-n')} + q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m > kq^n \dots + R, + R', - R'' . \\ p^m = kq^n \dots + R, + R, - R' . \\ p^m < kq^n \dots - R . \end{array} \right.$

3.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')} + q = 0 . \left\{ \dots \dots \dots - R . \right.$

4.º Quadrante $w^{2m'+1} + pw^{2(m'-n')} - q = 0 . \left\{ \begin{array}{l} p^m < kq^n \dots + R . \\ p^m = kq^n \dots + R, - R', - R' . \\ p^m > kq^n \dots + R, - R', - R'' . \end{array} \right.$

(*) Por existir n'este caso o ponto M acima da curva fez-se $p^m < kq^n$; tomando-se para k o valor absoluto que se tem supposto.

Eixo dos YY: $w^m \pm q = 0$

1.^a Hypothese: $w^{2m'} \pm q = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2m'} + q = 0 \text{ não ha solução real.} \\ w^{2m'} - q = 0 + R, -R. \end{array} \right.$

2.^a Hypothese: $w^{2m'+1} \pm q = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2m'+1} + q = 0 - R, \\ w^{2m'+1} - q = 0 + R. \end{array} \right.$

Sendo a equação obtida pela 3.^a hypothese para este caso particular $w^{2m'} \pm q = 0$, é claro que devemos achar as mesmas soluções que pela 1.^a hypothese: e é effectivamente o que se deduz.

Da mesma sorte se acha que os resultados obtidos para a 4.^a hypothese são identicos aos obtidos pela 2.^a

Eixo dos XX: $w^n \pm pw^{m-n} = 0$ ou $w^n \pm p = 0$

1.^a Hypothese: $w^{2n'} \pm p = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2n'} - p = 0 + R, -R'. \\ w^{2n'} + p = 0 \text{ não ha solução real.} \end{array} \right.$

2.^a Hypothese: os resultados são analogos aos da 1.^a

3.^a Hypothese: $w^{2n'+1} \pm p = 0 \left\{ \begin{array}{l} w^{2n'+1} - p = 0 + R. \\ w^{2n'+1} + p = 0 - R. \end{array} \right.$

4.^a Hypothese: o mesmo que na 3.^a

Construcção de w

Obtida a linha representativa d'uma qualquer das potencias de w , ou seja w^m ou w^n , seguindo o processo geral que foi adoptado para a determinação d'estas potencias, se pôde obter a de w .

O problema consiste em determinar uma linha que seja a raiz, indice m , d'uma outra linha dada.

Traçando n'um plano dois eixos coordenados orthogonaes, se tomarmos um ponto A sobre o eixo dos XX, a uma distancia w

da origem das coordenadas, e um outro ponto B sobre o eixo dos YY á distancia w^m da origem, será a equação da recta AB

$$1 = \frac{x}{w} + \frac{y}{w^m} \quad [C']$$

As rectas que satisfazem a [C'], terão por envolucro uma curva, cuja equação se obtem fazendo $n = 1$ na equação [D].

É claro que para a determinação desejada não é necessario o suppór a existencia de signaes negativos nos denominadores que entram no segundo membro de [C'].

Virá por envolucro a curva dada por

$$x^m = (-1)^n m^m (m-1)^{-m+1} \cdot y = -m^m (m-1)^{-m+1} y$$

visto ser $n = 1$.

A curva envolucro é a parabola, numero um, da ordem m ; a qual, no caso de ser m par, terá a fórmula dada pela fig. 1.^a, e, quando impar, será a correspondente á da fig. 3.^a

O primeiro caso corresponde á 3.^a hypothese; o segundo á 4.^a; em qualquer d'elles se marca sobre o eixo dos YY e na parte positiva d'este um ponto B a uma distancia w^m da origem das coordenadas, a qual distancia é conhecida, e d'esse ponto tiram-se tangentes para a curva envolucro.

Pelo que se viu ao estudar na 3.^a hypothese o caso de estar o ponto situado sobre o eixo dos YY, na parte positiva d'este, se reconhece que sendo m par, ha duas soluções reaes, como se esperava, uma positiva e outra negativa.

Da 4.^a hypothese se conclue que, sendo m impar, haverá apenas uma solução negativa.

Dos expoentes das potencias que entram na equação trinomia resulta o envolucro a empregar; dos parametros as tangentes uteis para a resolução do problema.

Considerados os parametros como as coordenadas d'um ponto que se desloca sobre o plano, em consequencia das variações que lhes attribuiremos, precisa-se bem n'este movimento a influencia por elles exercida sobre as raizes reaes, cujos valores vemos variar, a par e passo, com os dos parametros.

Correspondendo uma parabola-envolucro só a um grupo de expoentes da equação trinomia, póde o caracteristico servir para designar esta; d'este modo será intitulada a equação [A]: equação numero n da ordem m , sendo n a differença dos expoentes,

$$x^m - (1 - m)x^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1}m^{m-1}x - (-1)^m m^m = 0$$

visto ser $n = 1$.

A curva envolucro é a parabola numero um, da ordem m ; a qual, no caso de ser m par, terá a forma dada pela fig. 1.ª, e quando impar, será a correspondente a da fig. 3.ª.

O primeiro caso corresponde á 3.ª hypothese; e segundo á 4.ª; em qualquer d'elles se marca sobre o eixo dos YY' e em parte positiva d'este um ponto B a uma distancia m da origem das coordenadas, a qual distancia é conhecida e conhecida em caso de se traçarem tangentes para a curva envolucro.

Pelo que se vê ao estudar na 3.ª hypothese o caso de estar o ponto situado sobre o eixo dos YY' em parte positiva d'este, se reconhece que sendo m par, ha duas soluções reaes, como se esperava, uma positiva e outra negativa.

Na 4.ª hypothese se conclue que, sendo m impar, haverá apenas uma solução negativa.

Para a resolução do problema proposto, ha duas maneiras de se proceder: a primeira é a de se determinar os expoentes das potencias que entram na equação trinomia resultante do envolucro a empregar, dos parametros as tangentes para a resolução do problema proposto.

BIBLIOGRAPHIA

D. G. Vicuña, D. J. Echegaray. — *Discursos lidos ante la Real Academia de Ciencias.* — Madrid, 1885.

Contem este opusculo, em primeiro logar, o discurso lido pelo illustre professor da universidade de Madrid, o sr. Vicuña, na occasião da sua recepção na Academia das Sciencias de Madrid. Depois de fazer o elogio do marquez do Socorro, a quem succedeu, o sr. Vicuña toma para thema do seu discurso as relações entre as theorias mathematicas da Physica, thema que desenvolve d'uma maneira notavel, como era de esperar do auctor de trabalhos importantes sobre Physica mathematica.

Principia por um resumo historico das descobertas relativas á applicação da mathematica á Physica, considerando successivamente a Optica, a Acustica, a Elasticidade, a Capillaridade, e as Sciencias do calor e da electricidade, tendo em vista principalmente as relações quantitativas entre estes ramos da Physica mathematica.

Em seguida, depois de estabelecer como é que a Mathematica e a Physica se unem para formar a Physica mathematica, passa á consideração d'aquellas relações quantitativas, isto é, á consideração da paridade dos algarithmos proprios dos differentes ramos da Physica mathematica. Occupa-se assim da *theoria do potencial*, do principio da *conservação da energia*, e finalmente das leis das vibrações.

O segundo discurso contido no opusculo foi lido na mesma Academia, em resposta ao precedente, pelo sr. Echegaray.

Ninguem melhor do que o sr. Echegaray, geometra e litterato eminente, poderia responder ao bello discurso do sr. Vicuña.

Tomando para thema o mesmo assumpto, isto é, a synthese dos diversos phenomenos physico-mathematicos, o eloquente orador occupa-se não só das relações entre os diversos ramos da Physica, mas tambem, e principalmente, da grande hypothese por meio da qual se pretende reduzir todos os problemas cos-

micos a problemas de Mecanica racional, admittindo tres entidades: *materia*, debaixo de fórma ponderavel e de ether; *forças* attractivas e repulsivas; e *movimento*, representando uma quantidade constante de energia.

Passa pois em revista os differentes ramos das sciencias physicas para mostrar que na actualidade os problemas de Mecanica Celeste, de Optica e de Elasticidade, estão reduzidos a problemas de Mecanica racional, e que tudo leva a crêr que, no futuro, a problemas d'esta natureza serão tambem reduzidos os problemas da Thermodynamica, da Electricidade e da Chymica. Termina com algumas considerações relativas a duas outras hypotheses cosmicas.

J. A. Martins da Silva. — *Sobre os sistemas hamiltoniano e canónico.* — Lisboa, 1885.

Na primeira parte d'este opusculo, o distincto collaborador d'este jornal tracta da transformação das equações fundamentaes da dinamica obtidas por Hamilton e Jacobi; do integral obtido por Jacobi das duas equações ás derivadas parciaes de Hamilton satisfeitas pela funcção principal e pela funcção caracteristica; dos theoremas de Lagrange, Poisson e Liouville; etc.

Na segunda parte expõe as fórmulas da variação das constantes arbitrarías, e estuda as differentes fórmulas da funcção perturbadora.

D. M. Benitez y Parodi. — *Recuerdos de la Universidad de Coimbra.* — Madrid, 1885.

Contém este opusculo um bello discurso pronunciado pelo sr. Benitez y Parodi no *Centro do exercito e armada de Madrid*. Depois de fallar da importancia das sciencias mathematicas para as sciencias militares, a fim de justificar a oportunidade do seu discurso, o auctor menciona os nomes e as principaes obras dos mathematicos que n'este seculo tem havido em Portugal, tanto dentro como fóra da Universidade. Falla tambem dos principaes estabelecimentos annexos á Universidade.

J. Hoüel. — Études sur les méthodes d'enseignement dans les mathématiques. — Paris, 1885.

Contém este opusculo dois importantes trabalhos do bem conhecido professor da faculdade de sciencias de Bordeaux.

No primeiro tracta da generalisação successiva da idéa de quantidade na Analyse mathematica. Vai extendendo successivamente a definição de números, de modo porém que se lhes applique sempre os *principios característicos* das operações em Algebra. D'este modo vai considerando as operações sobre números inteiros; depois as operações sobre linhas tomadas na mesma direcção, d'onde resultam os números negativos; depois as operações sobre números funcionarios e incommensuraveis; e enfim as operações sobre linhas tomadas em qualquer direcção, d'onde resultam os números imaginarios.

No segundo trabalho expõe o illustre mathematico reflexões muito sensatas sobre o ensino da Trigonometria.

Principia pelos dois meios por que póde ser ensinada a Trigonometria: ou seguindo o espirito da antiga Geometria, como se faz habitualmente, ou seguindo o methodo cartesiano. Opta pelo segundo meio como mais intuitivo, e como podendo servir de ponto de partida para a explicação das quantidades negativas.

Depois refere-se ao inconveniente de pôr nas mãos de alumnos noviços taboas de logarithmos das funcções angulares, em lugar de taboas d'estas funcções, e principalmente ao vicio capital de os obrigar a gastar muito tempo com calculos numericos pelo emprego de taboas com logarithmos de sete decimaes em lugar de empregar taboas com tres ou quatro decimaes.

Finalmente mostra que não ha vantagem alguma em transformar, por meio de angulos auxiliares, as fórmulas da Trigonometria em expressões monomias para as calcular por logarithmos, e que o calculo feito usando das fórmulas directas é em geral mais simples.

Termina pelo calculo dos erros dos resultados trigonometricos provenientes tanto da inexactidão necessaria das taboas, como dos erros dos dados da questão.

C. le Paige. — *Sur les surfaces du troisième ordre.* — Stockholm, 1885.

Ainda ha pouco tempo annunciámos n'este jornal um trabalho importante do sr. C. le Paige sobre a involução e homographia da terceira ordem e de segunda classe, e já hoje temos a registrar uma applicação importante das theorias expostas n'aquelle trabalho ás superficies de terceira ordem definidas por dezanove pontos.

O illustre geometra faz preceder o estudo das superficies do estudo de algumas propriedades das cubicas e da resolução de alguns problemas relativos a estas curvas, de que depois faz uso.

Foi publicada esta memoria nas *Actas mathematicas* do sr. Mittag-Leffler.

SOBRE UMA FÓRMULA RELATIVA À THEORIA DAS FUNÇÕES ELLIPTICAS

(Extracto de uma carta ao sr. Gomes Teixeira)

POR

J. A. MARTINS DA SILVA

No tomo II das *Actas mathematicas* do sr. Mittag-Leffler vem um artigo do sr. Hermite sobre uma equação interessante para a theoria das funcções ellipticas, que julga ter sido descoberta pelo sr. Cayley.

Esta equação é um caso particular da seguinte:

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & -K'^2 \cdot \operatorname{sn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{sn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{sn}(\gamma - \delta) + \\ & + \operatorname{cn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{cn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{cn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{cn}(\gamma - \delta) - \\ & - \frac{1}{K^2} \cdot \operatorname{dn}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{dn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{dn}(\gamma + \delta) \cdot \operatorname{dn}(\gamma - \delta) = \\ & = -\frac{K'^2}{K^2} \cdot 2 \cdot \frac{K'^2 \cdot (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \gamma) \cdot (\operatorname{sn}^2 \beta - \operatorname{sn}^2 \delta)}{(1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta)(1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \gamma \cdot \operatorname{sn}^2 \delta)} \end{aligned} \right.$$

devida ao sr. Glaisher (*Bulletim das sciencias mathematicas e astronomicas* de Darboux, pag. 215, 1882).

Vou mostrar que a fórmula (a) corresponde notavelmente a outra apresentada por Rosenhein nas Memorias do Instituto de França, tomo XI.

Com effeito, são conhecidas as fórmulas ellipticas

$$(b) \left\{ \begin{aligned} & 1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\alpha) \cdot \theta^2(\beta)} \cdot \theta(\alpha + \beta) \cdot \theta(\alpha - \beta) \\ & 1 - K^2 \cdot \operatorname{sn}^2 \gamma \cdot \operatorname{sn}^2 \delta = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(\gamma) \cdot \theta^2(\delta)} \cdot \theta(\gamma + \delta) \cdot \theta(\gamma - \delta); \end{aligned} \right.$$

podemos deduzir ainda

$$(c) \quad \begin{cases} K(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \gamma) = \frac{\theta^2(\alpha)}{\theta^2(\gamma)} \cdot \theta_1(\alpha - \gamma) \cdot \theta_1(\alpha + \gamma) \\ K(\operatorname{sn}^2 \beta - \operatorname{sn}^2 \delta) = \frac{\theta^2(\alpha)}{\theta^2(\delta)} \cdot \theta_1(\beta - \delta) \cdot \theta_1(\beta + \delta). \end{cases}$$

Façamos agora

$$(d) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \omega, & \alpha + \gamma = u = \frac{1}{2}(\omega + \omega' + \omega'' + \omega'''), \\ \alpha - \beta = \omega', & \alpha - \gamma = u' = \frac{1}{2}(\omega + \omega' - \omega'' - \omega'''), \\ \gamma + \delta = \omega'', & \beta + \delta = u'' = \frac{1}{2}(\omega - \omega' + \omega'' - \omega'''), \\ \gamma - \delta = \omega''', & \beta - \delta = u''' = \frac{1}{2}(\omega - \omega' - \omega'' + \omega'''). \end{cases}$$

resulta, pela substituição de (b), (c) e (d) em (a), a fórmula

$$\begin{aligned} & 2\theta_1(u) \cdot \theta_1(u') \cdot \theta_1(u'') \cdot \theta_1(u''') = \\ & = \theta_1(\omega) \cdot \theta_1(\omega') \cdot \theta_1(\omega'') \cdot \theta_1(\omega''') + \\ & + \theta_2(\omega) \cdot \theta_2(\omega') \cdot \theta_2(\omega'') \cdot \theta_2(\omega''') + \\ & - \theta_3(\omega) \cdot \theta_3(\omega') \cdot \theta_3(\omega'') \cdot \theta_3(\omega''') \\ & - \theta_4(\omega) \cdot \theta_4(\omega') \cdot \theta_4(\omega'') \cdot \theta_4(\omega''') \end{aligned}$$

de Rosenhain.

HOMOGRAPHIES ET INVOLUTIONS DES ORDRES SUPERIEURS

PAR LE

D. C. LE PAIGE

Professeur de Géométrie Supérieure à l'université de Liège

(Suite)

Involution

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà supposé que les séries homographiques pouvaient être situées sur un même support. Chaque élément de ce dernier pouvait donc être, tour à tour, regardé comme appartenant aux différentes séries.

Nous allons faire une seconde restriction: nous imaginerons que les séries d'éléments puissent se permuter entre elles; dans ce cas, les groupes d'éléments constituent une *involution*.

Nous pourrions donc adopter la définition suivante:

Lorsque n séries d'éléments appartenant à une H_k^n sont situées sur un même support et sont telles que les groupes de n éléments qui la composent, restent les mêmes quelles que soient celles des séries auxquelles appartiennent les k éléments caractéristiques d'un groupe, pris dans ce groupe, ces séries forment une involution du n^{me} ordre et du k^e rang.

Nous désignerons une telle involution par le symbole I_k^n . Un exemple, emprunté à ce qui précède, viendra éclaircir cette définition.

Si l'on joint les trois côtés d'un triangle ABC, inscrit à une surface du second ordre, à tous les points de celle-ci, les ternes de plans qu'on obtient coupent une droite quelconque l en des groupes de trois points qui appartiennent à une H_2^3 .

Mais si la droite l a la position particulière qui a été définie p. 46, les groupes de trois points appartiennent à une I_2^3 .

Il sera inutile, d'après cela, de revenir sur ce que nous avons dit précédemment, les involutions n'étant que des homographies particularisées à la fois quant au support qui est unique, et quant aux séries elles-mêmes qui sont permutablement entre elles sans que les groupes varient.

Il ne sera donc pas nécessaire de répéter les définitions des *éléments neutres*, des *éléments de ramification*, etc.

Quelques mots suffiront aussi pour la classification des involutions. Les figures fondamentales, celles qui constituent les involutions du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang, sont formées par des groupes de n éléments, situés sur un même support rationnel ou unicursal, et caractérisés par $(n-1)$ de ces éléments.

Lorsque $n=3$, nous pouvons regarder, par exemple, tous les groupes en ligne droite d'une cubique plane rationnelle comme constituant une I_2^3 ; il en sera de même des points où les plans d'une gerbe rencontrent une cubique gauche R_3 .

Ce dernier mode sera particulièrement utile, comme nous le verrons plus loin.

Lorsque $n=4$, les groupes plans d'une courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce représentent une I_3^4 .

Les groupes communs à deux, trois, . . . $n-k$ involutions du n^{me} ordre et du $(n-1)^{\text{me}}$ rang constituent des involutions I_{n-2}^n , I_{n-3}^n , . . . , I_k^n .

Par exemple, tous les plans d'un faisceau coupent une R_3 en des points qui appartiennent à une I_1^3 ; ces plans sont en effet les plans communs de deux gerbes dont chacune définit une I_2^3 .

On voit encore que si, dans une I_k^n , on laisse fixe un groupe de p points ($p < k$), il lui correspond une I_{k-p}^{n-p} .

Si, par exemple, dans l'involution marquée sur R_3 par les plans d'une gerbe G_1 , on prend un point M , il est visible que tous les plans du faisceau G_1M coupent R_3 en des couples de points qui appartiennent à une I_1^3 .

Ces notions sont élémentaires et bien connues; nous les re-

produisons précisément à cause de ce caractère, pour rendre plus claires les propriétés que nous avons énoncées et qui découlent immédiatement de la définition des involutions.

Double définition algébrique des involutions. — Si nous supposons encore que chaque élément soit défini, sur un support uniserial, par un paramètre, ou plutôt par deux coordonnées homogènes, l'involution I_{n-1}^n sera définie par une relation

$$f = 0, \quad 3)$$

f représentant une forme binaire à n série de variables

$$f \equiv a_x a_y a_z \dots a_u.$$

Cette forme, contrairement à celle que nous avons employée précédemment, est symétrique par rapport aux n séries de variables.

Ainsi, lorsque l'on écrit explicitement

$$f \equiv \sum a_{ik\dots m} x_i x_k x_l \dots x_m,$$

$i, k, l, \dots m$ pouvant prendre les valeurs 1 et 2, le coefficient $a_{ik\dots m}$ ne varie pas par une permutation des indices.

Il en résulte que les coefficients de f sont seulement au nombre de $(n+1)$.

En conséquence:

Une involution I_{n-1}^n est caractérisée par n groupes de n éléments.

Comme pour les homographies, il est encore visible que les groupes de n points ne doivent pas dépendre les uns des autres; ou, ce qui revient au même, les équations linéaires que l'on devra résoudre pour obtenir les coefficients de f , doivent admettre un système de solutions finies et déterminées.

Nous en pouvons déduire qu'une I_{n-2}^n est caractérisée par $(n-1)$ groupes de n points et, en général, une I_k^n par $k+1$ groupes de n points.

Ces différents théorèmes vont nous permettre d'établir une seconde définition algébrique des involutions.

Observons qu'une involution du n^{me} ordre et du k^{me} rang est caractérisée par $(k+1)$ groupes de n éléments.

Or, si nous supposons que ces $(k+1)$ groupes soient définis par des équations

$f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_k = 0,$

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0,$$

qui est du n^{me} ordre, représentera des groupes de n éléments dont chacun est défini par k éléments, pris dans le groupe.

Les deux définitions que nous venons de faire connaître se prêtent toutes deux à l'étude des involutions supérieures: suivant les cas, l'une est plus avantageuse que l'autre, ce qui fait que nous les emploierons simultanément.

Nous avons vu déjà, dans la théorie de l'homographie, l'importance des éléments neutres: nous allons maintenant signaler l'existence de ces éléments pour les involutions.

A cet effet, nous démontrerons d'abord le théorème suivant, dû à Mr. Emile Weyr:

Lorsque k éléments d'une involution du k^{me} rang appartiennent à deux groupes de n points, ils sont contenus dans une infinité d'autres groupes, dont chacun est déterminé en adjoignant un élément aux k éléments considérés.

Supposons que le groupe de k éléments soit représenté par l'équation du k^{me} degré

$$\varphi = 0.$$

Nous pouvons écrire l'identité

$$\frac{f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k}{\varphi} = \psi + \frac{\psi_{k-1}}{\varphi},$$

ψ_{k-1} étant un polynôme de degré $(k-1)$ au plus, dont les coefficients contiennent les λ au premier degré.

On peut se servir des mêmes relations pour établir l'existence des groupes neutres.

En effet, le polynôme φ du k^{me} degré, contient k paramètres indéterminés. Les équations (4) permettent, en général, lorsque l'on a choisi à l'avance la forme φ de déterminer complètement les paramètres λ . De cette manière, on définit, d'une manière unique les $(n-k)$ éléments qui, joints aux k considérés, forment un groupe de n éléments.

Les coefficients p_{ik} contiennent les paramètres de φ .

Si donc on ne choisit pas arbitrairement ces paramètres, il est possible de les définir de telle sorte que le déterminant rectangulaire (5) soit composé de déterminants nuls.

Il serait même possible de déduire de là le nombre des groupes neutres, mais ceci exigerait une discussion trop longue pour prendre place ici.

Il sera plus aisé de discuter directement la question dans des cas particuliers maintenant que l'existence des groupes neutres est mise en évidence.

Nous nous bornerons à signaler deux de ces cas.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une involution I_{n-1}^n ; elle peut être définie par une relation unique

$$f = a_x a_y a_z \dots a_u = 0.$$

Cette relation peut s'écrire symboliquement

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} = 0.$$

Or, il est visible que x_1, x_2 est indéterminé si les $(n-1)$ éléments caractéristiques satisfont aux équations

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0.$$

Il en résulte que, dans une involution I_{n-1}^n , les groupes neutres de $(n-1)$ éléments appartiennent à une I_{n-2}^{n-1} .

Considérons encore en général une I_2^n .

Les couples neutres sont ceux qui figurent dans deux groupes, d'après ce que nous avons vu.

Or si nous prenons deux éléments X et Y, il correspond à chacun d'eux une I_1^{n-1} . D'après un théorème que nous démontrerons plus loin, ces deux I_1^{n-1} ont $(n-2)^2$ couples communs. Ces couples ne constituent pas tous des couples neutres. En effet X et Y déterminent $(n-2)$ points qui forment

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

de ces couples.

Il y aura donc, en tout,

$$(n-2)^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

couples neutres.

Ce théorème, sous sa forme générale, est encore dû à Mr. Em. Weyr auquel nous empruntons la démonstration qui précède.

Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations parce que nous n'avons pour but que d'indiquer aux lecteurs de ce *Journal* les principaux points d'une théorie si féconde en applications, sans prétendre, en quelques pages, épuiser une matière aussi vaste.

Il existe d'autres groupes d'éléments particuliers qui présentent aussi un grand intérêt et au sujet desquels nous allons démontrer un théorème général: ce sont les éléments unis ou multiples.

Une involution I_k^n possède $(k+1)(n-k)$ éléments multiples d'ordre $(k+1)$.

L'équation

$$f = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0,$$

*

définissant une I_k^n , pour que cette équation ait des racines $(k+1)$ ples, il faut évidemment que l'on ait :

$$\frac{d^k f_0}{dx_1^k} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_1^k} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_1^k} = 0,$$

$$\frac{d^k f_0}{dx_1^{k-1} dx_2} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_1^{k-1} dx_2} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_1^{k-1} dx_2} = 0,$$

.....

$$\frac{d^k f_0}{dx_2^k} + \lambda_1 \frac{d^k f_1}{dx_2^k} + \dots + \lambda_k \frac{d^k f_k}{dx_2^k} = 0.$$

Pour que ces égalités puissent subsister, on doit donc avoir

$\frac{d^k f_0}{dx_1^k}$	$\frac{d^k f_1}{dx_1^k}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_1^k}$
$\frac{d^k f_0}{dx_1^{k-1} dx_2}$	$\frac{d^k f_1}{dx_1^{k-1} dx_2}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_1^{k-1} dx_2}$
$\frac{d^k f_0}{dx_2^k}$	$\frac{d^k f_1}{dx_2^k}$	\dots	$\frac{d^k f_k}{dx_2^k}$

ce qui justifie le théorème.

A chaque point multiple d'ordre $(k+1)$ correspond un groupe de $(n-k-1)$ points.

Involutions conjuguées. — La double définition algébrique des involutions conduit à une notion importante: celle des involutions conjuguées.

Considérons une involution I_k^n définie par

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0.$$

Les formes f_0, f_1, \dots, f_k sont du n^{me} ordre et peuvent être représentées symboliquement par

$$a_x^n, b_x^n, \dots, l_x^n. \quad A)$$

Or soient les formes plurilinéaires

$$a_x a_y \dots a_u,$$

$$b_x b_y \dots b_u,$$

$$l_x l_y \dots l_u,$$

Si nous considérons les groupes de n points appartenant à la fois aux $(k + 1)$ involutions, on voit que ces groupes sont définis par $(n - k - 1)$ éléments et par suite appartiennent à une I_{n-k-1}^n .

Cette involution est dite *conjuguée* de la première.

Deux groupes de points, pris dans les deux involutions sont conjugus ou «apolaires» d'après la définition adoptée en général par les géomètres allemands (*).

Si n est impair, il existe deux involutions conjugues de même ordre et de même rang.

En effet, I_k^n et I_{n-k-1}^n étant conjugues, il suffit que

$$k = n - k - 1, \quad \text{ou} \quad k = \frac{n-1}{2}.$$

(*) Nous nous bornerons à rappeler les travaux de M.M. Reye, Rosanes, Sturm, F. Meyer.

Les deux systèmes A) et B) ayant les mêmes invariants et covariants, les éléments singuliers de chacune des deux involutions jouissent de propriétés projectives dans les deux involutions.

On peut définir la seconde involution par une équation

$$F_0 + p_1 F_1 + p_2 F_2 + \dots + p_{n-k-1} F_{n-k-1} = 0.$$

Nous trouvons ainsi un nouveau système

$$F_0, F_1, F_2, \dots, F_{n-k-1} \quad C).$$

Il résulte immédiatement de là que les deux systèmes A) et C) qui peuvent être remplacés par A) et B) ont les mêmes covariants.

Il est quelque fois possible, à l'aide des éléments neutres de certaines involutions, de déduire le système C) de A): nous en mentionnerons un exemple particulier dans le cas des involutions du troisième ordre que nous étudierons plus loin avec quelque détail.

Lorsque $k = n - 1$, l'involution conjuguée est de rang 0, c'est-à-dire est constituée par un groupe unique de n points.

Représentons cette forme par A_x^n , et un groupe quelconque de l'involution I_{n-1}^n par l'équation $B_x^n = 0$.

On doit avoir, par ce qui précède,

$$(AB)^n = 0.$$

Lorsque n est impair, les propriétés des formes algébriques nous apprennent que

$$(AA)^n \equiv 0.$$

En outre, il est facile de voir que

$$A_x^n = 0,$$

représente les n points multiples de l'involution. (*)

Donc

Dans une involution I_{n-1}^n , d'ordre impair, les n points multiples constituent une groupe de l'involution.

Involutions situées sur un même support. — Considérons, sur un même support, deux involutions du premier rang, respectivement des ordres n et m .

La première sera définie par une équation

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0, \quad (6)$$

la seconde par

$$A_x^m + \mu B_x^m = 0. \quad (7)$$

Si nous observons que l'on doit avoir simultanément

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0,$$

$$a_y^n + \lambda b_y^n = 0,$$

pour que deux éléments appartiennent à un même groupe de (6), la relation entre x, y , doit être

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(x\mu)} = 0.$$

Cette relation peut donc être définie par une équation

$$(x, y)^{n-1} = 0,$$

$(x, y)^{n-1}$ représentant une forme binaire à deux séries de variables, du degré $(n-1)$ par rapport à chacune des séries.

La seconde involution sera de même caractérisée par une relation

$$(x, y)^{m-1} = 0.$$

Explicitement, on peut écrire ces deux équations

$$x_1^{n-1}P_0 + (n-1)x_1^{n-2}x_2P_1 + \dots + x_2^{n-1}P_{n-1} = 0, \quad (8)$$

$$x_1^{m-1}Q_0 + (m-1)x_1^{m-2}x_2P_1 + \dots + x_2^{m-1}P_{m-1} = 0, \quad (9)$$

les polynômes P et Q étant respectivement des degrés $(n-1)$ et $(m-1)$ en y_1, y_2 .

En général, si l'on donne à y_1, y_2 une valeur déterminée, dans les équations 8) et 9), les deux équations en x n'auront pas de racines communes: mais on peut choisir y de telle sorte que les équations aient une racine commune.

Cette condition s'obtiendra en égalant à zéro le résultant des deux équations 8) et 9).

Nous obtenons, de cette manière, une équation en y du degré $2(n-1)(m-1)$; mais à cause de la symétrie, on voit que ces $2(n-1)(m-1)$ points y , constituent $(n-1)(m-1)$ couples communs aux deux involutions.

Donc

Deux involutions I_1^n, I_1^m , situées sur un même support ont $(n-1)(m-1)$ couples communs.

C'est le théorème que nous avons invoqué plus haut pour déterminer les couples neutres d'une I_2^n .

On est conduit à cette propriété d'une manière différente qui a l'avantage d'introduire une autre notion importante.

Nous savons que les points d'une conique peuvent être définis individuellement par un paramètre unique: il en résulte que nous pouvons considérer une involution du n^{me} ordre comme définie par les sommets de polygones inscrits à une conique, chaque polygone caractérisant un groupe de l'involution.

Considérons donc l'équation

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0;$$

les équations

$$a_x^n = 0, \quad b_x^n = 0,$$

correspondent à deux polygones inscrits.

Nous aurons ainsi une série de n — gones inscrits à C_2 , dont chacun est caractérisé par un de ses sommets.

Ces polygones auront respectivement $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés et l'on

peut se proposer de rechercher la courbe enveloppée par ces côtés, lorsque l'on fait varier λ .

Or si nous considérons deux sommets $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ d'un même polygone, nous avons, comme il a été dit, la relation

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = 0.$$

Mais d'un autre côté, les paramètres $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}$ peuvent être considérés comme les coordonnées de la droite qui unit ces deux sommets: il résulte alors, de l'équation qui vient d'être écrite, que les côtés de tous ces polygones, inscrits à C_2 , sur laquelle ils marquent une I_1^n , enveloppent une courbe K de classe $(n-1)$.

Cette courbe a reçu le nom de *courbe d'involution* (*).

Si maintenant nous nous reportons à la question que nous nous sommes proposée d'abord, nous voyons que les deux involutions I_1^n, I_1^m donnent naissance à deux courbes d'involution dont la classe est respectivement $(n-1)$ et $(m-1)$.

Ces deux courbes ont $(n-1)(m-1)$ tangentes communes qui définissent un même nombre de couples communs.

Nous déterminerons encore les ternes communs à une I_1^m et à une I_2^n . Or soient X_1, X_2 deux points appartenant à un même

(*) Voir, sur ce sujet, le mémoire de M. Weyr, *Journ. de Crelle*, t. 72. le mémoire de Mr. Darboux: *Sur une classe remarquable de courbes, etc.*, p. 99 et 183, etc. Mr. Neuberg a résumé ces recherches, *Nouv. Corresp. Math.*, t. II.

groupe de I_1^m et désignons par Y les $(m-2)$ autres points du groupe.

X_1, X_2 , dans I_2^n , donnent naissance à $(n-2)$ points Z.

Si l'un des points Y coïncidait avec l'un des points Z, on aurait un terme commun: il faut donc établir la correspondance qui existe entre Y et Z.

Or, dans I_1^m , à un point Y correspondent $(m-1)$ points X formant $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ couples, à chacun desquels correspondent, dans I_2^n , $(n-2)$ points Z.

Donc, un point détermine $\frac{(m-1)(m-2)}{1-2}(n-2)$ points Z.

A Z au contraire correspond, dans I_1^m , une I_1^{n-1} qui a, avec I_1^m $(m-1)(n-2)$ couples communs; chacun de ces couples engendre $(m-2)$ points Y. Donc un point Z définit $(m-1)(m-2)(n-2)$ points Y.

La correspondance est donc de degré

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)(m-2)}{1-2}(n-2) + (m-1)(m-2)(n-2) \\ &= \frac{3(m-1)(m-2)}{2}(n-2). \end{aligned}$$

Ce dernier nombre exprime combien il y a de coïncidences entre Y et Z. Mais d'un autre côté, chaque terme commun $X_1 X_2 Y$ contient trois de ces coïncidences. Nous voyons donc que les deux involutions I_1^m, I_2^n , situées sur le même support, ont $\frac{(m-1)(m-2)(n-2)}{2}$ ternes communs (*).

(*) V. Em. Weyr, *Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 2^{me} série, t. x.

Au sujet des surfaces d'involutions et de l'avantage que l'on peut retirer de leur étude, voir des mémoires du même auteur: *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 8^{me} série, t. III, n.° 5, *Sitzb. der k. Wiener Akademie*, LXXXV, p. 840, etc.

On peut déduire de là une notion, due, pensons nous, à Mr. Em. Weyr, celle des *surfaces d'involution*.

Considérons, par exemple, une courbe rationnelle gauche d'ordre m , R_m , sur laquelle nous imaginons que l'on ait représenté une I_2^n . Chaque groupe de l'involution donne naissance à $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ plans formant un polyèdre. On peut se demander

quelle est l'enveloppe de tous ces plans lorsque les groupes de l'involution varient. Ce sera évidemment une surface, dont nous pouvons rechercher la classe.

Or, si par une droite quelconque l , nous menons un faisceau de plans, ces plans marquent sur R_m , une I_1^m .

Les deux involutions I_1^m, I_2^n ayant, d'après ce que nous avons vu, $\frac{(m-1)(m-2)(n-2)}{2}$ ternes communs, ce nombre exprime la

classe de la surface d'involution.

Si nous voulons, de cette manière, trouver la surface d'involution d'une I_1^n , nous voyons que cette surface sera la développable circonscrite à deux surfaces F caractérisant deux I_2^n .

On peut tirer de ces considérations une foule de conséquences importantes: nous ne pensons pas néanmoins que ce soit le lieu de les développer ici; pour terminer ce chapitre nous allons indiquer quelques constructions relatives aux involutions.

Constructions relatives aux involutions cubiques. — Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse d'une I_2^3 et nous prendrons comme support une cubique gauche R_3 .

Nous commencerons par rappeler un moyen connu de construire individuellement les points d'une R_3 dont on connaît six points $AB, A'B', MM'$.

Les plans $ABM, A'B'M'$ se coupent suivant une droite x , les plans $AB'M, A'BM$ suivant une droite y . Les deux droites x et y , passant par le point M , déterminent un plan ω .

En employant M' au lieu de M , on obtient un second plan ω' . ω et ω' se coupent suivant une droite d .

Alors tout plan ω_1 , passant par d , rencontre $AB, A'B', AB', A'B'$ respectivement en des points C, D, C', D' . Les deux droites $CD, C'D'$ se coupent en un point N qui appartient à R_3 .

Il est visible, en effet, que si $\bar{\omega}_1$ pivote autour de d , les droites CD , $C'D'$ engendrent chacun un hyperboloïde à une nappe: ces deux surfaces ayant en commun la droite d , le lieu du point N est une R_3 ; d'ailleurs $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ étant deux positions particuliers de $\bar{\omega}_1$, R_3 passe par M et M' et en outre, évidemment, par A , B , A' , B' .

D'après cela, il est facile de faire correspondre, point par point, les points d'une droite quelconque à ceux de R_3 , puisqu'il suffit de projeter les points de la droite, sur R_3 , à l'aide d'un faisceau de plans dont l'axe est d .

Supposons maintenant que sur une droite l on se donne trois groupes de trois points $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ caractérisant une I_2^3 ; on obtiendra aisément leurs images sur R_3 ; $A'_1A'_2A'_3$, ...

Les trois plans $A'_1A'_2A'_3$, $B'_1B'_2B'_3$, $C'_1C'_2C'_3$ se coupent en un point G , sommet d'une gerbe dont tous les plans coupent R_3 suivant des ternes de I_2^3 .

Il peut se faire que parmi les points d'un terne $A_1A_2A_3$, un groupe de deux points A_1A_2 par exemple soit défini comme le couple commun à deux involutions quadratiques I_1^2 , $I_1'^2$. Il est aisé, même dans ce cas, de trouver la sécante $A'_1A'_2$ de R_3 .

En effet, imaginons que la première involution I_1^2 soit déterminée, sur l , par deux couples M_1M_2 ; N_1N_2 , et la seconde $I_1'^2$ par P_1P_2 , Q_1Q_2 .

Construisons $M'_1M'_2$; $N'_1N'_2$; $P'_1P'_2$, $Q'_1Q'_2$ et par un point quelconque S de R_3 menons des droites qui s'appuient respectivement sur les deux premières sécantes de R_3 et sur les deux dernières. Ces droites déterminent un plan qui coupe R_3 au couple commun aux deux involutions, c'est-à-dire qui passe par $A'_1A'_2$. En employant un autre point T , on obtient un second plan que passe par $A'_1A'_2$ et cette droite est ainsi déterminée. Si, au surplus, la connaissance de la sécante $A'_1A'_2$ est inutile, comme dans le problème précédent, il suffira de prendre pour point S le point A_3 . Le plan $A'_1A'_2A'_3$ sera ainsi déterminé.

Il pourrait encore arriver que les points $A_1A_2A_3$ soient définis, à la fois, sur l , comme groupe commun à trois I_2^3 . Il suffirait de construire les gerbes G_1 , G_2 , G_3 correspondant à ces trois involutions et le plan $G_1G_2G_3$ représenterait $A'_1A'_2A'_3$.

Nous avons donc, avec toute la généralité possible, la représentation d'une I_2^3 sur un cubique gauche R_3 .

Nous venons de voir comment on peut construire le point G. A l'aide de ce point, on peut résoudre les problèmes fondamentaux relatifs à une I_2^3 .

La première question qui se présentera sera de construire le troisième point d'une terne dont on connaît deux éléments $D_1 D_2$.

Déterminons D'_1, D'_2 ou, ce qui est suffisant, la sécante $D'_1 D'_2$: le plan $GD'_1 D'_2$ coupera R_3 au troisième point cherché D'_3 , qui, à son tour, donnera D_3 . La construction de D'_3 est d'ailleurs linéaire car elle se ramène aisément à celle du quatrième point d'intersection de deux coniques déterminées, lorsque l'on connaît trois de ces intersections. Nous ne nous attarderons pas à traiter ce problème.

Il peut encore être utile de construire les éléments particuliers de l'involution I_2^3 , à savoir les deux éléments neutres et les points triples.

Les éléments neutres sont représentés par la sécante de R_3 issue de G.

Or rien n'est plus aisé que de construire cette sécante si l'on fait attention à ce que nous avons dit plus haut.

Prenons sur R_3 des points MA, M'A'; puis construisons les plans PMA, PMA' qui nous donnent les points toujours réels B, B'. M'AB, M'A'B' se coupent suivant une droite M'X.

Si, d'une façon analogue, nous construisons des plans PM'A₁B₁, PM'A'₁B'₁, MA₁B₁, MA'₁B'₁ nous donneront une droite MY.

L'intersection PZ des plans PM'X, PMY sera la sécante cherchée.

La démonstration résulte de ce que toutes les involutions quadratiques qui, dans une I_2^3 , correspondent à tous les éléments du support, ont un couple commun définissant les éléments neutres.

Quant aux éléments triples, il résulte immédiatement de ce que nous avons dit à propos des involutions conjuguées d'une I_{n-1}^n , qu'on peut les regarder comme le groupe commun à trois I_2^3 qui auraient chacun pour points triples les points d'un terne de l'involution.

Or supposons que l'on se donne trois ternes $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, composés d'éléments déterminés individuellement.

Les plans osculateurs en $A_1A_2A_3$ se coupent en un point A' ; on obtient de même B' , C' et le plan $A'B'C'$ coupe R_3 aux points triples.

Il résulte d'une remarque faite tantôt que ce plan passera par G .

Nous laisserons au lecteur à voir comment ces constructions doivent se modifier lorsque l'involution est déterminée 1.° par trois points triples, 2.° par un ou deux points triples et deux ou un terne, 3.° par les éléments neutres et un terne (*).

On peut d'ailleurs traiter ces problèmes dans le plan, en employant pour support une conique: nous renverrons pour cela à nos *Essais de Géométrie Supérieure du troisième ordre*.

On pourrait facilement, à l'aide de ce qui précède, résoudre les problèmes relatifs à une I_1^3 , en prenant une R_3 comme support; mais afin de varier les moyens de construction, sans donner à notre travail une longueur qui ne serait pas admissible, si nous voulions faire connaître tous les procédés de représentation d'une I_1^3 , nous emploierons comme support une conique.

Il est évident que toutes les coniques d'un faisceau, dont un des points communs se trouve sur une conique K , marquent sur celle-ci des ternes de points appartenant à une I_1^3 .

Supposons que l'involution soit définie par deux ternes $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, et supposons que l'on veuille définir un terne dont on connaît un point C_1 .

Menons les droites A_2A_3 , B_2B_3 que se coupent en P ; puis PC_1 , qui coupe K en un point Q . A_1Q , B_1Q coupent B_2B_3 , A_2A_3 , respectivement en A' , B' , et la droite $A'B'$ coupe K aux deux points cherchés: il est visible, en effet, que les couples de droites $A'B'$, C_1Q ; A_2A_3 , A_1Q ; B_2B_3 , B_1Q constituent trois coniques qui passent par les quatre points $A'B'PQ$ dont l'un, Q , est situé sur K .

(*) Le lecteur, qui voudrait étudier cette matière avec plus de détails, pourra consulter un mémoire de M. Appell, inséré au tome v des *Ann. de l'École normale supérieure*; un mémoire de M. R. Sturm, inséré au *Journal de Borchart*, t. LXXXV; un travail de M. Em. Weyr, imprimé dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Vienne, t. LXXXIV, p. 4264, etc. Il verra, par ces travaux, toute l'importance de ces considérations, à différents points de vue.

Comme on le voit cette construction est applicable même si les couples $A_2A_3; B_2B_3$ sont imaginaires.

Il pourrait arriver que les points $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ soient donnés en même temp par deux coniques C, C' passant par un point Q de K : la solution ne serait guère plus compliquée dans ce cas, puisqu'il suffirait, par le point C_1 , de faire passer un conique du faisceau $[C, C']$: il serait aisé de déterminer la droite qui passerait par les deux intersections de cette conique avec K , différentes de C_1 et Q .

Nous pouvons nous proposer de construire les éléments singuliers d'une I_1^3 définie par deux ternes.

D'après ce que nous avons vu, une pareille involution possède quatre points doubles, et, par suite, quatre points de ramification.

Or nous savons aussi que la courbe d'involution est ici une conique K_1 . Tous les triangles inscrits à K et circonscrits à K_1 marquent sur K des ternes d'involution.

K_1 , comme on le voit, est facile à construire: deux ternes de points donnent six tangentes de K_1 .

Par chaque point de K , on peut mener à K_1 deux tangentes qui rencontrent K en deux points complétant un terne de l'involution: ces deux tangentes cessent d'être distinctes pour les points communs à K et K_1 . Ces quatre points d'intersection sont donc les quatre points de ramification de l'involution.

Soient V_1, V_2, V_3, V_4 ces quatre points: la tangente à K_1 , en V_1 , coupe K en un point D_1 qui est le point double correspondant à V_1 ; d'un autre côté $V_1D_1D_1$ constitue un triangle infiniment aplati inscrit à K et circonscrit à K_1 ; il en résulte que la tangente en D_1 à K doit aussi toucher K_1 .

En conséquence les quatre points d'intersection de K_1 et K marquent, sur cette dernière, les points de ramification de l'involution, et les points de contact des quatre tangentes communes à ces deux coniques en marquent, également sur K , les points doubles.

Nous ne nous occuperons pas des cas particuliers qui peuvent se présenter suivant que l'involution I_1^3 possède un ou deux points triples (*).

(* Pour ces cas spéciaux, et d'ailleurs pour tout ce qui concerne l'invo-

Nous avons défini, en général, ce que l'on entend par *involutions conjuguées*: nous allons en montrer un exemple particulier dans l'involution I_1^3 .

Supposons que l'on ait l'involution

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0;$$

l'involution conjuguée sera formée par tous les groupes communs aux deux I_2^3 caractérisées par les relations

$$a_x a_y a_z = 0,$$

$$b_x b_y b_z = 0.$$

Chacune de celles-ci possède un couple neutre: pour obtenir l'équation qui correspond à ce couple, il suffit, dans les covariants $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ de la forme trilineaire la plus générale, d'introduire les hypothèses relatives à la symétrie des variables.

Nous trouvons ainsi que ces points neutres sont donnés respectivement, pour chacun de ces deux involutions, par

$$\Delta_x^2 = (aa')^2 a_x a'_x = 0,$$

$$\nabla_x^2 = (bb')^2 b_x b'_x = 0.$$

Pour obtenir un terme de l'involution I_1^3 , que vient d'être définie, il suffira, par conséquent, de chercher dans chacune des involutions I_2^3 le point qui correspond aux éléments neutres de l'autre.

On trouve ainsi, quel faut associer aux deux points donnés par $\Delta_x^2 = 0$, celui qui est représenté par $(\Delta b)^2 b_x = 0$, et de mêm-

lution I_1^3 voir un mémoire de Mr. Em. Weyr, *Prager Abhandl.*, 1874. Nous avons également résolu la plupart de ces questions dans nos «*Essais etc.*»

me, aux deux points que représente $\nabla_x^2 = 0$, celui que correspond à $(\nabla a)^2 a_x = 0$.

En posant

$$p_x = (\Delta b)^2 b_x, \quad \bar{\omega}_x = (\nabla a)^2 a_x,$$

on voit que l'équation de l'involution conjuguée à celle que nous avons considéré d'abord est

$$\Delta_x^2 \cdot p_x + \mu \nabla_x^2 \cdot \bar{\omega}_x = 0.$$

Cette équation permet d'arriver à une définition élégante de la conique d'involution correspondant à l'involution conjuguée d'une involution donnée.

Rappelons-nous, pour cela, que si trois points sont représentés sur une conique par l'équation

$$a_x^3 = 0,$$

les deux points donnés par

$$(aa')^2 a_x a'_x = 0,$$

sont ceux où la *polaire* (*) du triangle formé par un point, relative à la conique rencontre celle-ci.

Par suite, la conique d'involution K_2 , de l'involution conjuguée à l'involution donnée, est l'enveloppe des polaires de tous les triangles inscrits à K et circonscrits à K_1 .

Il est assez facile de voir que les deux involutions conjuguées ont les mêmes points doubles: en conséquence, si l'on rapproche cette propriété d'une remarque faite plus haut, il en résulte que K , K_1 , K_2 sont inscrites à un même quadrilatère.

On peut encore faire, sur deux involutions cubiques conjuguées, diverses observations que nous n'indiquerons pas ici (**).

(*) On entend par *polaire* d'un triangle la droite qui joint les points de rencontre de chaque côté du triangle avec la tangente à la conique au sommet opposé.

(**) Voir, sur ce sujet, nos «Essais» et diverses Notes de Mr. Weyr in-

Nous dirons encore quelques mots de l'involution I_3^4 , que nous représenterons encore sur une conique C_2 .

Il est visible que toutes les cubiques que passent par six points fixes, dont quatre en dehors de C_2 et deux sur C_2 , déterminent sur cette courbe une I_3^4 .

Le premier problème que nous devons nous poser est donc le suivant:

Connaissant quatre groupes de quatre points sur une conique C_2 , déterminer six points, dont quatre en dehors de C_2 et deux sur C_2 , de telle sorte que par ces six points et par chacun des groupes de quatre points on puisse faire passer une cubique.

Soient $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$, $c_1c_2c_3c_4$, $d_1d_2d_3d_4$ les quatre groupes donnés.

Par $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$ faisons passer deux coniques quelconques Σ_1 , Σ_2 qui se coupent en quatre points ABCD.

Toutes les cubiques du faisceau (ABCD $c_1c_2c_3c_4$) coupent C_2 suivant des couples de points formant une I_1^2 ; il en est de même des cubiques du faisceau (ABCD $d_1d_2d_3d_4$), qui définissent une involution I_1^2 .

Ces deux involutions quadratiques ont un couple commun EF qui complète les six points cherchés.

En effet Σ_1 et Σ_2 , avec la droite EF, constituent deux cubiques passant par les six points donnés ABCDEF.

Il sera facile maintenant de compléter un quaterne dont on se donne trois éléments $e_1e_2e_3$; il suffira, en effet, de construire la cubique (ABCDEF $e_1e_2e_3$) et de déterminer le sixième point e_4 d'intersection de cette cubique avec C_2 .

Les constructions qui précèdent exigent, on le voit, que l'on sache déterminer les points où une cubique rencontre une conique.

sérées aux *Sitzungsberichte* de Vienne, t. LXXIII, t. LXVXI, p. 162, t. LXXXIV, p. 1268, etc. Cf. C. le Paige, *Sitzb. der Wiener Akademie*, t. LXXXI, p. 159 et 845; t. LXXXIV, p. 233; t. LXXXV, p. 844.

(*) Sur l'involution I_3^4 , voir P. Serret, C. R., t. LXXXVII, p. 643. C. le Paige, *Sitzb. der kön. böhm. Gesells.*, 1881, p. 61. — Sur l'invol. I_2^4 , voir Em. Weyr, *Sitzb. der Wien. Akad.*, t. LXXXI. — Sur l'invol. I_1^4 , *ibid.*, t. LXXXI. Voir aussi le même recueil, *passim*, t. LXXII et suivants, pour différentes questions relatives aux involutions biquadratiques.

que lorsque l'on connaît déjà quatre ou cinq des intersections de ces deux courbes.

Bien que la solution de ces problèmes n'exige aucune difficulté, nous la différerons jusqu'au chapitre suivant où nous ferons connaître quelques unes des principales applications géométriques des involutions et des homographies.

A l'aide des procédés qui précèdent, on pourrait résoudre les problèmes relatifs aux involutions I_1^4, I_2^4 ; nous n'aborderons pas ces questions qui exigeraient de trop longs développements, et nous terminerons ici cet exposé rapide de la théorie des involutions et des homographies.

Nous n'avons pu, naturellement, aborder tous les problèmes que présente cette théorie; notre but d'ailleurs était seulement d'indiquer les principaux points de vue afin de donner aux lecteurs du *Journal* le désir d'approfondir une question aussi féconde en applications, comme nous tâcherons de le montrer prochainement.

Applications géométriques

Nous avons, dans les deux premières parties de ce travail, exposé rapidement les principales propriétés des homographies et des involutions: nous allons maintenant faire connaître quelques unes des applications qu'on en peut faire.

Ici encore nous devons nous borner à traiter quelques questions sans prétendre, en aucun façon, épuiser le sujet.

Un des problèmes fondamentaux de la géométrie plane est la détermination des courbes du n^{me} ordre dont on connaît $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

Posons $\frac{n(n+3)}{2} = \mu$ et supposons que l'on se donne, dans un plan, les points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\mu$.

Divisons ces points en deux groupes: $G \equiv (A_1 A_2 \dots A_{\mu-n})$, $G' \equiv (A_{\mu-n+1} A_{\mu-n+2} \dots A_\mu)$.

Si nous adjoignons au groupe G successivement chacun des

*

points de G' , nous obtenons n groupes G_1, G_2, \dots, G_n , composés chacun de $\mu - n + 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ points.

Par chacun de ces groupes, nous pouvons donc faire passer des courbes du n^{me} ordre composés, chacune, d'une droite et d'une courbe du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Soit maintenant une transversale quelconque l .

Sur cette transversale, les courbes d'un groupe G_i déterminent des groupes de n points appartenant à une involution I_{n-1}^n .

Nous obtenons ainsi, sur cette transversale, n systèmes en involution et ces n systèmes ont, en général, un seul groupe commun: ce groupe de n points marque les intersections de l avec la courbe du n^{me} ordre que nous nous proposons de construire.

Si, sur cette transversale, on connaissait *a priori*, une, deux, $\dots, n-1$ intersections, il suffirait d'employer des involutions $I_{n-2}^{n-1}, I_{n-3}^{n-2}, \dots, I_0^1$.

Nous allons exposer plus complètement cette méthode générale dans le cas des cubiques planes.

Nous supposons, pour traiter le problème avec toute la généralité désirable, que, parmi les neuf points donnés, il y en ait huit $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'$ définis par couples sur quatre droites réelles données a, b, c, d ; nous embrassons ainsi le cas où, parmi les neuf points, il y en a huit imaginaires.

Soit P le neuvième point, toujours réel.

Deux cas devront être examinés particulièrement: 1.° Les droites a, b, c, d ne passent pas toutes par le point P ; 2.° elles concourent en ce point.

1.° Considérons les cubiques décomposables

$$a(PBB'CC'), \quad b(PAA'CC'), \quad c(PAA'BB').$$

Ces cubiques marquent, sur une transversale quelconque l , trois ternes de points caractérisant une I_2^3 . Nous pourrions toujours représenter ces ternes sur une cubique gauche B_3 et cela à l'aide de simples constructions linéaires: nous définirons donc

aisément le sommet de la gerbe de plans qui caractérise l'involution (*).

Nous pouvons répéter ces constructions pour les groupes PAA'BB'DD', PAA'CC'DD'. Nous obtiendrons ainsi, sur R_3 , trois involutions I_2^3 et, par suite, trois gerbes G_1, G_2, G_3 . Le plan $G_1G_2G_3$ rencontre R_3 aux trois points qui correspondent aux intersections de l avec la cubique cherchée. (Voir plus haut.).

Si la droite l , au lieu d'être quelconque, était par exemple la droite DD', la détermination de G_1 suffirait pour construire le troisième point de l qui se trouve sur la cubique.

En effet, nous pourrions toujours définir la sécante de R_3 qui unit les deux points, réels ou imaginaires, correspondant à D et D'. Soit l_1 cette sécante. Le plan G_1l_1 coupera R_3 en un point dont il suffira de déterminer le correspondant sur l .

Une simplification analogue se présenterait si l'on connaissait un des points de la cubique plane, situé sur l .

2.° La solution précédente n'est évidemment plus applicable si les quatre droites a, b, c, d passent par le point P.

Prenons les conjugués harmoniques A_1, B_1, C_1, D_1 de P par rapport aux couples AA', BB', CC', DD'. (PA₁B₁C₁D₁) définit une conique, polaire de P par rapport à la cubique à construire.

Soit PX la tangente en P à cette conique; c'est aussi la tangente à la cubique cherchée.

D'après ce que nous venons de voir, il est facile de déterminer les ternes que des cubiques passant par AA'BB'CC'DD' marquent sur PX. Il suffit de déterminer ces cubiques à l'aide de neuvièmes points $P_1, P_2, P_3 \dots$ différents de P.

Toutes ces cubiques marquent sur PX une I_1^3 . Il est clair que si PX rencontre la cubique en O, P est un point double de l'involution I_1^3 et O le point de ramification correspondant.

Le point O se construit donc facilement et l'on a, ainsi, le point tangentiel de P. Ce point appartient donc à la cubique à construire.

(*) Pour plus de détails sur cette question voir *Acta Mathematica*, t. III, p. 183 et ss. On peut voir aussi, au même endroit, comment il faut déterminer les coniques définies par un point réel et quatre points imaginaires.

Supposons maintenant que par O , l'on mène des droites OX_1 , OX_2 , etc.

Sur chacune d'elles, on pourra déterminer l'involution I_1^3 définie par le faisceau $(AA'BB'CC'DD')$ et, par suite, le couple correspondant, sur chacune de ces droites au point O . Ces couples, réels ou imaginaires, appartiendront à la cubique cherchée.

Nous devons faire observer que ni les points des ternes de I_1^3 , ni les points des couples qui viennent d'être définis, ne doivent être construits isolément.

Le point O est donc, à l'égard des nouveaux couples dans la même situation que P par rapport aux couples donnés. Nous pourrions donc construire le point tangentiel O_1 de O .

Rien ne serait plus aisé, maintenant, que de déterminer le point Q où PO_1 coupe la cubique, puis le point Q_1 où OQ rencontre cette courbe et ainsi de suite.

Nous substituerons donc, au système des neuf points donnés, un autre système qui permettra d'appliquer la première solution.

Si nous connaissons isolément quatre points $T_1T_2T_3T_4$ de la courbe, en appliquant la méthode donnée dans 1.^o, nous pouvons construire les points T_{12} , T_{34} , T_{13} , T_{24} situés sur la courbe et sur T_1T_2 , T_3T_4 , T_1T_3 , T_2T_4 .

Les droites $T_{12}T_{34}$, $T_{13}T_{24}$ se couperont en un point T_0 appartenant à la courbe.

Nous aurons de cette façon neuf points, distribués sur deux systèmes de trois droites et formant deux *trilatères conjugués* à la cubique.

Ces trilatères permettront de construire effectivement la cubique (*).

On peut d'une manière analogue déterminer les intersections d'une cubique dont on connaît neuf points avec une conique, en supposant que deux des intersections soient déjà connues.

Soit C_3 la cubique et C_2 la conique donnée: désignons par A , B les deux points déjà connus et par $X_1X_2X_3X_4$ les points à construire.

Déterminons le point T où \overline{AB} rencontre C_3 ; joignons ce point

(*) Pour plus de détails, voir notre *Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, 2.^{de} partie, p. 42 (Mem. de l'Acad. roy. de Belgique, t. XLV, 1882).

T à un autre point quelconque P de C_3 et construisons la troisième intersection R de TP avec C_3 .

Les six points PRX₁X₂X₃X₄ sont sur une conique C_2^1 .

En effet les deux cubiques C_3 et (TRP) C_2 se coupent en neuf points dont trois ABT sont en ligne droite.

Pour construire C_2^1 , observons que C_3 , (TRP) C_2 , (ABT) C_2^1 sont trois cubiques d'un même faisceau.

Si donc, par un point quelconque I pris sur AB, nous menons une transversale quelconque, cette transversale rencontre les deux premières cubiques en deux groupes de trois points qui caractérisent une I_1^3 . Les deux points qui complètent le terne défini par I appartiennent à C_2^1 .

Deux groupes pareils, avec le point P, suffisent par construire C_2^1 . Les deux courbes C_2 et C_2^1 se coupent aux points cherchés.

Ce problème permet, comme on le voit, de construire les points de contact des tangentes menées à la cubique par un de ses points.

En effet, en appliquant une méthode donnée plus haut, nous pourrions construire la polaire conique d'un point A, la tangente en A et le point tangentiel O qui joue le rôle du point T dans le problème que nous venons de traiter.

La même construction se simplifie si l'on connaît déjà un, deux ou trois des points X.

Si l'on connaît par exemple X₁, la conique déterminée par X₁, PR et un couple situé sur une transversale issue de I résoudra la question; si l'on connaît en outre X₂, la point X₂ pourra remplacer R; enfin, si l'on se donne X₁, X₂, X₃ la conique C_2^1 sera déterminée par P, R, X₁, X₂, X₃.

C'est cette solution à laquelle nous faisons allusion plus haut, dans une question relative aux I_3^4 .

Nous venons de faire voir comment la théorie des involutions cubiques, combinée avec quelques propriétés des cubiques, se prête à la détermination de ces courbes.

Ces propriétés elles-mêmes peuvent se déduire des méthodes que nous avons exposées plus haut.

Supposons que l'on se donne une forme trilinéaire

$$f = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l = 0 \quad (1)$$

et un triangle dont les côtés ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Les faisceaux de droites

$$x_2 \alpha - x_1 \beta = 0, \quad y_2 \beta - y_1 \gamma = 0, \quad z_2 \gamma - z_1 \alpha = 0,$$

liés par la relation (1) se coupent sur une cubique circonscrite au triangle donné.

Cette cubique a pour équation

$$(a_{111} + a_{222}) \alpha^2 \gamma + a_{112} \alpha^2 \beta + a_{121} \alpha \gamma^2 + a_{211} \beta^2 \gamma + \\ + a_{122} \alpha^2 \gamma + a_{212} \alpha \beta^2 + a_{221} \beta \gamma^2 = 0.$$

Maintenant, étant donnée une cubique quelconque, circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$, son équation sera de la forme

$$A_{112} \alpha^2 \beta + A_{113} \alpha^2 \gamma + A_{122} \alpha \beta^2 + A_{133} \alpha \gamma^2 + A_{233} \beta \gamma^2 + \\ + A_{223} \beta^2 \gamma + 2A_{123} \alpha \beta \gamma = 0.$$

Pour identifier cette équation avec la précédente, il suffira de faire

$$a_{111} = A_{123} + \lambda; \quad a_{112} = A_{112}, \quad a_{121} = A_{122}, \quad a_{211} = A_{223},$$

$$a_{122} = A_{113}, \quad a_{212} = A_{122}, \quad a_{221} = A_{233}, \quad a_{222} = A_{123} - \lambda.$$

La forme trilinéaire correspondante est donc de la forme

$$f + \lambda \varphi = 0.$$