

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. Francisco Gomes Teixeira

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra

e

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

~~~~~  
VOLUME II  
~~~~~

COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1878

SCIENTIAS MATHEMATICAS ET ASTRONOMICAS

SOLUZIONE TROVATA COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

Prof. G. BILAVANTIS

A par. 142 del Journal de Sciences Mathematiques, Coimbra 1877. E la problema 5. (che in parte ho risolto precedentemente) e si può nel suo enunciato essere esposto:
Trovarsi un rettangolo inscritto ad un cerchio dato B, che passi per un punto dato A, e il cui centro sia situato sopra una retta equidistante data C.D.

Il mio metodo suggerisce le seguenti soluzioni: Sia B A = a, il lato B A = a, C B A = a, la B C = a, un perpendicolare abbassato C.D. dalla C, incontra la B C, della circonferenza B C, in Z, dunque l'angolo sulla C D sarà B Z = $\frac{a}{2}$, ed il raggio

Il lato B A = a, C B A = a, la B C = a, un perpendicolare abbassato C.D. dalla C, incontra la B C, della circonferenza B C, in Z, dunque l'angolo sulla C D sarà B Z = $\frac{a}{2}$, ed il raggio

$$\left(\frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

SOLUZIONE TROVATA COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

DAL

PROF. G. BELLAVITIS

A pag. 142 del *Jornal de Sciencias Mathematicas*, Coimbra, 1877, I, la questione 8.^a (che io pure ho risolta brevemente) é esposta dal Sig. Monteiro sotto questo aspetto:

«Trovare un circolo tangente ad un circolo dato (B), che passi per un punto dato A, e il cui centro sia situato sopra una retta egualmente data CD.»

Il mio metodo suggerisce la seguente soluzione: Sia $BA \simeq a \varepsilon^\alpha$ (fig. 1) (cioè $BA = a$, $CBA = \alpha$), la $BC \simeq c$ sia perpendicolare alla data CD, detta ξ l'inclinazione (sopra la BC) della cercata BX, ed X dovendo trovarsi sulla CD sarà $BX \simeq \frac{c}{\cos \xi} \varepsilon^\xi$, ed il raggio $BT \simeq r \varepsilon^\xi$; le due rette $XA \simeq a \varepsilon^\alpha - \frac{c}{\cos \xi} \varepsilon^\xi$, $XT \simeq \left(r - \frac{c}{\cos \xi} \right) \varepsilon^\xi$ dovranno esser uguali, perciò $XA \cdot c j XA \simeq XT \cdot c j XT$ ossia

$$\left(a \varepsilon^\alpha - \frac{c}{\cos \xi} \varepsilon^\xi \right) \left(a \varepsilon^{-\alpha} - \frac{c}{\cos \xi} \varepsilon^{-\xi} \right) \simeq \left(r - \frac{c}{\cos \xi} \right)^2 \varepsilon^{2\xi}$$

da cui

$$a^2 - \frac{ac}{\cos \xi} \left(\varepsilon^{\xi-\alpha} + \varepsilon^{-\xi+\alpha} \right) \simeq r^2 - \frac{2cr}{\cos \xi},$$

$$\left(r^2 - a^2 + 2ac \varepsilon^{-\alpha} \right) \varepsilon^\xi - 4cr + \left(r^2 - a^2 + 2ac \varepsilon^\alpha \right) \varepsilon^{-\xi} \simeq 0,$$

*

che divisa per $4c$ e paragonata termine colla identica

$$BV - BU + VU \simeq 0$$

si costruirà nel seguente modo:

$$BQ \simeq \frac{(r+a)(r-a)}{4c}, \quad QR \simeq \frac{a}{2} \varepsilon^{-\alpha}$$

(cioè $QR = \frac{1}{2} BA$, $UQA = ABC$), sopra il raggio $BU \simeq r$ si descriva il triangolo BUV coi lati $BV = UV \simeq BR$, e si faccia

$$UBT = RBV;$$

nel raggio BT cadrà il cercato punto X centro del circolo che passa per A e tocca in T il circolo (B) .

Nel N. 10 del *Jornal de Ciencias Mathematicas*, pag. 160 è proposta la questione:

Tracciare un arco di circolo che faccia angoli dati con due circoli concentrici conosciuti.

Per rendere determinato il problema io fisso il punto (fig. 2) A del circolo minore, e mi propongo di trovare sulla data retta AB il centro Y di un circolo AX , che passi per A e tagli sotto dato angolo il circolo di raggio OH . Scelgo la AB per *origine delle inclinazioni*, e tiro ad essa parallelo il diametro KOH ; posto

$$AY \simeq y \cdot OH, \quad OX \simeq \varepsilon^{\xi} \cdot OH$$

la XY dovrà formare colla prolungazione della OX un angolo δ , ed avere la lunghezza $= y \cdot OH$, perciò la condizione del problema è espressa dall'equipollenza

$$OA + y \cdot OH \simeq (1 + y \varepsilon^{\delta}) \varepsilon^{\xi} \cdot OH$$

(che risulta dall'identica $OY \simeq OA + AY \simeq OX + XY$, essendo $AY \simeq y \cdot OH$, $OX \simeq \varepsilon^\xi \cdot OH$, $XY \simeq y \varepsilon^\delta \cdot OX$); insieme con essa sussiste la sua conjugata

$$cjOA + y \cdot OH \simeq (1 + y \varepsilon^{-\delta}) \varepsilon^{-\xi} \cdot OH$$

(giacchè $cjOH \simeq OH$) eliminando l'incognita y se ottiene

$$y \cdot OH \simeq \frac{\varepsilon^\xi \cdot OH - OA}{1 - \varepsilon^{\delta + \xi}} \simeq \frac{\varepsilon^{-\xi} \cdot OH - cjOA}{1 - \varepsilon^{\delta - \xi}}$$

(Se per togliere le frazioni si moltiplicasse pei due denominatori s'introdurrebbe un fattore inutile $\varepsilon^\xi - \varepsilon^{-\delta}$, e l'equipollenza in ε^ξ si eleverebbe al 2.º grado). Moltiplicando par $1 - \varepsilon^{\delta + \xi}$ abbiamo

$$\varepsilon^\xi \cdot OH - OA \simeq -\varepsilon^\delta \cdot OH + \varepsilon^{\delta + \xi} \cdot cjOA$$

de cui

$$\varepsilon^\xi \simeq \frac{OA - \varepsilon^\delta \cdot OH}{OH - \varepsilon^\delta \cdot cjOA}$$

Per facilitare alcun poco la costruzione poniamo $OD \simeq \varepsilon^\delta \cdot OH$, il prodotto numeratore diventerà $OA - OD \simeq DA$, la cui conjugata è $cjDA \simeq cjOA - \varepsilon^{-\delta} \cdot OH$, perciò $\varepsilon^\xi \simeq \frac{DA}{-\varepsilon^\delta DA}$,

sia $OE \simeq -\varepsilon^{-\delta} \cdot OH \simeq \varepsilon^{-\xi} \cdot OK$, sarà

$$\varepsilon^\xi \simeq \frac{DA}{cjDA} \cdot \frac{OE}{OH}, \quad OX \simeq \frac{AD}{cjAD} \cdot OE,$$

che testo s'interpreta (rammentando che AB è l'origine delle inclinazioni) ponendo

$$\text{ang } EOX = 2 \text{ ang } BAD:$$

prolungato il raggio OX si farà

$$\text{ang } VXY = \text{ang } HOD \text{ oppure } = \text{ang } KOD,$$

ed il circolo desiderato avrà il centro Y ed il raggio $YA = YX$.

Permutando tra loro i punti DE si ottiene una seconda soluzione del problema, e ciò facendo

$$\text{ang } DOX_2 = 2 \cdot \text{ang } BAE, \quad \text{ang } V_2 X_2 Y_2 = \text{ang } HOE.$$

Se si muta δ in $-\delta$, e perciò alle $ODOE$ si sostituiscono le loro conjugate $OD'OE'$ si ottengono nello stesso modo i punti $X'X'_2$, che sono le seconde intersezioni del circolo dato coi circoli trovati aventi i raggi $YA Y_2A$.

Padova 24 maggio 1878.

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da Geometria elementar o problema seguinte:

Sendo dados dois circulos (A) e (B), tendo uma corda real common I J, e um terceiro circulo qualquer (C), conduzir por um dos extremos I d'esta corda uma transversal IXZY de modo que corte os tres circulos (A), (B) e (C) respectivamente em pontos X, Y, Z, taes que os segmentos XZ e XY estejam n'uma razão dada $\frac{m}{n}$ ().*

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

(*) Os illustres geometras Fergola, Steiner, Clausen, Bellavitis (empregando o seu methodo das equipollencias), e Laisant resolveram este problema, mas no caso particular de os tres circulos se cortarem n'um mesmo ponto I: parecendo-nos comtudo não terem ainda assim seguido, nas suas soluções, o caminho mais curto.

N. B. Ainda se não recebeu a solução da questão proposta no n.º 11 do vol. I.

ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

POR

F. DA PONTE HORTA

(Continuação)

SEGUNDA PARTE

Logares geometricos dos centros dos circulos
que cortam dois circulos dados debaixo de angulos dados

Tomando para origem de dois eixos orthogonaes o centro C de um dos circulos dados (fig. 3); por eixo dos x a linha dos centros CC' , e designando a distancia d'estes por a ; os raios dos circulos dados e secante por r , r' e R ; as coordenadas do centro d'este por x e y ; e continuando a designar por α e α' os angulos agudos que fórma o raio do mesmo secante com cada um dos raios dos circulos dados nos respectivos pontos de secção, teremos:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 + R^2 \pm 2Rr \cos \alpha, \\ x'^2 + y'^2 &= r'^2 + R^2 \pm 2Rr' \cos \alpha'. \end{aligned} \right\} (1)$$

em que se reúnem quatro equações.

Subtrahindo a primeira da segunda, na qual $x' = a - x$; deduzindo o valor de R da equação resultante, e substituindo emfim esse valor na primeira, obtêm-se as equações

$$\left. \begin{aligned} b^2 y^2 + (b^2 - 4a^2) x^2 + m x &= p \\ b'^2 y^2 + (b'^2 - 4a^2) x^2 + m' x &= p' \end{aligned} \right\} (2).$$

O logar procurado é pois constituído por duas conicas, as quaes podem ser representadas por uma só das equações anteriores; mas em quanto para uma d'ellas as constantes têm os valores b , p e m , têm na outra os valores b' , p' e m' , consignados no seguinte quadro:

$$\left. \begin{aligned} b &= 2(r \cos \alpha - r' \cos \alpha'), \\ p &= b^2 r^2 + (a^2 + r^2 - r'^2)^2 - 2rb \cos \alpha (a^2 + r^2 - r'^2), \\ m &= 4a(a^2 + r^2 - r'^2 - rb \cos \alpha), \\ b' &= 2(r \cos \alpha + r' \cos \alpha'), \\ p' &= b'^2 r'^2 + (a^2 + r^2 - r'^2)^2 - 2rb' \cos \alpha (a^2 + r^2 - r'^2), \\ m' &= 4a(a^2 + r^2 - r'^2 - rb' \cos \alpha). \end{aligned} \right\} (3).$$

Ora, como $b' > b$, conclue-se que as duas conicas são:

1.º ambas circulares quando $a = 0$; isto é, no caso em que os circulos dados são concentricos;

2.º duas ellipses se $\frac{b}{2} > a$;

3.º uma ellipse e uma parabola se $\frac{b}{2} = a$;

4.º uma parabola e uma hyperbole se $\frac{b'}{2} = a$;

5.º duas hyperboles se $\frac{b'}{2} < a$.

Deriva d'estas conclusões, que, só podem haver ellipses ou parabolas entre estes logares, quando um dos circulos dados entrar no outro. Logo que os circulos não tenham parte alguma commum, ambas as curvas são hyperboles.

Tomaremos actualmentem para origem os centros das conicas. Para isso, faremos na primeira das equações (1)

$$x = x + \frac{m}{2(4a^2 - b^2)} \dots \dots \dots (4)$$

de que resulta a transformada

$$b^2 y^2 + (b^2 - 4 a^2) x = p + \frac{m^2}{4 (b^2 - 4 a^2)} \dots \dots (5).$$

As distancias dos centros das conicas ao centro do circulo de raio r são

$$D = \frac{m}{2 (4 a^2 - b^2)}, \text{ e } D' = \frac{m'}{2 (4 a^2 - b^2)} \dots \dots (6).$$

Designando os semi-eixos por A e B, teremos

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 p (b^2 - 4 a^2) + m^2}{(b^2 - 4 a^2)^2}}; \\ B &= \frac{1}{2 b} \sqrt{\frac{4 p (b^2 - 4 a^2) + m^2}{b^2 - 4 a^2}}; \end{aligned} \right\} \dots \dots (7),$$

e visto que d'estes valores se deduz

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{\sqrt{4 a^2 - b^2}},$$

segue-se que as equações das asymptotas, no caso das hyperboles, serão

$$y = \pm \frac{x \sqrt{4 a^2 - b^2}}{b} \dots \dots (8).$$

No caso d'uma das conicas ser parabola, a sua equação será

$$y^2 + \frac{m x}{b^2} = \frac{p}{b^2} \dots \dots (9),$$

a qual corta o eixo dos x á distancia $x = \frac{p}{m}$.

Se os circulos dados C e C' se intersectam, tambem nos mesmos pontos se intersectarão ambas as conicas, visto que suas equações são verificadas com as coordenadas

$$x = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} \text{ e } y = \frac{\sqrt{4a^2r^2 - (a^2 + r^2 - r'^2)^2}}{2a}.$$

Estas curvas podem ser descriptas por pontos. Para isso tiraremos dois raios quaesquer nas circumferencias C e C', e por seus extremos D e D' rectas que formem com elles, respectivamente, os angulos α e α' ; e tomando sobre estas rectas as grandezas eguaes $Dx = D'x'$, os arcos descriptos dos centros C e C' com os raios Cx e Cx' interceptar-se-hão em dois pontos, que serão centros de dois circulos secantes. O problema da intercepção dos dois circulos dados por um terceiro debaixo dos angulos α e α' , fica assim determinado quando se dá a grandeza $Dx = D'x'$ do raio do circulo secante. Os circulos obtidos voltam a convexidade para os centros C e C'.

Se ao contrario da precedente construcção, tomarmos os dois segmentos eguaes nos prolongamentos dos primeiros; a saber $Dx_1 = D'x'_1$, os circulos secantes voltarão a concavidade para os centros C e C'; e finalmente, se um dos segmentos fôr tomado para fóra da circumferencia e outro para dentro, os circulos secantes voltarão a concavidade para um dos centros e a convexidade para o outro.

Os theoremas estabelecidos na primeira parte d'este artigo deduzem-se das equações (2) e (3), fazendo r ou $r' = 0$.

Appliquemos estas fórmulas a alguns casos particulares:

1.º Sejam $\alpha = \alpha' = 0$.

Este caso é o dos circulos pedidos serem tangentes aos circulos dados. Das formulas (3) deduz-se

$$b = 2(r - r'), \quad p = [a^2 - (r - r')^2]^2, \quad m = 4a[a^2 - (r - r')^2]:$$

e substituindo estes valores nos de A e B, fórmula (7), obtêm-se os seguintes valores dos semi-eixos d'uma das conicas

$$A = \frac{1}{2}(r - r'), \quad B = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (r' - r)^2}.$$

Acharemos de modo semelhante para a outra conica

$$A' = \frac{1}{2}(r + r'), \quad B' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (r + r')^2}.$$

Substituindo os valores de m e b , ou m' e b' nas fórmulas (6) acharemos

$$D = \frac{a}{2}, \quad D' = \frac{a}{2}.$$

As distancias dos centros aos respectivos fôcos são

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a}{2}, \quad \sqrt{A'^2 + B'^2} = \frac{a}{2}.$$

Logo os centros dos circulos dados são fôcos communs de ambas as conicas. No caso de duas hyperboles, as equações de suas asymptotes serão respectivamente

$$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - (r - r')^2}}{r - r'} \quad \text{e} \quad y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 + (r + r')^2}}{r + r'}.$$

As primeiras são tambem as equações dos raios da circumferencia C , que se dirigem aos seus pontos de contacto com as tangentes exteriores communs a C e C' : emquanto que as segundas são as dos raios que se dirigem aos pontos de contacto com as tangentes interiores, como é facil verificar. As duas tangentes exteriores são pois os limites dos circulos tangentes que voltam a concavidade ou a convexidade para *ambos* os centros dos circulos dados, ao passo que as tangentes interiores são os limites dos circulos tangentes que voltam a concavidade para um e a convexidade para o outro.

Deve notar-se que n'este caso dos circulos pedidos serem tangentes aos dados, o logar dos centros não póde constituir parabolas por quanto, suppondo $b^2 = 4a^2$, e por conseguinte $b = 2a$, tem-se ao mesmo tempo $m=0$ e $p=0$, e por conseguinte $y^2=0$; e em logar da parabola, acha-se o eixo dos x , como deveria ser,

por que os dois circulos dados são então tangentes entre si interior ou exteriormente num ponto d'este eixo; e todos os circulos passando por este ponto com o centro no eixo dos x , são tangentes a esses dois circulos.

2.º Seja $\alpha = \alpha' = 90$ (circulos orthogonaes).

As fórmulas (3) dão então

$$b=0, b'=0, p=p'=(a^2+r^2-r'^2)^2, m=m'=4a(a^2+r^2-r'^2);$$

e logo

$$D=D'=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a}; A=A'=0, B=B'=\frac{0}{0}.$$

Os dois logares geometricos fundem-se pois n'uma só recta, perpendicular á linha dos centros, e a uma distancia do centro do circulo de raio r tendo por valor

$$D=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a}.$$

Esta recta é o eixo radical dos circulos dados.

3.º Seja $r \cos \alpha = r' \cos \alpha'$.

Recorrendo ás fórmulas (3) obtem-se

$$b=0, p=(a^2+r^2-r'^2)^2, m=4a(a^2+r^2-r'^2),$$

e por conseguinte [fórmula (6)]

$$D=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a}, A=0, B=\frac{0}{0}.$$

Logo uma das conicas reduz-se ao eixo radical dos circulos dados.

Póde verificar-se este resultado muito simplesmente como se segue:

Seja M (fig. 3) o centro d'um dos circulos secantes que voltam a concavidade ou convexidade para ambos os centros C e C', cujo raio designaremos por R; baixemos a perpendicular MP sobre a

linha CC' , e designemos as distancias CM , $C'M$ e CP por ρ , ρ' e c , respectivamente teremos

$$\rho^2 = \rho'^2 + a^2 - 2ac,$$

d'onde

$$c = \frac{a^2 + \rho^2 - \rho'^2}{2a};$$

mas

$$\rho^2 = (R + r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha; \quad \rho'^2 = (R + r' \cos \alpha')^2 + r'^2 \sin^2 \alpha,$$

d'onde

$$\rho^2 - \rho'^2 = r^2 - r'^2,$$

logo

$$c = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}.$$

4.º Sejam $\alpha = 0$, $\alpha' = 90$.

Deduz-se das fórmulas (3), (6) e (7)

$$b = b' = 2r, \quad m' = m = 4a(a^2 + r^2 - r'^2);$$

$$p' = p = (a^2 - r^2 - r'^2), \quad D = D' = \frac{a(a^2 - r^2 - r'^2)}{2(a^2 - r^2)};$$

$$A = A' = \frac{(a^2 - r^2 - r'^2)r}{2(r - a)}, \quad B = B' = \frac{a^2 - r^2 - r'^2}{2\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Estes logares constituem, pois, uma só ellipse, se fôr $r > a$; uma hyperbole, se fôr $r < a$; e finalmente uma parabola no caso de $r = a$. Ambas estas curvas têm um de seus fôcos no centro do circulo de raio r , pois que, para a ellipse e hyperbole se obtem

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \pm D;$$

e como relativamente á parabola seja

$$m = -4ar'^2, \quad e \quad p = r'^4,$$

a equação (9) mudar-se-ha em

$$y^2 = \frac{r'^2}{r} x + \frac{r'^4}{4r^2}$$

d'onde se deduz para $x=0$ ($y = \frac{r'^2}{2r}$), e para $y=0$ ($x = -\frac{r'^2}{4r}$),

e por conseguinte ($y = 2(x)$), o que confirma a asserção emitida.

Podem explicar-se os papeis d'estas duas conicas, no caso de duas hyperboles, do seguinte modo:

Descrevam-se duas circumferencias C e C' , das quaes o raio r da primeira (fig. 4) seja maior que duas vezes o raio r' da segunda. Tirem-se a tangente commum exterior TT' , os raios CT e $C'T'$, a recta $T''T$, tangente ao circulo C' no ponto T'' , opposto a T_1 , cortando o raio CT no ponto T_1 ; a recta $C'T_0$ parallela ás duas primeiras, e finalmente descrevam-se as circumferencias CT .

A tangente exterior TT' representa o limite dos circulos tangentes a C e C' que voltam a concavidade ou a convexidade para os dois pontos C e C' , tendo os centros na hyperbole, cujo eixo real é igual a $r - r'$; isto é, $CT - C'T' = CT_0$. Se os raios CT e $C'T'$ diminuirem simultaneamente da mesma grandeza, a hyperbole manter-se-ha invariavel de fórma e posição; mas esta diminuição dos raios póde representar-se pelo deslocamento d'aquella tangente, ou *circulo limite*, parallelamente a si mesma, com o correspondente retrahimento dos circulos dados. Logo, porém, que ella tiver chegado ao ponto C' , o proseguimento da diminuição dos raios fará que o raio de C' se torne negativo, e a mesma hyperbole, cujo eixo real é dado pela differença $r - (-r') = r + r'$, que se traduz no mesmo valor $CT_1 + T_1T_0 = CT_0$ (suppondo que o circulo em C' retomou a mesma grandeza), dá então os centros dos circulos tangentes, cujo circulo limite é a recta TT'' , *tangente interior*, isto é, dos circulos que voltam a concavidade para um dos centros CC' e a convexidade para o outro. Se o deslocamento de TT' continuar ainda, até que o ponto T_1 haja passado ao outro lado de C , teremos a mesma hyperbole a dar outra vez os centros dos circulos tangentes que valtam a concavidade ou a convexidade para *ambos* os centros C e C' , e ainda outra vez o seu eixo real, expresso nos raios dos circulos dados, terá por valor $-r - (-r') = r' - r$.

É pois evidente, que, para dois circulos invariaveis de raios r e r' , a hyperbole de eixo real $r - r'$ ou $r' - r$ contém os centros dos circulos tangentes que voltam a concavidade ou a convexidade para ambos os circulos dados, emquanto que a hyperbole de eixo real igual a $r + r'$, contém os centros dos circulos tangentes que voltam a concavidade para um e a convexidade para o outro.

Não seria difficil o chegar a conclusões analogas no caso dos logares serem constituídos por duas ellipses.

D'estas considerações concluiremos relativamente ao caso $\alpha = \alpha' = 0$:

Se traçarmos circumferencias tangentes a um circulo dado, cujos centros existam n'uma hyperbole de que o centro do circulo dado seja um dos fócios, todas essas circumferencias tangentes terão ainda um novo circulo involucro, cujo centro será o outro fóco da mesma hyperbole e raio igual a $r - 2A$ ou $r + 2A$; com tanto que se tomarmos um dos ramos para centros dos circulos que voltam a concavidade para o centro do circulo dado, seja o outro para os circulos que lhe voltam a convexidade.

A mesma proposição se applica á ellipse, mas sendo esta curva constituida por um só ramo, os circulos traçados ou hão de todos voltar a concavidade ou todos a convexidade para o centro do circulo dado.

Estes resultados generalisam-se para o espaço a tres dimensões, imaginando que a figura toda, composta dos dois circulos focaes e respectivas hyperboles ou ellipses, gira em tórno da linha dos fócios. Então os circulos tornam-se esferas, e as hyperboles ou ellipses mudam-se em hyperboloides ou ellipsoides de revolução.

Estabelecendo o paralelo entre o caso geral dos circulos focaes cortados pelos angulos α e α' , e o caso dos circulos tangentes, diremos: que uma das duas conicas reúne os centros dos circulos secantes que voltam a concavidade ou convexidade para *ambos* os centros dos circulos dados; emquanto que a outra offerece os centros dos circulos secantes que voltam a concavidade para um d'aquelles centros e a convexidade para o outro.

Quando entre as duas conicas que constituem os logares dos centros dos circulos secantes hajam hyperboles ou parabolas, podem os circulos dados ser cortados simultaneamente por linhas rectas debaixo dos angulos dados α e α' :

Por uma só recta, se os logares forem constituídos por uma ellipse e uma parabola.

Por duas, se forem constituídos por uma hyperbole e uma ellipse,

Por tres, se formados por uma hyperbole e uma parabola.

Por quatro, se constituidos por duas hyperboles.

No caso das hyperboles, poderemos obter simultaneamente a direcção das asymptotas e rectas secantes do seguinte modo:

Tire-se um raio na circumferencia C (fig. 5), que fórme o angulo α com a recta CC' , e descreva-se uma circumferencia concentrica com C , e cujo raio seja a projecção d'aquelle na recta CC' . Faça-se o mesmo na circumferencia C' : as tangentes ás duas novas circumferencias concentricas com C e C' , respectivamente, serão as secantes pedidas.

Querendo porém verificar que os raios CT e $C'T'$ dirigidos aos pontos de contacto têm a direcção das asymptotas, abaixe-se a perpendicular TP sobre CC' , e do ponto de contacto T' tire-se a recta $T'Q$ parallelamente a CC' . As coordenadas x e y do ponto T da recta CT são CP e TP , cuja relação se deduzirá, comparando os triangulos semelhantes CTP e $Q T' T$. Com effeito: d'este triangulo, em que é

$$TQ = CT - C'T' = r \cos \alpha - r' \cos \alpha' = \frac{b}{2};$$

e

$$TT' = \sqrt{T'Q^2 - TQ^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2}$$

deduz-se

$$TP : CP :: TT' : TQ,$$

isto é

$$y : x :: \sqrt{4a^2 - b^2} : b$$

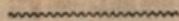
d'onde

$$y = x \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}.$$

que é exactamente a equação (8).

Este methodo de obter as rectas secantes é geral; elle convém egualmente ao caso da parabola, mas como a sua direcção no caso actual é normal á linha dos centros CC' , segue-se que as duas circumferencias CT e $C'T'$ a que ella deve ser tangente commum, serão tangentes entre si no mesmo ponto da recta CC' .

(Continúa).



ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

F. DA PONTE HORTA

(Continuação)

Logares dos centros dos circulos que cortam uma recta dada pelo angulo α' , e um circulo, tambem dado, pelo angulo α .

Tome-se para eixo dos x a recta Cx , tirada pelo centro do circulo dado, perpendicularmente á recta dada DD' ; e para eixo dos y a perpendicular ao eixo dos x , tirada pelo mesmo centro.

Designemos por a , b e d os tres lados do triangulo rectangulo $C.B.G$ (fig. 6), tendo um vertice no centro do circulo, um lado segundo o eixo dos x , desde o centro do circulo até á recta dada, outro sobre esta recta, e finalmente o terceiro paralelo a um dos raios do circulo secante que se dirigem ás suas intersecções com a dicta recta. Chamar-lhe-hemos o triangulo metrico.

As curvas dos centros podem obter-se do seguinte modo:

Tire-se pelo ponto L da circumferencia dada a recta Lu , formando o angulo α com o eixo dos x ; sobre esta e sobre o lado GC do triangulo metrico, marcaremos as grandezas arbitrarías $GE = Lu$, e pelo ponto E tiraremos uma recta parallelá á recta dada DD' , a qual interceptaremos por um arco de circulo descripto do centro C com o raio Cu . O ponto de intercepção M , será um ponto da curva.

Do centro M do circulo secante, tirem-se os seus dois raios MN e MQ para os dois pontos onde elle intercepta o circulo e a recta dada; e sejam P e R os pontos onde a ordenada de M e o raio MQ cortam os eixos dos x e dos y , respectivamente; teremos =

$$x^2 = MC - y^2,$$

Mas

$$MC^2 = CN^2 + MN^2 + 2MN \cdot CN \cos \alpha = r^2 + MN^2 + 2r \cdot MN \cdot \cos \alpha;$$

$$MN = MQ = MR + d, \quad \frac{MR}{x} = \frac{d}{a};$$

logo

$$MN = d \frac{a+x}{a}.$$

Substituindo na primeira equação, obtem-se

$$x^2 = r^2 + \frac{d^2}{a^2} (a+x)^2 + \frac{2dr}{a} (a+x) \cos \alpha - y^2$$

d'onde, por ser $d^2 = a^2 + b^2$,

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 - 2ad(d+r \cos \alpha)x = a^2 r^2 + a^2 d^2 + 2a^2 r d \cos \alpha.$$

Relativamente ao circulo secante que corta o circulo dado no outro ponto N' , em que a mesma recta MN corta esse circulo, teremos a equação

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 - 2ad(d-r \cos \alpha)x = a^2 r^2 + a^2 d^2 - 2a^2 r d \cos \alpha,$$

a qual se obtem da anterior mudando α em $180 - \alpha$.

Ha pois duas conicas a constituirem os logares procurados, as quaes representaremos por uma só equação

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 - px = q \dots \dots \dots (A),$$

sendo

$$p = 2ad(d+r \cos \alpha), \text{ e } q = a^2 r^2 + a^2 d^2 + 2a^2 r d \cos \alpha;$$

transitando-se d'uma para a outra pela simples mudança de α em $180 - \alpha$.

Estas duas conicas ou são duas hyperboles ou duas parabolas; por que, ou nenhum dos coefficients a e b é zero, e haverá duas hyperboles, ou é $b=0$, e teremos duas parabolas; ou serão b e a simultaneamente eguaes a zero, visto que a hypothese de $a=0$, envolve o ser tambem $b=0$, e teremos outra vez duas hyperboles caracterisadas pela equação $y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{2r \cos \alpha}{\cos \alpha'} x = r^2$, a qual se obtem dividindo a equação (A) por a^2 , e determinando os limites de $\frac{p}{a^2}$ e $\frac{q}{a^2}$, notando que $\lim. \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha' (*)$.

Estas duas conicas interceptam-se com a recta dada nos mesmos dois pontos da circumferencia dada; visto que ambas as suas equações são verificadas com as coordenadas

$$x = -a, \text{ e } y = \pm \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Os semi-eixos A e B, têm os valores

$$A = \frac{1}{2b^2} \sqrt{p^2 - 4b^2q}, \quad B = \frac{1}{2ab} \sqrt{4b^2q - p^2}.$$

As equações das asymptotas

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

são communs ás duas conicas; ellas têm pois asymptotas da mesma direcção, uma das quaes é paralela ao lado d do triangulo metrico; e por consequente ha só duas rectas que cortam o circulo e a recta dada pelos angulos α e α' .

Ha um caso em que o centro d'uma das conicas coincide com o centro do circulo dado, é quando $D = \frac{p}{2b^2} = 0$, isto é $p=0$; o que só tem logar sendo $d=r \cos \alpha$.

Quando $\alpha=0$ e $b=0$, os circulos deixam de ser secantes para se tornarem tangentes á recta e ao circulo dado; e succede,

(*) Na fig. 6 o angulo α' não é BGC, como está indicado, mas sim BCG.

em contraposição com o caso dos dois círculos dados, em que os logares dos centros não podiam constituir parábolas, que as duas conicas, no caso presente, são sempre parábolas.

As suas equações, como se deduz da (A) são

$$y^2 = 2(a+r)x + (a+r)^2$$

$$y^2 = 2(a-r)x + (a-r)^2$$

Estas duas parábolas têm o seu foco no centro do círculo dado.

As suas directrizes, ambas paralelas á recta dada, estão d'um e outro lado d'esta recta á distancia r .

A hypothese $a=r$ reduz uma das parábolas á recta $y=0$, isto é, ao eixo dos x , como era evidente.

Se fór $\alpha=90^\circ$ e $b=0$, os círculos pedidos serão tangentes á recta dada, e cortarão orthogonalmente o círculo dado.

As duas conicas fundir-se-hão n'uma só, tendo por equação

$$y^2 = 2ax + a^2 + r^2 \dots \dots \dots (B).$$

Esta parábola offerece de notavel o ser tangente ao círculo dado nos pontos D e D', em que este é cortado pela recta dada.

Com effeito, designando por B a intersecção do eixo dos x com a recta dada, por O o vertice da parábola, e por T o ponto onde a tangente ao círculo no ponto D' corta o eixo dos x , ter-se-ha

$$r^2 = a \times CT,$$

d'onde $CT = \frac{r^2}{a}$.

Da equação (B) deduz-se

$$CO = \frac{a^2 + r^2}{2a},$$

logo

$$OB = CO - CB = \frac{a^2 + r^2}{2a} - a = \frac{r^2 - a^2}{2a}.$$

Designando por T' o ponto onde a tangente á parabola no ponto D' , corta o eixo dos x , teremos

$$OT' = OB = \frac{r^2 - a^2}{2a};$$

logo

$$CT' = CB + 2OB = a + \frac{r^2 - a^2}{a} = \frac{r^2}{a};$$

e por tanto

$$CT = CT';$$

O seu fóco está a uma distancia do respectivo vertice igual a $\frac{a}{2}$.

As ordenadas correspondentes ás duas intersecções do circulo dado com o eixo dos x , são $a + r$ e $a - r$, como era evidente.

A serie dos circulos que cortam uma circumferencia e uma recta em angulos dados α e α' respectivamente, cujos centros se acham na mesma hyperbole, tendo o respectivo eixo real na perpendicular baixada do centro do circulo sobre a recta, são envolvidos por duas circumferencias de circulo; cujos centros são os fócos da mesma hyperbole.

A fig. 7 representa as duas hyperboles dos centros dos circulos que cortam o circulo CD pelo angulo α e a recta DD' pelo angulo α' . Sómente representamos o ramo DAM da hyperbole, que tem o eixo real segundo CB , perpendicular a DD' , visto ficar o outro um pouco distante.

Seja F um dos fócos d'esta hyperbole, tire-se o raio FD' ; e na direcção das distancias obliquas á directriz, marque-se $D'G = FD'$, e pelo ponto G tire-se a recta GP perpendicular a FA , a qual será a directriz.

Seja M um dos circulos secantes, tirem-se MF e MQ que prolongaremos até P , será

$$MP = MF,$$

mas

$$MS = MQ,$$

logo

$$FS' = QP = FD' = \text{constante.}$$

Se augmentassemos MQ d'uma grandeza $QP' = F'D'$ (distancia do outro fóco ao ponto D') obteriamos a segunda directriz, e ter-se-hia

$$MF' = MP',$$

mas

$$MS' = MQ,$$

logo

$$F'S' = QP' = F'D' = \text{constante.}$$

Se dos differentes pontos d'uma hyperbole, como centros, descrevermos circumferencias que cortem uma recta parallela ás directrizes em angulo constante, de modo que os raios dos pontos de secção sejam parallelos ás asymptotas, todas essas circumferencias poderão ser cortadas debaixo d'um angulo constante por uma nova circumferencia, tendo o respectivo centro em ponto escolhido arbitrariamente sobre o eixo real da mesma hyperbole.

Com effeito, referindo a equação da hyperbole ao centro C , escolhido arbitrariamente, tomado por origem (fig. 6) teremos

$$y^2 - S^2 x^2 - 2tx = u^2;$$

e identificando esta com a equação (A) teremos

$$S^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad t = \frac{d}{a} (d + r \cos \alpha); \quad u^2 = r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha \dots (C).$$

Mas logo que se deu o ponto C , deu-se o valor de $a = CB$, e por conseguinte deram-se implicitamente os valores de $b = BG$ e $d = CG$; bem como o da relação $\frac{a}{d}$, que designaremos por n : logo pela segunda das equações anteriores obteremos o valor de $r \cos \alpha$, que substituido depois na ultima equação, permitirá determinar o valor de

$$r = \sqrt{u^2 + d^2 - 2ntd},$$

e com este valor determinaremos

$$\cos \alpha = \frac{nt - d}{\sqrt{u^2 + d^2 - 2ntd}}$$

Reciprocamente se fôr dada a hyperbole dos centros, hem como o circulo C, tendo o centro no eixo real da mesma hyperbole, que é cortado pela serie dos circulos secantes, segundo o angulo α , será determinada a recta parallelâ á directriz, que é cortada pelos circulos secantes em angulo constante.

Por quanto suppondo a hyperbole referida ao centro C, dando á equação d'esta curva a fórma $y^2 - S^2 x^2 - 2tx = u^2$; e observando que das equações (C) se deduz

$$S^2 = \frac{d^2}{a^2} - 1;$$

d'onde

$$a = \frac{d}{\sqrt{1+S^2}};$$

$$2at = 2d^2 + 2dr \cos \alpha,$$

e eliminando a entre estas duas equações, teremos, para determinar a posição da recta secante, as equações

$$d = \frac{t}{\sqrt{1+S^2}} - r \cos \alpha, \quad a = \frac{d}{\sqrt{1+S^2}}, \quad e \quad b = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

O angulo α' será determinado pela equação $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b}{a}$.

Toda a serie dos circulos que cortam dois circulos dados pelos angulos α e α' , cujos centros estão na mesma hyperbole, tendo o eixo real na recta que une os centros d'estes circulos, é involvida por outros dois circulos, cujos centros são os fôcos da mesma hyperbole.

Com effeito, considerando a circumferencia C e a hyperbole dos centros dos circulos secantes; como todos estes circulos podem ser cortados por uma recta parallelâ á directriz em angulo constante, recahe-se assim no caso primeiramente tratado, para o qual a proposição se acha demonstrada.

Esta propriedade do involvimento dos circulos secantes por dois circulos determinados, é geral, ella tem sempre logar, quaesquer que sejam as conicas constituidas pelos centros dos circulos da serie, e deriva do seguinte theorema:

Os circulos que cortam dois circulos dados C e C' debaixo de angulos constantes, cortam igualmente por um angulo constante

todo o círculo C'' , que tenha com qualquer dos dois primeiros o mesmo eixo radical que estes têm entre si.

Com effeito, substituindo o círculo C'' ao círculo C' , cujo centro suppremos á distancia a' do centro C ; será a equação do lugar dos centros dos círculos que cortam o círculo C pelo mesmo angulo α , é C'' pelo angulo α'' ,

$$b'^2 y^2 + (b'^2 - 4 a'^2) x^2 + m' x = p'$$

sendo

$$b' = 2(r \cos \alpha - r' \cos \alpha''),$$

$$p' = b'^2 r^2 + 4 a'^2 c^2 - 4 a' b' c r \cos \alpha,$$

$$m' = 4 a' (2 a' c - r b' \cos \alpha);$$

e em que

$$c = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} = \frac{a'^2 + r^2 - r'^2}{2a'}$$

é a distancia do eixo radical commum ao centro immovel C . Identifica-se esta equação com a que é relativa aos círculos C e C' , a saber

$$b^2 y^2 + (b^2 - 4 a^2) x^2 + m x = p,$$

sendo os mesmos os círculos secantes, fazendo

$$b' = \frac{b a'}{a}.$$

O theorema está pois demonstrado. Acrescentaremos ainda como corollario d'esta proposição, que:

A serie dos círculos que cortam dois círculos dados por angulos constantes, é involvida por dois novos círculos, cujos centros estão na recta que une os centros dos círculos dados.

Com effeito, traçando um círculo tangente a um qualquer dos círculos da serie, tendo o centro na recta CC' e cujo eixo radical com C ou C' seja o mesmo de C e C' , esse círculo será tangente a todos os outros da mesma serie.

Determinação dos circulos involucros

Da condição

$$b' = \frac{b}{a} a'$$

deduz-se

$$r \cos \alpha - r'' \cos \alpha'' = \frac{a'}{a} (r \cos \alpha - r' \cos \alpha')$$

d'onde

$$a r'' \cos \alpha'' = (a - a') r \cos \alpha + a' r' \cos \alpha'$$

é tambem

$$r''^2 = a'^2 + r^2 - 2 a' c.$$

Se arbitrarmos o valor de a' , determinaremos r'' por esta ultima equação, e a anterior dará o valor de α'' .

Eliminando r'' entre as duas ultimas equações teremos

$$a^2 \cos^2 \alpha'' (a'^2 + r^2 - 2 a' c) = [(a - a') r \cos \alpha + a' r' \cos \alpha']^2.$$

Se o circulo C'' fôr tangente aos circulos da serie, teremos

$$\alpha'' = 0,$$

e logo

$$a^2 (a'^2 + r^2 - 2 a' c) = \left(a r \cos \alpha - \frac{a' b}{2} \right)^2.$$

Resolvendo esta equação em ordem a a' obtem-se

$$a'^2 (4 a^2 - b^2) + 2 (2 a b r \cos \alpha - 4 a^2 c) a' = -4 a^2 r^2 \sin^2 \alpha$$

d'onde

$$a' = \frac{(4 a^2 c - 2 a b r \cos \alpha) \pm \sqrt{(4 a^2 c - 2 a b r \cos \alpha)^2 + (b^2 - 4 a^2) 4 a^2 r^2 \sin^2 \alpha}}{b^2 - 4 a^2}$$

mas

$$m = 2(4a^2c - 2abrcos\alpha);$$

$$p = b^2r^2 + 4a^2c^2 - 4abrcos\alpha = b^2r^2\text{sen}^2\alpha$$

$$+ (2ac - br\cos\alpha)^2 = b^2r^2\text{sen}^2\alpha + \frac{m^2}{16a^2};$$

d'onde

$$m^2 = 16a^2(p - b^2r^2\text{sen}^2\alpha);$$

e emfim

$$4a^2r^2\text{sen}^2\alpha(b^2 - 4a^2) = -\frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{b^2}[4p(b^2 - 4a^2) + m^2].$$

Substituindo no valor de a' teremos

$$a' = \frac{mb \pm 2a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{2b(b^2 - 4a^2)}.$$

Os centros dos dois circulos involucros são pois os fôcos da conica que reúne os centros dos circulos da serie, visto que as distancias do centro da conica aos fôcos têm por valor

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \frac{a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{b(b^2 - 4a^2)};$$

e como a distancia do centro do circulo C ao centro da conica seja

$$D = \frac{m}{2(4a^2 - b^2)},$$

serão as distancias do ponto C aos dois fôcos

$$CF \text{ ou } CF' = \frac{mb \pm 2a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{2b(b^2 - 4a^2)}$$

valores identicos com os que achamos para a' .

Poderemos demonstrar d'outro modo a notavel propriedade do involvimento dos circulos secantes.

Provaremos primeiramente que no caso dos circulos dados se não cortarem, as duas hyperboles que constituem os logares dos centros, têm os eixos focaes respectivos sobre o eixo coordenado dos x , e que os dois ramos de cada uma se acham de lados differentes do eixo radical.

Já vimos que as duas conicas eram duas hyperboles, por ser $2a > b' > b$.

Fazendo na equação (2, 2.^a P.) $y=0$ obteremos

$$(4a^2 - b^2)x^2 - mx + p = 0 \dots \dots \dots (D).$$

As raizes d'esta equação serão reaes se fôr

$$m^2 > 4p(4a^2 - b^2).$$

O que se verifica na hypothese admittida, porque sendo

$$m^2 = 16a^2p - 16a^2b^2r^2\text{sen}^2\alpha,$$

ter-se-ha

$$16a^2p - 16a^2b^2r^2\text{sen}^2\alpha > 16a^2p - 4b^2p,$$

d'onde

$$p > 4a^2r^2\text{sen}^2\alpha;$$

mas

$$p = (br - 2ac\cos\alpha)^2 + 4a^2c^2\text{sen}^2\alpha,$$

logo

$$(br - 2ac\cos\alpha)^2 > 4a^2(r^2 - c^2)\text{sen}^2\alpha,$$

desigualdade evidente, visto que o segundo membro é negativo.

Estas duas raizes acham-se comprehendidas, uma entre 0 e c , e outra entre c e ∞ .

Por quanto para $x=0$, o primeiro membro da equação (D) reduz-se a p , quantidade positiva; e para $x=c$ deduz-se

$$(4a^2 - b^2)c^2 - 4ac(2ac - rb\cos\alpha) + b^2r^2 - 4a^2c^2 - 4abcr\cos\alpha = -b^2(c^2 - r^2)$$

quantidade negativa; emquanto que para $x=\infty$, se obtem $+\infty$.

Se os circulos C e C' se cortarem, as duas raizes da equação (2) poderão ser imaginarias (*), e n'esse caso o eixo real da respectiva conica terá a direcção do eixo dos y.

Os valores dos raios dos circulos secantes

$$R = \pm \frac{2a}{b}(c-x) \text{ e } R' = \pm \frac{2a}{b}(c-x)$$

mostram, por serem estes valores essencialmente positivos, que o signal + que os affecta, corresponde aos centros que se acham á esquerda do eixo radical, emquanto que o signal — se refere aos centros que se acham do lado direito.

(*) Póde reconhecer-se a possibilidade das raizes imaginarias do seguinte modo:

Supponha-se

$$r \cos \alpha + r' \cos \alpha' = c$$

teremos

$$c^2 (r - a \cos \alpha)^2 > (r^2 - c^2) a^2 \sin^2 \alpha.$$

Ora, se no circulo C tirarmos um raio que forme com CC' o angulo α , e designarmos por d' a differença entre este raio e a projecção de CC' sobre elle; por $d'' = a \sin \alpha$ a perpendicular baixada de C' sobre o mesmo; e finalmente por d a metade da corda commum ás duas circumferencias C e C' teremos

$$c^2 d'^2 > d^2 d''^2$$

d'onde

$$\frac{c}{d} > \frac{d''}{d'}$$

desigualdade que póde deixar de verificar-se, porque se fizermos variar o raio da circumferencia C', conservando a corda commum, variarão d' e d'' , cuja relação póde crescer sem limite, emquanto que $\frac{c}{d}$ se conservará constante.

Notaremos ainda que nem a ellipse nem a parábola podem ter os seus eixos focaes segundo o eixo coordenado dos y, por ser

$$\frac{A^2 - B}{A^2} = \frac{4a^2}{b^2};$$

e logo

$$A > B,$$

incluindo $A = \infty$ se fór

$$\frac{4a^2}{b^2} = 1.$$

Passando a origem das coordenadas aos centros das conicas, e notando que

$$\frac{2a}{b} = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2}} = e$$

teremos

$$R = \pm e(c - D - x); \quad R' = \pm e'(c - D' - x) \dots (E).$$

Designando por M e M' os pontos onde um raio vector da hyperbole conduzido do foco esquerdo F, encontra o primeiro e o segundo ramo; e por F' o segundo foco, teremos

$$FM = -(ex + A); \quad F'M = -(ex - A);$$

$$F'M' = ex + A, \quad e F'M = ex - A \dots (F).$$

Da combinação das fórmulas (E) e (F), deduz-se, relativamente aos circulos secantes que voltam a concavidade ou a convexidade para ambos os centros C e C',

ramo esquerdo $R - FM = ec - eD + A = \text{constante},$

$$R - F'M = ec - eD - A = \text{constante},$$

ramo direito $F'M' - R = ec - eD + A,$

$$F'M - R = ec - eD - A.$$

Estes circulos secantes são pois envolvidos por dois novos circulos, cujos centros são os focos F e F' da hyperbole correspondente. Seus raios são $ec - eD + A$ e $ec - eD - A$, respectivamente. A differença dos raios dos circulos involucros é igual a $2A$, eixo transverso da hyperbole.

Com respeito aos circulos que voltam a concavidade para um dos centros C, C', e a convexidade para o outro, teremos

$$R' - FM = e'c - e'D' + A'$$

$$F'M - R = -e'c + e'D' + A'$$

$$FM' - R = e'c - e'D' + A'$$

$$R - F'M = -e'c + e'D' + A'.$$

Resultado semelhante ao que obtivemos anteriormente, e em que

tambem a differença entre os raios dos circulos involucros, é igual ao eixo transverso da hyperbole.

Quando os circulos dados se cortam entre si, as duas conicas interceptam-se com elles nos mesmos pontos do eixo radical; e notaremos que se o eixo focal da conica considerada existir sobre o eixo dos x , o mesmo ramo de curva passará por essas duas intersecções, e deveremos dar signaes differentes ao valor de R , conforme a parte considerada esteja de um ou de outro lado do eixo radical.

Supponhamos, por exemplo, que uma das conicas é uma parabola e a outra uma hyperbole (fig. 8), sendo por conseguinte $b < 2a$ e $b' = 2a$.

Na parte da parabola que se acha á esquerda do eixo radical, teremos $R = c - x$; e na parte direita, cuja corda é o eixo radical, será $R = x - c$.

Tirando a directriz EE' , ver-se-ha que no ponto M , situado á esquerda do eixo radical, tem-se

$$R = c - x = CG - CP = PG = MT.$$

E no ponto M' , á direita do mesmo eixo

$$R = x - c = CP' - CG = GP' = MT':$$

logo os circulos secantes, cujos centros estão n'uma parabola, são tangentes ao eixo radical. É um dos circulos involucros que se tornou infinito.

Nos centros que estão á esquerda do eixo radical tem-se ainda

$$\rho - R = FM - MS = ME - MT = ET.$$

Nos centros que estão á direita

$$\rho + R = FS' = FM' + M'T' = M'E' + M'T' = ET.$$

Logo os circulos secantes têm ainda um circulo involucro, cujo centro é o fóco da parabola e raio igual á distancia entre o eixo radical e a directriz. Este circulo volta a concavidade para os secantes que têm os centros na parte da parabola sustentada pelo eixo radical, e a concavidade para todos os outros.

Supponha-se actualmente que uma das conicas dos centros dos circulos secantes é a ellipse, e que os circulos dados se cortam.

Para os raios vectores que partem do fóco F tem-se $FM = A + ex$; e para os que partem do fóco F' , $F'M = A - ex$:

Logo: á esquerda do eixo radical $FM + R = A + ec - eD$

$$F'M - R = A - ec + eD$$

á direita do dicto eixo

$$FM - R = A + ec - eD$$

$$F'M + R = A - ec + eD.$$

Ha pois dois circulos involucros, cujos centros são os fócos. Seus raios $A + ec - eD$ e $A - ec + eD$, dão uma somma igual ao eixo maior da ellipse.

Notaremos ainda a circumstancia da mudança entre a concavidade e a convexidade, quando se passa d'um lado ao outro do eixo radical.

Quando os circulos dados se cortarem poderá acontecer, como já provámos, que uma das curvas dos centros seja uma hyperbole, tendo o respectivo eixo transversò na direcção do eixo coordenado dos y . N'este caso os circulos secantes, cujos centros ella representa, não poderão ser envolvidos.

Com effeito, os dois ramos d'esta hyperbole passam cada um por uma só das intersecções dos circulos dados, e, como sabemos, os raios dos circulos secantes crescerão continuamente a partir do eixo radical, tanto para um como para o outro lado.

Ora, considerando dois d'estes circulos infinitamente proximos, de raios finitos, e designando por dR o acrescimo do raio na passagem d'um ao outro, e por dS a distancia dos centros; ha de necessariamente dar-se (considerando os valores absolutos d'estes accrescimos) algum dos tres casos seguintes:

$$dS < dR, \quad dS = dR \quad \text{e} \quad dS > dR.$$

No primeiro, o circulo maior envolverá o menor. No segundo, tocar-se-hão ambos do lado do centro do circulo menor. No terceiro, emfim, hão de cortar-se tambem do lado do centro do menor d'elles. A condição do envolvimento dos circulos secantes,

$$dS > dR.$$

Representando a conica dos centros pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1;$$

ter-se-ha

$$dS = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$$

É tambem, em valor absoluto, $dR = e dx$.

E substituindo estes valores na desigualdade precedente, teremos

$$e < \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}};$$

d'onde

$$e^2 < \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2};$$

mas

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2};$$

substituindo e simplificando, obteremos emfim

$$\frac{y^2}{b^2} < \frac{x^2}{a^2};$$

e a equação da conica seria, para que houvesse involvimento

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

o que confirma a asserção emittida.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Fin)

9. Les formules (6) (page 11 — vol. I) donnent l'expression algébrique des numérateurs des fractions simples en lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle, en fonction immédiate des quantités données. On peut aussi trouver l'expression algébrique de ces numérateurs en fonction des dérivées d'une certaine fonction, comme a fait Mr. Serret dans son *Cours d'Algèbre supérieure*. Nous allons exposer ces formules.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{x - a_1} + \frac{M_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{(x - a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

où

$$\varphi(x) = (x - a_2)^\beta (x - a_3)^\gamma \dots (x - a_n)^\lambda.$$

En posant $x = a_1 + h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1 + h)}{F(a_1 + h)} = \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h^2} + \dots + \frac{M_\alpha}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a_1 + h)}{\varphi(a_1 + h)}$$

et, multipliant par h^α ,

$$\frac{F_1(a_1 + h)}{\varphi(a_1 + h)} = M_\alpha + M_{\alpha-1}h + M_{\alpha-2}h^2 + \dots + M_1h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_1(a_1 + h)}{\varphi(a_1 + h)}.$$

Nous avons déjà dit que $\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$ ne contient pas des puissances négatives de h , donc la formule précédente représente le développement de $\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$ en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de h . Par conséquent cette formule doit être identique à celle de Maclaurin, qui est

$$\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)} = \psi(a_1+h) = \psi(a_1) + h\psi'(a_1) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(a_1) + \dots + \frac{h^{\alpha-1}}{1.2\dots(\alpha-1)}\psi^{(\alpha-1)}(a_1) + \dots$$

étant

$$\frac{F_1(x)}{\varphi(x)} = \psi(x).$$

Cette identité donne

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha &= \psi(a_1), \quad M_{\alpha-1} = \psi'(a_1), \quad M_{\alpha-2} = \frac{\psi''(a_1)}{1.2}, \\ M_{\alpha-3} &= \frac{\psi'''(a_1)}{1.2.3}, \quad \dots, \quad M_2 = \frac{\psi^{(\alpha-2)}(a_1)}{1.2\dots(\alpha-2)}, \\ M_1 &= \frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\dots(\alpha-1)} \end{aligned} \right\} (10).$$

Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\psi'(a_1)}{(x-a_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\dots(\alpha-1)(x-a_1)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

On trouve de la même manière les numérateurs des autres fractions dans lesquelles on décompose la fraction donnée. Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\psi'(a_1)}{1 \cdot (x-a_1)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)(x-a_1)} + \frac{\theta(a_2)}{(x-a_2)^\beta} + \frac{\theta'(a_2)}{1 \cdot (x-a_2)^{\beta-1}} + \dots + \frac{\theta^{(\beta-1)}(a_2)}{1 \cdot 2 \dots (\beta-1)(x-a_2)} + \dots + \frac{\omega(a_n)}{(x-a_n)^\lambda} + \frac{\omega'(a_n)}{1 \cdot (x-a_n)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{\omega^{(\lambda-1)}(a_n)}{1 \cdot 2 \dots (\lambda-1)(x-a_n)}$$

étant

$$\psi(x) = (x-a_1) \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$$\theta(x) = (x-a_2) \frac{F_1(x)}{F(x)},$$

.....

$$\omega(x) = (x-a_n) \frac{F_1(x)}{F(x)}.$$

10. En comparant les formules (10) aux formules (6) de la page 11 du vol. I, remarquant que, lorsque $F_1(x) = 1$, les M_i coïncident avec les A_i , nous obtenons l'expression algébrique de la dérivée d'ordre n d'une fraction $\frac{1}{F(x)}$,

En effet, cette comparaison donne

$$\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\dots(\alpha-i)} = (-1)^{\alpha-i} \Sigma \frac{[(\beta + \delta' - 1) C \delta']}{(a_1 - a_2)^{\beta + \delta'}} \times \frac{[(\gamma + \delta'' - 1) C \delta'']}{(a_1 - a_3)^{\gamma + \delta''}} \\ \times \dots \times \frac{[(\lambda + \delta^{(n-1)} - 1) C \delta^{(n-1)}]}{(a_1 - a_n)^{\lambda + \delta^{(n-1)}}}$$

étant

$$\delta' + \delta'' + \dots + \delta^{(n-1)} = \alpha - i,$$

ou, faisant $\alpha - i = m$, et substituant a_1 par x ,

$$\frac{d^m}{1.2\dots m dx^m} \frac{1}{(x - a_2)^\beta (x - a_3)^\gamma \dots (x - a_n)^\lambda}$$

$$= (-1)^m \Sigma \frac{[(\beta + \delta' - 1) C \delta']}{(x - a_2)^{\beta + \delta'}} \times \frac{[(\gamma + \delta'' - 1) C \delta'']}{(x - a_3)^{\gamma + \delta''}} \\ \times \dots \times \frac{[(\lambda + \delta^{(n-1)} - 1) C \delta^{(n-1)}]}{(x - a_n)^{\lambda + \delta^{(n-1)}}}$$

étant

$$\delta' + \delta'' + \dots + \delta^{(n-1)} = m.$$

11. Nous avons dans les numéros précédents trouvé l'expression algébrique des numérateurs des fractions simples dans lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle. Les formules trouvées ont beaucoup d'applications importantes, dont nous nous occuperons plus tard.

Quand on veut décomposer une fraction numérique $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, l'application des formules précédents donne beaucoup de peine, et par

conséquent il est préférable employer des autres méthodes, qui sont bien connus. Nous en allons exposer les plus simples, quand les racines de $F(x) = 0$ sont réelles, et quand sont imaginaires.

Soit proposée la fraction

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \dots (x-a_n)^\lambda}$$

Nous avons premièrement

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1) \varphi(x)} = \theta(x) + \frac{A_x}{x-a_1} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

étant

$$\varphi(x) = (x-a_2)^\beta (x-a_3)^\gamma \dots (x-a_n)^\lambda,$$

où A_x et $\varphi_1(x)$ sont donnés par les formules

$$A_x = \frac{F_1(a_1)}{\varphi'(a_1)}, \quad \varphi_1(x) = \frac{F_1(x) - A_x \varphi(x)}{x-a_1} - \theta(x) \varphi(x)$$

dont la première vient de (6) et (7), et dont la deuxième vient de la formule supérieure.

En divisant par $x-a_1$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2 \varphi(x)} = \theta_1(x) + \frac{\theta(a_1)}{x-a_1} + \frac{A_x}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1) \varphi(x)}$$

En décomposant de la même manière la dernière fraction, on obtient

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1) \varphi(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}$$

où A et $\varphi_2(x)$ sont trouvés comme précédemment.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2 \varphi(x)} &= \theta_1(x) + \frac{\theta_1(a_1) + A}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)} \\ &= \theta_1(x) + \frac{A_{x-1}}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

En divisant par $x - a_2$, il yient

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3 \varphi(x)} &= \theta_2(x) + \frac{\theta_1(a_1)}{x-a_1} + \frac{A_{x-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_1)^3} \\ &\quad + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}. \end{aligned}$$

La dernière fraction donne

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)} = \frac{A'}{x-a_1} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3 \varphi(x)} &= \theta_2(x) + \frac{\theta_1(a_1) + A'}{x-a_1} + \frac{A_{x-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_1)^3} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)} \\ &= \theta_2(x) + \frac{A_{x-2}}{x-a_1} + \frac{A_{x-1}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_1)^3} + \frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

En continuant de la même manière on obtient la formule

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2 \varphi(x)} &= \frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} \\ &\quad + \dots + \frac{A_n}{(x-a_1)^n} + \frac{\varphi_n(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi la décomposition de la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ reste dépendante de la décomposition de la fraction $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}$ que ne contient pas dans le dénominateur $(x - a_1)^\alpha$. Cette fraction donne de la même manière

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{B_1}{x - a_2} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - a_2)^\beta} + \frac{\psi_\beta(x)}{\psi(x)}$$

où $\psi(x)$ ne contient pas $(x - a_2)^\beta$.

En continuant de la même manière on décompose complètement la fraction proposée.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x}$$

Nous avons

$$F_1(x) = x^2 - 3x + 5 \text{ et } \varphi(x) = (x-2)x$$

donc

$$A_\alpha = -3 \text{ et } \varphi_1(x) = 4x - 5$$

et par conséquent

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x-2)x} = -\frac{3}{x-1} + \frac{4x-5}{(x-2)x}$$

Ensuite

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2(x-2)x} = -\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4x-5}{(x-1)(x-2)x}$$

$$= -\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{5-x}{x(x-2)}$$

Continuant de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^3(x-2)x} &= -\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5-x}{(x-1)x(x-2)} \\ &= -\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1} + \frac{4x-5}{x(x-2)} \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x} &= -\frac{3}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{5-x}{x(x-2)} \\ &= -\frac{3}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2}. \end{aligned}$$

On voit par le n° 4 qu'on peut aussi faire la décomposition de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ divisant $F_1(a+h)$ par $\frac{F(a+h)}{h^x}$.

12. Nous allons considérer maintenant le cas de le denomi-
nateur de la fraction proposée contenir des facteurs imaginaires
du premier degré. La méthode de décomposition précédente est
encore applicable, mais on peut éviter les imaginaires décomposant
la fraction proposée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{F(x)} &= \frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)^{\alpha}} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^{\alpha-1}} \\ &+ \dots + \frac{A_nx + B_n}{x^2 + px + q} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

étant $x^2 + px + q$ le produit de deux facteurs imaginaires conju-
gués $x - \theta - \theta' \sqrt{-1}$ et $x - \theta + \theta' \sqrt{-1}$, et $\varphi(x)$ le produit
de tous les autres facteurs de $F(x)$.

Pour trouver A_1, B_1, A_2, B_2 , etc., on procede comme dans le cas précédent, partant de $\alpha=1$. Nous avons, en effet,

$$\frac{F_1(x)}{(x-\theta-\theta'\sqrt{-1})(x-\theta+\theta'\sqrt{-1})\varphi(x)} = \frac{A}{x-\theta-\theta'\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-\theta+\theta'\sqrt{-1}} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

étant

$$A_1 = \frac{F_1(\theta+\theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta+\theta'\sqrt{-1})} = K + K'\sqrt{-1}$$

$$A_2 = \frac{F_1(\theta-\theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta-\theta'\sqrt{-1})} = K - K'\sqrt{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)\varphi(x)} &= \frac{K+K'\sqrt{-1}}{x-\theta-\theta'\sqrt{-1}} + \frac{K-K'\sqrt{-1}}{x-\theta+\theta'\sqrt{-1}} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} \\ &= \frac{2K(x-\theta)-2K'\theta'}{(x-\theta)^2+\theta'^2} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Procédant comme dans le cas des facteurs réels, c'est-à-dire faisant des multiplications successives par x^2+px+q , on décompose la fraction proposée.

SOBRE UM PROBLEMA DE MECANICA APPLICADA

POR

L. F. MARREAS FERREIRA

Construir uma arcada n'um determinado vão, dadas as seguintes condições:

- a) arcos iguaes e ellipticos;
- b) extradorso parallello ao intradorso;
- c) largura de secção nas impostas, igual á differença entre os eixos das duas ellipses de cada arco;
- d) a pressão, que se descarrega em cada centimetro quadrado da superficie das impostas, igual a uma quantidade determinada;
- e) supõe-se conhecida a flecha dos extradorsos.

Sejam: x , o numero de vãos dos arcos; y , a espessura no fecho de cada arco; z , o comprimento de cada vão; c , o comprimento do vão total e supponha-se: largura do pegão, ou pé direito

$$\frac{c - xz}{x} = w;$$

- a , flecha commum aos extradorsos;
- P , peso d'um centimetro cubico do material empregado;
- ρ , pressão, sob a qual trabalham os materiaes nas secções das impostas, referida ao centimetro quadrado.

Os eixos d'uma ellipse de extradorso serão: a (semi-eixo menor), $z + w$ (eixo maior); os do intradorso: $a - y$ (semi-eixo menor), z (eixo maior).

A area comprehendida entre ellas e as impostas é representada por:

$$\frac{\pi}{2} \left(a \frac{z + w}{2} - (a - y) \frac{z}{2} \right);$$

o peso do arco, sob 1^m de espessura :

$$P \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\left(a \frac{z+w}{2} - (a-y) \frac{z}{2} \right) \times 1^m}{1^{cc}}$$

a area que, sob aquella espessura, apresenta a secção d'um pé direito, juncto ás impostas, será: $w \times 1^m$ e $\frac{w + 1^m}{1^{cc}}$ o numero de centimetros quadrados que n'ella se contém.

O peso que se descarrega sobre um pé direito é pois dado pela formula :

$$\frac{\left(\frac{P\pi}{2} \left(a \frac{z+w}{2} - (a-y) \frac{z}{2} \right) \times 1^m \right)}{\left(\frac{w \times 1^m}{1^{cc}} \right)} = \rho,$$

fazendo $\frac{4\rho}{P\pi} \times 1^c = m$, vem a formula igualmente homogenea :

$$a(z+w) - (a-y)z = mw,$$

e substituindo w pelo seu valor :

$$\frac{ac}{x} - (a-y)z = m \frac{c-xz}{x} \dots \dots \dots (1).$$

Sendo homotheticas as duas ellipses de cada arco, resulta :

$$a:(a-y)::(z+w) \times \frac{1}{2} : z \times \frac{1}{2}$$

ou

$$az = (a-y) \frac{c}{x} \dots \dots \dots (2).$$

A relação entre o fecho e abertura do arco, ou entre y e z , é dada pela formula de Léveillé, applicavel a este caso:

$$y = p + qz \dots \dots \dots (3)$$

em que p representa uma fracção do metro, e q é um numero abstracto, menor que a unidade.

As equações (1) e (2) dão:

$$a \frac{c}{x} - \frac{(a-y)^2}{a} \frac{c}{x} = m \frac{c}{x} - m \frac{a-y}{a} \frac{c}{x}$$

ou

$$(a-y)^2 - m(a-y) = (a-m)a$$

d'onde

$$a - y = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + a(a-m)} = \frac{m}{2} \pm \left(a - \frac{m}{2}\right)$$

resultando para $(a-y)$ os valores a e $(m-a)$; de sorte que

$y = \begin{cases} 0 \\ 2a-m \end{cases}$, e não podendo admittir-se o primeiro valor, teremos portanto o seguinte systema:

$$y = 2a - m$$

$$z = \frac{2a - m - p}{q} \dots \dots \dots (3)$$

$$x = \frac{qc(m-a)}{a(2a-m-p)} \dots \dots \dots (2)$$

Sendo $y < a$ pelas condições do problema, tem-se: $2a - m < a$, ou $a < m$, e pelos valores de z e x : $2a > m + p$ ou $a > \frac{m+p}{2}$;

d'onde resulta: $p < m$

$$\frac{m+p}{2} < a < m;$$

taes são as relações que devem existir entre os dados x , devendo ser inteiro, escolheremos o maior inteiro contido no seu valor, e representando este por x' , será:

$$c - x'(z+w)$$

a parte do vão que se deve juntar á occupada pelos encontros. z deve ser maior que y , como realmente indica a formula, visto que p e q são fracções das respectivas unidades.

Os pedões, ou pés direitos, não podem funcionar como encontros. Havendo uma sobrecarga de peso constante P' , uniformemente distribuido, será $\frac{P'}{x}$ o peso correspondente a cada arco e obtem-se:

$$\frac{\left(\frac{P\pi}{2} \left(\frac{a(z+w)}{2} - \frac{(a-y)z}{2} \right) \times 1^m + \frac{P'}{x} \right)}{\frac{1^{cc}}{\left(\frac{w \times 1^m}{1^{cc}} \right)}} = \rho,$$

soffre apenas uma ligeira modificação a equação (1), ficando inalteraveis as outras e o problema resolve-se por um modo analogo ao anterior.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 1

POR

C. H. CRAVEIRO LOPES

PROBLEMA (*)

Dadas tres circumferências de centros A, B, C, das quaes as primeiras têm uma corda commum IJ, traçar por I uma transversal que as encontre respectivamente nos pontos X, Y e Z, por tal fórma que seja XZ para XY em uma razão dada $m:n$.

SOLUÇÃO

Seja IY uma transversal passando por I, e seja Z o ponto que divide o segmento XY na proporção dada $m:n :: XZ:XY$.

Tiro os diametros IAD e IBE; os pontos D, J e E estarão em linha recta. Por X, por Y e por Z levanto perpendiculares a IY, das quaes a primeira passa necessariamente em D, a segunda em E, e a terceira determina sobre DE um ponto F, tal que $DF:DE :: XZ:XY :: m:n$; isto é, que divide a recta DE na razão dada.

Seja qual fôr a direcção d'uma transversal X'Y' passando por I, sendo X' e Y' os pontos em que córta as circumferencias A e B, se pelos pontos X', Y' lhe levantarmos perpendiculares, passarão estas necessariamente em D e E, e a perpendicular á transversal levantada no ponto Z', que divide X'Y' na razão dada, irá em virtude do parallelismo das tres, dividir DE na mesma razão, isto é, passará em F.

Então IF é a hypotenusa commum a uma infinidade de triangulos rectangulos, cujos vertices de angulo recto são os pontos que dividem os segmentos considerados como $m:n$; um d'estes

(*) Pedese aos leitores que vão traçando a figura como vae sendo indicado.

triangulos é IJF. O lugar geometrico dos pontos Z é pois uma circunferencia de circulo passando por I e por J; então o seu centro estará sobre AB, e como tambem deve estar sobre o diametro IF, estará no ponto N encontro d'estas rectas.

O parallelismo de AB e DE mostra logo que o ponto N divide AB na razão dada.

O que fica dito auctorisa a estabelecer o seguinte

THEOREMA

Dadas duas circunferencias que se cortam, se tirarmos rectas para um dos seus pontos de encontro, o lugar geometrico dos pontos que dividem em uma razão constante os segmentos n'estas determinados pelas circunferencias, é uma outra circunferencia que tambem passa nos pontos onde as primeiras se cortam, e cujo centro divide na mesma razão a distancia dos centros dados.

Como consequencia d'este principio resolve-se o problema proposto pela seguinte

CONSTRUCÇÃO

Tira-se AB; sobre esta marca-se N, por fórma que seja $AN:AB::m:n$; com centro em N e raio NI córta-se a circunferencia C nos pontos Z e Z'; as rectas dirigidas segundo IZ e IZ' respondem á questão.

DISCUSSÃO

Se as circunferencias N e C não se cortam, o problema é impossivel; cortando-se ha duas soluções, como no caso da figura; sendo tangentes estas duas soluções reduzem-se a uma só, que é a linha recta determinada por I e pelo ponto de contacto de N e C.

Se a circunferencia C passa em I, uma das soluções está na corda commum a C e N. A outra será a tangente a N tirada em I, porquanto considerando que o ponto Z se foi deslocando sobre a circunferencia N até chegar a confundir-se com I, as successivas posições da transversal IZ seriam as secantes a N, que girassem sobre I, e quando Z cahir sobre I, a secante tomará a posição da tangente a N em I. Passando C em I e sendo tangente a N, as duas soluções confundir-se-ão sobre a tangente commum a N e C, isto é, a que passa em I.

Quando C passar em I e J uma das soluções, como acabamos de ver, será a tangente em I á circunferencia N, e a outra seguindo

a corda commum ás duas, será IJ. É bom, porém, advertir que esta solução IJ convém então, qualquer que seja a razão dada $m:n$; visto como estando então confundidos em J os pontos X, Y, Z,

$$\text{será } \frac{XZ}{XY} = \frac{0}{0}.$$

Se por acaso as circumferencias C e N se confundem, ha uma infinidade de soluções, visto que qualquer ponto de N é commum a C; é o caso de indeterminação do problema.

OBSERVAÇÃO

Tudo quanto fica dito com referencia á circumferencia N subintende-se tambem para uma circumferencia N', de raio N'I, e cujo centro N' está tambem sobre a recta AB e é symetrico de N com relação a A; d'onde se pôde concluir que o problema proposto tem quatro soluções, duas determinadas por N e duas por N'.

Esta solução é geral, e convém ainda ao caso em que a circumferencia C é substituida por qualquer linha, sendo então tantas as soluções, quantos os pontos de encontro das circumferencias N e N' com a linha dada em substituição de C.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 11

Provar geometricamente que os logares H, H' dos pontos do espaço, cujas distancias a duas rectas fixas M, N, não situadas no mesmo plano, estão n'uma razão constante $\frac{m}{n}$, são hyperboloides escalenas ou não de revolução (*).

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

(*) Foi M. Ferry quem primeiro determinou analyticamente a natureza das superficies H, H', no seu *Ensaio sobre as machinas*, publicado em Metz em 1806. Sobre esta questão (que não nos consta ter sido ainda tractada geometricamente) diz o illustre geometra T. Olivier o seguinte:

«Je n'ai pu encore parvenir à déterminer la nature géométrique du lieu H au moyen des considérations de la géométrie descriptive; j'ai donc dû recourir à l'analyse de Descartes.

Mais pour tous les cas où l'on suppose que $\frac{m}{n} = 1$, j'ai pu parvenir au résultat par des considérations géométriques assez simples.»

EXTRACTO DE UMA CARTA DO PROFESSOR G. BELLAVITIS
A F. GOMES TEIXEIRA

Nel n.º 3 del vol. II del *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* trovo un bel teorema del sig. Craveiro Lopes, che rende facile la soluzione richiesta (pag. 47). Se per un punto J sono tirate tre rette fisse JX, JY, JZ, e da un punto I parte una recta qualsivoglia IXZY, è ben noto che rapporto duplice $IY \cdot XZ : IZ \cdot XY \simeq m$ è costante. Col mezzo dell'inversione rispetto al punto I ne risulta todo che tre circoli IJX, IJZ, IJY, tagliano ogni retta IXZY in modo che $XZ = m \cdot XY$. Io pure al risolvere il problema (*Spozione del metodo delle equipollenze* (*) n.º 88) deveau accorgermi che se il centro C coincide col punto L dato da $AL \simeq m AC$, la LC si annulla, perciò la cercata IXY porà avere qualunque direzione. Queste posteriori considerazioni non diminuiscono il merito d'invenzione del sig. Craveiro Lopes.

Padova, 22—7—79.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 12

Dados dois pontos, determinar com o compasso ordinario o ponto medio da distancia que os separa.

L. F. MARREAS FERREIRA.

(*) Esta Memoria do professor Bellavitis, publicada em Modena em 1854, foi traduzida em francez por Mr. Laisant.

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA N.º II

POR

L. F. MARREAS FERREIRA

Provar geometricamente que os logares H, H' dos pontos do espaço, cujas distancias a duas rectas fixas M, N , não situadas no mesmo plano, estão n'uma razão constante $\frac{m}{n}$, são hyperboloides escalenos ou não de revolução.

Tire-se por M um plano paralelo a N , e seja N' a projecção d'esta recta sobre elle, cortando M n'um ponto V (fig. 1.ª, est. 3.ª). H_1 represente o logar geometrico dos pontos do espaço, cujas distancias a M guardem com as respectivas distancias a N' a relação $\frac{m}{n} = k$; H'_1 o logar correspondente á relação $\frac{1}{k}$. Para determinar H_1 imaginem-se cylindros rectos de base circular, tendo por eixos M e N' , guardando os raios dos primeiros a relação k com os correspondentes de eixo N' . H_1 é o logar das intersecções dos dois systemas.

A fig. 2.ª representa a intersecção de dois cylindros correspondentes feita pelo plano MN' , escolhido para a projecção; os diametros estão relacionados por: $\frac{cd}{ab} = k$; a recta ef fazendo com as geratrizes angulos: aeb, dfc iguaes entre si, perpendicular á bissetriz do angulo PVQ , determinará segmentos eb e cf , taes que: $\frac{cf}{eb} = \frac{cd}{ab} = k$.

Escolhamos planos secantes auxiliares, perpendiculares ao de projecção, tendo por traços sobre este as rectas $AQ, A'Q' \dots$, perpendiculares á bissetriz de PVQ . Cada systema de cylindros será interceptado segundo ellipses homotheticas; mas os eixos maiores n'um systema (como cf) são proporcionaes aos maiores (como eb)

no outro, guardando entre si a relação k ; os menores são os raios dos respectivos cylindros, que mantêm igualmente a mesma relação; portanto as ellipses d'um systema, além de serem homotheticas entre si, serão tambem homotheticas com as do outro systema.

O logar dos pontos d'um plano, cujas distancias a dois pontos d'elle têm entre si a relação k , é uma circumferencia, representando esta o logar das intersecções de dois systemas de circumferencias, tendo cada um por centro um dos dois pontos dados.

Pela transformação homologica, ou projecção sobre um plano paralelo á linha dos centros, as circumferencias convertem-se em ellipses, sendo as de cada grupo homotheticas entre si e com as do outro.

Cada plano secante auxiliar contem dois systemas de ellipses, produzindo pelas intersecções uma ellipse ε , semelhante ás propostas. Assim no plano AQ é AC o eixo maior de ε , dando-se:

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{CQ}{PC} = k; \text{ e } B, \text{ ponto medio de } AC, \text{ será o centro.}$$

No plano $A'Q'$ será $A'C'$ o eixo maior de ε' , determinado segundo relações analogas.

$A, A', A'' \dots$ estarão em linha recta; $B, B', B'' \dots$ n'outra e finalmente $C, C', C'' \dots$ n'uma terceira, todas dirigidas para V .

Os eixos menores das ellipses $\varepsilon, \varepsilon' \dots$, perpendiculares ao plano de projecção, erguendo-se sobre $B, B' \dots$, guardando uma relação constante com os eixos maiores correspondentes, terão os seus extremos situados sobre duas rectas que se cortam em V . H_1 é pois um cone e da mesma sorte H'_1 .

Para determinar H e H' , imagine-se que N' sofre uma translação perpendicular ao plano, até occupar a posição N ; considerem-se ainda os dois systemas de cylindros e os mesmos planos auxiliares.

Sujeitando os dois systemas de circumferencias, precedentemente considerados, á transformação homologica segundo um eixo obliquo á linha dos centros, os eixos maiores de todas as ellipses obtidas serão paralelos ao eixo de transformação, e ellas ainda homotheticas entre si, guardando-se a relação k .

$\Sigma, \Sigma' \dots$, ellipses resultantes das novas intersecções, são igualmente homotheticas.

Seja $P'p$ (fig. 3.^a) a altura a que se elevou N' , P' e Q' são centros de dois systemas de circumferencias primitivas de que resultou ε , de eixo maior $A'C'$ e centro B' . Se p e Q' fossem os centros, a circumferencia resultante teria o centro b sobre a

perpendicular $B'b$, sendo a e c extremos do diametro ac , dados por: $\frac{aQ'}{ap} = \frac{cQ'}{cp} = k$; estando aquelles pontos nas perpendiculares $A'a$ e $C'c$.

Da transformação homologica resulta uma ellipse Σ , de eixo a_1c_1 , paralelo a $A'C'$, sendo $ab = a_1b_1$.

Os centros das novas ellipses resultantes projectam-se sobre a recta VB (fig. 1.^a) e existem sobre uma outra recta, como se pôde demonstrar até elementarmente (*), portanto os eixos maiores de Σ , Σ' ,... existem n'um plano paralelo ao de projecção.

No plano auxiliar tirado por V obtem-se uma outra ellipse, ainda homothetica das precedentes, cujo centro está acima de V , na recta que juncta os pontos b, b', \dots .

A fig. 3.^a mostra que a differença entre a_1c_1 e $A'C'$, ou a semi-differença $A'A_1$, depende da distancia $P'Q'$ ou do angulo em Q' , o seu valor augmenta á medida que o ponto Q' se aproxima de V , correspondendo a este ponto o seu valor maximo, e decrescendo depois para o lado opposto de V .

H admite, pois, dois planos diametraes: o de projecção e o perpendicular a este tirado por VB ; as suas secções paralelas feitas pelos planos $AQ, A'Q', \dots$ serão ellipses homotheticas entre si e com as do cone H_1 ; mas pela conclusão anterior vê-se que H não pôde ser um cone, aproximando-se A_1 e C_1 de A' e C' , quando Q' se afasta de V , afastando-se no caso contrario.

Se em lugar dos planos secantes auxiliares: $AQ, A'Q', \dots$ empregarmos outros planos igualmente perpendiculares ao de projecção, tendo os seus traços sobre este parallelos entre si, mas com uma direcção diversa da dos precedentes, os cones H_1 e H'_1 serão cortados segundo um novo systema de ellipses: $\epsilon_1, \epsilon'_1, \dots$; por conseguinte das superficies H e H' resulta um outro systema de conicas: $\Sigma_1, \Sigma'_1, \dots$; como a relação projectiva $A'_1A' = C'_1C_1$ se mantem invariavel nas novas conicas, segue-se que o logar dos pontos A_1 e C_1 é uma hyperbole, que tem por asymptotas as rectas VA e VC , que definem o contorno apparente do cone H_1 .

(*) A fig. 1.^a representa um paraboloido hyperbolico, cuja linha de stricção, perpendicular ao plano MN' , está projectada em V , concorrendo n'este ponto as geratrizes d'um systema, e sendo as do outro representadas por $AQ, A'Q', \dots$ O plano de projecção será o plano central da geratriz M .

Os pontos b, b', \dots , segundo a relação de k , existem n'uma das geratrizes que passam em V .

Será, pois, H um hyperboloide que admite um cone director paralelo a H_1 , tendo o vertice na recta projectada em V; H' será igualmente um outro hyperboloide.

Como os planos auxiliares determinam curvas ellipticas $\epsilon, \epsilon', \dots$, segue-se que H e H' não podem conter nenhum systema de circumferencias, e serão portanto hyperbolidos escalenos. Ainda mesmo no caso em que os planos fossem perpendiculares a um dos eixos M ou N, seriam obliquos ao outro; os cylindros produziam um systema de circumferencias a interceptar por um outro de ellipses, resultando da mesma sorte curvas ellipticas.

A intersecção dos cylindrós será um arrancamento entre os limites da tangencia interna e externa.

Em V existem os pontos mais altos e baixos da curva Σ , que em cada superficie encontra aquella perpendicular; bem como os da secção feita pelo plano perpendicular VB, que é o diametral para as cordas paralelas a AQ. N'esses pontos, que pertencem á linha de stricção, será o plano tangente paralelo ás rectas M e N; obtendo-se as linhas de stricção ou ellipse de gola em cada superficie, tirando por V um plano perpendicular ao respectivo eixo, sendo este uma recta paralela á bissectriz do angulo AVC na superficie H.

Á hypothese $\frac{m}{n} = 1$ corresponde a tangencia dos dois logares geometricos n'um ponto da recta V.

Entre dois eixos não situados no mesmo plano pôde pois realisar-se por meio d'uma engrenagem hyperbolica a transmissão de movimento, com as rotações e escorregamentos necessarios, para que os pontos centraes das geratrizes em coincidencia se vão ajustando, bem como os planos centraes. Alguns escriptores modernos da Mecanica têm feito sobre este assumpto interessantes estudos, nomeadamente Bour, e entre nós o ex.^{mo} sr. Francisco da Ponte Horta; Rankine tambem se occupa d'este systema, cuja introdução na pratica, pelas difficuldades que apresenta, se torna quasi inexequivel, restringindo-se apenas a alguns modelos de gabinete, e é certamente por tal motivo, que n'uma obra importantissima — *Traité de mécanique générale*, pelo dr. H. Resal, distincto engenheiro francez, o systema não tem cabimento.

RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE
ASSUJETI A COUPER CONTINUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS
SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Avertissement

1. Lorsque nous avons présenté dans ce Journal la solution *purement géométrique et élémentaire* du problème, qui a pour objet de trouver un cercle (x) , qui coupe deux cercles donnés (E) et (I) sous des angles également donnés e et i $(*)$: problème proposé par Mr. Pedro Amorim Vianna, dans ce même Journal (en supposant le cas tout particulier où les cercles donnés sont concentriques) $(**)$: nous y avons dit, que, plus tard, nous étudierions les diverses propriétés remarquables, qui se déduisaient de la figure, soit dans le cas particulier, soit dans le cas général: ce que nous passons maintenant à faire.

2. Nous pourrions naturellement faire notre étude tant *synthétique* que *analytique* en partant du cas général, pour en dériver ensuite tous les différents cas, qui peuvent se présenter; mais comme l'étude *purement géométrique*, ou *synthétique* est, sans doute, plus importante que l'*analytique*, et elle devient ici plus simple et plus élémentaire, en partant du cas des cercles concentriques, nous considérerons d'abord ce cas et ensuite le cas général.

(*) Voy. p. 174 et suiv. du vol. I.

(**) Voy. p. 160 du vol. I.

I

Cas des cercles concentriques

§ I

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

3. Soient R et r la grandeur des rayons des cercles (E) et (I); et traçons sur ces cercles respectivement les cordes ba et b_1d_1 , qui les coupent sous les angles e et i , et dont les points milieux seront représentés par m_1 et m'_1 .

Comme le problème est indéterminé, si nous prenons le point arbitraire b du cercle (E), et voulons obtenir l'un (x) des cercles, qui, passant par ce point, coupe les deux cercles donnés, sous les angles également donnés, nous savons (*) que nous avons à prendre sur la corde ba un segment bm_d égal à la moitié de la corde b_1d_1 , lui élever au point m_d la perpendiculaire $c_1m_dc_1$, en marquant sur celle-ci le segment m_dc_1 égal au rayon r' du cercle (I), enveloppe de la corde b_1d_1 du cercle (I); puis unir le point c_1 avec le centre C de ce même cercle (I), et alors la corde $b'a_1$, perpendiculaire en b à la corde ba , sera coupée par la perpendiculaire o_nst , élevée sur le milieu n_s de Cc_1 , au point o , centre de l'un (x) des cercles demandés.

Quand nous considérerons, sur la perpendiculaire $c_1m_dc_1$, le segment $m_dc_1 = c_1m_d$, la perpendiculaire $o'n_1t$, sur le milieu n_1 de Cc_1 , coupera $b'a_1$ au point o' , qui sera le centre du second cercle demandé (x').

4. Si nous marquons sur la corde ba le segment $bm_e = m_db$, et en m_e lui élevons la perpendiculaire $c'_1m_e c'_1$, en prenant sur celle-ci les segments $m_e c'_1$ et $c'_1 m_e$, égaux au rayon r' , nous trouverons les mêmes cercles (x) et (x'): car il est facile de reconnaître que les perpendiculaires $o'n'_1st$ et $o'n'_1t'$, élevées aux points milieux n'_1s et n'_1 de Cc'_1 et Cc'_1 coupent $b'a_1$ respectivement aux mêmes points o et o' , où cette droite est rencontrée par les perpendiculaires o_nst et $o'n_1t$.

(*) Voy. notre solution générale, déjà citée.

5. En considérant l'autre extrémité a'_1 de la corde ba'_1 , si l'on trace la corde a'_1b_3 , parallèle à ba et l'on fait des constructions analogues aux précédentes, nous trouverons deux points o_1 et o'_1 , qui représenteront les centres de deux cercles (x_1) et (x'_1) respectivement égaux à (x) et (x') , et symétriquement placés à l'égard de ceux-ci.

6. Si nous voulons déterminer les cercles (x_c) et (x'_c) , qui coupent les cercles (E) et (I) sous les angles complémentaires des angles donnés, leurs centres correspondants t et t' seront déterminés respectivement par les droites $on_s t$ et $on'_s t'$, ou $o'n_i t$ et $o'n'_i t'$, que nous avons considérées antérieurement: ce qu'on reconnaîtra aisément, en appliquant les constructions précédentes à la corde complémentaire ba'_1 de la corde ba .

7. En considérant aussi la corde ab_3 , parallèle à ba'_1 , et en y employant les constructions précédentes, nous trouverons des cercles égaux aux cercles (x) , (x') ; (x_1) , (x'_1) ; (x_c) , (x'_c) , et symétriques de ceux-ci.

8. Comme nous avons dit (dans notre solution) la seconde corde ba_1 , qui coupe le cercle (E) au point b , sous l'angle e , donnera aussi deux cercles (x_2) et (x'_2) égaux aux cercles (x) et (x') , et symétriquement placés par rapport à ceux-ci.

9. Étant b' et b'_2 les points où le cercle (x) coupe le cercle (I), et b'' et b''_1 leurs points de rencontre avec le cercle (x') : les tangentes $b't$ et $b'_2 t$, au cercle (x) , aux points b' et b'_2 , coupent évidemment ba sur les points t et t' ; et les tangentes $b''t$ et $b''_1 t$ au cercle (x') aux points b'' et b''_1 , passeront respectivement par ces points-là: toutes ces droites étant également tangentes au cercle (I). Semblablement les tangentes $b'o$ et $b''o'$ au cercle (x_c) coupent ba'_1 , aux points o et o' , par lesquels passent respectivement aussi les tangentes $b'_2 o$ et $b''_1 o'$ aux points b'_2 et b''_1 du cercle (x'_c) : toutes ces droites étant évidemment aussi tangentes au cercle (I'), enveloppe de la corde $b'_1 d'_2$ perpendiculaire à la corde $b'_1 d'_1$; et dont le rayon nous représenterons par r'' .

Il en résulte que le cercle (x_c) passera par les points b' et b'' ; et le cercle (x'_c) par les points b'_2 et b''_1 .

10. On reconnaît immédiatement que les lieux géométriques des centres o, o_1, \dots , de la suite des cercles $(x), (x_1), \dots$; et des centres o', o'_1, \dots ; de la suite $(x'), (x'_1), \dots$; sont deux cercles complètement déterminés, et que nous représenterons respectivement par (X) et (X').

11. *Observation.* — Comme on le verra ces deux cercles se transformeront en deux autres coniques (Σ) et (Σ'), lorsque les cercles (E) et (I) laisseront d'être concentriques, et lesquelles représenteront alors les lieux géométriques des deux nouvelles suites de cercles, qui résolvent le problème dans ce cas.

De même, les cercles enveloppes des cordes d'intersection des cercles (E) et (I) avec les cercles (x) et (x'), ainsi que les cercles, qui représentent les lieux géométriques des poles de ces cordes, se transformeront en d'autres coniques.

Au contraire, les cercles enveloppes des cercles (x) et (x'), après la transformation de la figure, continueront encore à être des cercles, mais qui pourront alors être réels ou imaginaires; et dont l'étude, combinée avec la méthode de Roberval, constitue la base principale de nos humbles recherches synthétiques.

12. On reconnaîtra immédiatement par les constructions faites, que les centres des cercles (x_0) et (x'_0), qui passeront par C et par les extrémités des côtés $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$, auront pour lieux géométriques les cercles (X) et (X'). Il en sera de même des lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c), et de ceux qui passeront par C et par les extrémités des côtés $c_s c_i$ et $c'_s c'_i$.

13. Plusieurs autres propriétés se trouveront immédiatement, par la simple inspection de la figure, et que nous n'énumérons pas, parceque nous les jugeons de peu de valeur, dans le cas particulier, que nous considérons maintenant.

14. *Discussion.* — Représentons par (E') et (E'') les cercles enveloppes des cordes complémentaires ou orthogonales ba et ba' du cercle (E); et par R' et R'' la grandeur de leurs rayons; et considérons, soit les cercles auxiliaires (y) et (y') (*), qui touchent (I) aux points m' et m'' , et la corde ba au point m_d ; soit le rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$: ce qui nous conduira aisément à l'étude de la figure relative aux différents cas, qui se présenteront; en supposant toujours que nous prenons arbitrairement les points de la circonférence (E), par lesquels passent les circonférences demandées.

Ainsi:

1.° Quand il sera $R' > r'$ nous voyons tout de suite que l'un (y)

(*) Voy. notre solution.

des cercles auxiliaires étant touché extérieurement, l'autre (y') le sera intérieurement; et alors les cercles (x) et (x') se trouveront du même côté de ba .

2.° Si l'on a $R' < r'$, les cercles (y) et (y') seront touchés extérieurement par (I'), d'où il résulte que les cercles (x) et (x') se trouveront de côtés différents de ba .

3.° Étant $R' = r'$ le rayon de l'un (y') des cercles auxiliaires deviendra infini, et par suite il se réduira à la droite ba et à l'une parallèle à celle-ci, située à l'infini; d'où il suit qu'il en sera de même du cercle demandé correspondant (x'): le cercle (X') passant à l'infini.

4.° Si l'on a $R' = 0$, ou $R'' = R$, ou bien $e = 90^\circ$ les cercles (y) et (y') (touchant (I') extérieurement) seront égaux, ainsi que les cercles (x) et (x'), qui se trouveront situés de côtés différents de ba : les cercles (X) et (X') se confondant en un cercle unique.

5.° Quand nous avons $r' = 0$, ou $r'' = r$, ou bien $i = 90^\circ$, ou encore $r = 0$, les cercles (x) et (x') se confondront, et il en sera de même des cercles (X) et (X').

6.° Si l'on a en même temps $R' = 0$ et $r' = 0$, ou $R'' = R$ et $r'' = r$, non-seulement les cercles (x) et (x') se confondront, mais ils auront aussi les rayons infinis; et par conséquent se réduiront à l'un des diamètres des cercles donnés et à l'une droite parallèle à celui-ci située à l'infini. Il en est de même pour $R' = 0$ et $r = 0$, ou $R'' = R$ et $r = 0$. Les cercles (X) et (X') passeront évidemment à l'infini.

D'après cela, nous voyons, donc, que dans les trois premiers cas, pour chaque point arbitraire b, \dots , du cercle (E), il y aura toujours quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Dans le quatrième et cinquième cas il y aura seulement deux solutions égales et symétriques.

Pour le sixième cas nous n'aurons qu'une solution.

Obs. — Nous faisons remarquer que quand il sera $e = i$, nous aurons évidemment

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''}.$$

15. Si les centres des cercles demandés devaient se trouver sur une ligne donnée (L) le problème laisserait d'être indéterminé, et les centres des cercles demandés seraient les points d'intersection (réels ou imaginaires) de (X) et (X') avec (L).

§ II

ÉTUDE ANALYTIQUE

16. Voyons maintenant comme nous pourrons trouver l'expression du rayon d'un quelconque des cercles demandés.

En considérant le cercle (x), soit m'_2 le point milieu de la corde $b'b''$ du cercle (I), mené par o , et tangente à (I'); et soit aussi m_2 le point milieu de ba_1 , qui contient ce même point o .

Les triangles rectangles Cm_2o et Cm'_2o donnent.

$$\overline{Co}^2 - \overline{Cm_2}^2 = \overline{m_2o}^2 \dots \dots \dots (1)$$

et

$$\overline{Co}^2 - \overline{Cm'_2}^2 = \overline{m'_2o}^2 \dots \dots \dots (2)$$

d'où

$$\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2 = \overline{m'_2o}^2 - \overline{m_2o}^2 \dots \dots \dots (3).$$

Cela étant, si nous faisons tourner la droite m'_2o autour de o , jusqu'à ce que le point b' coïncide avec b , et prenons ce point pour origine des segments, que nous considérons positifs, quand ils seront comptés de b vers m_2 , la formule (3) donnera

$$\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2 = (b'o - b'm'_2)^2 - (bo - bm_2)^2 \dots \dots (4)$$

donc

$$bo = \frac{\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2 + b^2m_2^2 - b^2m'^2_2}{2(bm_2 - b'm'_2)} \dots \dots \dots (5)$$

ou

$$bo = \frac{b^2C^2 - b'^2C^2}{2(bm_2 - b'm'_2)} \dots \dots \dots (6).$$

En tenant compte du signe du segment $b'm'_2$, et en représentant par r_x les rayons bo et bo' des cercles (x) et (x'), l'expression

générale, qui donne ces rayons en grandeur et en direction, sera

$$r_x = \frac{R'^2 - r'^2 + R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} \dots \dots \dots (7)$$

ou

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} \dots \dots \dots (8)$$

Autrement. — Nous pouvons déduire l'expression de r_x , en considérant dans le cercle (E) la corde ba'_1 , et la corde $B'B'''$, déterminée par le prolongement de la corde $b'b'''$ du cercle (I). Pour cela, nous avons d'abord

$$bo \cdot oa'_1 = B'o \cdot oB'' \dots \dots \dots (9)$$

d'où

$$bo(ba'_1 - bo) = (b'o - b'B') (b'B'' - b'o) \dots \dots (10)$$

Ensuite, si, comme précédemment, nous faisons tourner la corde $B'B'''$ autour de o , jusqu'à ce que le point b' coïncide avec b , nous aurons

$$bo = \frac{b'B' \cdot b'B''}{ba'_1 - b'B' - b'B''} \dots \dots \dots (11)$$

ou

$$bo = \frac{(m'_2 B' - m'_2 b') (m'_2 B'' - m'_2 b')}{ba'_1 - (m'_2 B' - m'_2 b') - (m'_2 B'' - m'_2 b')} \dots \dots (12)$$

et comme il est

$$m'_2 B'' = -m'_2 B', \text{ et } ba'_1 = 2bm_2$$

on aura

$$bo = \frac{m'_2 B'^2 - m'_2 b'^2}{2(bm_2 - b'm'_2)} \dots \dots \dots (13)$$

mais il est

$$\overline{m'_2 B'^2} = \overline{B' C^2} - \overline{C m'_2^2} = \overline{b C^2} - \overline{C m'_2^2}$$

et

$$\overline{m'_2 b'^2} = \overline{b' C^2} - \overline{C m'_2^2}$$

d'où

$$b o = \frac{\overline{b C^2} - \overline{b' C^2}}{2(b m_2 - b' m'_2)} \dots \dots \dots (6)$$

donc, etc., etc.

17. D'ailleurs, étant évidemment

$$R' = R \cdot \cos e, \text{ et } r' = r \cdot \cos i$$

la formule (8) devient

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos e \pm r \cdot \cos i)} \dots \dots \dots (14)$$

Telle est la formule qui donne r_x en fonction de R et r , e et i ; et à laquelle nous arriverons directement en considérant les triangles $o b C$ et $o b' C$.

18. Si nous représentons par r_{x_c} les rayons bt et bt' des cercles (x_c) et (x'_c), complémentaires de (x) et (x'), ou qui les coupent orthogonalement, nous trouverons facilement, d'une manière analogue à la précédente, les expressions

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R'' \pm r'')} \dots \dots \dots (15)$$

et

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \sin e \pm r \cdot \sin i)} \dots \dots \dots (16)$$

19. Comme nous savons, la construction de ces expressions générales se réduit à la détermination d'une troisième, ou quatrième proportionnelle.

Considérons, donc, les formules (8) et (14). Pour trouver r_x comme une troisième proportionnelle (par exemple), menons par b une tangente $b\beta$ au cercle (I), et marquons sur ba le segment $b\beta'$ égal au longueur $b\beta$ de cette tangente; puis il ne s'agira plus

que de prendre sur ba'_1 les segments ba et ba' égaux à $R' + r'$ et $R' - r'$, ou $R \cdot \cos e + r \cdot \cos i$ et $R \cdot \cos e - r \cdot \cos i$ (pris dans la direction due), joindre le point β' à α et α' , et élever les perpendiculaires $\beta'o$ et $\beta'o'$ à $\beta'\alpha$ et $\beta'\alpha'$ au point β' lesquelles détermineront sur ba'_1 les centres o et o' des cercles demandés (x) et (x').

Cette construction générale se simplifie beaucoup dans certains cas particuliers. Ainsi, pour $R'' = r''$ les valeurs de r_x seront à peine la demi-somme et la demi-différence des rayons R' et r' [form. (7)]; etc., etc.

D'une manière analogue nous construirons les expressions (15) et (16).

20. La discussion de ces formules est tellement facile qu'il sera inutile de s'en occuper : surtout après la discussion purement géométrique que nous venons de faire.

21. *Observation.* — En faisant varier la grandeur de l'angle e , autour du point b , le lieu géométrique décrit par le point o , centre du cercle (x), sera une conique (*), dont ce point fixe (b) est un des foyers : car, la formule (14) peut prendre la forme générale

$$r_x = \frac{P}{1 + f \cdot \cos e} \dots \dots \dots (17),$$

équation polaire d'une conique, rapportée aux foyers.

Il en sera de même par rapport aux points t et t' , centres des cercles (x_c) et (x'_c).

22. La relation entre les rayons des cercles complémentaires considérés, sera évidemment

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R'' \pm r''}{R' \pm r'} \dots \dots \dots (18)$$

ou

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R \cdot \sin e \pm r \cdot \sin i}{R \cdot \cos e \pm r \cdot \cos i} \dots \dots \dots (19).$$

23. Maintenant passons à déterminer l'équation polaire des lieux géométriques (X) et (X') des centres o, o_1, \dots ; et o', o'_1, \dots ; des cercles (x) et (x').

(*) Voy. la seconde partie de ce mémoire.

Pour cela nous pouvons, ou recourir directement aux formules (1) et (2), ou substituer, dans une quelconque de celles-ci, la valeur du rayon des cercles (x) et (x').

En suivant un quelconque de ces moyens nous trouverons aisément les formules

$$\overline{Co}^2 = \overline{Cm_2}^2 + \left[\frac{\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2}{2(bm_2 - b'm'_2)} - \frac{1}{2}(bm_2 - b'm'_2) \right]^2 \quad (20)$$

ou

$$\overline{Co}^2 = \overline{Cm'_2}^2 + \left[\frac{\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2}{2(bm_2 - b'm'_2)} + \frac{1}{2}(bm_2 - b'm'_2) \right]^2 \quad (21)$$

ou

$$\overline{Co}^2 = \frac{(\overline{Cm_2}^2 - \overline{Cm'_2}^2)^2}{4(bm_2 - b'm'_2)^2} + \frac{2(\overline{Cm_2}^2 + \overline{Cm'_2}^2) + (bm_2 - b'm'_2)^2}{4} \quad (22).$$

En faisant $Co = \rho_0$, nous aurons respectivement

$$\rho_0^2 = R'^2 + \left[\frac{R'^2 - r'^2}{2(R' \pm r')} - \frac{1}{2}(R' \pm r') \right]^2 \dots \dots (23)$$

ou

$$\rho_0^2 = r'^2 + \left[\frac{R'^2 - r'^2}{2(R' \pm r')} + \frac{1}{2}(R' \pm r') \right]^2 \dots \dots (24)$$

ou

$$\rho_0^2 = \frac{(R'^2 - r'^2)^2}{4(R' \pm r')^2} + \frac{2(R'^2 + r'^2) + (R' \pm r')^2}{4} \quad (25).$$

Si nous voulons tenir ρ_0 en fonction de R et r , R' et r' , ces expressions deviennent

$$\rho_0^2 = R^2 - R'^2 + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} - R' \right]^2 \dots \dots (26)$$

$$\rho_0^2 = r^2 - r'^2 + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} \pm r' \right]^2 \dots \dots (27)$$

$$\rho_0^2 = \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} - \frac{1}{2}(R' \mp r') \right]^2 + \frac{2(R^2 + r^2) - (R' \mp r')^2}{4} \quad (28).$$

En remplaçant R' et r' , par les valeurs $R \cdot \cos e$ et $r \cdot \cos i$, nous aurons encore

$$\rho_0^2 = R^2 \cdot \sin^2 e + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos e \pm r \cdot \cos i)} - R \cdot \cos e \right]^2 \dots (29)$$

$$\rho_0^2 = r^2 \cdot \sin^2 i + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R \cdot \cos e \pm r \cdot \cos i)} \pm r \cdot \cos i \right]^2 \dots (30)$$

$$\rho_0^2 = \left[\frac{R^2 \cdot \sin^2 e - r^2 \cdot \sin^2 i}{2(R \cdot \cos e \pm r \cdot \cos i)} \right]^2 + \frac{2(R^2 + r^2) - (R \cdot \cos e \mp r \cdot \cos i)^2}{4} \dots (31).$$

24. D'une manière analogue nous trouverons les équations des lieux géométriques des points t et t' , centres des cercles (x_c) et (x'_c) .

De même que pour les cercles complémentaires (n.º 22), nous pourrons obtenir la relation entre les rayons de leurs lieux géométriques.

25. Comme nous savons, la construction des deux valeurs de ρ_0 est une conséquence de celle de r_x ; mais si nous voulons faire directement les constructions, en partant des expressions respectives, nous pouvons considérer ρ_0 comme l'hypoténuse de triangles, dont la grandeur des cathètes sera la racine carrée de chacun des deux termes du seconde membre de ces mêmes expressions, et dont la construction sera très-simple.

La discussion de telles expressions sera aussi extrêmement facile.

26. Obs. — Nous n'ajoutons rien de plus, parce que ce serait, sans doute, non-seulement rendre cette étude trop fatigante, mais encore présenter inutilement des propriétés qui se déduisent tout de suite de l'étude du cas général, dont nous passons à nous occuper.

(à suivre).

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x) dx$

PAR

M. CH. HERMITE

Je supposerai que $f(\sin x, \cos x)$ soit une fonction rationnelle des quantités $\sin x$ et $\cos x$, de sorte qu'on ait en décomposant en éléments simples, l'expression suivante :

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x)$$

où $\Pi(x)$ représente la partie entière, et $\Phi(x)$ une somme de termes de la forme $D^n_x \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)$. Cette formule donnée dans mon *Cours d'Analyse*, page 321, fait dépendre l'intégrale proposée de celle-ci : $\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - \alpha) dx$, et en recourant à une construction géométrique, j'ai montré qu'elle a pour valeur $\pm 2i\pi$; c'est ce résultat que je vais établir en suivant une méthode différente qu'est entièrement élémentaire. Je parts à cet effet de la relation :

$$n \cot nx = \cot x + \cot \left(x + \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \cot \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

où n désigne un nombre entier et qu'on tire des premiers principes de la trigonométrie. Changeons d'abord x en $x - \alpha$, ou aura :

$$n \cot n(x - \alpha) = \cot(x - \alpha) + \cot \left(x - \alpha + \frac{\pi}{n} \right) + \dots \\ + \cot \left(x - \alpha + \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$$

soit ensuite $\frac{\pi}{n} = dx$, et elle prendra cette nouvelle forme :

$$\pi \cot n(x - \alpha) = dx [\cot(x - \alpha) + \cot(x - \alpha + dx) + \dots \\ + \cot(x - \alpha + (n-1)dx)].$$

Or la limite du second membre, en supposant le nombre entier n infini est précisément l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cot(x - \alpha) dx$; le premier membre dans cette hypothèse est une quantité indéterminée, si l'on suppose la constante α réelle, mais si l'on fait: $\alpha = a + ib$, nous avons :

$$\cot n(x - \alpha) = i \frac{e^{2n(x - a - ib)} + 1}{e^{2n(x - a - ib)} - 1},$$

qui donne sur le champ $+1$ ou -1 pour limite, suivant que b est positif ou négatif. En désignant donc par (b) une quantité égale à l'unité en valeur absolue, et du signe de b , on a :

$$\int_0^\pi \cot(x - a - ib) dx = i(b)\pi,$$

et il suffit de remplacer x par $\frac{x}{2}$, puis $a + ib$ par $\frac{a + ib}{2}$, pour en conclure le résultat cherché à savoir :

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - a - ib) dx = 2i(b)\pi.$$

Je remarquerai enfin que l'expression de $\cot nx$ dont j'ai fait usage, résulte de la décomposition de cette quantité en éléments simples. En effet, cette fonction ayant pour période π , et devenant infinie pour les valeurs

$$x = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$$

on peut faire :

$$\cot n x = \text{const} + \sum_0^{n-1} R \cot \left(x - \frac{k \pi}{n} \right).$$

Or on a

$$R = h \cot n \left(\frac{k \pi}{n} + h \right) \text{ pour } h=0$$

c'est-à-dire $R = \frac{1}{n}$; quant à la constant c'est la demi-somme
 les valeurs de $\cot n x = i \frac{z^{2n} + 1}{z^{2n} - 1}$, en faisant $z = e^{ix}$, pour $z=0$
 et $z = \infty$, qu'est nulle. L'équation ainsi obtenue :

$$n \cot n x = \sum \cot \left(x - \frac{k \pi}{n} \right)$$

donne celle que j'ai employé en y changeant x en $-x$.

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Calcular elementarmente a area lateral e o volume d'uma cunha conica determinada pela intersecção d'um cone de revolução com dois planos, sendo um d'estes perpendicular ao eixo de revolução ().*

Advertencia

1. Tencionavamos, mais tarde, dizer algumas palavras sobre esta questão, por nós proposta, quando publicassemos as nossas observações e estudos sobre as questões propostas n'este jornal, bem como sobre as suas generalisações; mas visto termos de apresentar a sua solução, aproveitaremos a occasião para nos occuparmos tambem d'algumas questões, que têm intima relação com a proposta, e cujo estudo julgamos d'algum valor, estabelecendo para isso, d'um modo geral, os principios, que servem de base á solução pedida.

Representando, pois, por S o vertice do cone, e por (C) e (E) respectivamente as secções recta e obliqua, produzidas n'este pelos planos dados π_c e π_e , é claro que segundo a intersecção I d'estes dois planos fôr uma corda *real* ou *ideal* de (C) ou de (E), assim teremos uma *cunha* ou um *tronco conico*, cuja area e volume tractaremos de calcular, por meio de fórmulas geraes, ou que exprimam não só *as relações de grandeza*, mas tambem *as relações de posição*, que existem entre os elementos da figura considerada.

(*) Questão proposta na pag. 176 do vol. I d'este Jornal.

I

Determinação da area lateral da cunha e do tronco conico

2. Para chegarmos a obter esta area, consideraremos em primeiro logar uma *pyramide regular inscripta* no cone dado: porquanto sabemos que a superficie total do cone, sendo o limite da superficie total da pyramide inscripta, a superficie total da cunha ou do tronco conico será o limite da superficie total da cunha ou do tronco pyramidal inscripto.

Seja $x_0 y_0 y x$ uma das faces da cunha ou do tronco pyramidal, representando $x_0 x$ um dos lados da *base* ou *secção recta* (P_c) da pyramide inscripta, e $y_0 y$ o lado correspondente da sua *secção* (P_e), produzida pelo plano secante π_e .

Projectando *cylindricamente* a pyramide $S(P_c)$ sobre o plano π_e da sua base, tomando para projectante o eixo SC , e representando por (P'_e) e $y'_0 y'$ as projecções da *secção* (P_e) e do seu lado $y_0 y$, teremos evidentemente

$$\frac{\Delta y_0 S y}{\Delta y'_0 C y'} = \frac{\Delta x_0 S x}{\Delta x_0 C x} \dots \dots \dots (1).$$

Designando por μ o ponto medio do lado $x_0 x$ de (P_c) as rectas $S\mu$ e $C\mu$ serão as alturas dos triangulos isosceles $x_0 S x$ e $x_0 C x$, ou os apothemas da pyramide e da sua base, e portanto será

$$\Delta y_0 S y = \frac{S\mu}{C\mu} \times \Delta y'_0 C y' \dots \dots \dots (2)$$

e por conseguinte

$$\text{quadril. } x_0 y_0 y x = \frac{C\mu \times \Delta x_0 S x - S\mu \times \Delta y'_0 C y'}{C\mu} \dots (3).$$

Representando, pois, por q qualquer face da cunha ou do tronco pyramidal, por f a face correspondente da pyramide $S(P_c)$, e por j

a projecção da parte g d'esta face, pertencente á pyramide $S(P_e)$; e fazendo $S_\mu = h$, $C_\mu = h'$, teremos a expressão geral

$$q = \frac{h' \cdot f - h \cdot j}{h'} \dots \dots \dots (4)$$

ou

$$q = f - g \dots \dots \dots (5)$$

logo, designando por Q_p a somma das areas das superficies, taes como q , ou a area da superficie lateral da cunha ou do tronco pyramidal, e por F_p e J_p respectivamente as sommas das areas das superficies, taes como f e j , teremos finalmente

$$Q_p = \frac{h' \cdot F_p - h \cdot J_p}{h'} \dots \dots \dots (6)$$

ou

$$Q_p = F_p - G_p \dots \dots \dots (7)$$

onde G_p é a somma das areas das superficies taes como g .

Sejam agora as rectas SA_0 e SA as geratrizes rectas do cone dado situadas no plano π , conduzido pelo eixo SC , perpendicularmente ao plano π_e da secção (E), e B_0 e B os pontos em que esta curva é encontrada respectivamente por aquellas rectas. Então representando por Q_c , F_c , J_c e G_c os limites das superficies Q_p , F_p , J_p e G_p , e fazendo $SA = L$, $CA = R$, teremos

$$Q_c = \frac{R \cdot F_c - L \cdot J_c}{R} \dots \dots \dots (8)$$

ou

$$Q_c = F_c - G_c \dots \dots \dots (9)$$

Taes são as expressões geraes da area da superficie lateral ou convexa Q_c da cunha ou do tronco conico.

§ I

CUNHA CONICA

3. Agora tractaremos de applicar esta fórmula á questão proposta.

N'este caso, a corda I sendo real, representemos por i_0 e i os seus extremos, ou os pontos de intersecção da base (C) do cone dado com a secção obliqua (E); e por m o ponto medio d'esta corda, ou o seu ponto de intersecção com o diametro A_0A .

Caso da secção elliptica

4. Sendo uma ellipse a secção (E), esta terá B_0B para eixo focal, e a projecção n'esta curva será a ellipse (E'), cujo centro representaremos por C_1 , sendo um dos seus focos o centro C da base do cone dado, e tendo para eixo focal a recta B'_0B' , projecção de B_0B .

Assim (suppondo, por exemplo, que os pontos m e B' se acham entre C e A), se a grandeza Q_c representar a area da superficie lateral da cunha i_0A_iB (tendo por bases o segmento circular i_0Ai e o segmento elliptico i_0Bi), as grandezas F_c e J_c representarão respectivamente a parte $S(i_0Ai)$ da superficie conica $S(C)$, e a projecção $Ci_0B'i$ da parte $S(i_0Bi) = G_c$ da superficie conica $S(E)$.

Passemos a exprimir F_c e J_c ou G_c em funcção das grandezas dadas ou conhecidas, e supponhamos que estas são: o raio $CA = R$ da base (C) do cone $S(C)$, a grandeza da geratriz $SA = L$; e as grandezas das geratrizes $SB_0 = \lambda_0$ e $SB = \lambda$ do cone $S(E)$ (suppondo ser $\lambda_0 > \lambda$).

Se sobre B'_0B' , como diametro, descrevermos um semi-circulo B'_0gB' , e prolongarmos a corda i_0i até cortar este em g , sabemos que as areas do semi-segmento elliptico $mB'i$ e do semi-segmento circular $mB'g$ estão entre si como as semi-cordas mi e mg , d'onde

$$J_c = 2 \cdot CB'i = 2 \cdot \frac{mi}{mg} \times CB'g \dots \dots \dots (10).$$

As areas do semi-sector circular $C_1B'g$ e do triangulo C_1Cg , tendo por expressões

$$\frac{1}{2} \cdot C_1g \times \widehat{B'g} \text{ e } \frac{1}{2} \cdot C_1C \times mg$$

a expressão (10) da area da superficie $CB'g$ póde tomar a fórma

$$\frac{1}{2} (C_1g \times \widehat{B'g} - C_1C \times mg)$$

ou

$$\frac{1}{2} [C_1B' \times \widehat{B'g} - (C_1B' - CB') mg]$$

e por conseguinte teremos

$$J_c = \frac{mi}{mg} [C_1B' \times \widehat{B'g} - (C_1B' - CB') mg] \dots (11).$$

Pelo ponto B tire-se a recta BB''_0 paralela a A_0A , e sejam C_0 , B_1 e B''_0 os pontos em que esta recta encontra as rectas SC , SA_0 e $B_0B'_0$: então a comparação dos triangulos CA_0S e $B'_0A_0B_0$; e dos triangulos CAS e C_0BS , dará as relações

$$\frac{B'_0C}{A_0C} = \frac{SB_0}{SA_0} \text{ e } \frac{CB'}{CA} = \frac{SB}{SA}$$

d'onde

$$C_1B' = \frac{B'_0C + CB'}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CA}{SA} (B_0S + SB) \dots (12)$$

e portanto

$$B'_0C = \frac{R}{L} \cdot \lambda_0 \dots (13), \quad CB' = \frac{R}{L} \cdot \lambda \dots (14)$$

e

$$C_1B' = \frac{1}{2} \frac{R}{L} (\lambda_0 + \lambda) \dots (15).$$

Pela comparação dos triangulos B_0A_0m e B_0B_1B , teremos

$$A_0m = \frac{SB_0 - SA_0}{SB_0 - SB_1} \times B_1B \dots \dots \dots (16)$$

ou

$$A_0m = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 - L}{\lambda_0 - \lambda} \cdot \lambda \dots \dots \dots (17)$$

e por conseguinte

$$mA = A_0A - A_0m = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{L - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \cdot \lambda_0 \dots \dots (18)$$

Ora é

$$-mi^2 = mA \times A_0m, \text{ ou } mi = \sqrt{mA \times m A_0}$$

logo

$$mi = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 - L) (L - \lambda)} \dots \dots (19)$$

Similantemente, pela comparação dos triangulos $B_0B'm$ e $B_0B''_0B$; e dos triangulos $B_0B'_0A_0$ e $B_0B''_0B_1$, acharemos

$$B'_0m = \frac{SB'_0 - SA_0}{SB_0 - SB_1} \times B'_0B' \dots \dots \dots (20)$$

ou

$$B'_0m = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} (\lambda_0 - L) \dots \dots \dots (21)$$

d'onde

$$mB' = B'_0B' - B'_0m = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} (L - \lambda) \dots \dots (22)$$

e logo

$$mg = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \sqrt{(\lambda_0 - L) (L - \lambda)} \dots \dots (23)$$

Representando por $\frac{1}{2}B$ o arco do circulo $B'g$, e por ω o angulo $B'C_1g$, ou a inclinação de C_1g a respeito de C_1B' , teremos

$$B = \frac{\omega}{180} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (24).$$

Para calcular ω podemos recorrer á funcção trigonometrica

$$\operatorname{tg} \omega = 2 \cdot \frac{\sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)}}{\lambda_0 + \lambda - 2 \cdot L} \dots \dots \dots (25)$$

ou

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{2}{\lambda_0 - \lambda} \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \dots \dots \dots (26).$$

Em virtude das expressões achadas, a fórmula (11) tornar-se-á

$$J_c = \frac{R^2}{L^2} \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left[\frac{L}{R} \cdot \frac{B}{2} - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] \dots \dots \dots (27)$$

ou

$$J_c = \frac{R^2}{L^2} \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left[\frac{\omega}{360} \cdot \pi \cdot (\lambda_0 + \lambda) - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] (28)$$

e portanto

$$G_c = \frac{R}{L} \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left[\frac{L}{R} \cdot \frac{B}{2} - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] \dots \dots \dots (29)$$

ou

$$G_c = \frac{R}{L} \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left[\frac{\omega}{360} \cdot \pi \cdot (\lambda_0 + \lambda) - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] (30).$$

Designando por A o arco de circulo $i_0 A i$, e por σ angulo A C i, ou a inclinação de C i a respeito de C A, será

$$A = \frac{\sigma}{90} \pi \cdot R \dots \dots \dots (31)$$

sendo o valor de σ dado pela funcção trigonometrica

$$\operatorname{tg} \sigma = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 - L) (L - \lambda)}}{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L (\lambda_0 + \lambda)} \dots \dots \dots (32)$$

ou

$$\operatorname{sen} \sigma = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 - L) (L - \lambda)}}{L (\lambda_0 - \lambda)} \dots \dots \dots (33)$$

Assim teremos

$$F_c = \frac{1}{2} \cdot L \cdot A = \frac{\sigma}{180} \cdot L \cdot \pi R \dots \dots \dots (34)$$

Substituindo os valores de F_c , J_c e G_c nas fórmulas (8) e (9), vem

$$Q_c = \frac{1}{2} \cdot L \cdot A - \frac{R}{L} \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left[\frac{L}{R} \cdot \frac{B}{2} - \sqrt{(\lambda_0 - L) (L - \lambda)} \right] (35)$$

ou

$$Q_c = \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma}{180} \pi \cdot L^2 - \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left(\frac{\omega}{360} \pi (\lambda_0 + \lambda) - \sqrt{(\lambda_0 - L) (L - \lambda)} \right) \right] (36)$$

Taes são as fórmulas que exprimem a area lateral da cunha $i_0 A i B$ situada acima da secção recta (C), ou da cunha $i_0 A_0 i B_0$ situada abaixo d'esta secção, segundo fôr $F_c >$ ou $<$ G_c .

Se em relação á segunda cunha conica contarmos as inclinações de $C_1 g$ e C i, a partir dos segmentos $C_1 B'_0$ e CA_0 , no sentido opposto ao das inclinações relativas á primeira, as grandezas F_c e G_c ,

virão affectas do signal —, de modo que tornando os signaes explicitos nas fórmulas geraes (35) e (36), teremos

$$Q_c = \pm \frac{1}{2} \cdot L \cdot A \mp \frac{R}{L} \left[\frac{L}{R} \cdot \frac{B}{2} \mp \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] \dots (37)$$

e

$$Q_c = \pm \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma}{180} \pi \cdot L^2 - \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left(\frac{\omega}{360} \pi (\lambda_0 + \lambda) \mp \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right) \right] (38)$$

ou [form. (33)]

$$Q_c = \pm \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma}{180} \pi \cdot L^2 - \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \left(\frac{\omega}{360} \pi (\lambda_0 + \lambda) \mp \frac{L(\lambda_0 - \lambda)}{2\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}} \cdot \text{sen.} \right) \right] (39).$$

(Continúa).

QUESTÃO PROPOSTA N.º 13

Determinar o vertice commum de dois triangulos symetricamente semelhantes, de bases dadas A D e B C.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SOBRE A EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

POR

L. F. MARREAS FERREIRA

A equação geral de segundo grau póde-se escrever:

$$+ w^2 = \pm p w \pm q;$$

ou:

$$1 = \pm \frac{p}{w} \pm \frac{q}{w^2}.$$

Esta equação comprehendida na fórmula:

$$1 = \pm \frac{x}{t} \pm \frac{y}{t'},$$

é a d'uma recta, que passa por um dos pontos ($\pm p, \pm q$), tendo os traços sobre os dois eixos coordenados a distancias w e w^2 da origem.

É claro que podemos abstrahir n'estas considerações da unidade linear, indispensavel na construcção geometrica.

Fazendo $t' = t^2$ e desdobrando aquella fórmula nas duas seguintes:

$$1 = + \frac{y}{t^2} \pm \frac{x}{t} \dots \dots \dots (a)$$

$$1 = - \frac{y}{t^2} \pm \frac{x}{t} \dots \dots \dots (b)$$

derivem-se estas em ordem a t , para determinar os envolveros das rectas que representam; obtem-se:

$$t = \pm \frac{2y}{x},$$

sendo em (a) o signal de $\frac{2y}{x}$ contrario ao de $\frac{x}{t}$ e em (b) os dois signaes iguaes.

O envolvero de (a) é uma parabola de segundo grau, tendo o eixo dirigido no sentido dos YY negativos, dada por $x^2 = -4y$; o de (b) é uma curva identica, de eixo dirigido segundo os YY positivos, dada por $x^2 = +4y$.

Os dois logares geometricos são tangentes ao eixo dos XX na origem das coordenadas, podendo ser estas obliquas ou orthogonaes, coincidindo os eixos das parabolas com o dos YY no caso de coordenadas orthogonaes, tendo direcções parallelas e symetricas com a d'aquelle eixo no outro caso.

Resolver uma equação de segundo grau, corresponde portanto a tirar por um ponto exterior a uma parabola as duas tangentes; as distancias á origem dos seus traços sobre um dos eixos representam as duas raizes; no outro eixo obtem-se os quadrados d'estas. A resolução é um problema geometrico, que requer apenas o emprego da regra e compasso.

Reciprocamente, tirar uma tangente a uma parabola corresponde a resolver uma equação de segundo grau, em que os parametros exprimem as coordenadas do ponto dado, em relação a um systema de eixos, formado por uma tangente e diametro conjugado, tomando-se por unidade linear o quarto do parametro da parabola.

Supponhamos que as coordenadas do ponto de passagem das tangentes são ambas positivas: $(+p, +q)$, applicando-se um racio-cinio identico a qualquer variação de signaes, ha a considerar n'esta situação do ponto tres posições distinctas para as tangentes, sendo em todas ellas as distancias á origem dos traços sobre o eixo dos YY os quadrados das respectivas raizes.

Vê-se assim, que os signaes dos termos nos segundos membros podem provir, não só da posição do ponto de passagem, como

tambem de t e t^2 ; assim para a posição de M e numeração indicada pela fig. 4.^a, est. 3.^a, teremos :

1.^a tangente

$$\frac{+y}{+t^2} + \frac{+x}{+t} = 1$$

2.^a tangente

$$\frac{+y}{-t^2} + \frac{+x}{+t} = 1$$

3.^a tangente

$$\frac{+y}{+t^2} + \frac{+x}{-t} = 1.$$

A 1.^a e 3.^a correspondem á parabola de eixo dirigido segundo os YY negativos; a 2.^a á outra. Trocando y em x nas fórmulas, obteríamos os quadrados das raizes sobre o eixo dos XX.

A todos os pontos da tangente á parabola corresponde uma raiz commum, variando a segunda raiz d'um ponto para outro, resultado que se obtem directamente pela analyse da equação de segundo grau; os parametros correspondentes a uma raiz commum variam segundo as coordenadas d'uma recta. Os coefficients da equação ficam definidas logo que sejam dadas duas raizes, porque o ponto (p, q) corresponde á intersecção de duas rectas.

Duas parabolae, que admittem a mesma tangente, de eixos parallelos, admittem igualmente um diametro commum, e sendo os parametros iguaes, as coordenadas d'um ponto comprehendido entre as duas curvas, em relação á tangente e diametros communs, constituem os coefficients d'uma equação de segundo grau, cujas raizes podem ser fornecidas por qualquer das parabolae; segue-se portanto que as quatro tangentes, que do ponto se podem tirar, determinarão traços sobre os eixos situados, dois a dois, a distancias iguaes da origem, que é o ponto de tangencia das curvas.

Dado o ponto sobre a tangente commum, se por elle tirarmos as duas tangentes restantes ás parabolae, devem ellas produzir sobre o diametro conjugado traços situados a iguaes distancias da orig m.

Varios outros processos geometricos levam ainda á construcção das raizes :

a) $x(x \pm p) = +q$ corresponde á intersecção da hyperbole $xy = q$ com a recta $y = x \pm p$.

b) Conhecida a somma ou differença das quantidades x e $x \pm p$, bem como o seu producto, podemos determinal-as, interceptando uma hyperbole por uma ellipse, ou hyperbole.

c) Podemos fazer a determinação, baseados na propriedade da ordenada d'um ponto da circumferencia em relação a um dos diâmetros, quando fôr dada a somma, e no valor d'um catheto do triangulo rectangulo, expresso na hypothenusa e sua projecção sobre ella, sendo conhecida a differença.

d) A equação escripta d'este modo: $x^2 \pm px = qu$, sendo u a unidade linear, exprime uma equivalencia de areas, e reduz-se a sua resolução a interceptar uma hyperbole por uma recta, como indica a fig. 5.^a, em que se tomou $AB = p$, perpendicular a $AC = \frac{qu}{p}$; sendo $x(x+p) = q$ devemos ter: $\alpha\gamma \times \alpha C = DC \times DB = qu$.

Construa-se AT , lado do quadrado equivalente a BC ; $At = AT$; levante-se $tO = \frac{1}{2} AB$, perpendicular a AB , tire-se AO , teremos finalmente: $Ar = AC = \alpha$; $As = A\gamma = \alpha C$ e as coordenadas de α serão as raizes.

Bz é perpendicular á bissetriz dos eixos orthogonaes, assymptotas da hyperbole, que ella intercepta em α e no ponto symetrico d'este em relação ao eixo imaginario.

A interpretação (d) dá logar a varias construcções, reduzindo-se todas á intersecção d'aquelles dois logares geometricos.

e) A equação sob a fórmula: $x^2 u \pm px = q$, corresponde á somma ou differença de duas rectas.

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Continuação)

5. *Discussão.* — Quando o plano π_e passar pelo centro C da base do cone dado, ou fôr $\sigma = \pm 90^\circ$, a fórmula (32) dá

$$2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda) = 0 \dots \dots \dots (40)$$

d'onde

$$\lambda_0 = \frac{L \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda - L} \text{ ou } \lambda = \frac{L \cdot \lambda_0}{2 \cdot \lambda_0 - L}$$

Substituindo λ_0 , por exemplo, pelo seu valor, nas expressões de ω , B, J_c , G_c , A, F_c e Q_c , teremos

$$\text{tg } \omega' = \frac{\sqrt{L(2 \cdot \lambda - L)}}{L - \lambda} \dots \dots \dots (25)'$$

$$\text{sen } \omega' = \frac{\sqrt{L(2 \cdot \lambda - L)}}{\lambda} \dots \dots \dots (26)'$$

$$B' = \frac{\omega'}{90} \cdot \frac{\lambda^2}{L(2 \cdot \lambda - L)} \pi \cdot R \dots \dots \dots (24)'$$

$$J'_c = \frac{R^2}{L^2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{L}{2 \cdot \lambda - L}} \left[\frac{L}{R} \cdot \frac{B'}{2} - (L - \lambda) \sqrt{\frac{L}{2 \cdot \lambda - L}} \right] \quad (27)'$$

ou

$$J'_c = \frac{R^2}{L^2} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{L}}{2 \cdot \lambda - L} \left[\frac{\omega'}{180} \cdot \frac{\pi \cdot \lambda^2}{\sqrt{2 \cdot \lambda - L}} - (L - \lambda) \sqrt{L} \right] \quad (28)'$$

$$G'_c = \frac{R}{L} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{L}}{2 \cdot \lambda - L} \left[\frac{\omega'}{180} \cdot \frac{\pi \cdot \lambda^2}{\sqrt{2 \cdot \lambda - L}} - (L - \lambda) \sqrt{L} \right] \quad (30)'$$

$$A' = \pi \cdot R \dots \dots \dots (31)$$

$$F'_c = \frac{1}{2} L \cdot \pi R \dots \dots \dots (34)'$$

e por conseguinte

$$Q'_c = \frac{R}{L} \left[\frac{\pi \cdot L^2}{2} - \lambda \cdot \frac{\sqrt{L}}{2 \cdot \lambda - L} \left(\frac{\omega'}{180} \cdot \frac{\pi \cdot \lambda^2}{\sqrt{2 \cdot \lambda - L}} - (L - \lambda) \sqrt{L} \right) \right] \quad (36)'$$

ou (tornando explicitos os signaes de σ' e ω')

$$Q'_c = \pm \frac{R}{L} \left[\frac{\pi \cdot L^2}{2} - \lambda \cdot \frac{\sqrt{L}}{2 \cdot \lambda - L} \left(\frac{\omega'}{180} \cdot \frac{\pi \cdot \lambda^2}{\sqrt{2 \cdot \lambda - L}} \mp (L - \lambda) \sqrt{L} \right) \right] \quad (38)'$$

Consideremos ainda o caso de ser o plano π_c tangente á secção recta (C) n'um dos extremos do diametro $A_0 A$.

Quando o plano π_c fôr tangente em A_0 , será $\sigma = \omega = +180^\circ$ ou $\lambda_0 = L$, d'onde

$$B'' = \frac{L + \lambda}{L} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (24)''$$

$$J''_c = R \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \cdot \frac{B''}{2} \dots \dots \dots (27)''$$

ou

$$J''_c = \frac{1}{2} \frac{R}{L} (L + \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (28)''$$

$$G''_c = \frac{1}{2} (L + \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (30)''$$

$$A'' = 2 \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (31)''$$

$$F''_c = L \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (34)''$$

e logo

$$Q''_c = \left[L - \frac{1}{2} (L + \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \right] \pi \cdot R \dots \dots \dots (36)''$$

Se o plano π_e é tangente em A, será $\sigma = \omega = -180^\circ$, ou $\lambda = L$, d'onde

$$B''' = -\frac{\lambda_0 + L}{L} \pi \cdot R \dots \dots \dots (24)'''$$

$$J'''_c = -R \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} \frac{B'''}{2} \dots \dots \dots (27)'''$$

ou

$$J'''_c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} (\lambda_0 + L) \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (28)'''$$

$$G'''_c = -\frac{1}{2} (\lambda_0 + L) \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (30)'''$$

$$A''' = -2 \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (31)'''$$

$$F'''_c = -L \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (34)'''$$

e logo

$$Q'''_c = -\left[L - \frac{1}{2} (\lambda_0 + L) \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}} \right] \pi \cdot R \dots \dots \dots (36)'''$$

*

Caso da secção parabolica

6. Sendo o plano secante π_e paralelo a alguma das duas geratrizes SA_0 e SA , sabemos que a secção (E) e a sua projecção (E') , que agora representaremos por (E_∞) e (E'_∞) , são parabolae, tendo esta ultima para fóco o centro C da base do cone dado.

Para mais clareza nas referencias, que fizermos a estas figuras, que vamos considerando, representaremos por (f_1) a figura que se refere ao caso geral (n.º 2), e por (f_2) e (f_3) as que se referem á cunha no caso da secção elliptica (n.º 4), e a este caso que passamos a considerar, etc.

Supponhamos, pois, que o plano π_e é paralelo á geratriz SA_0 , ou que é $\lambda_0 = \infty$. N'este caso os pontos B_0, B'_0, C_1 e g (fig. f_2), passarão a achar-se a distancia infinita, e os pontos B e B' (fig. f_3) serão os vertices das parabolae (E_∞) e (E'_∞) sendo agora $mB' = \frac{1}{2}mA$, por ser isosceles o triangulo mBA .

Consideremos o lado $y'_0 y'$ do polygono P'_e inscripto na parabola (E'_∞) , á qual tiraremos nos vertices y_0 e y' d'este, as tangentes $y'_0 t_0$ e $y' t$, que se cortam em θ_0 , encontrando o eixo $B'm$ em t_0 e t . Parallelamente a este eixo conduziremos pelo ponto θ_0 a recta $\theta_0 \theta$, que passará pelo meio μ'_0 da corda $y'_0 y$ (o que, como sabemos, tambem se demonstra elementarmente). Emfim, dos pontos y'_0, y' e μ'_0 baixemos sobre este eixo as perpendiculares $y'_0 y''_0, y' y''_0$ e $\mu'_0 \mu''_0$, que respectivamente o encontram em y''_0, y''_0 e μ''_0 . Agora comparemos o trapezio $y'_0 y'_0 y''_0 y''_0$ com o triangulo correspondente $\theta_0 t_0 t$. Ora temos que é

$$B' t_0 = y''_0 B' \text{ e } B' t = y''_0 B'$$

d'onde

$$t t_0 = y''_0 y''_0;$$

e sendo a recta $\mu'_0 \mu''_0$, que une os meios dos lados não parallelos do trapezio, igual á altura do triangulo, será a área do trapezio o dobro da do triangulo. Para os outros lados da parte do polygono P'_e , inscripto no semi-segmento parabolico $mB'i$, teremos outros tantos trapezios, com os seus triangulos correspondentes, e como se pôde repetir o mesmo raciocinio, que fizemos anteriormente, teremos que a somma das áreas dos trapezios fica sempre igual ao dobro da somma das áreas dos triangulos.

Em vista d'isto, a tangente $i T$, no ponto i cortando o eixo $B' m$ em T , teremos que o limite da primeira somma será a área do semi-segmento $m B' i$, e o limite da segunda a rea $T i y'_0 y' \dots B'$: d'onde resulta ser a área $m B' i$ igual a dois terços da área do triangulo total $i T m$, logo

$$m B' i = \frac{2}{3} \cdot m i \times m B'$$

ou

$$i_0 B' i = \frac{3}{4} \cdot m i \times m B' \dots \dots \dots (41)$$

e portanto

$$C i_0 B' i = \frac{4}{3} \cdot m i \times m B' + m i \times C m$$

ou

$$J_{c_\infty} = \frac{1}{3} \cdot m i (4 \cdot m B' + 3 \cdot C m) \dots \dots \dots (42)$$

devendo attender-se aos signaes dos segmentos $m B'$ e $C m$.

Fazendo-se $\lambda_0 = \infty$, nas fórmulas relativas  secao elliptica (n.o 4) (que não se tornam infinitas para este valor de λ_0), teremos

$$C B' = \frac{R}{L} \cdot \lambda \dots \dots (14)_\infty, \quad A_0 m = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \lambda \dots \dots (17)_\infty,$$

$$m A = 2 \frac{R}{L} (L - \lambda) \dots \dots \dots (18)_\infty,$$

$$m i = 2 \cdot \frac{R}{L} \sqrt{\lambda(L - \lambda)} \dots (19)_\infty, \quad m B' = \frac{R}{L} (L - \lambda) \dots (22)_\infty,$$

$$A_\infty = \frac{\sigma_\infty}{90} \pi \cdot R \dots (31)_\infty, \quad \text{tg } \sigma_\infty = 2 \frac{\sqrt{\lambda(L - \lambda)}}{2 \cdot \lambda - L} \dots (32)_\infty,$$

$$\text{sen } \sigma_\infty = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda(L - \lambda)}}{L} \dots \dots \dots (33)_\infty,$$

$$F_{c_\infty} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot A_\infty = \frac{\sigma_\infty}{180} \cdot L \cdot \pi R \dots \dots (34)_\infty,$$

e portanto

$$C m = \frac{m i}{\operatorname{tg} \sigma_{\infty}} = \frac{R}{L} (2 \cdot \lambda - L) \dots \dots \dots (43)$$

ou

$$C m = C A - m A = C B' - m B' = \frac{R}{L} (2 \cdot \lambda - L) \dots \dots (44).$$

Substituindo na fórmula (42) os valores de $m i$, $m B'$ e $C m$, teremos

$$J_{c_{\infty}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2}{L^2} (2 \cdot \lambda + L) \sqrt{\lambda(L-\lambda)} \dots \dots \dots (45)$$

e acharemos igualmente

$$G_{c_{\infty}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L} (2 \cdot \lambda + L) \sqrt{\lambda(L-\lambda)} \dots \dots \dots (46)$$

logo

$$Q_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot A_{\infty} - \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L} (2 \cdot \lambda + L) \sqrt{\lambda(L-\lambda)} \dots \dots (47)$$

ou

$$Q_{c_{\infty}} = \left[\frac{\sigma_{\infty}}{180} \cdot \pi L^2 - \frac{2}{3} (2 \cdot \lambda + L) \sqrt{\lambda(L-\lambda)} \right] \dots \dots (48).$$

Observação. — Como sabemos, estas fórmulas podem-se obter directamente partindo da fig. f_3 .

7. *Caso particular.* — Quando o plano secante π_c passar pelo centro C da base do cone, ou fôr $\sigma_{\infty} = +90^\circ$, a fórmula (32) $_{\infty}$ dá

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot L$$

d'onde

$$C B' = m B' = \frac{1}{2} \cdot R, \quad A_0 m = m A = m i = R, \quad C m = 0,$$

$$A'_{\infty} = \pi R, \quad F_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \pi R, \quad J'_{c_{\infty}} = \frac{2}{3} \cdot R^2, \quad G'_{c_{\infty}} = L \cdot R$$

e por conseguinte

$$Q'_{c_{\infty}} = \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) L.R. \dots \dots \dots (48)'$$

S. Observação. — Não trataremos do caso de ser $\lambda = \infty$, ou de ser o plano secante π_e paralelo á geratriz SA, por chegarmos a resultados perfeitamente identicos.

Caso da secção hyperbolica

9. Consideremos o caso da secção (E) e da sua projecção (E') (fig. f_2) serem hyperboles, que agora designaremos por ($^{\infty}E_{\infty}$) e ($^{\infty}E'_{\infty}$) (fig. f_4), e é claro que um dos focos d'esta ultima hyperbole será o centro C da base (C) do cone dado.

O plano π_e encontrará então ou o prolongamento da geratriz SA₀, ou o da geratriz SA: o que corresponde a suppor respectivamente negativo o valor de λ_0 ou de λ .

Supponhamos, pois, que o plano secante corta o prolongamento de SA₀. Então (como no caso da secção parabolica) considerando a fig. f_4 como a transformada da fig. f_2 , relativa ao caso da secção elliptica, para esta nova posição do plano π_e , é evidente que o ponto B ficará entre S e A, e o ponto B₀ no prolongamento de SA₀, ou será SB₀ = - λ_0 e SB = + λ ; e os pontos B₀ e B da curva ($^{\infty}E_{\infty}$), e os pontos B'₀ e B' da curva ($^{\infty}E'_{\infty}$) serão os seus vertices.

Assim se pozermos - λ_0 em lugar de + λ_0 nas fórmulas relativas á secção elliptica (n.º 4) (que não se tornam imaginarias para este valor de λ_0) teremos

$$B'_0 C = -\frac{R}{L} \cdot \lambda_0 \dots \dots \dots (13)_{\infty}, \quad C B' = \frac{R}{L} \cdot \lambda \dots \dots \dots (14)_{\infty},$$

$$C_1 B' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} (\lambda_0 - \lambda) \dots \dots \dots (15)_{\infty},$$

$$A_0 m = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + L}{\lambda_0 + \lambda} \cdot \lambda \dots \dots \dots (17)_{\infty},$$

$$m A = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{L - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} \cdot \lambda_0 \dots \dots \dots \infty (18)_{\infty},$$

$$m i = 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\lambda_0 + \lambda} \sqrt{\lambda_0 \lambda (\lambda_0 + L) (L - \lambda)} \dots \dots \dots \infty (19)_{\infty},$$

$$B'_0 m = - \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} (\lambda_0 + L) \dots \dots \dots \infty (21)_{\infty},$$

$$m B' = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} (L - \lambda) \dots \dots \dots \infty (22)_{\infty},$$

$$m g = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} \sqrt{(\lambda_0 + L) (L - \lambda)} \dots \dots \dots \infty (23)_{\infty},$$

$$\infty A_{\infty} = \frac{\infty \sigma_{\infty}}{180} \cdot \pi R \dots \dots \dots \infty (31)_{\infty},$$

$$\text{tg}^{\infty} \sigma_{\infty} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 + L) (L - \lambda)}}{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L (\lambda_0 - \lambda)} \dots \dots \dots \infty (32)_{\infty},$$

$$\text{sen}^{\infty} \sigma_{\infty} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 + L) (L - \lambda)}}{L (\lambda_0 + \lambda)} \dots \dots \dots \infty (33)_{\infty},$$

$$\infty F_{\infty} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \infty A_{\infty} = \frac{\infty \sigma_{\infty}}{180} \cdot L \cdot \pi R \dots \dots \dots \infty (34)_{\infty}.$$

Achando-se o ponto medio m da corda I ou $i_0 i$ entre C e A , é claro que segundo o angulo $A m B_0$, comprehendido entre os angulos $A A_0 S$ e $A m S$, fôr menor, igual ou maior do que 90° , assim teremos respectivamente λ_0 maior, igual ou menor do que λ .

Quando o referido angulo $A m B_0$, que designaremos por θ , variar entre o angulo $A_0 m S$ e o angulo $A_0 A S$, o segmento λ será sempre maior do que λ_0 e tornar-se-á negativo.

Em vista, pois, das variações da inclinação θ do plano π_c a respeito do plano π_c da base (C) do cone dado, os segmentos, angulos e linhas trigonometricas tomarão os devidos signaes, e as fórmulas que acabamos de obter, e que poderíamos tambem deduzir directamente da fig. f_4 , confirmarão mais uma vez a generalidade das fórmulas que deduzimos para nos servirem de base em todo este nosso estudo.

Agora passaremos a occuparmo-nos sómente do caso particular de ser $\theta = 90^\circ$, para não deixarmos de tractar sempre elementarmente todos os pontos d'este estudo.

Com effeito, para determinar a área da superficie lateral da cunha (analogamente ao que fizemos no caso da secção elliptica), teriamos de descrever sobre $B' B'_0$, como *eixo focal uma hyperbole equilatera*, que cortaria a corda I ou $i_0 i$ nos pontos g' e g , e calcular a área do sector hyperbolico $C_1 g' B' g$. Depois de conhecida esta area, é que poderíamos obter a área do sector hyperbolico $C_1 i_0 B' i$ da hyperbole ($^\infty E'_\infty$), d'onde deduziríamos a área de $C i_0 B' i$ ou $^\infty J_{c_\infty}$, e portanto a área $^\infty G_{c_\infty}$ da parte $S i_0 B i$ da superficie conica S (C); e assim chegaríamos á expressão da área lateral pedida $^\infty Q_{c_\infty}$.

10. Caso particular.—Sendo, pois, $\theta = 90^\circ$, $^\infty J_{c_\infty}$ representará simplesmente a área do triangulo $i_0 C i$, e teremos

$$^\infty J'_{c_\infty} = \frac{1}{2} \cdot m i \times C m$$

ou

$$^\infty G'_{c_\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R} \times m i \times C m.$$

Ora se nas fórmulas anteriormente obtidas fizermos $\lambda_0 = \lambda$, acharemos

$$B'_0 C = -\frac{R}{L} \cdot \lambda, \quad C B' = \frac{R}{L} \cdot \lambda, \quad C_1 B' = 0, \quad A_0 m = \frac{R}{L} (L + \lambda),$$

$$m A = \frac{R}{L} (L - \lambda), \quad m i = \frac{R}{L} \sqrt{L^2 - \lambda^2}, \quad B'_0 m = 0, \quad m B' = 0,$$

$$m g = 0, \quad \operatorname{tg}^\infty \sigma'_{c_\infty} = \frac{\sqrt{L^2 - \lambda^2}}{\lambda}, \quad \operatorname{sen}^\infty \sigma'_{c_\infty} = \frac{\sqrt{L^2 - \lambda^2}}{L},$$

logo

$$Q'_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} [L \cdot A'_{\infty} - \lambda \sqrt{L^2 - \lambda^2}] \dots \dots \dots (49)$$

ou

$$Q'_{c_{\infty}} = \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma_{\infty}}{180} \pi \cdot L^2 - \frac{\lambda}{2} \sqrt{L^2 - \lambda^2} \right] \dots \dots \dots (50).$$

§ II

TRONCO CONICO

11. Para determinar a área pedida empregaremos tanto o *methodo directo* como o *indirecto*, por nos parecerem ambos dignos de se estudarem em especial.

Methodo directo. — Se suppozermos que o plano secante π_e , relativo ao caso da secção elliptica (n.º 4) (fig. f_2), se desloca de modo que a sua intersecção I com o plano π_c se torna *corda* ou *secante ideal* da secção recta (C), ou da secção obliqua (E), teremos a fig. f_3 relativa ao caso do tronco conico, de que nos vamos occupar.

Representemos por $D_0 D$ o diametro da base ou secção recta (C) do cone dado, conduzido perpendicularmente ao diametro $A_0 A$; por $E_0 E$ e $E'_0 E$ os eixos menores da secção elliptica (E) e da sua projecção (E'); por M_1 o centro de (E), e por M o ponto de intersecção de $B_0 B$ com o eixo SC do cone.

Em vista d'isto teremos evidentemente

$$J_c = \pi C_1 E' \times C_1 B' \dots \dots \dots (51).$$

Para calcular $C_1 E'$ imaginaremos a secção recta (C_{m_1}) determinada pelo plano π_{m_1} , conduzido pelo eixo menor ($E_0 E$) da secção (E), e que corta as geratrizes rectas SA_0 , SA e o eixo SC do cone nos pontos N_0 , N e M_0 .

A projecção da secção recta (C_{m_1}) será, pois, o circulo $N'_0 E'_0 N' E'$, que designaremos por (C'_{m_1}), que terá tambem para corda o eixo

menor $E'_0 E'$ d'esta ellipse: por quanto $B'_0 C$ e $C B'$ são as projecções, em verdadeira grandeza, dos raios das secções rectas (C_{b_0}) e (C_b) conduzidas pelas vertices B_0 e B da ellipse (E); e a somma d'estes raios é evidentemente igual ao diametro $N_0 N = N'_0 N'$ da secção recta (C_{m_1}) equidistante das duas outras (C_{b_0}) e (C_b).

Assim teremos

$$- \overline{C_1 E'}^2 = N'_0 C_1 \times C_1 N' \dots \dots \dots (52)$$

e como é

$$N' C_1 = C B' \text{ e } C_1 N' = B'_0 C$$

será

$$C_1 E' = \sqrt{C B'_0 \times C B'} \dots \dots \dots (53)$$

e portanto

$$J_c = \pi \times C_1 B' \sqrt{C B'_0 \times C B'} \dots \dots \dots (54).$$

Ora as expressões d'estes segmentos sendo evidentemente dados tambem pelas fórmulas (13), (14) e (15), que deduzimos para a cunha conica no caso da secção elliptica (n.º 4), teremos

$$J_c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} (\lambda_0 + \lambda) \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} (*) \dots \dots \dots (55)$$

(*) Ainda podemos calcular a área J_c da superficie da ellipse (E') (fig. f_5) empregando o mesmo meio de que nos servimos para a cunha conica (no caso da secção elliptica n.º 4), isto é, recorrendo á relação entre as semi-cordas $m i$ e $m g$ (fig. f_2), relativas a esta ellipse (E') e ao circulo descripto sobre o seu eixo $B'_0 B'$ como diametro; muito embora sejam agora ideaes estas semi-cordas: por serem os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que L , ou negativos.

Assim teremos

$$J_c = \frac{m i}{m g} \pi C_1 B'^2$$

mas [n.º 4, fórmulas (15), (19) e (23)] é

$$C_1 B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} (\lambda_0 + \lambda) \text{ e } \frac{m i}{m g} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{\lambda_0 + \lambda}$$

logo

$$J_c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} (\lambda_0 + \lambda) \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}$$

q. e. d.

ou

$$J_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \cdot \pi R \dots \dots \dots (56)$$

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \cdot \pi R \dots \dots \dots (57)$$

$$F_c = L \cdot \pi \cdot R \dots \dots \dots (58)$$

e portanto

$$Q_c = \left[L - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \right] \pi R \dots \dots \dots (59)$$

ou, tornando explicitos os signaes de F_c e G_c

$$Q_c = \pm \left[L - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \right] \pi R \dots \dots \dots (60)$$

por quanto os factores $\pi \cdot R$ e $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \pi R$ de F_c e G_c obtêm-se fazendo $\sigma = \omega = \pm 90^\circ$, nas fórmulas (24) e (31), relativas á cunha conica (no caso da secção elliptica), e por conseguinte adoptar-se-á o signal superior ou inferior, segundo forem os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que o segmento L , isto é, conforme a secção elliptica (E) ficar acima ou abaixo do plano π_c da base (C) do cone dado.

Quando o plano π_c cortar a segunda *folha* do cone, ou a secção elliptica (E) estiver acima do vertice S d'este cone, ainda a fórmula geral (59) satisfaz: porque então os segmentos λ_0 e λ serão negativos, e tornando os signaes explicitos em relação a todos os casos, teremos

$$Q_c = \pm \left[L - \frac{\pm(\lambda_0 + \lambda)}{2 \cdot L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \right] \pi \cdot R \dots \dots \dots (61).$$

Methodo indirecto. — Se ne fórmula (39) [correspondente ao caso da secção elliptica (n.º 4)] fizermos $\sigma = \omega = \pm 180^\circ$, teremos

imediatamente a fórmula (60) relativa ao tronco conico, considerado como caso particular da cunha conica (*): por quanto esta transformação da fórmula (39) equivale a suppor que o plano secante π_e , depois de ser tangente em A_0 ou em A á base (C) do cone dado $S(C)$ (fig. f_2) (n.º 5), determinando uma das cunhas, cujas áreas designámos por Q''_c e Q'''_c , se desloca, tornando os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que o segmento L , ou negativos; d'onde resulta ser então a área θ_c do tronco considerado igual á somma d'uma d'estas áreas e da área d'um tronco determinado pelas duas secções rectas que representam respectivamente a base do referido cone e a d'uma d'estas cunhas.

12. Consideremos agora um tronco de cone de revolução determinado pelas duas secções obliquas (E_1) e (E_2) (fig. f_6), tendo para eixos focaes ou maiores ${}^1B_0 B_1$ e ${}^2B_0 B_2$, e tractemos de obter a expressão da área Q_c da sua superficie convexa.

Fazendo, pois, $S^1 B_0 = +L_0$, $S B_1 = +L$, $S^2 B_0 = \pm \lambda_0$ e $S B_2 = \pm \lambda$, as áreas lateraes dos troncos determinados pela secção recta (C) (correspondente ao segmento L) e por cada uma das duas secções obliquas consideradas, terão respectivamente para expressões

$$\left[L - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pm(\lambda_0 + \lambda)}{L} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda} \right] \pi R$$

e

$$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{L_0 + L}{L} \sqrt{L_0 \cdot L} - L \right] \pi R$$

(*) Considerando a fórmula (38), é evidente que no caso de ser $\lambda_0 < L$, ou $\lambda > L$, ou serem negativos os segmentos λ_0 e λ ; isto é, quando a cunha se transformar em tronco, esta expressão tomará a fórma

$$M \pm N \sqrt{-1} = 0$$

e simplesmente em virtude da theoria das expressões imaginarias acharemos ainda a fórmula (60).

Como sabemos, poderíamos tambem estudar a questão proposta na parte que envolve a consideração das quantidades imaginarias sob o ponto de vista da sua representação nas construcções geometricas; mas não nos occupamos agora d'esse estudo, por alterar a direcção elementar, que temos seguido, e por tencionarmos mais tarde tractar d'estas quantidades, ou, em geral, das quantidades complexas.

d'onde

$$Q_c = \frac{1}{2.L} [(L_0 + L) \sqrt{L_0.L} \mp (\lambda_0 + \lambda) \sqrt{\lambda_0.\lambda}] \pi R \dots (62).$$

No caso das bases (E_1) e (E_2) serem paralelas, teremos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{L_0}{L}$$

e logo

$$Q'_{c_e} = \frac{(L_0 + L) (L^2 \mp \lambda^2)}{2.L^2} \sqrt{\frac{L_0}{L}} \pi R \dots (63)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos)

$$Q''_{c_e} = \frac{(L_0 + L) (L - \lambda)}{2.L} \sqrt{\frac{L_0}{L}} \pi \cdot \frac{L + \lambda}{L} \cdot R \dots (64)$$

e

$$Q'''_{c_e} = \frac{L_0 + L}{2.L} \sqrt{\frac{L_0}{L}} \pi \cdot \frac{L^2 + \lambda^2}{L} \cdot R \dots (65).$$

13. Discussão. — Fazendo successivamente $\lambda_0 = L$ e $\lambda = L$ na fórmula (60), teremos, como casos particulares, as fórmulas (36)'' e (36)''' (relativas á cunha conica na hypothese da secção (E) ser uma ellipse).

Quando fôr $\lambda_0 = \lambda$, as fórmulas (59) e (63) dão

$$Q'_c = Q'_e = \left(L \mp \frac{\lambda^2}{L} \right) \pi R = \frac{L^2 \mp \lambda^2}{L} \pi R \dots (66)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos)

$$Q''_c = Q''_e = \frac{L - \lambda}{L} \pi \frac{L + \lambda}{L} \cdot R \dots (67)$$

e

$$Q'''_c = Q'''_e = \pi \frac{L^2 + \lambda^2}{L} \cdot R \dots \dots \dots (68).$$

São estas, pois, as expressões que correspondem a serem rectas as secções que limitam os troncos das duas *especies*.

Sendo *r* o raio da segunda base ou secção recta (*C_b*), teremos

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{r}{R}$$

e portanto [fórmula (66)]

$$Q'_c = Q'_e = \frac{L}{R} \pi (R^2 \mp r^2) \dots \dots \dots (66)'$$

ou

$$Q'_c = Q'_e = \frac{L \mp \lambda}{R \mp r} \pi (R^2 \mp r^2) \dots \dots \dots (66)''.$$

Considerando separadamente os troncos conicos de *primeira* e de *segunda especie*, teremos

$$Q''_c = Q''_e = (L - \lambda) \pi (R + r) \dots \dots \dots (69)$$

ou

$$Q''_c = Q''_e = (L + \lambda) \pi (R - r) \dots \dots \dots (70)$$

e

$$Q'''_c = Q'''_e = \frac{L + \lambda}{R + r} \pi (R^2 + r^2) \dots \dots \dots (71)$$

ou

$$Q'''_c = Q'''_e = \frac{L - \lambda}{R - r} \pi (R^2 + r^2) \dots \dots \dots (72)$$

e se representarmos por δ e ε respectivamente os apothemas ($L - \lambda$)

e $(L + \lambda)$ dos dois troncos considerados, ter-se-ão as fórmulas ordinarias

$$Q''_c = \delta \pi (R + r) \dots \dots \dots (69)'$$

e

$$Q'''_c = \varepsilon \pi \frac{R^2 + r^2}{R + r} \dots \dots \dots (71)'$$

Se fôr dada a semi-abertura $A_0 S C = \alpha$ do cone $S(C)$ será tambem

$$Q'_c = \pi (R^2 \mp r^2) \text{ sen } \alpha \dots \dots \dots (66)'''$$

(Continúa).

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 12 (*)

Per dimezzàre la BA, si costruiscia la $BE \hat{=} 2 \cdot BA$ (il che si fa descrivendo col centro A il semicircolo BCDE. $BA = BC = CD = DE$), poi sia $BA = BP = BP' = EQ$, $BE = BQ = EP = EP'$, $BA = PM$, $PQ = EM$, sarà $BM \hat{=} MA$. Se come sopra si costruisce $PR \hat{=} 2PB$, é anche $RP' = \frac{1}{2} BA = BM = MA$.

Padova, 24—11—79.

G. BELLAVITIS.

(*) Recebemos tambem uma solução do sr. Alfredo Schiappa Monteiro, que será publicada n'outro numero.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º I DO VOL. II
EMPREGANDO O METHODO DAS EQUIPOLLENCIAS
E SUA COMPARAÇÃO COM A SOLUÇÃO GEOMETRICA ELEMENTAR

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(1) Advertencia

1. Este problema, por nós proposto, foi elegantemente resolvido pelo sr. Craveiro Lopes, na pag. 46 do vol. II d'este Jornal, empregando um processo semelhante ao nosso: em vista do que, como já dissemos tambem a pag. 68 d'este volume, só mais tarde tencionavamos fazer algumas observações e apresentar os nossos estudos geraes sobre esta questão e sobre outras publicadas n'este mesmo Jornal.

Dando-se, porém, o caso do sabio professor Bellavitis publicar na pag. 49 d'este mesmo volume algumas observações sobre a solução do sr. Craveiro Lopes, não podemos deixar de dizer agora algumas palavras sobre esta questão em especial, começando por tomar a liberdade de resolver o problema proposto, empregando o *methodo das equipollencias*, ou a theoria geometrica das quantidades complexas, visto reconhecermos que este notavel mathematico não tenciona occupar-se da respectiva solução, recorrendo, como de costume, a este fecundissimo methodo, do qual, melhor do que ninguem, sabe tirar o maior partido possivel.

Para mais uma vez estabelecermos a comparação entre o methodo das equipollencias e o methodo synthetico elementar em questões d'esta ordem, tractaremos tambem da solução synthetica do problema proposto, e acompanharemos este estudo com as observações que julgamos indispensaveis.

Questão proposta

Sendo dados dois circulos (A) e (B), tendo uma corda real commum IJ, e um terceiro circulo qualquer (C), conduzir por um dos extremos I d'esta corda uma transversal IXYZ, de modo que corte os tres circulos (A), (B) e (C) respectivamente em pontos X, Y e Z, taes, que os segmentos XZ e XY estejam n'uma razão dada $\frac{m}{n}$.

Solução empregando as equipollencias

2. Primeira solução.— A condição do problema será expressa pela equipollencia

$$\frac{XZ}{XY} \simeq \frac{m}{n} \dots \dots \dots (1)$$

ou

$$XZ - \frac{m}{n} \cdot XY \simeq 0 \dots \dots \dots (2)$$

e tomando o ponto fixo I para origem dos segmentos XZ e XY, teremos

$$IZ - IX - \frac{m}{n} IY + \frac{m}{n} IX \simeq 0 \dots \dots \dots (3).$$

Pelo centro C do circulo (C), tire-se a secante I'CI'', que o córta nos pontos I' e I''; e pelos centros A e B dos circulos (A) e (B) tire-se a reça AB.

Representando por z e z' a grandeza e a inclinação d'uma das secantes procuradas IZ do circulo (C), será

$$CZ \simeq IZ - IC \simeq z \cdot e^u - IC \dots \dots \dots (4)$$

e pondo

$$CZ \simeq e^t \cdot I'C \dots \dots \dots (5)$$

teremos

$$z \cdot e^u - IC \simeq e^t \cdot I'C \dots \dots \dots (6).$$

Para eliminarmos ε^t multiplicaremos a equipollencia (6) pela sua conjugada

$$z \cdot \varepsilon^u - \text{cj IC} \simeq \varepsilon^{-t} \cdot \text{cj IC} \dots \dots \dots (7)$$

e virá

$$z^2 - z(\varepsilon^u \cdot \text{cj IC} + \varepsilon^{-u} \cdot \text{IC}) \simeq (V' C)^2 - (\text{IC})^2 \dots \dots (8)$$

ou

$$z^2 - z(\varepsilon^u \cdot \text{cj IC} + \varepsilon^{-u} \cdot \text{IC}) \simeq -IV' \cdot IV'' \dots \dots (9)$$

por ser

$$(V' C - \text{IC})(V' C + \text{IC}) \simeq -IV' \cdot IV'' \dots \dots (10)$$

d'onde se tira

$$z \cdot \varepsilon^u \simeq \text{IZ} \simeq \varepsilon^{2 \cdot u} \cdot \text{cj IC} - \varepsilon^u \cdot \frac{IV' \cdot IV''}{z} + \text{IC} \dots \dots (11).$$

Podemos ainda ter a expressão de IZ em função de IC e da relação k entre $V' C$ e IC : porquanto será

$$\text{CZ} \simeq k \cdot \varepsilon^t \cdot \text{IC} \dots \dots \dots (5')$$

d'onde

$$z \cdot \varepsilon^u - \text{IC} \simeq k \cdot \varepsilon^t \cdot \text{IC} \dots \dots \dots (6)'$$

e portanto

$$z \cdot \varepsilon^u \simeq \text{IZ} \simeq \varepsilon^{2 \cdot u} \cdot \text{cj IC} + \varepsilon^u \cdot \frac{k^2 - 1}{z} (\text{IC})^2 + \text{IC} \dots \dots (11)'$$

Representando por x a grandeza da corda IX do circulo (A), teremos

$$\text{AX} \simeq \text{IX} - \text{IA} \simeq x \cdot \varepsilon^u - \text{IA} \dots \dots \dots (12)$$

e pondo

$$\text{AX} \simeq \varepsilon^{v'} \cdot \text{IA} \dots \dots \dots (13)$$

virá

$$x \cdot \varepsilon^u - \text{IA} \simeq \varepsilon^{v'} \cdot \text{IA} \dots \dots \dots (14).$$

Multiplicando esta equipollencia pela sua conjugada

$$x \cdot \varepsilon^{-u} - \text{cj IA} \simeq \varepsilon^{-v'} \cdot \text{cj IA} \dots \dots \dots (15)$$

obtem-se

$$x \cdot \varepsilon^u \simeq \text{IX} \simeq \varepsilon^{2 \cdot u} \cdot \text{cj IA} + \text{IA} \dots \dots \dots (16).$$

De modo analogo acharemos

$$\text{IY} \simeq \varepsilon^{2 \cdot u} \cdot \text{cj IB} + \text{IB} \dots \dots \dots (17).$$

*

Substituindo, pois, na equipollencia (3) os valores de IZ, IX e IY, vem

$$\varepsilon^{2.u} \left(c_j A C - \frac{m}{n} \cdot c_j A B \right) - \varepsilon^u \cdot \frac{II' \cdot II''}{z} + A C - \frac{m}{n} A B \simeq 0 \dots (18).$$

Tomando sobre AB um ponto L tal, que seja

$$A L \simeq \frac{m}{n} \cdot A B \dots \dots \dots (19)$$

teremos

$$A C - \frac{m}{n} \cdot A B \simeq A C - A L \simeq L C \dots \dots \dots (20)$$

e a equipollencia (18) tornar-se-á

$$\varepsilon^{2.u} \cdot c_j L C - \varepsilon^u \frac{II' \cdot II''}{z} + L C \simeq 0 \dots \dots \dots (21)$$

ou

$$\varepsilon^{2.u} \cdot c_j L C - \varepsilon^u \cdot \frac{1-k^2}{z} (IC)^2 + L C \simeq 0 \dots \dots \dots (21')$$

d'onde

$$\varepsilon^u \cdot c_j L C + \varepsilon^{-u} \cdot L C \simeq \frac{II' \cdot II''}{z} \dots \dots \dots (22)$$

ou

$$\varepsilon^u \cdot c_j L C + \varepsilon^{-u} \cdot L C \simeq \frac{1-k^2}{z} (IC)^2 \dots \dots \dots (23).$$

Se tomarmos a recta LC para origem das inclinações, teremos finalmente

$$z (\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}) \simeq \frac{II' \cdot II''}{L C} \dots \dots \dots (24)$$

ou

$$z \cdot \cos u \simeq \frac{II' \cdot II''}{2 \cdot L C} \dots \dots \dots (25).$$

Da equipollencia (24) ou da (25) resulta a seguinte construcção :

Tire-se, pelo ponto I, a recta $IZ_0 \simeq \frac{II' \cdot II''}{2 \cdot LC}$, que será parallela ao segmento LC e dirigida no mesmo sentido ou no sentido contrario d'este segmento, segundo os segmentos II' e II'' tiverem ou não o mesmo signal, e será então

$$IZ_0 \simeq z \cdot \cos u.$$

Por conseguinte a perpendicular $Z_0 Z' Z$ a IZ_0 no ponto Z_0 , cortará, em geral, o circulo (C) em dois pontos Z e Z', taes, que as rectas IZ e IZ' serão os dois valores de $z \cdot \epsilon^u$, e representarão, portanto, a direcção de duas transversaes, que resolvem o problema. Os segundos valores de z e u , correspondentes a IZ' represental-os-emos por z' e u' .

3. Segunda solução. — Se na equipollencia (11) substituirmos IC pelo seu valor equipollente $IL + LC$, teremos

$$IZ \simeq \epsilon^{2 \cdot u} \cdot c j IL + \epsilon^{2 \cdot u} \cdot c j LC - \epsilon^u \cdot \frac{II' \cdot II''}{z} + LC + IL \simeq 0 \dots (26)$$

e em virtude da equipollencia (21) será

$$IZ \simeq \epsilon^{2 \cdot u} \cdot c j IL + IL \simeq z \cdot \epsilon^u \dots (27)$$

d'onde

$$IZ - IL \simeq LZ \simeq \epsilon^{2 \cdot u} \cdot c j IL \dots (28)$$

e sendo

$$\text{inc LZ} = 2 \cdot u - \text{inc IL} \dots (29)$$

teremos

$$\text{inc LZ} + \text{inc IL} = 2 \cdot u = 2 \cdot \text{inc IZ} \dots (30)$$

e portanto na equipollencia trinomia identica

$$LZ + IL \simeq IZ \dots (31)$$

ter-se-á

$$\text{gr LZ} = \text{gr IL} \dots (32)$$

sendo, por conseguinte, isosceles o triangulo IZI, bem como o triangulo IZ' L, no qual será similhantemente

$$\text{gr LZ}' = \text{gr IL} \dots (33).$$

Podemos ainda chegar ao mesmo resultado sem recorrer ás inclinações. Com effeito, multiplicando a equipollencia (28) pela sua conjugada

$$e^{-2u} \cdot IL \simeq c j L Z \dots \dots \dots (34)$$

vem

$$(IL)^2 \simeq (LZ)^2$$

e logo

$$gr IL = gr LZ.$$

Assim, os pontos Z e Z' achar-se-ão sobre uma circumferencia de circulo (L), com o centro em L e de raio $IL = JL$, e portanto esta circumferencia e as circumferencias (A) e (B) terão o segmento IJ para corda commum.

Logo, se no ponto L que divide AB na razão dada $\frac{m}{n}$, fizermos centro e com o raio LI descrevermos uma circumferencia de circulo, esta cortará, em geral, a circumferencia (C) em dois pontos Z e Z', que unidos com I darão duas transversaes IXZY e X'IZ'Y', que resolvem o problema.

4. Os triangulos isosceles ZLI e Z'LI dão, como sabemos,

$$inc LZ + inc IL = 2 \cdot inc IZ$$

e

$$inc LZ' + inc IL = 2 \cdot inc IZ'$$

d'onde

$$2 \cdot inc IZ' + inc LZ - inc LZ' = 2 \cdot inc IZ = 2 \cdot u \dots (35).$$

Tomando LC para origem das inclinações, será

$$LZ \simeq c j LZ'$$

e portanto

$$inc IZ' - inc LZ' = ang IZ'L = u \dots \dots (36)$$

d'onde

$$ang LIZ' = -u.$$

Similhantemente teremos

$$inc IZ - inc LZ = ang IZL = u' \dots \dots (37)$$

d'onde

$$ang LIZ = -u'.$$

Logo, se as duas transversaes IZ e IZ' cortarem LC nos pontos i e G, sob os angulos u e u', os seus angulos respectivos com LI serão — u' e — u.

Estas transversaes serão, pois, anti-parallelas a respeito do angulo ILC, e, portanto, será

$$\text{gr}(LI)^2 = \text{gr}(Li \cdot LG) \dots \dots \dots (38)$$

o que prova que os pontos i e G determinam sobre LC uma divisão homographica em involução, tendo para ponto central o ponto L, e para pontos duplos os pontos e e f, em que aquella recta é cortada pela circumferencia (L).

Reconhece-se igualmente que os quadrilateros LIZ'i e LIGZ são inscriptiveis em circulos correspondentes aos segmentos descriptos sobre a recta LI, capazes dos angulos u e u'.

5. Discussão.—Quando a recta Z₀Z ou o circulo (L) tocarem o circulo (C), teremos u = u', e as duas soluções reduzem-se a uma.

Se o circulo (C) não fór encontrado por estas linhas auxiliares, não haverá solução.

Consideremos agora cada um dos casos particulares que se podem dar.

Supponhamos em primeiro logar o caso do circulo (C) passar pelo ponto I, e que foi resolvido pelo sr. Bellavitis (*Spozione del metodo delle equipolleze*, n.º 88).

Então teremos

$$II' = 0 \text{ ou } 1 - k^2 = 0$$

e as equipollencias (21) e (21)' darão

$$\varepsilon^{2.u} \cdot \text{cj } LC \simeq -LC \dots \dots \dots (39).$$

Tal é a equipollencia deduzida pelo imminente mathematico, e da qual tira

$$2.u - \text{inc } LC = \text{inc } LC - 180^\circ$$

ou

$$u = \text{inc } LC - 90^\circ$$

e que lhe mostra que a secante IZ deve ser perpendicular a LC: deixando, por conseguinte, de considerar a segunda secante.

Depois indica ser esta solução extensiva ao problema analogo relativo a quatro esferas, tendo um ponto commum (*).

Na pag. 49 do vol. II d'este Jornal considera ainda o caso de se annullar o segmento LC: o que corresponde a ser satisfeito o problema para qualquer direcção da secante, ou a sua indeterminação; e por esta circumstancia conclue indirectamente, que o logar geometrico do ponto Z é um circulo, passando por I e J, mas de cuja existencia nos parece não tinha conhecimento até então.

Depois d'estas observações passaremos a fazer as nossas investigações sobre este ponto.

Sendo, pois, $II' = 0$ a equipollencia (24), dá

$$z(\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}) \doteq 0 \dots \dots \dots (24)$$

ou

$$z \cdot \cos u \doteq 0 \dots \dots \dots (25)$$

o que corresponde a ser $\cos u = 0$ ou $z = 0$; e, portanto, será $u = 90^\circ$ ou $u' = \text{inc } IL - 90^\circ$. Assim as transversaes pedidas IXZY e X'IY' cortarão as rectas LC e LI respectivamente sob os angulos 90° e -90° (n.º 4), e logo serão perpendiculares a estas rectas.

Se as referidas rectas LC e LI coincidirem, então será $u = u' = 90^\circ$, e as duas transversaes confundem-se com a perpendicular a LI no ponto I, ou com a tangente commum aos dois circulos (C) e (L) n'este ponto.

Suppondo que o circulo (C) passa por I e J, uma das soluções será ainda dada pela secante XIY perpendicular a LI no ponto I, e a outra pela corda commum IJ, com a qual vem confundir-se a transversal IXZY.

No caso do circulo (C) se confundir com o circulo (L), será $II' = 0$ e $LC = 0$, e a equipollencia (24) dará

$$z \cdot (\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}) \doteq \frac{0}{0} \dots \dots \dots (24)''$$

ou

$$z \cdot \cos u \doteq \frac{0}{0} \dots \dots \dots (25)''$$

(*) Mais tarde tractaremos d'esta questão, de que o sr. Laisant já se occupou.

d'onde se conclue que o problema será indeterminado, ou satisfeito para qualquer direcção das secantes.

Imaginando agora que não se annulla o segmento II' e que LC vem confundir-se com AB : o problema poderá ter duas, uma ou nenhuma solução, como no caso geral, segundo a recta auxiliar $Z_0 Z$, ou o circulo (L) cortarem, tocarem ou não encontrarem o circulo (C) .

Quando fôr finalmente $II' >$ ou < 0 , e $LC = 0$, a equipollencia (24) dá

$$z (\epsilon^u + \epsilon^{-u}) \simeq \infty \dots \dots \dots (24)''$$

e o problema não terá solução: achando-se então a distancia infinita a recta auxiliar $Z_0 Z$, com a qual se confundirá tambem o eixo radical dos circulos (C) e (L) , isto é, as suas duas cordas communs confundir-se-ão, tendo estes circulos um duplo contacto imaginario a distancia infinita.

5. Se na equipollencia (20) considerarmos explicitos os signaes dos segmentos, teremos dois pontos L e L' , taes, que será

$$AL' \simeq -AL \simeq LA \dots \dots \dots (20)'$$

e representando por z_1 e v os valores correspondentes das incognitas z e u , teremos analogamente a equipollencia

$$z_1 (\epsilon^v + \epsilon^{-v}) \simeq \frac{II' \cdot II''}{2 \cdot L'C} \dots \dots \dots (40)$$

tomando agora $L'C$ para origem das inclinações.

Fazendo, pois, as respectivas construcções, acharemos sobre o circulo (C) dois outros pontos (*reaes* ou *imaginarios*), taes, que darão duas outras transversaes, que resolvem o problema.

Comtudo o sr. Bellavitis, na referida pag. 49 do vol. II d'este Jornal, imaginando tres rectas fixas JX , JY e JZ concorrendo n'um mesmo ponto J , cortadas por uma transversal qualquer $IXZY$, conduzida por um ponto I , obtem a razão anharmonica

$$\frac{XZ}{XY} \cdot \frac{IZ}{IY} \simeq \frac{m}{n}$$

por meio da qual conclue que só ha tres circulos, IJX, IJY e IJZ, que possam ser cortados pela transversal IXZY de modo que seja $XZ \doteq \frac{m}{n} \cdot XY$.

Se, na equipollencia (1), X se torna em Y e *vice-versa*, teremos

$$\frac{YZ}{YX} \doteq \frac{m}{n} \dots \dots \dots (1')$$

e então será

$$AL \doteq \pm \frac{m}{n} BA \dots \dots \dots (19')$$

d'onde resulta haver, em geral, mais quatro soluções para o problema proposto.

Logo, a equipollencia (20) é geral, como se devia esperar; e portanto o problema poderá ter oito soluções, um numero infinito d'ellas, ou poderá ser impossivel.

Solução synthetica elementar

6. Consideremos a transversal IXZY, que resolve o problema, e pelo ponto J tirem-se as rectas JX, JY e JZ.

Como sabemos, se a transversal girar em torno de I, as cordas JX e JY dos circulos (A) e (B) serão cortadas por esta transversal, sempre sob angulos constantes: por conseguinte o *triangulo variavel* XJY será, em todas as suas posições, directamente semelhante a si mesmo (*).

(*) Por meio d'esta propriedade se resolvem facilmente alguns problemas, figurando entre esses os dois seguintes:

1.º Sendo dados dois circulos (A) e (B), que se cortam em I, conduzir por este ponto uma secante tal, que a somma ou differença das duas cordas seja igual a uma recta dada m.

2.º Achar o vertice commum V de dois triangulos directamente semelhantes, de bases dadas A D e B C.

O illustre mathematico, o sr. Francisco Horta, baseando-se n'este principio, resolveu o segundo problema no *Jornal da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, publicado em 1867.

Ora sendo constantemente

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{m}{n} \dots \dots \dots (1)''$$

segue-se que qualquer dos triangulos variaveis XJZ e ZJY, em que fica dividido o triangulo XJY, se conservará directamente semelhante a si mesmo: e, portanto, sendo constante o angulo XZJ, o vertice Z descreverá uma circumferencia de circulo (L) passando por I e J.

Quando a transversal fôr perpendicular á corda IJ, é claro que os lados JX, JY e JZ dos triangulos XJY e XJZ, serão diametros dos circulos (A), (B) e (L), e o centro d'este ultimo será o ponto L, que divide na razão dada a recta AB, que une os centros dos dois primeiros circulos, sendo LI a grandeza do raio.

Como já vimos (n.º 3) os pontos de intersecção (*reaes* ou *imaginarios*) dos circulos (C) e (L) darão as direcções das transversaes pedidas.

Podemos ainda, do modo seguinte, demonstrar que o logar geometrico descrito pelo ponto Z é uma circumferencia de circulo:

O sr. Bellavitis tambem resolveu este mesmo problema, empregando o methodo das equipollencias, no n.º 40 da sua *Exposição do methodo das equipollencias*, publicada em 1854, á qual já nos referimos. No n.º 47 d'esta sua memoria resolve igualmente pelas equipollencias o problema no caso dos triangulos pedidos serem symetricamente semelhantes; mas seguindo processo differente do primeiro (recorrendo ás rectas conjugadas). Comtudo, como n'outra occasião veremos detalhadamente, ha um processo geral, mui elementar, e essencialmente synthetico, que dá immediatamente, pela intersecção de circulos auxiliares, os vertices communs dos triangulos semelhantes, correspondentes aos dois casos; e ao mesmo tempo, prova-nos, que *a um quadrilatero, não parallelogrammo, correspondem dois pontos notaveis, que representam respectivamente os vertices communs de triangulos directa e symetricamente similhantes, tendo para bases dois lados oppostos do referido quadrilatero.*

Quando os triangulos pedidos não estiverem situados no mesmo plano, então aos circulos auxiliares corresponderão esferas, e os vertices d'estes triangulos achar-se-ão sobre o paralelo commum a estas esferas. N'este caso reconhece-se que, em geral, *a um quadrilatero plano ou empenado corresponde um circulo notavel, que contém os vertices communs de triangulos similhantes, tendo para bases dois lados oppostos do quadrilatero.*

Se sobre a transversal $IXZY$ tomarmos os pontos medios α , β e γ dos segmentos IX , IY e IZ , teremos evidentemente

$$\frac{XZ}{XY} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta} = \frac{m}{n} \dots\dots\dots (41).$$

Tirando as rectas αA e βB , que passam pelos centros A e B dos circulos (A) e (B); e pelo ponto γ tirando, parallelamente a estas, a recta γL , esta cortará o segmento AB n'um ponto L , de modo que será

$$\frac{AL}{AB} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta} = \frac{m}{n} \dots\dots\dots (42).$$

Ora as rectas αA e βB passando pelo meio das cordas IX e IY dos circulos (A) e (B), segue-se que IZ será tambem corda d'um circulo (L), cujo centro divide AB na razão dada, sendo LI seu raio.

Observação. — Quando o circulo (C) passar por I , podemos naturalmente derivar d'este processo synthetico, o que seguiu o sr. Laisant: porque então, as cordas $Z'IZ$ e IZ d'aquelle circulo e do circulo (L) confundindo-sé, a recta γL passará por C , e por conseguinte IZ será perpendicular a LC .

7. É facil de ver que, a qualquer posição da transversal IXY , corresponde sempre outra, tal que os dois triangulos correspondentes são tambem directamente eguaes; e só teremos um triangulo, que é de grandeza maxima, quando a transversal fôr perpendicular á corda IJ .

Se designarmos por IX_1Y_1 , IX_2Y_2 , . . . , diversas posições da referida transversal IXY , e fizermos girar todos os triangulos JXY , JX_1Y_1 , JX_2Y_2 , . . . , em torno do vertice commum J , até que os dois lados homologos correspondentes fiquem na mesma direcção, o ponto I , considerado sobre cada um dos lados XY , X_1Y_1 , X_2Y_2 , . . . , achar-se-á então sobre um circulo, tendo para centro o referido vertice commum J , e cujo raio será igual á corda IJ , que representa a altura do triangulo de grandeza maxima.

Agora iremos tambem demonstrar syntheticamente que as transversaes IZ e IZ' são anti-parallelas a respeito do angulo ILG .

Sendo, pois, eguaes os angulos ZLe e ZIZ' , por terem como medida metade do arco ZeZ' , reconhecer-se-á immediatamente, no quadrilatero $LZGI$, ser

$$\text{ang } LIG = \text{ang } LIZ + \text{ang } ZIG = - \text{ang } LiI$$

e

$$\text{ang } LIZ = \text{ang } LZI = - \text{ang } LGI$$

logo, etc.

S. Observação.—Torna-se inutil entrarmos na discussão d'esta solução, em vista da discussão da solução dada pelas equipollencias, e que agora é analogamente applicavel.

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Continuação)

II

Determinação do volume da cunha e do tronco conico

14. Para resolver esta questão começaremos tambem, como no n.º 1, por deduzir as respectivas fórmulas com toda a generalidade: para o que podemos seguir dois processos.

1.º Consideremos, em vez da cunha ou tronco conico, a cunha ou tronco pyramidal regular inscripto (n.º 3); e seja M o ponto de intersecção do eixo SC da pyramide com o plano π_e da secção obliqua.

Designando, pois, por V_c , V_m e W_m os volumes da cunha ou tronco pyramidal, da pyramide que tem o ponto M por vertice e por base a base recta d'esta cunha ou tronco, e do corpo limitado pelas superficies lateraes d'esta pyramide e da mesma cunha ou tronco, e pela sua respectiva base obliqua, teremos

$$V_c = W_m - V_m \dots \dots \dots (73).$$

O volume W_m obtem-se facilmente: por quanto é igual á somma dos volumes das pyramides que têm por vertice commum o ponto M e por bases as faces da superficie lateral da cunha ou

tronco pyramidal, cujas áreas designámos por Q_p (n.º 2); de modo que, representando por λ_{m_p} a altura d'estas pyramides componentes, ter-se-á evidentemente

$$W_{m_p} = \frac{1}{3} \cdot \lambda_{m_p} \cdot Q_p \dots \dots \dots (74).$$

Se designarmos por V_c , V_m , λ_m e W_m os volumes da cunha ou tronco conico, da pyramide que tem o vertice em M e por base a base recta ou circular d'esta cunha ou tronco, a grandeza das geratrizes rectilneas d'esta pyramide e o volume do corpo limitado pelas superficies lateraes d'esta pyramide e da mesma cunha ou tronco, cuja área representámos por Q_c (n.º 2), e pela sua base obliqua; ou então se por estas grandezas designarmos os limites respectivos das grandezas V_c , V_m , λ_{m_p} e W_{m_p} , será

$$V_c = W_m - V_m \dots \dots \dots (75)$$

e

$$W_m = \frac{1}{3} \cdot \lambda_m \cdot Q_c \dots \dots \dots (76).$$

2.º Sejam agora V_s e W_s os volumes das pyramides que têm o mesmo vertice S que a superficie conica S (C), que fórma a superficie lateral ou convexa da cunha ou tronco conico, e cujas bases são respectivamente a base recta e a base obliqua d'esta cunha ou tronco. Então teremos evidentemente

$$V_c = V_s - W_s \dots \dots \dots (77).$$

Taes são, pois, as duas expressões geraes, por meio das quaes podemos calcular o volume pedido V_c .

§ I

CUNHA CONICA

15. Estabelecidas estas fórmulas geraes (75) e (77), começaremos por as applicar á cubatura da cunha conica, considerando tambem separadamente cada um dos casos que se podem apresentar, como fizemos a respeito da quadratura da superficie d'esta cunha (n.º 3).

Caso da secção elliptica

16. As grandezas V_c , V_m , W_m , V_s e W_s , representam agora respectivamente os volumes da cunha $i_0 A i B$, da pyramide $M(i_0 A i)$, do corpo $M(i_0 A i B)$, e das pyramides $S(i_0 A i)$ e $S(i_0 B i)$.

1.º Seja M'_0 o ponto em que a perpendicular MM'_0 baixada de M sobre a geratriz rectilinea SA do cone $S(C)$ (fig. f_2), encontra esta recta, e tractemos de exprimir a grandeza d'esta perpendicular ou *geratriz rectilinea do cone suplementar* d'aquelle cone, e a grandeza da altura MC da pyramide $M(i_0 A i)$, em funcção dos segmentos dados.

A comparação dos triangulos mCM e $mB'B$, e dos triangulos ABB' e ASC , dá

$$CM = \frac{BB'}{mB'} \times Cm, \text{ e } BB' = \frac{SC}{CA} \times B'A$$

d'onde

$$CM = \frac{SC}{CA} \times \frac{B'A}{mB'} \times Cm \dots \dots \dots (78).$$

Para calcular M'_0M , compararemos os triangulos SM'_0M e SCA , e teremos

$$M'_0M = \frac{CA}{SA} \times SM \dots \dots \dots (79)$$

ou

$$M'_0M = \frac{CA}{SA} (SC - MC) \dots \dots \dots (80).$$

Ainda podemos calcular M'_0M pelo modo seguinte:

Baixemos de A_0 e B_0 sobre a recta SA as perpendiculares $A_0\alpha_0$ e $B_0\beta_0$, que a cortam nos pontos α_0 e β_0 , e então comparando os triangulos rectangulos BM'_0M e $BB_0\beta_0$, teremos

$$M'_0M = \frac{CB'}{B'_0B'} \times B_0\beta_0.$$

Mas a comparação dos triangulos rectangulos $SA_0\alpha_0$ e $SB_0\beta_0$ dando

$$(88) \dots \dots \dots B_0\beta_0 = \frac{SB_0}{SA_0} \times A_0\alpha_0$$

e como é

$$A_0\alpha_0 \times SA = A_0A \times SC$$

será finalmente

$$M'_0M = \frac{A_0A \times SB_0 \times CB'}{SA^2 \times B'_0B'} \times SC$$

ou

$$M'_0M = 2 \cdot \frac{CA \times SB_0 \times CB'}{SA^2 \times C_1B'} \times SC \dots \dots (81).$$

Sendo

$$W_m = \frac{1}{3} M'_0M \times \text{sup } i_0A_iB \dots \dots (82)$$

e

$$V_m = \frac{1}{3} CM \times \text{sup } i_0A_iB = \frac{1}{6} CM (CA \times i_0\widehat{A_i} - 2 \cdot Cm \times mi) \dots (83)$$

teremos

$$V_c = \frac{1}{6} \left[2 \cdot \frac{CA}{SA} (SC + CM) \text{sup } i_0A_iB - CM (CA \times i_0\widehat{A_i} - 2 \cdot Cm \times mi) \right] (84)$$

ou

$$V_c = \frac{1}{6} \left[2 \cdot \frac{CA \times SB_0 \times CB'}{SA^2 \times C_1B'} \times SC \times \text{sup } i_0A_iB - CM (CA \times i_0\widehat{A_i} - 2 \cdot Cm \times mi) \right] (85)$$

ou, tornando explicitos os signaes dos segmentos Cm e CM ,

$$V_c = \frac{1}{6} \left[2 \cdot \frac{CA}{SA} (SC \pm CM) \times \text{sup } i_0A_iB \mp CM (CA \times i_0\widehat{A_i} \mp m \times mi) \right] (86)$$

ou

$$V_c = \frac{1}{6} \left[2 \cdot \frac{CA \times SB_0 \times CB'}{SA^2 \times C_1B'} \times SC \times \text{sup } i_0A_iB \mp CM (CA \times i_0\widehat{A_i} \mp Cm \times mi) \right] (87)$$

adoptando-se o signal superior ou o inferior segundo for $+ \sigma < 0$ ou $> +90^\circ$, ou $- \sigma > 0$ ou $< -90^\circ$ (*).

Ora é (n.º 4)

$$Cm = CA - mA = \frac{R}{L} \cdot \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \dots (88)$$

$$B'A = CA - CB' = \frac{R}{L} (L - \lambda) \dots (89)$$

$$mB' = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} (L - \lambda) \dots (92)$$

$$C_1 B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} (\lambda_0 + \lambda) \dots (15)$$

e se representarmos por H a altura $SC = \sqrt{L^2 - R^2}$ do cone S(C), teremos

$$CM = \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 + \lambda)} \cdot H \dots (90)$$

e

$$M_0 M = 2 \cdot \frac{R}{L^2} \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{(\lambda_0 + \lambda)} \cdot H \dots (91)$$

e logo

$$V_c = \frac{1}{6 \cdot L^2 (\lambda_0 + \lambda)} \left[4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda \cdot Q_c - R [2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)] \right] \dots (92)$$

$$\left(\frac{L}{R} \cdot A - 4 \cdot \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)^2} \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right) RH \dots (92)$$

(* Como já dissemos (n.º 4), o angulo σ será positivo ou negativo (e por conseguinte V_c será implicitamente affecto do signal $+$ ou $-$), segundo se considerar a cunha $i_0 A i B$ situada acima do plano π_c , ou a cunha $i_0 A i B$ situada abaixo d'este plano.

ou

$$V_c = \frac{1}{6 \cdot L^2 (\lambda_0 + \lambda)} \left[4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda \cdot Q_c - R [2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L (\lambda_0 + \lambda)] \left(\frac{\sigma}{90} \pi L - \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L (\lambda_0 + \lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \cdot 2 \cdot \text{sen } \sigma \right) \right] R H \dots \dots \dots (93).$$

2.º Baixando do vertice S do cone S(C) a perpendicular SΣ₀ sobre o plano π_c da secção obliqua (E), sendo Σ₀ o pé d'esta perpendicular (fig. f₂), a expressão do volume W_s da pyramide S(i₀B_i) será

$$\frac{1}{3} S \Sigma_0 \times \text{sup } i_0 B_i$$

que tractaremos de exprimir em funcção das grandezas dadas.

Sendo evidentemente

$$S \Sigma_0 \times B_0 B = S B \times B_0 \beta_0$$

e os triangulos S A₀ α₀ e S B₀ β₀ dando

$$\frac{S B_0}{B_0 \beta_0} = \frac{S B_0}{S A_0} \times A_0 \alpha_0$$

será

$$S \Sigma_0 = \frac{S B_0}{S A} \times \frac{S B}{B_0 B} \times A_0 \alpha_0$$

e como é

$$A_0 \alpha_0 \times S A = A_0 A \times S C$$

ter-se-á

$$S \Sigma_0 = \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{S A^2 \times B_0 B} \times S C \dots \dots \dots (94)$$

e sendo

$$\text{sup } i_0 B_i = \frac{m B}{m' B'} \times \text{sup } i_0 B_i = \frac{B_0 B}{B'_0 B'} \times \text{sup } i_0 B_i$$

*

teremos

$$W_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{S A^2 \times B'_0 B'} \times S C \times \sup i_0 A i \dots (95)$$

e o volume V_s da pyramide $S(i_0 A i)$ tendo por expressão

$$\frac{1}{3} \cdot S C \times \sup i_0 A i = \frac{1}{6} \cdot S C (C A \times i_0 \widehat{A i} - 2 \cdot C m \times m i) \dots (96)$$

ter-se-á, tornando explicitos os signaes dos segmentos,

$$V_c = \frac{1}{6} [C A \times i_0 \widehat{A i} - 2 \cdot C m \times m i$$

$$- 4 \cdot \frac{C A \times S B_0 \times S B}{S A^2 \times B'_0 B'} \times \sup i_0 B' i] S C \dots (97)$$

e por conseguinte

$$V_c = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\sigma}{90} \pi - \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)} \cdot 2 \cdot \text{sen } \sigma \right) R^2 - 4 \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{L(\lambda_0 + \lambda)} \left(J_c - \frac{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)} \cdot R^2 \cdot \text{sen } \sigma \right) \right] H \quad (98)$$

Se nas fórmulas (93) e (98) pozermos os valores de Q_c e J_c (n.º 4), acharemos a fórmula geral

$$V_c = \frac{1}{6} \left[\frac{\sigma}{90} - \frac{\lambda_0 \cdot \lambda \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3} \cdot \frac{\varphi}{90} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda (\lambda_0 - \lambda)^2 + [(2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda))]^2 \cdot \frac{\text{sen } \sigma}{\pi}}{L^2 (\lambda_0^2 - \lambda^2)} \right] \pi \cdot R^2 \cdot H \quad (99)$$

ou

$$V_c = \pm \frac{1}{6 \cdot L^2} \left[\frac{\sigma L^3 - \omega \cdot \lambda_0 \cdot \lambda \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{90 \cdot L} \right. \\ \left. \frac{(L^2 + \lambda_0 \cdot \lambda)(\lambda_0 + \lambda) - 4 \cdot L \cdot \lambda_0 \cdot \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \cdot 2 \cdot \frac{\text{sen } \sigma}{\pi} \right] \pi \cdot R^2 \cdot H \quad (100)$$

adoptando-se, como sabemos, o signal superior ou o inferior, segundo σ e ω forem positivos ou negativos, isto é, segundo considerarmos a cunha situada acima ou abaixo do plano π_c .

Deduzidas, pois, as expressões geraes de V_c , passaremos a considerar alguns casos particulares.

17. Discussão. — Quando for $\sigma = \pm 90^\circ$ (n.º 5), temos

$$2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda) = 0 \dots \dots \dots (39)$$

d'onde [fórmulas (93), (98) e (99)]

$$V_c = \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{L} \cdot Q'_c \cdot H \dots \dots \dots (93')$$

ou

$$V_c = \pm \frac{1}{6} (\pi R^2 - 2 \cdot J'_c) H \dots \dots \dots (98')$$

ou

$$V_c = \pm \frac{1}{6} \left[1 - \frac{\lambda^2 \cdot \sqrt{L}}{\lambda_0 \cdot \lambda} \right] \frac{1}{L^2 (2 \cdot \lambda - L) \sqrt{2 \cdot \lambda - L}} \frac{1}{90} \\ + \frac{2 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda - L} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\pi L} \left] \pi R^2 \cdot H \dots \dots \dots (99)'$$

Se considerarmos o caso de ser $\sigma = \omega = +180^\circ$, ou $\lambda_0 = L$, teremos

$$V_c = \pm \frac{1}{3} \frac{1}{(L + \lambda)} \left[2 \cdot \frac{\lambda}{L} \cdot Q'_c - (\lambda - L) \cdot \pi \cdot R \right] H \dots \dots \dots (93)''$$

12.º Se na fórmula (98) (n.º 17) fizermos $\lambda_0 = \infty$, $\sigma = \sigma_\infty$ e $J_c = J_{c_\infty}$ (n.º 6), acharemos

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\sigma_\infty}{90} \pi - \frac{2 \cdot \lambda - L}{L} \cdot 2 \cdot \text{sen } \sigma_\infty \right) R^2 \right. \\ \left. - 4 \cdot \frac{\lambda}{L} \left(J_{c_\infty} - \frac{2 \cdot \lambda - L}{L} R^2 \cdot \text{sen } \sigma_\infty \right) \right] H \dots (98)_\infty$$

Quando n'estas fórmulas pozermos os valores de Q_{c_∞} e J_{c_∞} (n.º 6), acharemos a fórmula geral

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6} \left[\frac{\sigma_\infty}{90} \pi + \frac{8 \cdot \lambda^2 + (3 \cdot L - 14 \cdot \lambda) L}{3 \cdot L^2} \cdot 2 \cdot \text{sen } \sigma_\infty \right] R^2 \cdot H \dots (99)_\infty$$

ou

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6} \left[\frac{\sigma_\infty}{90} + \frac{8 \cdot \lambda^2 + (3 \cdot L - 14 \cdot \lambda) L}{3 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot 2 \cdot \text{sen } \sigma_\infty \right] \pi \cdot R^2 \cdot H (100)_\infty$$

Taes são as fórmulas que nos dão o volume pedido.

Com a mesma facilidade acharíamos as fórmulas correspondentes ao caso de ser $\lambda = \infty$.

Observação. — É claro que estas fórmulas também se podem deduzir simplesmente e directamente, partindo da fig. f_3 .

19.º *Caso particular.* — Quando for $\sigma_\infty = +90^\circ$ será (n.º 7) $2 \cdot \lambda = L$, $Q_{c_\infty} = Q'_{c_\infty}$ e $J_{c_\infty} = J'_{c_\infty}$, e então teremos

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) R^2 \cdot H \dots (93)_\infty$$

§ II

TRONCO CONICO

20. Analogamente ao que fizemos com respeito á quadratura da superfície lateral do tronco conico (n.º 11), exporemos também os dois methodos allí seguidos, por meio dos quaes tractaremos

de determinar o volume V_c do tronco conico $A_0 D_0 A D B_0 E_0 B E$ (fig. f_3), quer seja de primeira quer de segunda especie.

Methodo directo. — Devemos observar que, para determinar o valor de V_c , somos dispensados de calcular novamente a grandeza da perpendicular $M_0 M$, baixada de M sobre a geratriz rectilinea SA , e as grandezas das alturas MC e $S \Sigma_0$ das pyramides $M(A_0 D_0 A D)$ e $S(B_0 E_0 B E)$, por serem igualmente dadas pelas respectivas fórmulas que deduzimos para a cunha conica, na hypothese da secção (E) ser elliptica (n.º 16).

1.º Sendo (fig. f_3)

$$W_m = \frac{1}{3} \cdot M_0 M \times \text{sup } A_0 D_0 A D B_0 E_0 B E$$

$$V_m = \frac{1}{3} \cdot C M \times \text{sup } A_0 D_0 A D$$

teremos

$$V_c = \frac{1}{3} [M_0 M \times \text{sup } A_0 D_0 A D B_0 E_0 B E - C M \times \text{sup } A_0 D_0 A D] \quad (101)$$

e logo

$$V_c = \pm \frac{1}{3 \cdot L(\lambda_0 + \lambda)} [2 \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{L} \cdot Q_c - \{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - L(\lambda_0 + \lambda) \pm \pi R\} H] \quad (102)$$

adoptando-se o signal superior ou o inferior, segundo a secção elliptica (E) estiver acima ou abaixo da secção recta (C).

Quando a secção (E) estiver na segunda folha do cone $S(C)$, teremos o tronco de segunda especie, e ainda a fórmula (102) satisfaz: porque os segmentos λ_0 e λ sendo então negativos, a sua somma ($\lambda_0 + \lambda$) será affecta do signal —.

Assim, tornando explicitos os signaes em todos os casos, teremos

$$V_c = \pm \frac{1}{\pm 3 \cdot L(\lambda_0 + \lambda)} [2 \cdot \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{L} \cdot Q_c$$

$$- \{2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda - [\pm (\lambda_0 + \lambda)] \pm \pi R\} H] \quad (103)$$

2.º O volume W_s da pyramide $S(B_0 E_0 B E)$ tendo por expressão

$$\frac{1}{3} S \Sigma_0 \times \text{sup } B_0 E_0 B E$$

e sendo

$$\text{sup } B_0 E_0 B E = \frac{B_0 B}{B'_0 B'} \times \text{sup } B'_0 E' B' E'$$

teremos [fórmula (94)]

$$W_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{S A^2 \times B'_0 B'} \times S C \times \text{sup } B'_0 E' B' E'$$

e o volume V_c da pyramide $S(C)$ tendo por expressão

ter-se-á

$$V_c = \frac{1}{3} [\text{sup } A_0 D_0 A D - \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{S A^2 \times B'_0 B'} \times \text{sup } B'_0 E' B' E'] S C \dots \dots \dots (104)$$

e por conseguinte

$$V_c = \pm \frac{1}{3} [\pi R^3 - 2 \frac{\lambda_0 \cdot \lambda}{\pm (\lambda_0 + \lambda)} \cdot J_c] H \dots (105).$$

Se nas fórmulas (103) e (105) pozermos os valores de Q_c e J_c , relativos ao tronco conico (n.º 11), teremos a expressão geral

$$(801) \dots V_c = \pm \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda_0 \cdot \lambda \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3} \right) \pi R^3 \cdot H \dots (106).$$

Methodo indirecto. — Se na fórmula (99) relativa ao caso da secção elliptica (n.º 16) fizermos $\sigma = \omega = \pm 180^\circ$, teremos immediatamente a fórmula (106), correspondente ao tronco conico.

21. Consideremos agora o caso do tronco conico ser limitado pelas secções (E_1) e (E_2) (fig. f_6) (n.º 12); sendo $S B_0 = + L_0$, $S B_1 = + L$, $S B_0 = \pm \lambda_0$ e $S B_2 = + \lambda$.

Então os volumes dos troncos determinados pela secção recta (C) (correspondentes ao segmento L) e por cada uma das outras secções obliquas consideradas, terão respectivamente por expressão

$$\frac{1}{3} \left[1 - \frac{\lambda_0 \cdot \lambda \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3} \right] \pi \cdot R^2 \cdot H$$

e

$$\frac{1}{3} \left[\frac{L_0}{L} \sqrt{\frac{L_0}{L}} - 1 \right] \pi \cdot R^2 \cdot H$$

logo, representando por V_c o volume pedido, teremos

$$V_c = \frac{1}{3} \left[\frac{L_0}{L} \sqrt{\frac{L_0}{L}} - \frac{\lambda_0 \cdot \lambda \sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3} \right] \pi \cdot R^2 \cdot H \dots (107).$$

Se as bases (E_1) e (E_2) forem parallelas, teremos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{L_0}{L}$$

e portanto

$$V_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{L_0}{L} \sqrt{\frac{L_0}{L}} \left(1 - \frac{\pm \lambda^3}{L^3} \right) \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{L^3 \mp \lambda^3}{L^3} \pi R^2 \cdot H \dots (108).$$

ou

$$V_c = \frac{1}{3} \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{L - \lambda}{L^3} (L^2 \pm L \cdot \lambda + \lambda^2) \pi R^2 \cdot H \dots (109).$$

22. *Discussão.* — Quando fizermos successivamente $\lambda_0 = L$ e $\lambda = L$, a fórmula (106) transforma-se nas fórmulas (99)'' e (99)''' (relativas á cunha conica na hypothese da secção (E) ser uma ellipse). Se fór $\lambda_0 = \lambda$, as fórmulas (106) e (109) dão

$$V'_c = V'_e = \frac{1}{3} \frac{L^3 \mp \lambda^3}{L^3} \pi R^2 \cdot H \dots \dots (110)$$

ou

$$V'_c = V'_e = \frac{1}{3} \frac{L \mp \lambda}{L^3} (L^2 \pm L \cdot \lambda + \lambda^2) \pi R^2 \cdot H \dots (111)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos de primeira e segunda especie)

$$V'_c = V''_e = \frac{1}{3} \cdot \frac{L - \lambda}{L^3} (L^2 + L \cdot \lambda + \lambda^2) \pi R^2 \cdot H \dots (112)$$

e

$$V'''_c = V'''_e = \frac{1}{3} \cdot \frac{L + \lambda}{L^3} (L^2 - L \cdot \lambda + \lambda^2) \pi R^2 \cdot H \dots (113).$$

Taes são as duas fórmulas que correspondem a serem rectas as secções que limitam estes dois troncos.

Sendo, pois, r o raio da segunda base ou secção recta (C_b), será

$$\lambda = \frac{r}{R} \cdot L$$

e portanto [fórmula (111)]

$$V'_c = V'_e = \frac{1}{3} \pi (R^2 \pm R \cdot r + r^2) \frac{L \mp \lambda}{L} \cdot H \dots (114)$$

ou

$$V'_c = V'_e = \frac{1}{3} \pi (R^2 \pm R \cdot r + r^2) \frac{R \mp r}{R} \cdot H \dots (115).$$

Considerando separadamente os dois troncos conicos, teremos

$$V''_c = V''_c = \frac{1}{3} \pi (R^2 + R.r + r^2) \frac{R-r}{R} . H \dots (116)$$

e

$$V'''_c = V'''_c = \frac{1}{3} \pi (R^2 - R.r + r^2) \frac{R+r}{R} . H \dots (117)$$

se representarmos por h_1 e h_2 as alturas $\frac{R-r}{R} . H$ e $\frac{R+r}{R} . H$ dos troncos, ter-se-ão as fórmulas ordinarias

$$V''_c = \frac{1}{3} \pi (R^2 + R.r + r^2) h_1 \dots (116)'$$

$$V'''_c = \frac{1}{3} \pi (R^2 - R.r + r^2) h_2 \dots (117)''$$

Como se vê, estas expressões dependendo só de R , r , h_1 e h_2 , são igualmente applicaveis aos troncos conicos obliquos de bases parallelas.

Quando n'estas fórmulas (116)' e (117)'' fizermos $R=r$, teremos

$$V''_c = \pi . R^2 . h_1 \dots (116)''$$

$$V'''_c = \frac{1}{3} \pi . R^2 . h_2 \dots (117)'''$$

Então a primeira expressão, como sabemos, representará o volume d'um cylindro recto ou obliquo com a altura h_1 e bases de raio R ; e a segunda ainda representará o volume d'um tronco conico de segunda especie de bases eguaes, ou o volume d'um cone da mesma altura h_2 do tronco, e tendo a base de raio R igual ás bases d'este tronco.

OBSERVAÇÃO GERAL

O Sr. D. Carlos de Azevedo, se não entrarmos em mais detalhes
neste estudo, visto julgarmos ter estabelecido os pontos capitais
da questão proposta, de modo que, com extrema facilidade, os
nossos illustres leitores cheguem a essas conclusões.

POR

L. F. MARREAS FERREIRA

Como já dissemos, há mais certos pontos de publicar o
nosso trabalho estudo sobre as questões propostas, etc., e então
tratamos de outros pontos que agora omitimos, por não serem
necessários para a determinação da questão proposta.

Determinar o vertice commum de dois triangulos symetricamente semelhantes, de bases dadas AD e BC.

Supponha-se que os pontos A e B estão situados d'um mesmo lado do vertice; D e C do outro; seja V este vertice commum que se deseja determinar; Vp e Vq as alturas respectivas dos dois triangulos semelhantes, pertencendo a primeira ao triangulo VAD, a segunda a VBC. Da condição de symetria resulta:

$$\widehat{AVD} = \widehat{BVC}; \quad \widehat{VAD} = \widehat{VBC}; \quad \widehat{VDA} = \widehat{VCB}$$

e

$$\frac{VA}{VB} = \frac{VD}{VC} = \frac{Vp}{Vq} = \frac{AD}{BC} = k.$$

Vê-se evidentemente que o ponto V existe em dois logares geometricos distinctos: na circumferencia, logar dos pontos, cujas distancias a A e B guardam a relação k , e na outra circumferencia correspondente aos pontos D e C, existindo o centro da primeira no prolongamento de AB, o da segunda no prolongamento de DC, e ambos d'um mesmo lado em relação á menor das bases dos triangulos.

Haverá portanto duas soluções, quando os logares geometricos se interceptarem; uma no caso de tangencia; nenhuma, se as curvas forem exteriores, ou existir uma no interior da outra.

Quando houver duas soluções, devem ser estas symetricamente dispostas em relação á linha dos centros das circumferencias, e como esta é exterior ao quadrilatero, é facil o suppor-se que as

soluções podem ficar igualmente no exterior, o que não succede, porque existe qualquer d'ellas n'uma recta, passando pelo vertice do angulo formado por A D e B C, e satisfazendo á condição de ser o logar geometrico dos pontos, cujas distancias a A D e B C têm entre si a relação k ; ora, como é claro, só duas rectas satisfazem a esta condição: uma existe no interior do angulo, a outra no exterior; portanto, havendo duas soluções, cabe a uma d'estas a posição sobre a primeira recta, á outra sobre a segunda.

Apesar da propriedade reconhecida para estas linhas, não podem ellas servir para a resolução do problema; mas sim como verificação das construcções para esse fim realisadas; vê-se bem que ellas produzem sempre duas intersecções com qualquer das circumferencias, e podem estas não estar situadas sobre a outra.

No caso de tangencia, devendo haver um unico ponto commum sobre a linha dos centros, estará o vertice obtido fóra do quadrilatero e do lado correspondente á menor das bases, sobre a recta exterior, tornando-se por conseguinte a outra parasita.

As reflexões expendidas applicam-se igualmente, quando pelo parallelismo de dois lados oppostos do quadrilatero se converta este n'um trapesio, não sendo os dois casos dignos de menção especial.

Se os pontos A e B, por exemplo, se confundissem, isto é, se A D e B C fossem segmentos dos lados d'um angulo, tomados a partir do vertice, confundiam-se VA e VB, e pela condição de symetria: $\hat{V}AD = \hat{V}BC$, segue-se que o ponto V devia estar situado sobre a bissectriz do angulo, e como as distancias d'um ponto d'esta aos lados são eguaes, o problema só é possivel, quando os segmentos A D e B C forem tambem eguaes; n'este caso particular os pontos da bissectriz, situados tanto d'um como do outro lado do vertice, resolvem o problema, determinando qualquer d'elles dois triangulos eguaes; ha uma infinidade de soluções, e é impossivel qualquer no exterior da bissectriz.

Excluindo este caso, podemos, pois, dizer que da condição de symetria resultam duas soluções, uma, ou nenhuma, como demonstrarei ainda por outro modo.

Seguindo-se o processo anterior póde-se resolver o caso de dissymetria, caracterizado pelas seguintes condições:

$$\hat{A}VD = \hat{B}VC; \quad \hat{V}AD = \hat{V}CB; \quad \hat{V}BC = \hat{V}DA$$

de que resulta:

$$\frac{VA}{VC} = \frac{VD}{VB} = \frac{Vp}{Vq} = \frac{AD}{BC} = k.$$

Um dos centros fica situado no prolongamento da diagonal AC do quadrilatero, o segundo no prolongamento da diagonal BD, e ambos do lado correspondente á menor das bases dos triangulos.

As duas rectas passando pelo vertice do angulo, formado por A D e B C, desempenham o mesmo papel que anteriormente, e sobre a posição das soluções tem ainda logar a analyse apresentada.

Se n'esta hypothese os pontos A e B, por exemplo, se confundirem, o numero de soluções, ao contrario do caso precedente, é limitado; facilmente se reconhece que as duas circumferencias subsistem, tendo uma d'ellas o centro sobre um dos lados do angulo formado e a outra sobre o prolongamento do segundo, podendo haver duas soluções; uma apenas no interior ou no exterior do angulo, segundo que o ponto de tangencia das curvas existe no interior ou no exterior; nenhuma solução, quando se não interceptarem ou estiver uma d'ellas no interior da outra, — ha aqui a notar a importante equivalencia de areas: $VA^2 = VD \times VC$ e se fôr recto o angulo DAC, as linhas DV e VC confundir-se-ão n'uma unica, incidindo perpendicularmente sobre esta a recta VA.

Se AD e BC forem parallelas á solução interna ao quadrilatero, existe no cruzamento das diagonaes interiores.

Póde-se ainda resolver o problema proposto por um processo diverso que vou succintamente descrever.

Supponhamos que V existe dentro do quadrilatero

$$\widehat{VAD} = \widehat{VBC} = \alpha;$$

será

$$\widehat{VAB} = \widehat{DAB} - \alpha; \quad \widehat{VBA} = \widehat{CBA} - \alpha;$$

logo

$$\widehat{VAB} - \widehat{VBA} = \widehat{DAB} - \widehat{CBA} = \text{constante.}$$

Da mesma sorte

$$\widehat{VDC} - \widehat{VCD} = \text{constante.}$$

O vertice d'um triangulo, cuja base é dada em grandeza e posição, sendo constante a differença dos angulos na base, acha-se n'um ramo de hyperbole, que passa pelo extremo da base, vertice do maior dos dois angulos; o segundo ramo da curva, n'este caso parasita, que passa pelo outro extremo, só é util, quando a differença subsistir a favor do angulo, cujo vertice n'elle existe.

Tinhamos portanto para a determinação do ponto interior dos ramos de hyperboles distinctas, e como elles não podem ter mais d'um cruzamento sobre a recta, que passa pelo vertice do angulo e no interior d'este, com a propriedade já designada, segue-se que só pôde haver uma unica solução dentro do quadrilatero.

Para determinar a solução externa teremos:

$$\widehat{VAB} + \widehat{VBA} = \widehat{DAB} + \widehat{CBA} = \text{constante,}$$

logo o angulo AVB é tambem constante e determina-se a posição do vertice, construindo sobre AB o segmento capaz d'aquelle angulo; da mesma sorte se determina a grandeza do angulo DVC e se construe sobre DC o segmento que o deve conter; da intersecção dos dois arcos podem resultar dois pontos, um só, ou nenhum e como aquelle, que resolve o problema n'estas circumstancias, deve estar na recta, que passa pelo vertice do angulo formado por AD e BC, situada exteriormente a elle, segue-se que só resultará uma unica solução externa, ou nenhuma.

Os dois pontos de intersecção podem ser simultaneamente soluções, uma no exterior do quadrilatero, outra no interior, quando n'estas duas posições não variarem os angulos AVB e DVC.

A nenhum dos cinco casos de dissymetria convém este processo e aos quatro que do primeiro processo foram excluidos, não pôde convir, segundo supponho, nenhum que seja elementar.

RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE
 ASSUJETTI A COUPER CONTINUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS
 SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

$$VAB + VBA = D \quad (\text{Suite}) \quad CBA = \text{constante}$$

II
 Cas des cercles non concentriques
 § I
 ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

27. En considérant, dans le cas précédent (fig. 1), les constructions relatives à chaque point b, b_1, \dots , du cercle (E), il est évident que, quand nous donnerons à l'autre cercle (I) un mouvement de translation quelconque, le premier cercle restant fixe, tous les points et tous les lignes de la figure prendront leurs positions relatives correspondantes à la solution du problème dans le cas général, que nous allons étudier.

Désignons, donc, par C_0 la position finale du centre du cercle (I) (fig. 2), et considérons les deux points b et a'_1 du cercle (E) correspondants à sa corde ba'_1 .

Cela posé, il est évident que, pendant le mouvement du cercle (I) les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tourneront autour des sommets c_s et c'_s du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c_i c'_i$, et les perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$, élevées sur les points milieux n_s et n'_s de ces rayons se coupant constamment sur la corde ba'_1 , leur point d'intersection o sera le centre du cercle (x) ou (o), qui passe par b ; et il en sera

de même quand nous considérerons le déplacement des rayons, qui déterminent le centre o_1 du cercle (x_1) ou (o_1) , lequel passe par l'autre extrémité a'_1 de la corde considérée.

D'après cela le cercle (X) (fig. 1) se transformera en une courbe (Σ) (fig. 2), qui continuera à couper la droite ba'_1 en deux points o et o_1 , et par suite cette courbe sera une conique.

On reconnaîtra de même que la transformée du cercle (X') sera une autre conique (Σ') .

Si, dans la fig. I, le cercle (I) se réduit au centre C_o , nous avons déjà vu (n.º 14; 3º) que les cercles (X) et (X') se confondraient: par suite les coniques (Σ) et (Σ') de la figure transformée se confondront aussi en une seule et même conique (σ) .

On arrive ainsi à ce théorème:

THÉORÈME I. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle (x) variable de grandeur, assujetti à couper continuellement, sous des angles donnés e et i , deux cercles également donnés (E) et (I) ; ou à passer par un point donné C_o et à couper, sous un angle donné e , un cercle également donné (E) .

En considérant le centre o du cercle variable (x) comme le point de rencontre des cordes ba'_1 et $b'b''$ des cercles (E) et (I) , coupés par celles-ci, sous les angles constants $(90^\circ - e)$ et $(90^\circ - i)$, que nous représenterons par e' et i' , le théorème précédent se transformera dans le suivant:

THÉORÈME II. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le point d'intersection o de deux cordes ba'_1 et $b'b''$, appartenant respectivement à deux cercles donnés (E) et (I) , et les coupant continuellement sous des angles également donnés e' et i' , de manière que le point d'intersection considéré se trouve équidistant de deux des extrémités b et b' de ces cordes; ou cette conique peut être considérée comme la courbe parcourue par le point o de la corde ba'_1 d'un cercle donné (E) , coupé par celle-ci sous un angle également donné e' de manière que ce point se trouve équidistant d'un point donné C_o , et d'une des extrémités b de cette corde.

28. Si nous considérons les circonférences enveloppes (E'') et (I'') de ces cordes, le point o sera aussi le point de concours des tangentes om_2 et om'_2 à ces circonférences, et la somme algébrique de ces tangentes sera constante, ou égale à la somme ou à la différence des segments bm_2 et $b'm'_2$ ou des demi-cordes

des cercles (E) et (I), égales aux rayons R' et r' des cercles enveloppes (E') et (I') des cordes ba et b'd' (perpendiculaires à ces demi-cordes), en tenant toujours compte du signe des segments respectifs.

En effet, on a (fig. 2)

$$om_2 = ob + b m_2 \dots \dots \dots (32)$$

et

$$om'_2 = ob' + b' m'_2 \dots \dots \dots (33)$$

et en prenant toujours les segments ob et ob' avec le même signe (n.º 16) on aura :

$$om_2 - om'_2 = b m_2 - b' m'_2 \dots \dots \dots (34)$$

or, en représentant par M₁ et M'₁ les points milieux des côtés c₂c'₂ et c₁c'₁ du rectangle auxiliaire, le segment b' m'₂ étant égal à b M'₁ ou b M₁, sera constamment positif ou constamment négatif, selon que le point o décrit l'une ou l'autre des coniques (Σ) et (Σ') : donc, si nous représentons par τ et τ' les segments variables om₂ et om'₂, nous aurons pour l'une des coniques (Σ) :

$$\tau \pm \tau' = R' + r' \dots \dots \dots (35)$$

et pour l'autre conique (Σ')

$$\tau \pm \tau' = R' - r' \dots \dots \dots (36)$$

Ainsi, par une conique quelconque, nous aurons, en général,

$$\tau \pm \tau' = \text{const.} \dots \dots \dots (37)$$

Donc :

THÉORÈME III. — Étant donnés deux cercles (E'') et (I''), si deux tangentes à ceux-ci se déplacent de manière que la somme algébrique des distances τ et τ' des points de contact aux points d'intersection o de ces tangents soit une grandeur constante, les lieux géométriques décrits par ce point d'intersection seront deux coniques (Σ) et (Σ') données de forme et de position.

Si le cercle directeur (I) se réduit à son centre C_0 , on aura $r' = 0$, et la tangente se confondra avec le rayon vecteur $C_0 = p'$ d'où il résulte la relation

$$\tau \pm p' = R' \dots \dots \dots (38)$$

et les deux coniques se confondront en une seule conique (σ), ayant pour un des foyers le point C_0 .

Donc :

THÉORÈME IV. — *Étant donné un cercle (E'') et un point C_0 , si l'une tangente à ce cercle et un rayon vecteur, partant de ce point, se déplacent de manière que la somme algébrique des distances τ et p' , du point de contact et du point donné à celui de l'intersection o de ces droites variables, soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique (σ) donnée de forme et de position.*

29. D'après cela, nous pouvons donner aux cercles enveloppes (E'') et (I'') le nom de *cercles focaux* ou *foyers tangentiels*, et à leurs tangentes τ et τ' le nom de *vecteurs tangentiels* ou *roulants*.

Dans le cas où ces cercles se réduisent à leurs centres ils peuvent recevoir le nom de *points focaux* ou *foyers rayonnants* et les vecteurs correspondants le nom de *vecteurs pivotants* ou *rayonnants*: en réservant la dénomination ordinaire de *foyers* et de *vecteurs* pour exprimer les foyers et les vecteurs, quels qu'ils soient.

Si plusieurs coniques ont un même cercle focal, nous les appelons *monocyclomofocales* ou *monocycloconfocales*.

Quand les coniques auront un même point focal, elles seront nommées *monostigmoconfocales*.

Les coniques ayant les deux mêmes cercles focaux, nous les appellerons *cyclomofocales* ou *cycloconfocales*; et nous donnerons aux coniques le nom de *stigmoconfocales*, quand elles auront les deux mêmes points focaux.

Enfin ces courbes seront dites *monomofocales* ou *monoconfocales* et *homofocales* ou *confocales* suivant qu'elles aient un ou deux mêmes foyers, quels qu'ils soient.

30. *Tracé de la tangente en un point quelconque.* — Voyons maintenant comme la méthode de Roberval, appliquée aux coniques ainsi engendrées, nous donne très-facilement la tangente en un quelconque de leurs points.

Considérons, donc, la conique (Σ), et proposons nous de lui mener la tangente au point o (fig. 2).

Soit o'' un point du lieu (Σ) infiniment voisin du point o , et abaïssons de ce point-là les perpendiculaires $o''o'''$ et $o''o^{iv}$ sur les rayons $C_o o$ et C_o .

Si nous représentons par dt le temps infiniment petit que le point met à aller du point o au point o'' , le rapport $\frac{o o''}{dt}$ sera la vitesse du point. Les rapports $\frac{o o'''}{dt}$ et $\frac{o'' o'''}{dt}$ seront les composantes de cette vitesse suivant $o C_o$ et la perpendiculaire $o''' o''$. De même, $\frac{o o^{iv}}{dt}$ et $\frac{o'' o^{iv}}{dt}$ seront les composantes de la vitesse absolue du point suivant $o C$ et la perpendiculaire $o^{iv} o''$.

Si nous considérons le point mobile o sur les cordes $b a'_1$ et $b' b''$ des cercles (E) et (I), les espaces parcourus sur ces cordes, comptés à partir des points b et b' , seront égaux, et alors les grandeurs des vitesses composantes $\frac{o o'''}{dt}$ et $\frac{o o^{iv}}{dt}$ du point, suivant $o C_o$ et $o C$, ne seront plus que les projections des vitesses égales entre elles, dont le point se trouve animé sur ces mêmes cordes.

En prenant, donc, pour grandeur de ces vitesses égales les rayons ob et ob' du cercle (o), les cordes bb_1 et $b' b'_2$, communes à ce cercle et à chacun des cercles donnés (E) et (I), représenteront les directions des vitesses composantes perpendiculaires aux rayons $C_o o$ et C_o : de manière que, en unissant leur point de concours f au point o , nous aurons la *vitesse absolue* correspondante de ce point, en *grandeur* et en *direction*, et par conséquent la *tangente of* dans le point donné.

Autrement. — En vertu de la rotation des cordes $b a'_1$ et $b' b''$, la vitesse absolue du point générateur o peut être considérée comme la résultante d'une *vitesse de translation* ou de *glissement* le long de ces cordes, et d'une *vitesse de rotation* autour de C et C_o , ou d'*entraînement*.

Puisque le point o se trouve toujours équidistant de b et b' les vitesses de glissement ou relatives seront égales: d'où il s'ensuit que, en représentant ces vitesses par ob et ob' , les vitesses de rotation ou d'entraînement correspondantes seront représentées par les perpendiculaires $bb_1 f$ et $b' b'_2 f$ abaïssées de b et b' sur les

rayons C_o et $C_o o$, qui les coupent en φ et φ' , et la diagonale $o f$ du quadrilatère $o b f b'$ sera la tangente demandée.

Il résulte de là que, si, sur les deux couples de vecteurs tangentiels $m_2 o, m^{IV}_2 o$ et $m'_2 o, m'''_2 o$, nous marquons respectivement les deux couples de segments égaux $o b, o b_1$ et $o b', o b'_2$, les segments $b b_1 \simeq b o - b_1 o$ (*) et $b' b'_2 \simeq b' o - b'_2 o$, se coupant en f , nous donneront la tangente $o f$.

31. Nous pouvons aussi arriver directement à cette construction en regardant le point o comme appartenant successivement à chacun des vecteurs tangentiels $m'_2 o, m^{IV}_2 o$ et $m''_2 o, m'''_2 o$.

En effet, la somme

$$m_2 o + m^{IV}_2 o \pm (m'_2 o + m'''_2 o) = 2(m_2 o \pm m'_2 o)$$

restant constante (n.º 28), il en résulte nécessairement que les vitesses du point suivant ces vecteurs sont égales.

Ainsi les segments $o b$ et $o b_1$ représentant les vitesses égales du point, sur les vecteurs $m_2 o$ et $m^{IV}_2 o$, nous aurons la vitesse de translation $o \varphi \simeq \frac{1}{2}(o b + o b_1)$, dont le segment $b b_1$ se trouve

animé; et, si nous connaissons la vitesse de rotation du point autour de C , ou sa vitesse de glissement sur ce segment, il nous suffirait de la porter sur celui-ci, à partir de son point milieu φ , puis de joindre son extrémité f au point o , et la ligne $o f$, ainsi obtenue, serait la vitesse absolue de ce point.

De même les segments $o b'$ et $o b'_2$, égaux aux précédents, représentant les vitesses sur les vecteurs $m'_2 o$ et $m'''_2 o$, nous aurons la vitesse de translation $o \varphi = \frac{1}{2}(o b' + o b'_2)$ du segment $b' b'_2$,

et en portant sur ce segment, à partir de son point milieu φ' , la vitesse de rotation autour de C_o , et joignant son extrémité au point o , nous aurions encore la vitesse absolue de ce point.

L'extrémité de la ligne qui représente la vitesse absolue du point o , devant se trouver à la fois sur $b b_1$ et $b' b'_2$, sera donc le point f où ces lignes se rencontrent; et par conséquent $o f$ sera cette vitesse ou la tangente dans le point considéré.

(*) Cette notation de la somme géométrique des segments est celle que Mr. Bellavitis adopte dans sa méthode des équipollences, dont les principes seront quelquefois employés dans cette étude.

Dans le cas particulier où les cercles focaux se réduisent à leurs centres C et C_0 , ou deviennent les points focaux de la conique transformée (σ) des coniques (Σ) et (Σ'), nous aurons $ob \simeq ob_1 \simeq o\phi$ et $ob' \simeq ob'_2 \simeq o\phi'$, c'est-à-dire les vecteurs de chaque couple tangentiel, étant équipollents, se confondront avec les rayons Co et C_0o , qui seront alors les vecteurs pivotants ou ordinaires, et nous arriverons au procédé connu pour tirer la tangente en un point d'une conique au moyen des rayons vecteurs respectifs.

32. Le point M_1 , situé sur le vecteur m_2o , étant symétrique des extrémités m'_2 et m''_2 des vecteurs m'_2o et m''_2o , par rapport aux bissectrices des angles m'_2oM_1 et m''_2oM_1 , décrit évidemment un cercle (CM_1) ayant le centre en C et le rayon égal au segment $CM_1 \simeq Cm_2 - M_1m_2$.

De même si nous marquons sur le vecteur m'_2o le segment m'_2M égal à m_2M_1 ou à la somme $om_2 - om'_2$, le point M sera le symétrique de m_2 et m''_2 , par rapport aux bissectrices des angles m_2oM et m''_2oM , et décrira un cercle dont le centre sera C_0 et le rayon $C_0M = CM_1$.

En considérant semblablement les vecteurs relatifs à l'autre conique (Σ'), décrite par le point o' , nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

Nous pouvons donner au cercle (CM_1) le nom de *cercle directeur relatif au foyer* (I'').

La conique (Σ) a deux cercles directeurs égaux correspondants à ses deux foyers; et il en est de même de sa confocale (Σ').

33. Il est évident que, lorsque (fig. 2) la corde ba_1 tourne autour de C , entraînant le rectangle auxiliaire $c_s c'_s c_i c_i$, les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tourneront autour de C_0 et leurs points milieux n_s et n'_s décriront deux cercles ($\sigma_0 n_s$) et ($\sigma_0 n'_s$), dont le centre σ_0 sera le point milieu du segment CC_0 ; d'où il résulte que les enveloppes des perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$ seront deux coniques *stigmaconfocales* (ε) et (ε'), ayant pour points focaux les points C et C_0 : car on sait que le lieu géométrique des projections des points focaux d'une conique sur ses tangentes est un cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre.

Les points N_s et N'_s , où les rayons Cc_s et Cc'_s des cercles (Cc_s) et (Cc'_s) rencontrent les perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$ sont les points de contact de celles-ci avec leurs enveloppes (ε) et (ε'):

attendu que ces points sont les centres des cercles $(N_s C_0)$ et $(N'_s C_0)$, qui passent par C_0 et touchent ces cercles-là, ou alors parce que l'on a évidemment

$$C N_s \pm N_s C_0 = C c_s = \text{const.} \dots \dots (39)$$

et

$$C N'_s \pm N'_s C_0 = C c'_s = \text{const.} \dots \dots (40).$$

D'après cela nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — Une section conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le point de rencontre o de deux tangentes $N_s o$ et $N'_s o$ à deux coniques stigmoconfocales (ε) et (ε') , dont les points de contact N_s et N'_s soient vus de l'un des foyers C sous un angle vecteur constant $N_s C N'_s$: les points focaux C et C_0 des coniques directrices étant les centres des cercles focaux de la conique engendrée.

34. Le point o se trouvant, par construction, équidistant des points C_0, c_s et c'_s , il résulte de cette propriété de la figure la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — Une conique quelconque (Σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle $(o C_0)$ assujetti à passer continuellement par un point donné C_0 et par deux autres points c_s et c'_s de deux cercles concentriques $(C c_s)$ et $(C c'_s)$ également donnés, la distance $c_s c'_s$ entre ces derniers points étant constante.

35. Quand, sans la distance $c_s c'_s = 2.r''$ être nulle, les cercles $(C c_s)$ et $(C c'_s)$ se confondront, il en sera de même des coniques (Σ) et (Σ') , et nous aurons les deux théorèmes suivants, comme des cas particuliers des théorèmes V et VI :

THÉORÈME VII. — Si, autour de l'un des points focaux d'une conique (ε_0) , on fait tourner un angle vecteur de grandeur constante, et que par les points où ses côtés rencontrent la conique on mène deux tangentes à la courbe, le point d'intersection o de ces deux tangentes aura pour lieu géométrique une seconde conique (τ) , donnée de forme et de position (*).

(à suivre).

(*) Voy. *Traité des propriétés projectives des figures*, par Mr. Poncelet, 2.^e édition, t. I, n.^o 480.

Alors que ces points sont les centres des cercles (N.C.) et (N.C.), qui passent par C et touchent ces cercles, au point que l'on a évidemment

SOBRE A INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES ÁS DERIVADAS PARCIAES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

POR

F. GOMES TEIXEIRA

É bem conhecido o methodo de Monge para integrar as equações ás derivadas parciaes lineares de segunda ordem, quando estas equações tem integral intermedio. No presente artigo vou dar um methodo novo para integrar estas equações no caso particular de a funcção arbitraria do integral intermedio conter só x e y . Faço depender esta integração da de duas equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, não simultaneas e independentes, que são tambem lineares. Dou tambem as condições necessarias e sufficientes para haver integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y .

O methodo que apresento não é preferivel ao de Monge, mas serve de base a investigações mais importantes sobre esta doutrina, que mais tarde apresentarei.

Seja proposta a equação ás derivadas parciaes de segunda ordem com duas variaveis independentes

$$F = A r + B s + C t + D = 0 \dots \dots \dots (1)$$

onde é

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx dy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

e onde A, B, C, D são funcções de x, y, z, p, q .

Notemos primeiro que só as equações ás derivadas parciais da fórmula (1) é que podem ter integral intermedio com uma função arbitraria de x e y . É o que se vê derivando relativamente a x e y o integral $v_1 = \varphi(v_2)$, sendo v_2 função de x e y , e eliminando entre as equações resultantes $\varphi'(v_2)$, pois que se chega assim a uma equação da fórmula (1).

Procuremos as condições necessarias e sufficientes para que a equação (1) tenha um integral intermedio com uma função arbitraria de x e y , isto é, da fórmula

$$u = \varphi(x, y) = f(x, y, z, p, q) \dots \dots \dots (2).$$

Derivando esta equação, o que dá

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)r + \left(\frac{df}{dq}\right)s \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)q + \left(\frac{df}{dp}\right)s + \left(\frac{df}{dq}\right)t \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

e, eliminando em (1) tres das seis quantidades z, p, q, r, s, t por meio de (2) e (3), deve vir um resultado tal que, se a função φ fosse conhecida, substituindo-a n'esse resultado, deveria elle tornar-se identicamente nullo, o que não pôde acontecer em quanto tiver alguma das quantidades z, p, q, r, s, t , visto que φ é só função de x e y . Logo quando se eliminam tres das quantidades precedentes, devem desaparecer as outras tres e vir um resultado da fórmula

$$\psi \left[x, y, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) \right] = 0 \dots \dots \dots (4).$$

As condições necessarias e sufficientes para que desapareçam tres das quantidades z, p, q, r, s, t quando se eliminam as outras

tres são, em virtude de um theorema de Jacobi sobre os determinantes funcçionaes:

forma (1) é que podem ser integral intermedio e y o integral $\tau = \varphi(x, y)$, sendo φ função de x e y, e eliminando

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dt}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & 0, & \left(\frac{df}{dp}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots (5)$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & 0, & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dx}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots (5)$$

$$\begin{vmatrix} 0, & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dq}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{df}{dp}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots (6)$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dx}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dx}\right) \end{vmatrix} = 0 \dots (6)$$

$$\begin{vmatrix} 0, & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dy}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0, & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dy}\right), & \left(\frac{d}{d} \frac{df}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
 \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dz}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\
 0, & 0, & \left(\frac{df}{dz}\right), & \left(\frac{df}{dp}\right) \\
 \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d}{dz}\frac{df}{dx}\right), & \left(\frac{d}{dp}\frac{df}{dx}\right) \\
 0, & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d}{dz}\frac{df}{dy}\right), & \left(\frac{d}{dp}\frac{df}{dy}\right)
 \end{vmatrix} = 0 \dots (7)$$

logo estes tres determinantes representam as condições necessarias e suficientes para que a equação (1) tenha um integral intermedio com uma função arbitraria de x e y .

A equação de condição (5) dá

$$\begin{vmatrix}
 A, & B, & C \\
 \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & 0 \\
 0, & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right)
 \end{vmatrix} = 0.$$

Se $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, deve-se eliminar q em lugar de p em (1) por meio da equação (2), o que dá o mesmo determinante multiplicado por $\left(\frac{df}{dq}\right)$; mas $\left(\frac{df}{dq}\right)$ não pôde ser nullo ao mesmo tempo que $\left(\frac{df}{dp}\right)$,

logo deve o determinante ser sempre nullo. Este determinante dá

$$C \left(\frac{df}{dp} \right)^2 + A \left(\frac{df}{dq} \right)^2 - B \left(\frac{df}{dp} \right) \left(\frac{df}{dq} \right) = 0 \dots \dots (8)$$

ou

$$\dots \dots 0 = \left(\frac{df}{dp} \right) = \Omega \left(\frac{df}{dq} \right), \quad \left(\frac{df}{dp} \right) = \Omega' \left(\frac{df}{dq} \right) \dots \dots (9)$$

chamando Ω e Ω' as raizes da equação

$$C \Omega^2 - B \Omega + A = 0 \dots \dots \dots (10).$$

Cada uma das equações (9) é uma equação ás derivadas parciaes lineares de primeira ordem com duas variaveis independentes, e portanto a sua integração é sempre possivel. Temos assim dois valores para o segundo membro da fórmula (2). Substituamos nas equações de condição (6) e (7) as derivadas tiradas do segundo membro de (2), que já é conhecido, e eliminemos depois n'ellas p ou q pela mesma equação (2) para o que não é necessario conhecer a fórmula da funcção φ , que entra no primeiro membro. Se o resultado que assim se obtem é identicamente nullo para ambas as fórmas da funcção f dadas por (9), a proposta tem dois integraes intermedios; se é identicamente nullo para uma só d'estas fórmas, a proposta tem um só integral intermedio da fórma considerada; se não é identicamente nullo para nenhuma das fórmas da funcção f , a proposta não tem integral intermedio da fórma considerada.

Vejamos como se acaba de determinar o integral (2) quando as equações da condição (6) e (7) são satisfeitas. N'este caso a eliminação de tres das quantidades p, q, r, s, t entre as equações (1), (2), (3), leva, como já vimos, a uma equação da fórma (4), que por ser ás derivadas parciaes de primeira ordem com duas variaveis independentes se integra, e dá a fórma da funcção φ , isto é, o primeiro membro de (2), e temos assim o integral intermedio da proposta com uma funcção arbitraria introduzida ou por (9) ou por (4).

A vantagem de proceder verificando as equações de condição (6) e (7) antes de assim começarmos por formar os termos da equação final são aqueles que devem desaparecer, e só depois de se verificar que desapareceram, acham os outros.

De resto, para se possa fazer a verificação, é conveniente, visto que as determinantes (7) differem só na terceira columna, dar-lhes a forma

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dp}\right)^2 & \left(\frac{dF}{dz}\right) & - \\ \left(\frac{df}{dp}\right) & \left(\frac{df}{ds}\right) & \left(\frac{d}{dp} \frac{df}{dx}\right) \\ \left(\frac{df}{dp}\right) & \left(\frac{dF}{dz}\right) & \left(\frac{df}{dz}\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right) & \left(\frac{dF}{ds}\right) & \left(\frac{dF}{dx}\right) \\ 0 & \left(\frac{df}{dp}\right) & \left(\frac{d}{dp} \frac{df}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

$$- \left(\frac{df}{dp}\right)^2 \left(\frac{dF}{dr}\right) \left(\frac{d}{dp} \frac{df}{dx}\right)$$

$$+ \left(\frac{df}{dp}\right) \begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right) & \left(\frac{dF}{ds}\right) \\ \left(\frac{df}{dp}\right) & \left(\frac{df}{dq}\right) \end{vmatrix} \left(\frac{d}{dp} \frac{df}{dz}\right) = 0.$$

Appliquemos esta doutrina á integração da equação

$$rx^2 + 2xys + y^2t = 0.$$

(Continúa).

A equação (10) dá n'este caso

$$\Omega = \frac{x}{y}$$

o que reduz (9) a

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{x}{y} \left(\frac{df}{dq}\right)$$

que integrada, para o que se deverá empregar as equações

$$df = 0, \quad dq + \frac{x}{y} dp = 0,$$

dá o segundo membro de (2), isto é

$$f(x, y, z, p, q) = q + \frac{x}{y} p.$$

As equações de condição (6) e (7) são satisfeitas, pois que os determinantes

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} & 1 & 0 & \frac{1}{y} \\ 0 & \frac{x}{y} & 0 & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^2 & 2xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} & 1 & 0 & \frac{1}{y} \\ 0 & \frac{x}{y} & 0 & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}$$

são nullos. Logo haverá um integral com uma função arbitraria de x e y .

Vem pois

$$\varphi(x, y) = q + \frac{x}{y} p$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{p}{y} + \frac{x}{y} r + s$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -\frac{x p}{y^2} + \frac{x}{y} s + t$$

e, substituindo na proposta os valores de r e t tirados d'estas ultimas equações e o valor de q tirado da primeira,

$$x \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + y \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0$$

que dá

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

logo o integral intermedio da proposta é

$$q + \frac{x}{y} p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

sendo φ a funcção arbitraria.

Passando á doutrina geral faremos ainda duas observações:

1.^a Por ser a equação proposta do primeiro grau relativamente a r , s e t , a equação (4) será tambem do primeiro grau relativamente a $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ e $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$, pois que as fórmulas de transformação (3) são do primeiro grau relativamente a todas estas quantidades.

2.^a Se, antes de fazer a eliminação de tres das quantidades p , q , r , s e t na proposta por meio de (2) e (3), verificarmos que as equações de condição (6) e (7) têm logar, podemos nas fórmulas (1), (2), (3) annular as duas das quantidades p , q , r , s e t , que devem desaparecer pela eliminação, e proceder depois á eliminação que fica assim mais simples.

Discutamos agora a equação (10).
 1.º Se A, B, C forem só funcções de x e y, virá; integrando (9) e as equações de condição (6) e (7) reduzir-se-ão ás seguintes:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \left(\frac{dF}{dq}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & 1, & -\Omega \\ \Omega, & 1, & 0, & \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \\ 0, & \Omega, & 0, & \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \left(\frac{dF}{dz}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & 0, & \Omega \\ \Omega, & 1, & 0, & \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \\ 0, & \Omega, & 0, & \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(A + B\Omega) \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) - \Omega \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \Omega^2 \left[\left(\frac{dF}{dq}\right)\Omega - \left(\frac{dF}{dp}\right) \right] = 0$$

$$\frac{dF}{dz} = 0.$$

Logo para haver no caso que estamos considerando um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y , é necessario que a proposta não contenha z , e que tenha logar a equação de condição precedente, sendo Ω uma das raizes de (10).

Haverá dois integraes intermedios, quando a equação de condição precedente fôr satisfeita por ambas as raizes da equação de condição (10).

Passemos outra vez ao caso de A, B, C serem funcções de x, y, z, p, q .

2.º Se fôr $\Omega = \Omega'$, para o que é necessaria a condição

$$B^2 - 4AC = 0,$$

os dois integraes intermedios, se os houver, reduzir-se-ão a um só, e os argumentos das funcções arbitrarías do integral primitivo serão eguaes.

3.º Se fôr $A = 0$, será

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = \frac{B}{C}$$

e portanto

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = \frac{B}{C} \cdot \left(\frac{df}{dq}\right)$$

logo uma das fórmás da funcção f não conterá p .

4.º Se fôr $C = 0$, será

$$\Omega = \infty, \quad \Omega' = \frac{A}{B}$$

logo

$$\left(\frac{df}{dq}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{A}{B} \left(\frac{df}{dq}\right)$$

e portanto uma das fórmás da funcção f não conterá q .

5.º Se fôr ao mesmo tempo $A = 0, C = 0$, virá

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = \infty$$

logo

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right) = 0$$

isto é, uma das fórmulas da função f não conterá p e a outra não conterá q .

6.º Se fôr ao mesmo tempo $A = 0$ e $B = 0$, virá

$$\Omega = 0 \text{ e } \Omega' = 0$$

e portanto sempre

$$\left(\frac{dF}{dp}\right) = 0$$

isto é, as duas fórmulas da função f não conterão p .

7.º Se fôr $B = 0$ e $C = 0$, virá

$$\Omega = \infty, \quad \Omega' = \infty$$

e será sempre

$$\left(\frac{df}{dq}\right) = 0$$

isto é, as duas fórmulas de f não conterão q .

O estudo d'estes diversos casos é importante, pois a elles se reduzem muitas vezes os casos mais complicados. Vamos, pois, occupar-nos d'elles.

I. *Caso de ser* $C = 0$. — Consideremos a equação ás derivadas parciaes

$$F = Ar + Bs + D = 0$$

onde B e D são funcções de x, y, z, p, q .

Já vimos que n'este caso a equação (5) reduz-se ás duas seguintes :

$$\left(\frac{df}{dq}\right) = 0, \quad A \left(\frac{df}{dp}\right) = B \left(\frac{df}{dq}\right).$$

A segunda solução não leva o resultado notavel.

Considerando, pois, só a solução $\left(\frac{df}{dq}\right) = 0$, vem

que dá $u = f(x, y, z, p) \dots \dots \dots (11)$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right) &= \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)r \\ \left(\frac{du}{dy}\right) &= \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)q + \left(\frac{df}{dp}\right)s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12).$$

A segunda equação de condição (6) dá

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \frac{dF}{dq}, & \frac{dF}{dp} \\ 0, & 0, & 0, & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp}, & 0, & 0, & \frac{df}{dx} \\ 0, & \frac{df}{dp}, & \frac{df}{dz}, & \frac{df}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$B \frac{df}{dz} \left(\frac{dF}{dq} \frac{df}{dp} \right) = 0 \dots \dots \dots (13).$$

A funcção f deve pois ser dada por esta equação, e como ella não deve conter q , é necessario e basta que a proposta seja da fórma

$$F = Ar + Bs + Hq + G = 0$$

sendo A, B, H e G funcções de x, y, z, p .

A equação (13) reduzir-se-ha então á forma

$$B \frac{df}{dz} - H \frac{df}{dp} = 0$$

que dá

$$u = f\lambda (B dp + H dz) \dots \dots \dots (14),$$

chamando λ o factor que torna integravel a expressão com duas variaveis $B dp + H dz$.

A terceira equação de condição (7) dá

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \frac{dF}{dz}, & \frac{dF}{dp} \\ 0, & 0, & \lambda H, & \lambda B \\ \lambda B, & 0, & \frac{d}{dx} \frac{df}{dz}, & \frac{d}{dx} \frac{df}{dp} \\ 0, & \lambda B, & \frac{d}{dz} \frac{df}{dy}, & \frac{d}{dz} \frac{df}{dp} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{dF}{ds} \left[H \frac{d}{dp} \frac{df}{dy} - B \frac{d}{dz} \frac{df}{dy} \right] + A B \lambda^2 \left[H \frac{d}{dp} \frac{df}{dx} - B \frac{d}{dz} \frac{df}{dx} \right]$$

$$- B \lambda \left[H \frac{dF}{dp} - B \frac{dF}{dz} \right] = 0 \dots \dots \dots (15).$$

Se esta equação fôr satisfeita identicamente quando se elimina n'ella quatro das quantidades r, s, p, q, z , por meio da equação proposta e das equações (12) e (14), a proposta terá um integral intermedio da fórma (11). N'este caso vamos achar u .

Para isso derivando (14) vem

$$\frac{du}{dy} = \frac{df}{dy} + \lambda(Hq + Bs),$$

e, substituindo na proposta o valor de $Hq + Bs$ tirado d'esta e r tirado de (12), resulta

$$\begin{aligned} \lambda A \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{df}{dp} \left(\frac{du}{dy} \right) + G \lambda \frac{df}{dp} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{df}{dp} \\ - A \lambda \frac{df}{dx} - A \lambda \frac{df}{dz} p = 0. \end{aligned}$$

Eliminando n'esta equação uma das quantidades p ou z por meio de (14), deve desaparecer a outra, por ter logar a equação de condição (15), e virá uma equação da fórma

$$\psi \left(x, y, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \right) = 0,$$

que é ás derivadas parciaes de primeira ordem com duas variaveis independentes, e que, integrada, dará u com uma funcção arbitraria de x e y . Substituindo depois este valor de u em (14), teremos o integral intermedio da proposta.

II. *Caso de ser* $A = 0$. — Tudo o que dissémos no caso anterior, tem logar n'este, mudando x em y , p em q , r em t , C em A e vice-versa.

III. *Caso de ser* $A = 0$ e $C = 0$. — Já vimos que n'este caso a equação (5) reduz-se a

$$\frac{df}{dp} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dq} = 0.$$

Resolve-se pois a questão ou pelo caso I fazendo nas fórmulas $A=0$, ou pelo caso II fazendo nas fórmulas $C=0$. Se ambos os casos forem applicaveis, obtêm-se assim dois integraes de primeira ordem da proposta.

IV. *Caso de ser* $B=0$ *e* $C=0$. — A equação (8) dá n'este caso

$$\left(\frac{df}{dq}\right)^2 = 0$$

logo será sempre

$$u = f(x, y, z, p)$$

que dá

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p + \frac{df}{dp}r.$$

N'este caso a equação proposta é

$$F = Ar + D = 0$$

e para que desapareça q quando n'ella se elimina r e p por meio das precedentes, é necessario que seja (fórmula 6)

$$\frac{df}{dp} = 0$$

logo u não poderá conter p , o que não póde ser, logo a proposta não póde conter n'este caso um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y .

Exceptua-se o caso de a proposta não conter q , pois então a equação de condição (6) tem logar, sem ser necessario que a funcção f não contenha p , mas n'este caso a equação integra-se como se fosse ás derivadas ordinarias, junctando ao integral em logar de uma constante arbitraria, uma funcção arbitraria de y .

V. *Caso de ser* $B=0$ *e* $A=0$. — Applica-se a este caso tudo o que se disse no anterior, mudando x em y , p em q , r em t , e vice-versa.



TROIS THÉORÈMES RELATIFS A LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

M. BIRGER HAUSTED

I

La fraction irréductible $\frac{M}{N}$ ne contenant à son dénominateur que des facteurs premiers différants de 2 et 5, soit convertie en fraction décimale purement périodique à k chiffres dans la période. Les restes partiels de la division, dûs à cette conversion, soient

$$b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, b_r, b_{r+1}, \dots, b_k.$$

THÉORÈME.—A chaque valeur de N corresponde un nombre p , indépendant de M et de r , pour lequel on a

$$b_r \equiv M p^{k-r} \pmod{N}.$$

On a en premier lieu

$$M 10^{k-r} \equiv b_{k-r} \pmod{N},$$

qui multipliée par la congruence

$$M p^{k-r} \equiv b_r \pmod{N},$$

donne

$$M^2 (10p)^{k-r} \equiv b_r b_{k-r} \pmod{N};$$

mais

$$b_r b_{k-r} \equiv M^2 \pmod{N}$$

reduit la congruence ci-dessus à

$$(10p)^{k-r} \equiv 1 \pmod{N};$$

ainsi l'on a que la congruence

$$b_r \equiv M p^{k-r} \pmod{N}$$

est satisfaite quand p est racine de la congruence linéaire

$$10 p \equiv 1 \pmod{N}.$$

Ce théorème donne occasion à la règle de multiplication assez curieuse ci-dessous nommée :

Un nombre arbitraire a , ayant un chiffre, soit multiplié par un autre nombre p parfaitement arbitraire, et le nombre b des unités du produit ap soit écrit à gauche de a . Ce soit multiplié par p , leur produit bp additionné à les dizaines de ap , et les unités c de cette somme soient écrites à gauche de b . Ce soit multiplié par p , le produit cp additionné à les dizaines de bp , et les unités de la somme placées à la gauche de c , et ainsi de suite jusqu'au moment où une telle somme devient égale au nombre a , et le nombre

$$\dots cba$$

peut être multiplié par k nombres entiers ou fractions par changement cyclique des chiffres, dont le nombre est aussi k .

Soit

$$P = t \cdot 10^{k-1} + s \cdot 10^{k-2} + \dots + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$$

et

$$Pp = a \cdot 10^{k-1} + t \cdot 10^{k-2} + \dots + c \cdot 10 + b,$$

l'on aura

$$pP = a \cdot 10^{k-1} + \frac{P-a}{10},$$

qui donne

$$\frac{a}{10p-1} = \frac{P}{10^k-1}.$$

Ainsi P est le nombre composé par les k chiffres dans la période de la fraction décimale, en laquelle est convertie la fraction irréductible

$$\frac{M}{N} = \frac{a}{10^p - 1}$$

Exemple

$$\begin{array}{r} P = 0689655172413793103448275862 \\ 3 \\ \hline 2068965517241379310344827586 \end{array}$$

P est ici la période de la fraction décimale en laquelle est convertie la fraction $\frac{2}{29}$, qui sera multiplié par changement cyclique des chiffres par 28 nombres de la forme $\frac{M'}{2}$, en substituant par M' chacun des nombres 1, 2, 3, ... 28.

II

Destination du nombre de termes d'un déterminant ne contenant pas des éléments de la série diagonale.

Je suppose donné un déterminant de n^2 éléments. Σ_n désigne le nombre des termes qui ne contiennent pas des éléments de la série diagonale. Maintenant je décompose le déterminant en ses sous-déterminants, dont le nombre est n . Seulement un de ceux-ci sera multiplié par un élément de la série diagonale du déterminant donné. Dans chacun de tous les autres sous-déterminants de $(n-1)^2$ éléments ils se trouvent $n-2$ éléments de la série diagonale du déterminant donné en des lignes parallèles à la diagonale du sous-déterminant. En changeant successivement les piles (séries verticales) et les séries (séries horizontales) ces $n-2$ éléments viennent entrer dans la diagonale dans laquelle encore se trouve un élément étranger à la série diagonale du déterminant donné. Nous l'appellerons a_2 . Le nombre des termes du sous-déterminant qui ne contiennent pas des éléments de la série diagonale est Σ_{n-1} .

Parmi les termes restants a_n se trouve la seule et tous les termes de la série diagonale dans Σ_{n-2} termes. L'élément a_n ne faisant pas partie de la série diagonale du déterminant donné, l'on aura

$$\Sigma_n = (n-1)(\Sigma_{n-1} + \Sigma_{n-2}).$$

On a aussi

$$(n-2)\Sigma_{n-3} = \Sigma_{n-1} - (n-2)\Sigma_{n-2}$$

laquelle équation est déduite de la première en y substituant $n-1$ par n , et par conséquent

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_{n-2} - (n-2)\Sigma_{n-3} = (-1)^n,$$

qui, pour n pair, devient

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_2 - 2\Sigma_1 = +1,$$

et, pour n impair, devient

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_3 - 3\Sigma_2 = -1.$$

Donc

$$\Sigma_n = n\Sigma_{n-1} + (-1)^n,$$

$$\Sigma_{n-1} = (n-1)\Sigma_{n-2} + (-1)^{n-1},$$

.....

$$\Sigma_3 = 3\Sigma_2 - 1,$$

$$\Sigma_2 = 0 + 1,$$

lequel algorithme donne

$$\Sigma_n = [n] \left(\frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]} + \frac{1}{[4]} - \dots + \frac{(-1)^n}{[n]} \right)$$

$$= [n] \left(1 - \frac{1}{[2]} + \frac{1}{[3]} - \frac{1}{[4]} + \dots + \frac{(-1)^n}{[n]} \right).$$

Maintenant on sait que

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]} + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{[n]} + \frac{(-1)^{n+1}}{[n+1]} + \frac{(-1)^{n+2}}{[n+2]} + \dots$$

donc

$$\Sigma_n \frac{[n]}{e} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots \right)$$

Mais la quantité

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

est toujours numériquement moindre que $\frac{1}{n+1}$, ainsi l'on aura pour tous les valeurs positives de n que numériquement

$$\Sigma_n \frac{[n]}{e} < \frac{1}{2}$$

et par conséquent Σ_n est l'entier le plus approché de $\frac{[n]}{e}$.

III

Développement de $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ en fraction continue de la forme

$$\alpha_0 + \beta_0\sqrt{c} + \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1\sqrt{c} + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2\sqrt{c}} + \dots}$$

Les lettres désignent des nombres entiers réels positifs ou négatifs, c est positif et constant, a et b sont indépendants l'un de l'autre et peuvent avoir tous les valeurs entiers de $-\infty$ à $+\infty$. Le système de la forme $a + b\sqrt{c}$ a tous ses propriétés essentielles communes à le système ordinaire de nombres entiers. Par exemple, deux nombres de cet système sont inégales, car l'équation

$$a + b\sqrt{c} = \alpha + \beta\sqrt{c}$$

conduira à l'équation impossible

$$\frac{a - \alpha}{b - \beta} = \sqrt{c}.$$

Au contraire on peut toujours, quand $a + b\sqrt{c}$ soit donné, trouver un autre nombre dans le même système $\alpha + \beta\sqrt{c}$ dont la différence de celui-là est moindre qu'une quantité finie donnée quelconque. Il en résulte que les nombres de le système de la forme $a + b\sqrt{c}$ ne se rangent pas comme les nombres entiers de le système ordinaire.

Tous les calculs faits avec les nombres de la forme $a + b\sqrt{c}$ donnent des nombres de la même forme. Par exemple,

$$(1) a_0 + b_0\sqrt{c} \pm (a_1 + b_1\sqrt{c}) = a_0 \pm a_1 + (b_0 \pm b_1)\sqrt{c} = A + B\sqrt{c}$$

$$(2) (a_0 + b_0\sqrt{c})(a_1 + b_1\sqrt{c}) = a_0 a_1 + b_0 b_1 c \pm (a_0 b_1 + a_1 b_0)\sqrt{c} = A_1 + B_1\sqrt{c}$$

$$(3) \frac{a_0 + b_0\sqrt{c}}{a_1 + b_1\sqrt{c}} = A_2 + B_2\sqrt{c}$$

où

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c b_1 \\ b_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}}, \quad B_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}}$$

L'on aura de même

$$(4) \quad \sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} = x + y \sqrt{c}$$

si

$$(5) \quad a_0 = x^2 + y^2 c,$$

$$(6) \quad b_0 = 2xy.$$

On voit par les équations (5) et (6) que $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$ devient imaginaire dans le système de la forme $a + b\sqrt{c}$ pour a_0 négatif, que x et y ont les mêmes signes ou les signes contraires suivant et que b est positif ou négatif.

Si on résout les équations (5) et (6), l'on aura

$$(7) \quad x = \pm \sqrt{\frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - b_0^2 c}}{2}}$$

$$(8) \quad y = \mp \sqrt{\frac{a_0 \mp \sqrt{a_0^2 - b_0^2 c}}{2c}}$$

Si $a_0 + b_0 \sqrt{c}$ n'est pas nombre carré dans le système de la forme $a + b\sqrt{c}$, $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$ deviendra nombre irrationnel.

Les explications ci-dessus données constatent l'impossibilité de trouver deux nombres entiers consécutifs dans le notre système entre lesquels la quantité irrationnelle soit placée. D'abord il faut donner nécessairement une définition de la valeur approximative de

$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$. Je dis donc que $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}$ sera la valeur approximative de $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$ si α_0 et β_0 sont les nombres entiers les plus prochains aux valeurs de x et y trouvées par les équations (5) et (6) et $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}$ est au même temps moindre que $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$.

Le nombre irrationnel $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$ peut être développé en une fraction continue dont les dénominateurs sont des nombres entiers dans le notre système. La méthode pour faire, cela est en tous ses points essentiels analogue à celui qu'on suive dans le système des nombres ordinaires.

Or, l'on a

$$\begin{aligned} \sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} &= (\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}) + \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} - (\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c})}{1} \\ &= \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c} + \frac{1}{x_1}, \end{aligned}$$

où $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}$ est la valeur approximative de $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$, et

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} + \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}}{a_0 + b_0 \sqrt{c} - (\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c})^2} = \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} + \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}}{m_0 + n_0 \sqrt{c}} \\ &= \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{c} + \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} + m_1 + n_1 \sqrt{c}}{m_0 + n_0 \sqrt{c}} = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{c} + \frac{1}{x_2}, \end{aligned}$$

où est

$$m_0 + n_0 \sqrt{c} = a_0 + b_0 \sqrt{c} - (\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c})^2$$

et

$$m_1 + n_1 \sqrt{c} = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c} - (m_0 + n_0 \sqrt{c})(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{c}),$$

et enfin α_1 et β_1 sont les nombres entiers qui sont les valeurs approximatives des déterminants

$$\frac{2 \begin{vmatrix} \alpha_0 & n_0 c \\ \beta_0 & m_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & n_0 c \\ n_0 & m_0 \end{vmatrix}}, \quad \text{et} \quad \frac{2 \begin{vmatrix} m_0 & \alpha_0 \\ n_0 & \beta_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & n_0 c \\ n_0 & m_0 \end{vmatrix}}$$

en même temps que $(m_0 + n_0 \sqrt{c})(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{c})$ est moindre que

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} + \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}.$$

Ici comme dans tous les opérations suivantes où l'on opère avec $\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}}$, la valeur approximative $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c}$ la remplace.

Ensuite l'on aura

$$x_2 = \frac{(m_0 + n_0 \sqrt{c}) (\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} - (m_1 + n_1 \sqrt{c}))}{m_2 + n_2 \sqrt{c}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} - (m_1 + n_1 \sqrt{c})}{m_3 + n_3 \sqrt{c}},$$

où

$$m_3 + n_3 \sqrt{c} = \frac{m_2 + n_2 \sqrt{c}}{m_0 + n_0 \sqrt{c}} = \frac{a_0 + b_0 \sqrt{c} - (m_1 + n_1 \sqrt{c})^2}{m_0 + n_0 \sqrt{c}}$$

et

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{c} + \frac{\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} + m_4 + n_4 \sqrt{c}}{m_3 + n_3 \sqrt{c}},$$

$\alpha_2 + \beta_2 \sqrt{c}$ étant la valeur approximative de x_2 .

En continuant ce développement l'on aura

$$\sqrt{a_0 + b_0 \sqrt{c}} = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{c} + \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{c}} + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 \sqrt{c}} + \dots$$

L'application de la methode aux exemples $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2 + 5\sqrt{2}}$ peut servir à la faire mieux comprendre.

I. Je mets

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{2} + \frac{1}{x_1}$$

où α_0 et β_0 sont les nombres entiers plus prochaines à faire identiques les relations:

$$5 \geq \alpha_0^2 + 2\beta_0^2$$

$$2 \geq 2\alpha_0\beta_0.$$

En posant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 1$, la relation

$$1 + \sqrt{2} < \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

sera satisfaite. $1 + \sqrt{2}$ sera la valeur approximative de $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ et dans les opérations suivantes $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ doit être remplacée par $1 + \sqrt{2}$.

Ainsi l'on a

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})}{1} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{x_1}$$

et

$$x_1 = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{2} + \frac{1}{x_2},$$

où α_1 et β_1 sont les nombres entiers les plus approximatifs aux valeurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 2 \end{vmatrix}$$

c'est à dire $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, ce qui donne

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{x_2}$$

et

$$x_2 = \frac{2(\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2}}{1}$$

$$= 2 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})}{1} = 2 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{x_3}$$

*

Ainsi l'on aura

$$\sqrt{5+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{x_3}$$

II. De la même manière on trouve

$$\begin{aligned} & \sqrt{2+5\sqrt{2}} \\ &= 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{7+4\sqrt{2}} + \frac{1}{-1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+3\sqrt{2}+\dots}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \sqrt{2+5\sqrt{2}} \\ &= 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \dots \end{aligned}$$

Nous voyons ici qu'il-y-a souvent plusieurs manières de développer une quantité irrationnelle du système de la forme $a + b\sqrt{c}$ en fraction continue de le même système.

SOBRE UM PROBLEMA

POR

L. F. MARREAS FERREIRA

Determinar o numero de aneis de dois cadeados, satisfazendo estes ás seguintes condições:

- a) o numero de aneis d'um é igual ao das letras, que o outro contém em cada anel;
- b) os aneis de cada um têm igual numero de letras;
- c) o numero de arranjos das letras é o mesmo para os dois cadeados.

SOLUÇÃO

Se n'um cadeado forem x e y respectivamente os numeros de aneis e de letras, será x^y o numero de arranjos que n'elle admittem as letras.

Para o outro cadeado o numero de arranjos é representado por y^x .

Será por hypothese $x^y = y^x$; equação que deve ser resolvida em numeros inteiros.

Teremos:

$$\frac{x}{\text{Log. } x} = \frac{y}{\text{Log. } y}$$

e sendo m um coefferente arbitrario podemos fazer:

$$x = m \cdot y$$

$$\text{Log. } x = m \cdot \text{Log. } y$$

d'onde se deduz :

$$\text{Log. } x = \text{Log. } m + \text{Log. } y = m \cdot \text{Log. } y$$

ou :

$$y = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)}$$

$$x = m^{\left(\frac{m}{m-1}\right)}$$

Os valores de y e x resultando d'aquelles que forem arbitrados a m , temos portanto que fazer todas as hypotheses possiveis a respeito d'esta quantidade, para se determinarem as soluções do problema.

m negativo.

N'esta hypothese $\frac{1}{m-1}$ (expoente do valor de y) deve ser numero inteiro positivo e par; mas sendo m negativo, o expoente torna-se egualmente negativo, concluindo-se que a hypothese é inadmissivel.

m positivo e fraccionario.

Esta hypothese é inadmissivel, porque qualquer que seja o expoente de m , o resultado nunca será inteiro.

m inteiro e positivo.

N'este caso $\frac{1}{m-1}$ deve ser inteiro e positivo; mas logo que $(m-1)$ seja maior que a unidade, será $\frac{1}{m-1} < 1$; para $m=1$ vem $y = \infty$, $x = \infty$ e para $m=2$ vem $y=2$, $x=4$.

Excluindo portanto as soluções obtidas para o caso de $m=1$, impossiveis de realisar, resultam como soluções unicas para o problema :

$$y = 2 \quad x = 4.$$

SOBRE UMA FORMULA INTEGRAL

POB

J. A. MARTINS DA SILVA

Alferes alumno de Artilheria

Vamos dar a deducção de uma formula, que supponho nova, applicavel a todas as expressões $F(x + \alpha)$ susceptiveis de se desenvolverem segundo as potencias de e^{-x} e propria para servir na determinação de varios integraes definidos.

Seja :

$$F(x + \alpha)$$

a funcção desenvolvida segundo as potencias de e^{-x} ; por conseguinte :

$$F(x + \alpha) = A + B_1 e^{-x} + B_2 e^{-2x} + \dots + B_n e^{-nx} + \dots$$

$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ são independentes de α e dependentes de x .

Suppondo agora o desenvolvimento applicado aos valores imaginarios, temos :

$$F(x + \alpha t \sqrt{-1}) = A + B_1 e^{-x t \sqrt{-1}} + B_2 e^{-2 x t \sqrt{-1}} + \dots + B_n e^{-n x t \sqrt{-1}} + \dots$$

$$F(x - \alpha t \sqrt{-1}) = A + B_1 e^{x t \sqrt{-1}} + B_2 e^{2 x t \sqrt{-1}} + \dots + B_n e^{n x t \sqrt{-1}} + \dots$$

d'onde :

$$\begin{aligned}
 F(x+\alpha t\sqrt{-1}) - F(x-\alpha t\sqrt{-1}) &= -B_1(e^{\alpha t\sqrt{-1}} - e^{-\alpha t\sqrt{-1}}) \\
 &\quad - B_2(e^{2\alpha t\sqrt{-1}} - e^{-2\alpha t\sqrt{-1}}) \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad - B_n(e^{n\alpha t\sqrt{-1}} - e^{-n\alpha t\sqrt{-1}}) \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

mas :

$$e^{n\alpha t\sqrt{-1}} = \cos. n\alpha t + \sqrt{-1} . \text{sen. } n\alpha t$$

$$e^{-n\alpha t\sqrt{-1}} = \cos. n\alpha t - \sqrt{-1} . \text{sen. } n\alpha t$$

e :

$$e^{n\alpha t\sqrt{-1}} - e^{-n\alpha t\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} . \text{sen. } n\alpha t$$

portanto :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{-1}} [F(x+\alpha t\sqrt{-1}) - F(x-\alpha t\sqrt{-1})] &= -2B_1 . \text{sen. } \alpha t \\
 &\quad - 2B_2 . \text{sen. } 2\alpha t \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad - 2B_n . \text{sen. } n\alpha t \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{(F(x+\alpha t\sqrt{-1}) - F(x-\alpha t\sqrt{-1}))}{t} dt &= \\
 -2B_1 \int_0^\infty \frac{(\text{sen. } \alpha t)}{1+t^2} dt - 2B_2 \int_0^\infty \frac{(\text{sen. } 2\alpha)}{1+t^2} dt - \dots \\
 - 2B_n \int_0^\infty \frac{(\text{sen. } n\alpha t)}{1+t^2} dt - \dots
 \end{aligned}$$

e como :

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\text{sen. } n \alpha t}{t}\right)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \cdot (1 - e^{-n\alpha})$$

resulta :

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{(F(x + \alpha t \sqrt{-1}) - F(x - \alpha t \sqrt{-1}))}{1+t^2} dt =$$

$$- B_1 \pi \cdot (1 - e^{-\alpha})$$

$$- B_2 \pi \cdot (1 - e^{-2\alpha})$$

$$- \dots \dots \dots$$

$$- B_n \pi \cdot (1 - e^{-n\alpha})$$

$$- \dots \dots \dots$$

$$= \pi \cdot [B_1 e^{-\alpha} + B_2 e^{-2\alpha} + \dots + B_n e^{-n\alpha} + \dots$$

$$- B_1 - B_2 - \dots - B_n - \dots]$$

$$= \pi \cdot [F(x + \alpha) - (A + B)]$$

sendo :

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_n + \dots$$

Para $\alpha = 0$, é :

$$F(x) = A + B$$

logo :

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^\infty \frac{(F(x + \alpha t \sqrt{-1}) - F(x - \alpha t \sqrt{-1}))}{1+t^2} dt =$$

$$= \pi \cdot [F(x + \alpha) - F(x)].$$

A hypothese $\alpha = 0$ é permittida e a formula ultima é por consequencia applicavel a todas as expressões $F(x + \alpha)$, susceptiveis de se desenvolverem segundo as potencias de $e^{-\alpha}$.

Façamos duas applicações da formula :

I. $F(x) = \frac{1}{x}$; temos então :

$$F(x + \alpha t \sqrt{-1}) - F(x - \alpha t \sqrt{-1}) = -\frac{2\alpha t \sqrt{-1}}{\alpha^2 t^2 + x^2}$$

$$F(x + \alpha) - F(x) = -\frac{\alpha}{x(x + \alpha)}$$

logo :

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(\alpha^2 t^2 + x^2)(1 + t^2)} = \frac{\pi}{2x \cdot (x + \alpha)}$$

resultado igual ao que obteríamos, se fizéssemos a mesma hypothese $F(x) = \frac{1}{x}$ na formula :

$$\int_0^{\infty} \frac{F(x + \alpha t \sqrt{-1}) + F(x - \alpha t \sqrt{-1})}{1 + t^2} dt = \pi \cdot F(x + \alpha)$$

de Abel (vide *Tratado de calculo differencial e integral* do sr. Bertrand, tomo II, pag. 171).

Fazendo :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \text{---} \alpha = x \geq 0 \\ 2.^{\circ} \text{---} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

vem :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.^{\circ} \text{---} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{\pi}{4} \\ 2.^{\circ} \text{---} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

II. $F(x) = \frac{1}{x^n}$. A hypothese :

$$\begin{cases} \alpha t = z \cdot \text{sen. } \varphi \\ x = z \cdot \text{cos. } \varphi \end{cases}$$

dá :

$$F(x + \alpha t \sqrt{-1}) - F(x - \alpha t \sqrt{-1}) = -\frac{2\sqrt{-1}}{z^n} \cdot \text{sen. } n \varphi$$

$$z = \sqrt{\alpha^2 t^2 + x^2}$$

$$\varphi = \text{arc.} \left(\text{tang.} = \frac{\alpha t}{x} \right)$$

logo :

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \cdot \frac{\text{sen.} \left[n \text{arc.} \left(\text{tang.} = \frac{\alpha t}{x} \right) \right]}{(\alpha^2 t^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{x^n} - \frac{1}{(x+\alpha)^n} \right].$$

Sendo $\alpha = x$, resulta :

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen.} [n \text{arc.} (\text{tang.} = t)]}{t(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}} dt = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2};$$

para $n = 1$, é :

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen.} [\text{arc.} (\text{tang.} = t)]}{t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Se tomássemos agora φ para variavel em logar de t , teriamos :

$$t = \frac{x}{\alpha} \operatorname{tang.} \varphi$$

$$dt = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x d\varphi}{\alpha^2 \cos.^2 \varphi + x^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi}$$

$$z^{-n} = \frac{\cos.^n \varphi}{x^n}$$

logo :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos.^n \varphi \cdot \operatorname{sen.} n \varphi d\varphi}{(\alpha^2 \cos.^2 \varphi + x^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi) \operatorname{tang.} \varphi} = -\frac{\pi}{2\alpha^2} \left[\frac{x^n}{(x+\alpha)^n} - 1 \right];$$

para $\alpha = x$, tiramos :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos.^n \varphi \cdot \operatorname{sen.} n \varphi}{\operatorname{tang.} \varphi} d\varphi = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2};$$

no caso de ser $n = 1$, vem :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

integral definido já conhecido.

QUESTÕES PROPOSTAS N.ºs 14 E 15

Do sr. Birger Hansted, de Copenhague, recebemos as seguintes questões para propôr n'este Jornal:

Sendo p um numero primo maior que 41, e r o menor numero primo, exceptuando a unidade, que satisfaz á congruencia

$$p \equiv \pm r \pmod{40},$$

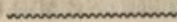
demonstrar que a congruencia

$$10^{\frac{p-1}{k}} \equiv 1 \pmod{p}$$

é verdadeira, quando

$$10^{\frac{r-1}{k}} \equiv 1 \pmod{r}.$$

Dada uma figura plana composta de um hexagono regular, sobre os lados da qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se pôde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou não congruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular.



RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE
 ASSUJETTI A COUPER CONTINUUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS
 SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS (*)

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Suite)

THÉORÈME VIII.—*Une conique quelconque (σ) peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre o d'un cercle (oC_0) assujetti à passer continuellement par un point donné C_0 et à couper un cercle également donné suivant une corde $c_s c'_s$ de grandeur constante.*

36. Les cercles (x) et (x'), et leurs cercles complémentaires (x_c) et (x'_c), passant par un même point b du cercle (E), se coupent deux à deux sur le cercle (I) aux points b' , b'' , b''_1 , b'_2 (comme il avait lieu dans la fig. 1), étant maintenant de même applicable au cas général ou à la figure transformée (fig. 2) ce qui nous avons dit au n.º 9 sur les tangentes à ces cercles dans leurs points d'intersection.

Il est clair que, analoguement à ce que l'on a noté au n.º 6, dans la figure transformée les droites on_s et $o'n_s$ concourent encore

(*) **Errata:**—Page 132, Theor. III—Au lieu de *aux points*, lisez *au point*; et au lieu de *les lieux etc.*, lisez *le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique (Σ) donnée.*

Page 133, ligne 36—Au lieu de *comme*, lisez *comment*.

Page 135, ligne 25—Substituez $=$ par $\hat{=}$.

Page 136, ligne 2—Supprimez $=$ ou *deviennent... c'est-à-dire*.

Page 136, ligne 18—Au lieu de $C_0 M = C_0 M_1$, lisez $C_0 \hat{M}$.

Page 136, ligne 24—Au lieu de *directeurs égaux correspondants*, lisez *directeurs correspondants*.

dans un même point t de la corde ba , et les droites on'_s et $o'n'_s$ dans le point t' , ces points étant les intersections des tangentes $b't$, $b''t$ et b''_1t' , b'_2t' aux cercles (x) et (x') dans les points b' , b'' et b'_1 , b'_2 , ou les centres des cercles (x_c) et (x'_c) , et qui décrivent deux autres coniques (Σ_c) et (Σ'_c) , en général, distinguées des coniques (Σ) et (Σ') décrites par les centres de deux premiers cercles.

Nous pouvons donner aux coniques (Σ_c) et (Σ'_c) le nom de *complémentaires* des coniques (Σ) et (Σ') , attendu la dénomination adoptée pour leurs cercles générateurs.

37. Soient (x_3) et (x'_3) (fig. 3) les deux cercles générateurs des coniques (Σ) et (Σ') tangents à l'extrémité a de la corde ba du cercle (E) , et désignons par o_3 et o'_3 , leurs centres évidemment situés sur la corde ab_3 de ce même cercle, équipollente à la corde ba' , sur laquelle se trouvent les centres o et o' des cercles générateurs correspondants (x) et (x') .

Tirons les droites oo_3 et $o'o'_3$, qui unissent les centres des deux couples de cercles correspondants (x) , (x_3) et (x') , (x'_3) , et qui couperont évidemment la corde ba en un même point T ; et par le point milieu m_1 de cette corde abaissons sur les droites To_3 et $T'o'_3$ les perpendiculaires m_1PE et $m_1P'E'$, qui rencontrent ces droites aux points P et P' , et la droite CC_0 aux points E et E' .

Comme nous savons, ces perpendiculaires sont les cordes ou sécantes (réelles ou idéales) communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (x) , (x_3) et (x') , (x'_3) , ou leurs axes radicaux.

Considérons maintenant le rectangle auxiliaire $c''_s c'''_s c''_i c'_i$, relatif aux points o_3 et o'_3 , les côtés $c''_s m'_e c''_i$ et $c'''_s m'_d c''_i$ étant respectivement symétriques des côtés $c'_s m_e c'_i$ et $c_s m_d c_i$ du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$ par rapport à Cm_1 .

Représentons par n''_s et n''_i les points milieux des vecteurs $C_0 c''_s$ et $C_0 c''_i$; et par M'' et M''' ceux des droites oo_3 et $o'o'_3$, ou leurs points de rencontre avec le rayon Cm_1 du cercle (E') ; et finalement soient M , M_2 les points d'intersection de la droite $c_s c''_i$ avec ce rayon et la corde ab_3 du cercle (E) , et M' , M'_2 les points d'intersection de ces deux dernières droites avec la droite $c_i c''_i$.

Si dans le cercle (I') nous tirons le diamètre $n_s C_0 n_i$, parallèle au diamètre $m_1 C m_0$ du cercle (E') , les droites $m_d n_s n_0$ et $m_d n_i n_0$,

menées par les points milieux m_d , n_s et n_i du côté $c_s c_i$ et des vecteurs $C_o c_s$ et $C_o c_i$, passeront par les extrémités n_{s_0} et n_{i_0} du premier diamètre $n_{s_0} C_o n_{i_0}$: ce qu'on reconnaîtra immédiatement en considérant les triangles égaux $n_s C_o n_{s_0}$, $n_s c_s m_d$, $n_i C_o n_{i_0}$, $n_i c_i m_d$ ou les parallélogrammes $n_{s_0} m_d c_i C_o$ et $C_o c_s m_d n_{i_0}$, au moyen desquels on reconnaîtra aussi que les droites $t o n_s$ et $t o' n_s$ coupent orthogonalement en p_i et p_s les droites $m_d n_s p_i n_{s_0}$ et $m_d p_s n_i n_{i_0}$.

Il est évident que ces deux propriétés auront encore lieu quand, dans les rectangles auxiliaires $c_s c'_s c'_i c_i$ et $c''_s c'''_s c'''_i c''_i$, nous ferons varier la grandeur de leurs côtés parallèles à la corde ab du cercle (E), ou égaux au rayon r'' du cercle (I''); et quand cette corde tournera autour de C .

38. Si nous considérons les points C_o , o , o_3 , o' et o'_3 comme fixes, et faisons coïncider les côtés constants $c'_s c'_i$ et $c''_s c''_i$ des rectangles auxiliaires, les vecteurs $C_o c'_s$ et $C_o c''_s$ ainsi que leurs perpendiculaires $o n'_s$ et $o_3 n''_s$ se confondront respectivement avec le vecteur $C_o M$ et avec la droite $T o o_3$, qui unit les centres o et o_3 des cercles correspondants (x) et (x_3), et par suite ces deux droites se couperont orthogonalement.

De même on reconnaîtra que le vecteur $C_o M'$ sera aussi coupé orthogonalement par la droite $T o' o'_3$, qui unit les centres o' et o'_3 des deux autres cercles correspondants (x') et (x'_3).

On arrive au même résultat en considérant chacun des couples de cercles générateurs $C_o c_s c'_s r_o$, $C_o c''_s c'_s r_o$ et $C_o c_i c'_i r'_o$, $C_o c'''_i c'_i r'_o$, qui, étant circonscrits aux triangles $C_o c_s c'_s$, $C_o c''_s c'_s$ et $C_o c_i c'_i$, $C_o c'''_i c'_i$ (Théor. VI), ont évidemment pour sécantes réelles communes les vecteurs $C_o r_o M$ et $C_o r'_o M'$.

Donc, les cordes $m_1 P E$ et $m_1 P' E'$ communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (x), (x_3) et (x'), (x'_3) passent par les extrémités n_{s_0} et n_{i_0} du diamètre $n_{s_0} C_o n_{i_0}$ du cercle (I), perpendiculaire à la corde ab du cercle (E) (tangente commune à ces cercles-là).

Le vecteur $C_o r r_o M$ sera aussi la sécante réelle commune des deux cercles $C_o n_s o n'_s r$ et $C_o o_3 n'''_s n''_s r$ décrits sur $C_o o$ et $C_o o_3$ comme diamètres; et le vecteur $C_o r' r'_o M'$ la sécante réelle commune des cercles $C_o n_i o' n'_i r'$ et $C_o o'_3 n'''_i n''_i r'$ décrits sur $C_o o'$ et $C_o o'_3$ comme diamètres.

Quand la corde ba du cercle (E) tournera autour de C simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites $m_1 E n_i$ et $m_1 n_o E'$ tourneront aussi autour des points E et E' , qui, comme nous savons, divisent harmoniquement la distance CC_o , entre les centres des cercles donnés, et représentent les points de concours des tangentes (réelles ou imaginaires) communes aux cercles enveloppes (E') et (I) , ou leurs centres d'homothétie.

En effet, puisque pendant la rotation des diamètres $m_1 E m_o$ et $n_o C_o n_i$ des cercles (E') et (I) , les triangles $CC_o M$ et $CC_o M'$ sont respectivement semblables aux triangles $C_o E n_i$ et $C_o E' n_o$, il s'ensuit que les côtés CM , CM' , CC_o et $C_o n_o = n_i C_o$ étant constants, il en sera de même des côtés EC_o et $C_o E$: donc, etc. (*).

En désignant par (x_4) et (x'_4) les cercles générateurs, qui, ayant pour centres les points o_4 et o'_4 de la corde ab_3 du cercle (E) , touchent à l'extrémité b_3 la corde $b_3 a'_1$ de ce cercle, équipollente à sa corde ab , les cordes ou sécantes (réelles ou idéales) communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (x_1) , (x_4) et (x'_1) , (x'_4) , ou tangents aux extrémités de cette corde-là, seront les droites $m_o E n_o$ et $m_o n_i E'$, qui, avec les deux autres cordes considérées $m_1 E n_i$ et $m_1 n_o E'$, détermineront le quadrilatère complet $E' n_o E n_i$, $m_1 m_o$.

Si nous considérons maintenant deux quelconques des couples de cercles (x) , (x_3) , et (x_1) , (x_4) , appartenant à la première suite de cercles, qui coupent les cercles fixes (E) et (I) sous les angles constants e et i , nous reconnaitrons immédiatement que les axes radicaux de ces quatre cercles, pris deux à deux, se coupent aussi au point fixe E_o et, par suite, ce point sera le centre radical de trois cercles quelconques de la suite considérée.

Nous reconnaitrons de même que les axes radicaux de la seconde suite de cercles (x') , (x'_1) , (x'_3) , (x'_4) , . . . , pris deux à deux, passent par le point fixe E' , qui sera donc le centre radical de trois cercles quelconques de cette suite.

(*) Nous pouvons aussi prouver immédiatement que les points E et E' restent fixes, pendant la rotation de ab , en considérant respectivement ces points, les cercles enveloppes (E') et (I) , et les côtés du quadrilatère complet $E' n_o E n_i$, $m_1 m_o$, comme les projections des sommets, des sections circulaires parallèles et des génératrices de deux cônes,

D'après cela nous avons ce théorème :

THÉORÈME IX.—Étant donnés deux cercles (E) et (I), chacune des deux suites des cercles $(x), (x_1), (x_3), (x_4), \dots$ et $(x'), (x'_1), (x'_3), (x'_4), \dots$, qui les coupent sous des angles constants e et i , étant pris trois par trois, ont respectivement pour centres radicaux les centres d'homothétie E et E' des cercles donnés.

Observation.—Il est évident que lorsque le centre radical des deux suites de cercles est intérieur à l'un d'eux il l'est aussi à tous les autres. De même lorsqu'il est extérieur à l'un d'eux, il est extérieur à tous les autres; c'est alors le seul point du plan d'où l'on puisse mener à tous les cercles de chaque suite des tangentes égales, et c'est aussi le centre du seul cercle qui puisse couper tous ces cercles orthogonalement.

39. Supposons encore que nous faisons varier les rectangles auxiliaires considérés de manière que les côtés $c_s c'_i$ et $c''_s c''_i$ restant constants viennent coïncider avec le segment MM' , ou que les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') sont égaux (n.º 37); et représentons par $M_0 M'_0$ et ${}^0 M {}^0 M'$ les côtés $c_s c_i$ et $c'''_s c'''_i$ dans leur position correspondante.

Alors les vecteurs $C_0 c'_s$ et $C_0 c''_s$, ainsi que les perpendiculaires $n'_s o$ et $n''_s o_3$ élevées dans leurs points milieux n_s et n''_s se confondront respectivement avec le vecteur $C_0 M$ et sa perpendiculaire $\theta \omega \pi \mu'' \omega_3$, menée par son milieu ω , laquelle coupe les droites $ab\theta$, ba'_1 , Em_1 , Cm_1 et ab_3 aux points θ , ω , π , μ'' et ω_3 . De même les vecteurs $C_0 c'_i$ et $C_0 c''_i$ et leurs perpendiculaires $n'_i o'$ et $n''_i o'$ aux points milieux n'_i et n''_i se confondront respectivement avec le vecteur $C_0 M'$ et sa perpendiculaire $\theta \omega' \pi' \omega''' \omega'_3$, élevée dans son milieu ω' , laquelle coupe les droites $ab\theta$, ba'_1 , $E'm_1$, Cm_1 et ab_3 aux points θ , ω' , π' , ω''' et ω'_3 .

Au moyen d'une telle variation des rectangles auxiliaires, ou des cercles (I) et (I'), les coniques cycloconfocales (Σ), (Σ') et les stigmoconfocales (ε_1), (ε'_1), engendrées par les points o , o' , et par les points d'intersection N'_s , N'_i des vecteurs $C c'_s$, $C c'_i$ avec les droites on'_s , $o'n'_i$, perpendiculaires aux points milieux n'_s , n'_i des vecteurs $C_0 c'_s$, $C_0 c'_i$, seront respectivement remplacées par les cycloconfocales (Ω), (Ω'), et les stigmoconfocales (Ω_0), (Ω'_0), décrites par les points ω , ω' et par les points μ'' , μ''' .

Ainsi (fig. 4) les droites $\theta \omega \omega_3$ et $\theta \omega' \omega'_3$, qui unissent les centres des deux couples des cercles générateurs correspondants (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3) des coniques (Ω), (Ω') toucheront les coniques

(Ω_0) , (Ω'_0) aux points μ'' , μ''' , lesquelles seront aussi les transformées des premières, quand on aura $R=R'$ et $r=r'$, et par suite ces transformées auront pour cercles générateurs les cercles doubles (μ'') , (μ''') , tangents au cercle (E') au point m_1 et au cercle (I') aux points n'_i et n''_i , évidemment situés sur les axes radicaux $m_1 E$ et $m_1 E'$, ou cordes communes à ces deux couples de cercles générateurs.

Considérons aussi les deux couples de cercles générateurs (fig. 4) (ω_1) , (ω_4) et (ω'_1) , (ω'_4) , des coniques (Ω) et (Ω') , ayant leurs centres ω_1 , ω_4 et ω'_1 , ω'_4 sur les cordes ba_1 et a_1b_3 du cercle (E), et par sécantes communes les droites $m_0 n'_s E$ et $m_0 E' n''_s$, dont les points d'intersection avec les lignes des centres $\omega_1 \omega_4$ et $\omega'_1 \omega'_4$ nous désignons par π_1 et π'_1 .

Si nous prenons sur $m_0 C m_1$ les points N et N', symétriques de M et M' par rapport à C, les lignes des centres $\theta_0 \omega_1 \omega_4 \pi_1 \omega_4$ et $\theta_0 \omega'_1 \omega'_4 \pi'_1 \omega'_4$ des deux couples de cercles considérés seront les perpendiculaires aux vecteurs $C_0 N$ et $C_0 N'$ dans leurs points milieux $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}'_1$, et couperont la corde $a_1 b_3$ de (E) au même point θ_0 , et $m_0 C m_1$ aux points μ''_1 et μ'''_1 , où elles toucheront les coniques (Ω_0) et (Ω'_0) , ou qui représenteront les centres des cercles doubles (μ''_1) et (μ'''_1) , tangents au cercle (E') au point m_0 et au cercle (I') aux points n'_s et n''_s , par lesquels passent les axes radicaux $m_0 n'_s E$ et $m_0 E' n''_s$ des deux couples de cercles considérés (ω_1) , (ω_4) et (ω'_1) , (ω'_4) .

Lorsque nous considérons les deux tangentes $\theta \beta_0 n'_i \alpha_0$ et $\theta \beta'_0 n''_s \alpha'_0$ communes aux deux couples de cercles (ω) , (ω_3) et (ω') , (ω'_3) , qui concourent dans le point θ , étant respectivement β_0 , α_0 et β'_0 , α'_0 les points de contact de ces cercles avec les tangentes, les points milieux n'_i et n''_s des segments $\alpha_0 n'_i \beta_0$ et $\alpha_0 n''_s \beta'_0$, ou cordes de cercle (I), seront évidemment les points de contact entre les cercles doubles (μ'') et (μ''') , et le cercle (I'), ou les points de ce cercle *anti-homologues* du point m_1 du cercle (E'), par rapport aux centres d'homothétie E et E'. Le point θ sera, donc, le centre d'un cercle (θm_1) , qui coupera orthogonalement les cercles (E') et (I'); et par suite ce point, pendant la rotation de la corde $a b$, décrire l'axe radical $\theta \Omega_m$ de ces cercles, ou leur corde commune située à distance finie.

De même si nous considérons les deux tangentes $\theta_0 \alpha_1 n'_{s_0} \beta_1$ et $\theta_0 \alpha'_1 n''_{i_0} \beta'_1$ communes aux deux couples de cercles $(\omega_1), (\omega_1)$ et $(\omega'_1), (\omega'_1)$, concourant dans le point θ_0 , étant respectivement α_1, β_1 et α'_1, β'_1 les points de contact de ces cercles avec les tangentes, les points milieux n'_{s_0} et n''_{i_0} des segments $\alpha_1 \beta_1$ et $\alpha'_1 \beta'_1$ ou cordes du cercle (I) seront évidemment les points de contact entre les cercles doubles $(\mu''_1), (\mu'''_1)$, et le cercle (I'), ou les points anti-homologues du point m_0 du cercle (E'), par rapport aux centres d'homothétie E et E'; et par conséquent le point θ_0 , étant le centre d'un cercle $(\theta_0 m_0)$, coupant orthogonalement les cercles (E') et (I'), se trouvera aussi sur l'axe radical $\theta_0 \Omega_m \theta_0$ de ces cercles.

Maintenant par le point de concours θ_1 des droites $\theta_0 \omega_1 \mu'' \theta_1 \omega_3$ et $\theta_0 \omega'_1 \mu''' \theta_1 \omega'_4$, menons les trois droites ${}^0 a \theta_1 \mu'' b, {}^0 \alpha_0 \theta_1 \mu'' \beta_0$ et ${}^0 \alpha'_1 \mu''' \theta_1 \beta'_1$ respectivement parallèles aux droites $a m_1 b, \alpha_0 n'_{i_0} \beta_0$ et $\alpha'_1 n''_{s_0} \beta'_1$. Représentons par ${}^0 a, \mu'', {}^0 b$ les points d'intersection de la première droite avec les droites $\omega_3 a, \mu'' m_1, \omega b$; par ${}^0 \alpha_0, {}^0 \mu'', {}^0 \beta_0$ ceux de la deuxième avec les droites $\omega_3 \alpha_0, \mu'' n'_{i_0}, \omega \beta_0$; et par ${}^0 \alpha'_1, {}^0 \mu''', {}^0 \beta'_1$ ceux de la troisième avec les droites $\omega'_4 \alpha'_1, \mu''' n''_{s_0}, \omega'_4 \beta'_1$; puis décrivons les deux couples de cercles $(E_i), (E'_i)$ et $(I_e), (I'_e)$, ayant respectivement les segments $C^0 a, C^1 \mu''$ et $C_0 {}^0 \alpha_0, C_0 {}^0 \mu''$ pour rayons et les points C et C_0 pour centres.

Il en résulte que le point θ_1 sera évidemment le centre d'un cercle $(\theta_1 \mu'')$, qui coupe orthogonalement le cercle (I'_e) au point μ'' , et le cercle (E'_i) aux points ${}^0 \mu''$ et ${}^0 \mu'''$, anti-homologues du premier, par rapport aux centres d'homothétie ${}^0 E$ et ${}^0 E'$; et alors le point θ_1 décrira l'axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_1$ de ces mêmes cercles.

Sans qu'il soit besoin de nouvelles considérations, si nous représentons par ${}^0 \mu''_1, {}^0 \mu'''_1$ et μ''_1 les points d'intersection des vecteurs $C_0 \mu''_1, C_0 \mu'''_1$ et $C \mu''_1$ avec leurs perpendiculaires $\theta_2 {}^0 \mu''_1, \theta_2 {}^0 \mu'''_1$ et $\theta_2 \mu''_1$ abaissées du point de concours θ_2 des droites $\theta_0 \omega_1 \mu'' \omega_3 \theta_2$ et $\theta_0 \omega'_1 \mu''' \omega'_4 \theta_2$, nous voyons immédiatement que ce point sera le centre d'un cercle $(\theta_2 \mu''_1)$, que coupe orthogonalement le cercle (I'_e) au point μ''_1 , et le cercle (E'_i) aux points ${}^0 \mu''_1$ et ${}^0 \mu'''_1$, anti-homologues du premier, par rapport aux centres d'homothétie ${}^0 E$ et ${}^0 E'$, et par suite il se trouvera de même sur l'axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_2$ de ces cercles.

Les triangles isocèles semblables $m_1 \mu'' n'_i$ et ${}^1\mu'' {}^0\mu''$, donnent
 ${}^0\mu'' n'_i = m_1 {}^1\mu''$, d'où

$$C^1 \mu'' = C_0 n'_i = r', \quad C_0 {}^0\mu'' = C m_1 = R'$$

et

$$C^0 a = C_0 \alpha_0 = r, \quad C_0 {}^0\alpha_0 = C a = R$$

et donc les cercles (E_i) , (E'_i) et (I_e) , (I'_e) seront respectivement égaux aux cercles (I) , (I') et (E) , (E') , et symétriques de ceux-ci, par rapport au point milieu σ_0 de $C C_0$.

D'après cela il est évident que les centres ω , ω_3, \dots , et $\omega'_1, \omega'_4, \dots$, des cercles $(\omega^0 b)$, $(\omega_3^0 a), \dots$, et $(\omega'_1 \alpha'_1)$, $(\omega'_4 \beta'_1), \dots$, coupant alors les cercles (E_i) et (I_e) sous les angles i et e engendreront encore les coniques (Ω) et (Ω') ; et de même les centres μ'' , \dots , et μ'''_1, \dots , des cercles doubles $(\mu'' {}^1\mu'')$, \dots , et $(\mu'''_1 {}^1\mu''')$, \dots , engendreront les coniques (Ω_0) et (Ω'_0) .

Tirons dans le cercle focal (E'') des coniques (Ω) et (Ω') le diamètre de contact $m_2 C^0 m_2$ (fig. 4) des vecteurs tangentiels $m_2 \omega$ et ${}^0m_2 \omega_3$, et dans l'autre cercle focal (I'') , égal au premier, le diamètre de contact $m^{\vee}_2 C_0 {}^0m^{\vee}_2$ des vecteurs tangentiels $m^{\vee}_2 \omega$ et ${}^0m^{\vee}_2 \omega_3$.

Le premier diamètre de contact, étant équidistant des tangentes ${}^1\mu'' \theta_1$ et ${}^1\mu''_1 \theta_2$ au cercle (E'_i) aux extrémités de son diamètre ${}^1\mu'' C {}^1\mu''_1$, passera par le point milieu θ_m du segment $\theta_1 \theta_2$ de l'axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_2$, et par le point de concours θ_c des cordes $\omega \mu'' \omega_3$ et $\omega_1 \mu''_1 \omega_4$ de la conique (Ω) , ou tangentes de la conique (Ω_0) , duquel nous abaissons la perpendiculaire $\theta_c M_{c_2} M_c M_{c_1}$ sur les droites $\alpha_0 \omega_3$, $n'_i \mu''$ et $\beta_0 \omega$, étant M_{c_2} , M_c et M_{c_1} leurs points d'intersection, et la perpendiculaire $\theta_c N_{c_2} N_c N_{c_1}$, sur les droites $\beta_1 \omega_4$, $n'_s \mu''_1$ et $\sigma_1 \omega_1$, étant N_{c_2} , N_c et N_{c_1} leurs points d'intersection. Ce point θ_c sera donc le centre d'un cercle $(\theta_c M_c)$ qui coupe orthogonalement le cercle $(C_0 M_c)$ aux points M_c et N_c , ainsi que le cercle limite C , et alors il décrira l'axe radical $\theta_c \Omega_c$ de ces cercles.

Les triangles isocèles $C_0 \mu'' M$ et $C \mu'' M_c$ donnant $C_0 M_c = C M$, nous aurons $C_0 M_{c_2} = C M_2$, et par conséquent les cercles $(C_0 M_c)$, $(C_0 M_{c_2})$ seront égaux aux cercles $(C M)$, $(C M_2)$, et symétriques de ceux-ci par rapport au point σ_0 , centre du segment $C_0 C$.

Il en résulte évidemment que la conique (Ω) , qui était engendrée par les centres des cercles (ωM_1) , $(\omega_3 M_2)$, . . . , coupant sous un angle constant e_1 le cercle (CM_1) , et orthogonalement le cercle $(C_0 m^v_2)$ ou (I') , égal au cercle (E') , sera aussi engendrée par les centres des cercles (ωM_{c_1}) , $(\omega_3 M_{c_2})$, . . . , coupant sous le même angle e_1 le cercle $(C m_2)$ ou (E') . De même la conique (Ω_0) , qui était déterminée par le centre du cercle double $(\mu'' C_0)$, passant par le point focal C_0 et touchant le cercle (CM) , sera également engendrée par le centre du cercle double $(\mu'' C)$ passant par l'autre point focal C et touchant le cercle $(C_0 M_c)$.

Le diamètre $m_2 C_0 m_2$ du cercle focal (I') , passe aussi par le point de concours θ'_c des cordes $\omega' \omega'_3$ et $\omega'_1 \omega'_4$ de la conique (Ω') , ou tangentes de la transformée (Ω_0) : car ce diamètre, passant par le sommet θ_c du quadrilatère $\theta_c \theta_1 \theta'_c \theta_2$, $\theta \theta_0$, et par le point milieu θ_m de la diagonale $\theta_1 \theta_2$, sera lui-même la diagonale $\theta_c \theta'_c$. La démonstration directe serait tout à fait analogue à celle relative au point θ_c .

Du point θ'_c abaissons la perpendiculaire $M'_{c_2} \theta'_c M'_c M'_{c_1}$ sur les droites $\alpha'_0 \omega'_3$, $n''_0 \mu'''$ et $\beta'_0 \omega'$, les points M'_{c_2} , M'_c et M'_{c_1} étant leurs intersections, et la perpendiculaire $N'_{c_1} N'_c \theta'_c N'_{c_2}$ sur les droites $\alpha'_1 N'_{c_1}$, $n''_0 \mu'''_1$ et $\beta'_1 \omega'_4$, étant N'_{c_1} , N'_c et N'_{c_2} leurs points d'intersection. Ce point θ'_c étant alors le centre d'un cercle $(\theta'_c M'_c)$, coupant orthogonalement le cercle $(C_0 M'_c)$ aux points M'_c et N'_c et le cercle limite C , se trouvera continuellement sur l'axe radical $\theta'_c \Omega'_c$ de ces cercles.

Comme précédemment on reconnaîtra que les cercles $(C_0 M'_c)$, $(C_0 M'_{c_2})$ seront égaux aux cercles (CM') , (CM'_2) , et symétriques de ceux-ci, par rapport au point σ_0 , et que la conique (Ω') , qui était engendrée par les centres des cercles $(\omega' M'_1)$, $(\omega'_1 M'_2)$, . . . , coupant sous un angle constant e'_1 le cercle (CM'_1) , et orthogonalement le cercle $(C_0 m^v_2)$ ou (I') , égal au cercle (E') , sera aussi engendrée par les centres des cercles $(\omega' M'_{c_1})$, $(\omega'_3 M'_{c_2})$, . . . , coupant sous le même angle e'_1 le cercle $(C_0 M'_{c_2})$, et orthogonalement le cercle $(C m_2)$ ou (E') . La conique (Ω'_0) , qui était engendrée par le centre du cercle double $(\mu''' C_0)$, passant par le point focal C_0 et touchant le cercle (CM') , sera de même déterminée par le centre du cercle double $(\mu''' C)$, passant par l'autre point focal C et touchant le cercle $(C_0 M'_c)$. (à suivre).

QUELQUES TRANSFORMATIONS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
 LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS
 PAR SUBSTITUTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE

PAR

M. BIRGER HANSTED

Soit proposée l'équation

$$(1) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

En considérant le signe de différentiation $\frac{d}{dx}$ comme coefficient de y , et les indices de différentiation comme des exposants des puissances de $\frac{d}{dx}$ on peut écrire (1) sous la forme symbolique :

$$(2) y \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - k \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \nu \right) = 0$$

si est

$$(3) \varphi(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_1 r + a_0 \\ = (r - \alpha)(r - \beta) \dots (r - k)(r - \lambda) \dots (r - \nu).$$

Substituons donc en (2)

$$(4) v = y \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - k \right)$$

et nous aurons

$$(5) \quad v \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \nu \right) = 0,$$

sans regarder si (3) a des racines égales ou non.

Nous avons donc :

Si l'intégral général de l'équation différentielle linéaire

$$y \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - k \right) = 0$$

de l'ordre p est un intégral particulier de l'équation différentielle linéaire d'ordre n (2), on peut par la substitution (4), transformer (2) en une équation différentielle linéaire (5) d'ordre $n-p$, et l'on aura que chaque intégral particulier de (5) sera aussi intégral particulier de (2).

De cette théorème on déduit un autre de plus grand intérêt, savoir :

L'équation différentielle linéaire d'ordre p

$$y \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - k \right) = f(x)$$

peut être transformée dans une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre $m+p$ et à coefficients constants

$$y \left(\frac{d}{dx} - \alpha \right) \left(\frac{d}{dx} - \beta \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - k \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \nu \right) = 0$$

quand $f(x)$ est l'intégral complet v d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre m

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \nu \right) v = 0.$$

Substituons en (1)

$$(6) \quad y = e^{rx} \cdot z$$

et nous aurons

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{[n-1]} \varphi^{(n-1)}(r) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ & + \frac{1}{[n-2]} \varphi^{(n-2)}(r) \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots + \varphi(r) \cdot z \end{aligned} \right\} = 0$$

ou

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} & z \left(\frac{d}{dx} - (\alpha - r) \right) \left(\frac{d}{dx} - (\beta - r) \right) \\ & \dots \left(\frac{d}{dx} - (k - r) \right) \left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (\nu - r) \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Pour $\alpha = r$ et $\frac{dz}{dx} = v$, (8) se transforme en

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} & v \left(\frac{d}{dx} - (\beta - r) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (k - r) \right) \left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r) \right) \\ & \dots \left(\frac{d}{dx} - (\nu - r) \right) \end{aligned} \right\} = 0$$

qui, à cause de $\varphi(r) = (r - \alpha) \varphi_1(r)$, dévient

$$(10) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{1}{[n-2]} \varphi^{(n-2)}_1(\alpha) \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} \\ & + \frac{1}{[n-3]} \varphi^{(n-3)}_1(\alpha) \frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \dots + \varphi_1(\alpha) \cdot v \end{aligned} \right\} = 0.$$

Soit

$$\alpha = \beta = \dots = k = r, \quad (8)$$

ou

$$\varphi(r) = (r - \alpha)^p \varphi_2(r);$$

(8) se transforme par la substitution

$$\frac{d^p z}{dx^p} = w$$

en

$$(11) \quad w \left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (\nu - r) \right) = 0$$

ou

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} & \left(\frac{d^{n-p} w}{dx^{n-p}} + \frac{1}{[n-p-1]} \varphi^{(n-p-1)}_2(\alpha) \frac{d^{n-p-1} w}{dx^{n-p-1}} \right. \\ & \left. + \dots + \varphi_1(\alpha) \cdot w \right) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Les équations (11) et (12) proviennent aussi de la substitution

$$w = z \left(\frac{d}{dx} - (\alpha - r) \right) \left(\frac{d}{dx} - (\beta - r) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (k - r) \right)$$

quand α, β, \dots, k sont tous inégales. Dans (12) α peut être changé à chaque une des autres quantités β, γ, \dots, k , et ainsi $p-1$ nouvelles équations différentielles sont trouvées. Tous ceux sont liés l'une à l'autre à une relation certaine. En prenant, par exemple, pour r la valeur β , (11) donne

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} & \left(\frac{d^{n-p} w_1}{dx^{n-p}} + \frac{1}{[n-p-1]} \varphi^{(n-p-1)}_2(\beta) \frac{d^{n-p-1} w_1}{dx^{n-p-1}} \right. \\ & \left. + \dots + \varphi_2(\beta) \cdot w_1 \right) = 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

(12) et (13) résultent ici des substitutions

$$w = \frac{dz}{dx} \left(\frac{d}{dx} - (\beta - \alpha) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (k - \alpha) \right)$$

$$w_1 = \frac{dz}{dx} \left(\frac{d}{dx} - (\alpha - \beta) \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - (k - \beta) \right)$$

d'où il résulte

$$w_1 = e^{(\beta - \alpha)x} w.$$

QUESTÕES PROPOSTAS N.ºs 16 E 17 (*)

Sendo dadas n quantidades positivas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, e formando com ellas as expressões

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad \sqrt{\frac{\sum a_1 a_2}{n(n-1) \cdot 2}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sum a_1 a_2 a_3}{n(n-1)(n-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}}, \dots, \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

demonstrar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt{\frac{\sum a_1 a_2}{n(n-1) \cdot 2}} > \sqrt[3]{\frac{\sum a_1 a_2 a_3}{n(n-1)(n-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

$$> \dots > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

J. PEROTT.

Sendo dado um quadrado magico formado por n^2 numeros distintos, pergunta-se de quantos modos é possivel permutar estes n^2 numeros, sem que o quadrado magico cesse de existir.

BIRGER HANSTED.

(*) Errata: — Na primeira das questões propostas no numero anterior em lugar de k deve ser 2.

NOTICIA SOBRE G. BELLAVITIS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Por participação da esposa e do filho do professor Bellavitis, vimos de saber a triste noticia de que falleceu em Padua este illustre mathematico, que ainda ha pouco havia collaborado n'este Jornal, resolvendo algumas questões de Geometria, usando do seu bello methodo das equipollencias.

Dotado de uma vastissima erudição, escreveu sobre todos os ramos da mathematica, deixando uma grande e valiosa collecção de memorias, que lhe abriram as portas de todas as academias e sociedades scientificas de Italia.

Era, com effeito, socio effectivo do Instituto de Veneza, da Academia dos Lynces de Roma, um dos quarenta da Sociedade Italiana, socio correspondente das academias ou sociedades scientificas de Veneza, Padua, Bolonha, Bassano, Udine, Napoles, Treviso, Palermo, Urbino, Modena, Torim, Bordeaux, etc.

Era tambem senador do reino de Italia.

Não fallarei n'esta breve noticia de todos os trabalhos scientificos de Bellavitis, direi só algumas palavras sobre o seu trabalho capital — o methodo das equipollencias —, pelo qual é principalmente conhecido na Europa.

Depois de algumas tentativas da parte de Kühn e Buée, Argand, em 1808, chegou a representar geometricamente as quantidades imaginarias por meio de rectas tomadas em grandeza e direcção. Depois extendeu as definições de somma e producto de linhas, usadas na Geometria, ás linhas dadas em grandeza e direcção, e viu que se chegava aos mesmos resultados que sommando e multiplicando imaginarios.

Substituii, pois, as demonstrações algebricas feitas com imaginarios, que nada significavam por construcções geometricas com

um sentido bem determinado. O fim de Argand era dar demonstrações rigorosas dos theoremas a que se chegava na Algebra com os imaginarios, e deu apenas uma ligeira indicação do uso que a sua theoria poderia ter em Geometria.

Esta theoria de Argand, que é a base dos trabalhos mais importantes dos tempos modernos, ficou por muitos annos esquecida, até que Bellavitis e Gauss se occuparam d'ella sem ter conhecimento dos trabalhos da Argand.

Bellavitis, depois de chegar a estender as definições de somma e multiplicação ás linhas consideradas em grandeza e direcção, lembrou-se de considerar esta generalisação das operações como meio de resolver questões geometricas. Aqui se separam Argand e Bellavitis. Aquelle apenas toca na Geometria e preoccupado só com os imaginarios, vai dar demonstrações rigorosas dos resultados a que se chegava na Algebra, usando d'essas expressões sem sentido; este tracta de aproveitar esta generalisação das operações como meio de resolver questões de Geometria plana. Este novo methodo de Geometria, que elle desenvolveu com tanto successo, foi chamado methodo das equipollencias, e publicado pela primeira vez em 1832 nos *Annaes do Instituto Lombardo-Veneziano*.

Depois em 1833 publicou no *Poligrafo de Verona* algumas applicações ao triangulo e ás curvas.

Bellavitis quando publicou a sua primeira Memoria, não imaginava, como elle diz, a generalidade que podia dar-se ao novo methodo, e as vantagens que elle tinha na resolução de muitas questões de Geometria analytica plana. Considerava-o apenas como um meio de derivar de propriedades de pontos collocados sobre uma linha recta propriedades de pontos collocados sobre um plano. Em breve, porém, lhe reconheceu a importancia tanto nas questões de Geometria elementar, como nas questões mais elevadas da theoria das curvas, notando que por elle se simplificavam as soluções graphicas dos problemas geometricos elementares e os calculos das questões relativas ás linhas curvas, por introduzir no calculo os pontos em logar das suas coordenadas, realisando assim o desejo manifestado por Carnot.

Publicou, pois, nos *Annaes do Instituto Lombardo-Veneziano* uma segunda Memoria em 1837, desenvolvendo mais o methodo e a applicação á theoria das curvas, e uma terceira em 1843 em que applica á solução graphica de alguns problemas geometricos.

Emfim, na collecção das Memorias da *Sociedade italiana das sciencias de Modena* publicou uma Memoria intitulada — *Sposizione del Metodo delle equipollenze*, onde dá ao novo methodo geometrico uma fórma definitiva. Esta Memoria importante foi traduzida em francez e em bohemio.

Depois fez innumeraveis applicações do methodo das equipollencias ás questões de Geometria elementar e á theoria das curvas, ou deduzindo propriedades conhecidas por meios mais simples, do que os empregados anteriormente, ou descobrindo propriedades novas. As Memorias em que se occupa d'estas applicações estão espalhadas pelas collecções das sociedades scientificas de Italia; não daremos aqui a sua lista por ser muito extensa.

Publicou uma *Revista dos Jornaes* que chegou ao volume XV, onde resume alguns trabalhos publicados nas Revistas de sciencias mathematicas dos diversos paizes, em que mostrou que possuia em alto grau a qualidade de condensar em pequeno espaço, sem lhe fazer perder a clareza, as doutrinas de que se ia occupando. Esta *Revista* é tambem preciosa pelas indicações bibliographicas que dá relativamente ás questões de que tracta.

Revelou ainda a qualidade que tinha de resumir muito bem as doutrinas nos seus livros para ensino, taes como nos Resumos das *Lições de Algebra* e das *Lições de Geometria Descritiva*, que dava na Universidade de Padua.

Terminamos aqui esta breve noticia. O nosso fim foi só chamar a attenção dos mathematicos portuguezes para os trabalhos d'este sabio, e principalmente para o seu importante methodo das equipollencias.

Coimbra, novembro de 1880.

INDICE

- Soluzione trovata col metodo delle equipollenze, dal Prof. G. Bellavitis, pag. 3.
Estudo sobre o problema proposto no n.º 40 do vol. I, por F. da Ponte Horta, pag. 7.
- Sur la décomposition des fractions rationnelles, par F. Gomes Teixeira, pag. 33.
- Sobre um problema de mechanica applicada, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 42.
- Resolução da questão proposta no n.º 4, por Craveiro Lopes, pag. 46.
- Extracto de uma carta do Prof. G. Bellavitis a F. Gomes Teixeira, pag. 49.
- Sobre a questão proposta n.º 11, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 50.
- Recherches syntétiques et analytiques sur le cercle variable assoujéti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles également donnés, par A. Schiappa Monteiro, pagg. 54, 130 e 174.
- Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} f(\sin x, \cos x) dx$, par M. Ch. Hermite, pag. 65.
- Sobre a area lateral e volume de uma cunha conica, por A. Schiappa Monteiro, pagg. 68, 84 e 110.
- Sobre a equação do segundo grau, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 77.
- Resolução da questão proposta n.º 12, por G. Bellavitis, pag. 96.
- Solução da questão proposta no n.º 1 do vol. II empregando o methodo das equipolencias e sua comparação com a solução geometrica elemental, por A. Schiappa Monteiro, pag. 97.
- Sobre a questão proposta n.º 13, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 126.
- x Sobre a integração das equações as derivadas parciaes lineares de segunda ordem, por F. Gomes Teixeira, pag. 138.
- Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres, par M. Birger Hansted, pag. 154.
- y Sobre um problema, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 165.
- Sobre uma formula integral, por J. A. Martins da Silva, pag. 167.
- ✓ Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire a coefficients constants par substitution d'une nouvelle variable, par M. Birger Hansted, pag. 183.
- Noticia sobre G. Bellavitis, por F. Gomes Teixeira, pag. 189.
- Questões propostas, pagg. 6, 48, 49, 76, 173 e 188.