SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º I DO VOL. II EMPREGANDO O METHODO DAS EQUIPOLLENCIAS E SUA COMPARAÇÃO COM A SOLUÇÃO GEOMETRICA ELEMENTAR

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Advertencia

1. Este problema, por nós proposto, foi elegantemente resolvido pelo sr. Craveiro Lopes, na pag. 46 do vol. II d'este Jornal, empregando um processo similhante ao nosso: em vista do que, como já dissemos tambem a pag. 68 d'este volume, só mais tarde tencionavamos fazer algumas observações e apresentar os nossos estudos geraes sobre esta questão e sobre outras publicadas n'este mesmo Jornal.

Dando-se, porém, o caso do sabio professor Bellavitis publicar na pag. 49 d'este mesmo volume algumas observações sobre a solução do sr. Craveiro Lopes, não podemos deixar de dizer agora algumas palavras sobre esta questão em especial, começando por tomar a liberdade de resolver o problema proposto, empregando o *methodo das equipollencias*, ou a theoria geometrica das quantidades complexas, visto reconhecermos que este notavel mathematico não tenciona occupar-se da respectiva solução, recorrendo, como de costume, a este fecundissimo methodo, do qual, melhor do que ninguem, sabe tirar o maior partido possivel.

Para mais uma vez estabelecermos a comparação entre o methodo das equipollencias e o methodo synthetico elementar em questões d'esta ordem, tractaremos tambem da solução synthetica do problema proposto, e acompanharemos este estudo com as observações que julgamos indispensaveis.

Questão proposta

Sendo dados dois circulos (A) *e* (B), *tendo uma corda real commum* I J, *e um terceiro circulo qualquer* (C), *conduzir por um dos extremos* I *d'esta corda uma transversal* I X Z Y, *de modo que córte os tres circulos* (A), (B) *e* (C) *respectivamente em pontos* X, Y *e* Z, *taes, que os segmentos* X Z *e* X Y *estejam n'uma razão dada* $\frac{m}{n}$.

Solução empregando as equipollencias

2. *Primeira solução.*— A condição do problema será expressa pela equipollencia

$$\frac{XZ}{XY} \triangleq \frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ou

$$XZ - \frac{m}{n}.XY \triangleq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

e tomando o ponto fixo I para origem dos segmentos X Z e X Y, teremos

$$IZ - IX - \frac{m}{n} IY + \frac{m}{n} IX \triangleq 0 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Pelo centro C do circulo (C), tire-se a secante $II'CI''$, que o córta nos pontos I' e I''; e pelos centros A e B dos circulos (A) e (B) tire-se a recta A B.

Representando por z e ε^u a grandeza e a inclinação d'uma das secantes procuradas I Z do circulo (C), será

$$CZ \triangleq IZ - IC \triangleq z.\varepsilon^u - IC \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

e pondo

$$CZ \triangleq \varepsilon^t.I'C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

teremos

$$z.\varepsilon^u - IC \triangleq \varepsilon^t.I'C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Para eliminarmos ε^t multiplicaremos a equipollencia (6) pela sua conjugada

$$z.\varepsilon^u - \mathrm{cj\,IC} \triangleq \varepsilon^{-t}.\mathrm{cj\,I'C} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

e virá

$$z^2 - z(\varepsilon^u.\mathrm{cj\,IC} + \varepsilon^{-u}.\mathrm{IC}) \triangleq (\mathrm{I'C})^2 - (\mathrm{IC})^2 \ldots\ldots (8)$$

ou

$$z^2 - z(\varepsilon^u.\mathrm{cj\,IC} + \varepsilon^{-u}.\mathrm{IC}) \triangleq -\mathrm{II'}.\mathrm{II''} \ldots\ldots\ldots (9)$$

por ser

$$(\mathrm{I'C} - \mathrm{IC})(\mathrm{I'C} + \mathrm{IC}) \triangleq -\mathrm{II'}.\mathrm{II''} \ldots\ldots (10)$$

d'onde se tira

$$z.\varepsilon^u \triangleq \mathrm{IZ} \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj\,IC} - \varepsilon^u.\frac{\mathrm{II'}.\mathrm{II''}}{z} + \mathrm{IC} \ldots\ldots (11).$$

Podemos ainda ter a expressão de IZ em funcção de IC e da relação k entre I'C e IC: porquanto será

$$\mathrm{CZ} \triangleq k.\varepsilon^t.\mathrm{IC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)'$$

d'onde

$$z.\varepsilon^u - \mathrm{IC} \triangleq k.\varepsilon^t.\mathrm{IC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)'$$

e portanto

$$z.\varepsilon^u \triangleq \mathrm{IZ} \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj\,IC} + \varepsilon^u.\frac{k^2-1}{z}(\mathrm{IC})^2 + \mathrm{IC} \ldots (11)'.$$

Representando por x a grandeza da corda IX do circulo (A), teremos

$$\mathrm{AX} \triangleq \mathrm{IX} - \mathrm{IA} \triangleq x.\varepsilon^u - \mathrm{IA} \ldots\ldots\ldots (12)$$

e pondo

$$\mathrm{AX} \triangleq \varepsilon^{t'}.\mathrm{IA} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

virá

$$x.\varepsilon^u - \mathrm{IA} \triangleq \varepsilon^{t'}.\mathrm{IA} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Multiplicando esta equipollencia pela sua conjugada

$$x.\varepsilon^{-u} - \mathrm{cj\,IA} \triangleq \varepsilon^{-t'}.\mathrm{cj\,IA} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

obtem-se

$$x.\varepsilon^u \triangleq \mathrm{IX} \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj\,IA} + \mathrm{IA} \ldots\ldots\ldots (16).$$

De modo analogo acharemos

$$\mathrm{IY} \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj\,IB} + \mathrm{IB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Substituindo, pois, na equipollencia (3) os valores de I Z, I X e I Y, vem

$$\varepsilon^{2.u}\left(\text{cj}\,AC-\frac{m}{n}.\text{cj}\,AB\right)-\varepsilon^{u}.\frac{II'.II''}{z}+AC-\frac{m}{n}AB\simeq 0\ldots(18).$$

Tomando sobre A B um ponto L tal, que seja

$$AL\simeq\frac{m}{n}.AB\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

teremos

$$AC-\frac{m}{n}.AB\simeq AC-AL\simeq LC\ldots\ldots\ldots(20)$$

e a equipollencia (18) tornar-se-á

$$\varepsilon^{2.u}.\text{cj}\,LC-\varepsilon^{u}\frac{II'.II''}{z}+LC\simeq 0\ldots\ldots\ldots(21)$$

ou

$$\varepsilon^{2.u}.\text{cj}\,LC-\varepsilon^{u}.\frac{1-k^2}{z}(IC)^2+LC\simeq 0\ldots\ldots(21)'$$

d'onde

$$\varepsilon^{u}.\text{cj}\,LC+\varepsilon^{-u}.LC\simeq\frac{II'.II''}{z}\ldots\ldots\ldots(22)$$

ou

$$\varepsilon^{u}.\text{cj}\,LC+\varepsilon^{-u}.LC\simeq\frac{1-k^2}{z}(IC)^2\ldots\ldots(23).$$

Se tomarmos a recta L C para origem das inclinações, teremos finalmente

$$z\,(\varepsilon^{u}+\varepsilon^{-u})\simeq\frac{II'.II''}{LC}\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

ou

$$z.\cos u\simeq\frac{II'.II''}{2.LC}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25).$$

Da equipollencia (24) ou da (25) resulta a seguinte construcção:

Tire-se, pelo ponto I, a recta $I Z_0 \triangleq \frac{II'.II''}{2.LC}$, que será parallela ao segmento LC e dirigida no mesmo sentido ou no sentido contrario d'este segmento, segundo os segmentos II' e II'' tiverem ou não o mesmo signal, e será então

$$I Z_0 \triangleq z.\cos u.$$

Por conseguinte a perpendicular $Z_0 Z' Z$ a $I Z_0$ no ponto Z_0, cortará, em geral, o circulo (C) em dois pontos Z e Z', taes, que as rectas IZ e IZ' serão os dois valores de $z.\varepsilon^u$, e representarão, portanto, a direcção de duas transversaes, que resolvem o problema. Os segundos valores de z e u, correspondentes a IZ' representa-los-emos por z' e u'.

3. *Segunda solução.* — Se na equipollencia (11) substituirmos IC pelo seu valor equipollente $IL + LC$, teremos

$$IZ \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj}IL + \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj}LC - \varepsilon^u.\frac{II'.II''}{z} + LC + IL \triangleq 0 \ldots (26)$$

e em virtude da equipollencia (21) será

$$IZ \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj}IL + IL \triangleq z.\varepsilon^u \ldots\ldots\ldots (27)$$

d'onde

$$IZ - IL \triangleq LZ \triangleq \varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj}IL \ldots\ldots\ldots (28)$$

e sendo

$$\mathrm{inc}\,LZ = 2.u - \mathrm{inc}\,IL \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

teremos

$$\mathrm{inc}\,LZ + \mathrm{inc}\,IL = 2.u = 2.\mathrm{inc}\,IZ \ldots\ldots\ldots (30)$$

e portanto na equipollencia trinomia identica

$$LZ + IL \triangleq IZ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

ter-se-á

$$\mathrm{gr}\,LZ = \mathrm{gr}\,IL \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

sendo, por conseguinte, isosceles o triangulo IZI, bem como o triangulo $IZ'L$, no qual será similhantemente

$$\mathrm{gr}\,LZ' = \mathrm{gr}\,IL \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33).$$

Podemos ainda chegar ao mesmo resultado sem recorrer ás inclinações. Com effeito, multiplicando a equipollencia (28) pela sua conjugada

$$\varepsilon^{-2u}.IL \triangleq cj\,LZ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

vem

$$(IL)^2 \triangleq (LZ)^2$$

e logo

$$gr\,IL = gr\,LZ.$$

Assim, *os pontos* Z *e* Z′ *achar-se-ão sobre uma circumferencia de circulo* (L), *com o centro em* L *e de raio* $IL = JL$, e portanto esta circumferencia e as circumferencias (A) e (B) terão o segmento IJ para corda commum.

Logo, se no ponto L que divide AB na razão dada $\frac{m}{n}$, fizermos centro e com o raio LI descrevermos uma circumferencia de circulo, esta cortará, em geral, a circumferencia (C) em dois pontos Z e Z′, que unidos com I darão duas transversaes IXZY e X′IZ′Y′, que resolvem o problema.

4. Os triangulos isosceles ZLI e Z′LI dão, como sabemos,

$$inc\,LZ + inc\,IL = 2.inc\,IZ$$

e

$$inc\,LZ' + inc\,IL = 2.inc\,IZ'$$

d'onde

$$2.inc\,IZ' + inc\,LZ - inc\,LZ' = 2.inc\,IZ = 2.u \ldots (35).$$

Tomando LC para origem das inclinações, será

$$LZ \triangleq cj\,LZ'$$

e portanto

$$inc\,IZ' - inc\,LZ' = ang\,IZ'L = u \ldots\ldots\ldots (36)$$

d'onde

$$ang\,LIZ' = -u.$$

Similhantemente teremos

$$inc\,IZ - inc\,LZ = ang\,IZL = u' \ldots\ldots\ldots (37)$$

d'onde

$$ang\,LIZ = -u'.$$

Logo, *se as duas transversaes* I Z *e* I Z′ *cortarem* L C *nos pontos* i *e* G, *sob os angulos* u *e* u′, *os seus angulos respectivos com* L I *serão* — u′ *e* — u.

Estas transversaes serão, pois, *anti-parallelas* a respeito do angulo I L C, e, portanto, será

$$\mathrm{gr}(LI)^2 = \mathrm{gr}(Li.LG) \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

o que prova que os pontos *i* e G determinam sobre L C *uma divisão homographica em involução,* tendo para *ponto central* o ponto L, e para *pontos duplos* os pontos *e* e *f*, em que aquella recta é cortada pela circumferencia (L).

Reconhece-se egualmente que os quadrilateros L I Z′*i* e L I G Z são *inscriptiveis* em circulos correspondentes aos segmentos descriptos sobre a recta L I, capazes dos angulos *u* e *u*′.

5. *Discussão.* — Quando a recta Z_0Z ou o circulo (L) tocarem o circulo (C), teremos $u = u'$, e as duas soluções reduzem-se a uma.

Se o circulo (C) não fôr encontrado por estas linhas auxiliares, não haverá solução.

Consideremos agora cada um dos casos particulares que se podem dar.

Supponhamos em primeiro logar o caso do circulo (C) passar pelo ponto I, e que foi resolvido pelo sr. Bellavitis (*Spozione del metodo delle equipolleze,* n.° 88).

Então teremos

$$II' = 0 \text{ ou } 1 - k^2 = 0$$

e as equipollencias (21) e (21)′ darão

$$\varepsilon^{2.u}.\mathrm{cj}\,LC \triangleq -LC \ldots\ldots\ldots\ldots (39).$$

Tal é a equipollencia deduzida pelo imminente mathematico, e da qual tira

$$2.u - \mathrm{inc}\,LC = \mathrm{inc}\,LC - 180^\circ$$

ou

$$u = \mathrm{inc}\,LC - 90^\circ$$

e que lhe mostra que a secante I Z deve ser perpendicular a L C: deixando, por conseguinte, de considerar a segunda secante.

Depois indica ser esta solução extensiva ao problema analogo relativo a quatro espheras, tendo um ponto commum (*).

Na pag. 49 do vol. II d'este Jornal considera ainda o caso de se annullar o segmento LC: o que corresponde a ser satisfeito o problema para qualquer direcção da secante, ou a sua indeterminação; e por esta circumstancia conclue indirectamente, que o logar geometrico do ponto Z é um circulo, passando por I e J, mas de cuja existencia nos parece não tinha conhecimento até então.

Depois d'estas observações passaremos a fazer as nossas investigações sobre este ponto.

Sendo, pois, $II' = 0$ a equipollencia (24), dá

$$z(\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}) \triangleq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)'$$

ou

$$z.\cos u \triangleq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)'$$

o que corresponde a ser $\cos u = 0$ ou $z = 0$; e, portanto, será $u = 90^\circ$ ou $u' = \operatorname{inc} IL - 90^\circ$. Assim as transversaes pedidas IXZY e X'IY' cortarão as rectas LC e LI respectivamente sob os angulos 90° e -90° (n.° 4), e logo serão perpendiculares a estas rectas.

Se as referidas rectas LC e LI coincidirem, então será $u = u' = 90^\circ$, e as duas transversaes confundem-se com a perpendicular a LI no ponto I, ou com a tangente commum aos dois circulos (C) e (L) n'este ponto.

Suppondo que o circulo (C) passa por I e J, uma das soluções será ainda dada pela secante XIY perpendicular a LI no ponto I, e a outra pela corda commum IJ, com a qual vem confundir-se a transversal IXZY.

No caso do circulo (C) se confundir com o circulo (L), será $II' = 0$ e $LC = 0$, e a equipollencia (24) dará

$$z.(\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}) \triangleq \frac{0}{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)''$$

ou

$$z.\cos u \triangleq \frac{0}{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)''$$

(*) Mais tarde tractaremos d'esta questão, de que o sr. Laisant já se occupou.

d'onde se conclue que o problema será indeterminado, ou satisfeito para qualquer direcção das secantes.

Imaginando agora que não se annulla o segmento II' e que LC vem confundir-se com AB: o problema poderá ter duas, uma ou nenhuma solução, como no caso geral, segundo a recta auxiliar $Z_0 Z$, ou o circulo (L) cortarem, tocarem ou não encontrarem o circulo (C).

Quando fôr finalmente $II' >$ ou < 0, e $LC = 0$, a equipollencia (24) dá

$$z(\varepsilon^{u} + \varepsilon^{-u}) \triangleq \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)'''$$

e o problema não terá solução: achando-se então a distancia infinita a recta auxiliar $Z_0 Z$, com a qual se confundirá tambem o eixo radical dos circulos (C) e (L), isto é, as suas duas cordas communs confundir-se-ão, tendo estes circulos um duplo contacto imaginario a distancia infinita.

5. Se na equipollencia (20) considerarmos explicitos os signaes dos segmentos, teremos dois pontos L e L', taes, que será

$$AL' \triangleq -AL \triangleq LA \ldots\ldots\ldots\ldots (20)'$$

e representando por z_1 e v os valores correspondentes das incognitas z e u, teremos analogameute a equipollencia

$$z_1(\varepsilon^{v} + \varepsilon^{-v}) \triangleq \frac{II'.II'}{2.L'C} \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

tomando agora $L'C$ para origem das inclinações.

Fazendo, pois, as respectivas construcções, acharemos sobre o circulo (C) dois outros pontos *(reaes ou imaginarios)*, taes, que darão duas outras transversaes, que resolvem o problema.

Comtudo o sr. Bellavitis, na referida pag. 49 do vol. II d'este Jornal, imaginando tres rectas fixas JX, JY e JZ concorrendo n'um mesmo ponto J, cortadas por uma transversal qualquer $IXZY$, conduzida por um ponto I, obtem a razão anharmonica

$$\frac{XZ}{XY} : \frac{IZ}{IY} \triangleq \frac{m}{n}$$

por meio da qual conclue que só ha tres circulos, IJX, IJY e IJZ, que possam ser cortados pela transversal IXZY de modo que seja $XZ \triangleq \frac{m}{n}.XY$.

Se, na equipollencia (1), X se torna em Y e *vice-versa*, teremos

$$\frac{YZ}{YX} \triangleq \frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)'$$

e então será

$$AL \triangleq \pm \frac{m}{n} BA \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)'$$

d'onde resulta haver, em geral, mais quatro soluções para o problema proposto.

Logo, a equipollencia (20) é geral, como se devia esperar; e portanto o problema poderá ter oito soluções, um numero infinito d'ellas, ou poderá ser impossivel.

Solução synthetica elementar

6. Consideremos a transversal IXZY, que resolve o problema, e pelo ponto J tirem-se as rectas JX, JY e JZ.

Como sabemos, se a transversal girar em torno de I, as cordas JX e JY dos circulos (A) e (B) serão cortadas por esta transversal, sempre sob angulos constantes: por conseguinte o *triangulo variavel* XJY será, em todas as suas posições, directamente similhante a si mesmo (*).

(*) Por meio d'esta propriedade se resolvem facilmente alguns problemas, figurando entre esses os dois seguintes:

1.° *Sendo dados dois circulos* (A) *e* (B), *que se cortam em* I, *conduzir por este ponto uma secante tal, que a somma ou differença das duas cordas seja egual a uma recta dada* m.

2.° *Achar o vertice commum* V *de dois triangulos directamente similhantes, de bases dadas* A D *e* B C.

O illustre mathematico, o sr. Francisco Horta, baseando-se n'este principio, resolveu o segundo problema no *Jornal da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, publicado em 1867.

Ora sendo constantemente

$$\frac{XZ}{XY}=\frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)''$$

segue-se que qualquer dos triangulos variaveis XJZ e ZJY, em que fica dividido o triangulo XJY, se conservará directamente similhante a si mesmo: e, portanto, sendo constante o angulo XZJ, o vertice Z descreverá uma circumferencia de circulo (L) passando por I e J.

Quando a transversal fôr perpendicular á corda IJ, é claro que os lados JX, JY e JZ dos triangulos XJY e XJZ, serão diametros dos circulos (A), (B) e (L), e o centro d'este ultimo será o ponto L, que divide na razão dada a recta AB, que une os centros dos dois primeiros circulos, sendo LI a grandeza do raio.

Como já vimos (n.º 3) os pontos de intersecção *(reaes* ou *imaginarios)* dos circulos (C) e (L) darão as direcções das transversaes pedidas.

Podemos ainda, do modo seguinte, demonstrar que o logar geometrico descripto pelo ponto Z é uma circumferencia de circulo:

O sr. Bellavitis tambem resolveu este mesmo problema, empregando o methodo das equipollencias, no n.º 40 da sua *Exposição do methodo das equipollencias*, publicada em 1854, á qual já nos referimos. No n.º 47 d'esta sua memoria resolve egualmente pelas equipollencias o problema no caso dos triangulos pedidos serem symetricamente similhantes; mas seguindo processo differente do primeiro (recorrendo ás rectas conjugadas). Comtudo, como n'outra occasião veremos detalhadamente, ha um processo geral, mui elementar, e essencialmente synthetico, que dá immediatamente, pela intersecção de circulos auxiliares, os vertices communs dos triangulos similhantes, correspondentes aos dois casos; e ao mesmo tempo, prova-nos, que *a um quadrilatero, não parallelogrammo, correspondem dois pontos notaveis, que representam respectivamente os vertices communs de triangulos directa e symetricamente similhantes, tendo para bases dois lados oppostos do referido quadrilatero.*

Quando os triangulos pedidos não estiverem situados no mesmo plano, então aos circulos auxiliares corresponderão espheras, e os vertices d'estes triangulos achar-se-ão sobre o parallelo commum a estas espheras. N'este caso reconhece-se que, em geral, *a um quadrilatero plano ou empenado corresponde um circulo notavel, que contém os vertices communs de triangulos similhantes, tendo para bases dois lados oppostos do quadrilatero.*

Se sobre a transversal I X Z Y tomarmos os pontos medios α, β e γ dos segmentos I X, I Y e I Z, teremos evidentemente

$$\frac{XZ}{XY}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}=\frac{m}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41).$$

Tirando as rectas α A e β B, que passam pelos centros A e B dos circulos (A) e (B); e pelo ponto γ tirando, parallelamente a estas, a recta γ L, esta cortará o segmento A B n'um ponto L, de modo que será

$$\frac{AL}{AB}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}=\frac{m}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42).$$

Ora as rectas α A e β B passando pelo meio das cordas I X e I Y dos circulos (A) e (B), segue-se que I Z será tambem corda d'um circulo (L), cujo centro divide A B na razão dada, sendo L I seu raio.

Observação.—Quando o circulo (C) passar por I, podemos naturalmente derivar d'este processo synthetico, o que seguiu o sr. Laisant: porque então, as cordas Z′Z e I Z d'aquelle circulo e do circulo (L) confundindo-se, a recta γ L passará por C, e por conseguinte I Z será perpendicular a L C.

7. É facil de ver que, a qualquer posição da transversal I X Y, corresponde sempre outra, tal que os dois triangulos correspondentes são tambem directamente eguaes; e só teremos um triangulo, que é de grandeza maxima, quando a transversal fôr perpendicular á corda I J.

Se designarmos por IX_1Y_1, IX_2Y_2, ..., diversas posições da referida transversal I X Y, e fizermos girar todos os triangulos J X Y, JX_1Y_1, JX_2Y_2, ..., em torno do vertice commum J, até que os dois lados homologos correspondentes fiquem na mesma direcção, o ponto I, considerado sobre cada um dos lados X Y, X_1Y_1, X_2Y_2, ..., achar-se-á então sobre um circulo, tendo para centro o referido vertice commum J, e cujo raio será egual á corda I J, que representa a altura do triangulo de grandeza maxima.

Agora iremos tambem demonstrar syntheticamente que as transversaes I Z e I Z′ são anti-parallelas a respeito do angulo I L G.

Sendo, pois, eguaes os angulos ZLe e ZIZ', por terem como medida metade do arco ZeZ', reconhecer-se-á immediatamente, no quadrilatero L Z G I, ser

$$\text{ang}\,LIG = \text{ang}\,LIZ + \text{ang}\,ZIG = -\text{ang}\,LiI$$

e

$$\text{ang}\,LIZ = \text{ang}\,LZI = -\text{ang}\,LGI$$

logo, etc.

8. *Observação.*—Torna-se inutil entrarmos na discussão d'esta solução, em vista da discussão da solução dada pelas equipollencias, e que agora é analogamente applicavel.

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

Alfredo Schiappa Monteiro

(Continuação)

II

Determinação do volume da cunha e do tronco conico

14. Para resolver esta questão começaremos tambem, como no n.° 1, por deduzir as respectivas fórmulas com toda a generalidade: para o que podemos seguir dois processos.

1.° Consideremos, em vez da cunha ou tronco conico, a cunha ou tronco pyramidal regular inscripto (n.° 3); e seja M o ponto de intersecção do eixo S C da pyramide com o plano π_e da secção obliqua.

Designando, pois, por V_{c_p}, V_{m_p} e W_{m_p} os volumes da cunha ou tronco pyramidal, da pyramide que tem o ponto M por vertice e por base a base recta d'esta cunha ou tronco, e do corpo limitado pelas superficies lateraes d'esta pyramide e da mesma cunha ou tronco, e pela sua respectiva base obliqua, teremos

$$V_{c_p} = W_{m_p} - V_{m_p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73).$$

O volume W_{m_p} obtem-se facilmente: por quanto é egual á somma dos volumes das pyramides que têm por vertice commum o ponto M e por bases as faces da superficie lateral da cunha ou tronco pyramidal, cujas áreas designámos por Q_p (n.° 2); de modo que, representando por λ_{m_p} a altura d'estas pyramides componentes, ter-se-á evidentemente

$$W_{m_p} = \frac{1}{3} \cdot \lambda_{m_p} \cdot Q_p \ldots\ldots\ldots\ldots (74).$$

Se designarmos por V_c, V_m, λ_m e W_m os volumes da cunha ou tronco conico, da pyramide que tem o vertice em M e por base a base recta ou circular d'esta cunha ou tronco, a grandeza das geratrizes rectilineas d'esta pyramide e o volume do corpo limitado pelas superficies lateraes d'esta pyramide e da mesma cunha ou tronco, cuja área representámos por Q_c (n.° 2), e pela sua base obliqua; ou então se por estas grandezas designarmos os limites respectivos das grandezas V_{c_p}, V_{m_p}, λ_{m_p} e W_{m_p}, será

$$V_c = W_m - V_m \ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

e

$$W_m = \frac{1}{3} \cdot \lambda_m \cdot Q_c \ldots\ldots\ldots\ldots (76).$$

2.° Sejam agora V_s e W_s os volumes das pyramides que têm o mesmo vertice S que a superficie conica S(C), que fórma a superficie lateral ou convexa da cunha ou tronco conico, e cujas bases são respectivamente a base recta e a base obliqua d'esta cunha ou tronco. Então teremos evidentemente

$$V_c = V_s - W_s \ldots\ldots\ldots\ldots (77).$$

Taes são, pois, as duas expressões geraes, por meio das quaes podemos calcular o volume pedido V_c.

§ I

CUNHA CONICA

15. Estabelecidas estas fórmulas geraes (75) e (77), começaremos por as applicar á cubatura da cunha conica, considerando tambem separadamente cada um dos casos que se podem apresentar, como fizemos a respeito da quadratura da superficie d'esta cunha (n.° 3).

Caso da secção elliptica

16. As grandezas V_c, V_m, W_m, V_s e W_s, representam agora respectivamente os volumes da cunha $i_0 A i B$, da pyramide $M(i_0 A i)$, do corpo $M(i_0 A i B)$, e das pyramides $S(i_0 A i)$ e $S(i_0 B i)$.

1.° Seja M'_0 o ponto em que a perpendicular MM'_0 baixada de M sobre a geratriz rectilinea SA do cone S(C) (fig. f_2), encontra esta recta, e tractemos de exprimir a grandeza d'esta perpendicular ou *geratriz rectilinea do cone supplementar* d'aquelle cone, e a grandeza da altura MC da pyramide $M(i_0 A i)$, em funcção dos segmentos dados.

A comparação dos triangulos mCM e $mB'B$, e dos triangulos ABB' e ASC, dá

$$CM = \frac{BB'}{mB'} \times Cm, \text{ e } BB' = \frac{SC}{CA} \times B'A$$

d'onde

$$CM = \frac{SC}{CA} \times \frac{B'A}{mB'} \times Cm \ldots\ldots\ldots \quad (78).$$

Para calcular $M'_0 M$, compararemos os triangulos $SM'_0 M$ e SCA, e teremos

$$M'_0 M = \frac{CA}{SA} \times SM \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

ou

$$M'_0 M = \frac{CA}{SA}(SC - MC) \ldots\ldots\ldots \quad (80).$$

Ainda podemos calcular $M'_0 M$ pelo modo seguinte:

Baixemos de A_0 e B_0 sobre a recta SA as perpendiculares $A_0 \alpha_0$ e $B_0 \beta_0$, que a cortam nos pontos α_0 e β_0, e então comparando os triangulos rectangulos $BM'_0 M$ e $BB_0\beta_0$, teremos

$$M'_0 M = \frac{CB'}{B'_0 B'} \times B_0 \beta_0.$$

Mas a comparação dos triangulos rectangulos $SA_0\alpha_0$ e $SB_0\beta_0$ dando

$$B_0\beta_0 = \frac{SB_0}{SA_0} \times A_0\alpha_0$$

e como é

$$A_0\alpha_0 \times SA = A_0A \times SC$$

será finalmente

$$M'_0M = \frac{A_0A \times SB_0 \times CB'}{\overline{SA}^2 \times B'_0B'} \times SC$$

ou

$$M'_0M = 2.\frac{CA \times SB_0 \times CB'}{\overline{SA}^2 \times C_1B'} \times SC \ldots\ldots \quad (81).$$

Sendo

$$W_m = \frac{1}{3} M'_0M \times \sup i_0AiB \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

e

$$V_m = \frac{1}{3} CM \times \sup i_0Ai = \frac{1}{6} CM(CA \times i_0\widehat{Ai} - 2.Cm \times mi) \ldots \quad (83)$$

teremos

$$V_c = \frac{1}{6}[2.\frac{CA}{SA}(SC + CM)\sup i_0AiB - CM(CA \times i_0\widehat{Ai} - 2.Cm \times mi)] \quad (84)$$

ou

$$V_c = \frac{1}{6}[2.\frac{CA \times SB_0 \times CB'}{\overline{SA}^2 \times C_1B'} \times SC \times \sup i_0AiB - CM(CA \times i_0\widehat{Ai} - 2.Cm \times mi)] \quad (85)$$

ou, tornando explicitos os signaes dos segmentos Cm e CM,

$$V_c = \frac{1}{6}[2.\frac{CA}{SA}(SC \pm CM) \times \sup i_0AiB \mp CM(CA \times i_0\widehat{AiC} \mp m \times mi)] \quad (86)$$

ou

$$V_c = \frac{1}{6}[2.\frac{CA \times SB_0 \times CB'}{\overline{SA}^2 \times C_1B'} \times SC \times \sup i_0AiB \mp CM(CA \times i_0\widehat{Ai} \mp Cm \times mi)] \quad (87)$$

adoptando-se o signal superior ou o inferior segundo fôr $+\sigma <$ ou $> +90^\circ$, ou $-\sigma >$ ou $< -90^\circ$ (*).

Ora é (n.° 4)

$$Cm = CA - mA = \frac{R}{L} \cdot \frac{2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \ldots \quad (88)$$

$$B'A = CA - CB' = \frac{R}{L}(L - \lambda) \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$mB' = \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda}(L - \lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$C_1B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L}(\lambda_0 + \lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

e se representarmos por H a altura $SC = \sqrt{L^2 - R^2}$ do cone S(C), teremos

$$CM = \frac{2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 + \lambda)} . H \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

e

$$M'_0M = 2 . \frac{R}{L^2} . \frac{\lambda_0 . \lambda}{(\lambda_0 + \lambda)} . H \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

e logo

$$V_c = \frac{1}{6.L^2(\lambda_0 + \lambda)}\Bigg[4.\lambda_0.\lambda.Q_c - R\left[2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0 + \lambda)\right]$$

$$\left(\frac{L}{R}.A - 4.\frac{2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)^2}\sqrt{\lambda_0.\lambda(\lambda_0 - L)(L - \lambda)}\right)\Bigg] RH \quad (92)$$

(*) Como já dissemos (n.° 4), o angulo σ será positivo ou negativo (e por conseguinte V_c será implicitamente affecto do signal + ou —), segundo se considerar a cunha i_0 A i B situada acima do plano π_c, ou a cunha i_0 A i B situada abaixo d'este plano.

ou

$$V_c = \frac{1}{6 . L^2 (\lambda_0 + \lambda)} \left[4 . \lambda_0 . \lambda . Q_c - R \left[2 . \lambda_0 . \lambda - L (\lambda_0 + \lambda) \right] \right.$$

$$\left. \left(\frac{\sigma}{90} \pi L - \frac{2 . \lambda_0 . \lambda - L (\lambda_0 + \lambda)}{\lambda_0 - \lambda} . 2 . \operatorname{sen} \sigma \right) \right] R H \ldots \ldots \ldots (93).$$

2.° Baixando do vertice S do cone S (C) a perpendicular $S \Sigma_0$ sobre o plano π_e da secção obliqua (E), sendo Σ_0 o pé d'esta perpendicular (fig. f_2), a expressão do volume W_s da pyramide $S(i_0 B i)$ será

$$\frac{1}{3} S \Sigma_0 \times \sup i_0 B i$$

que tractaremos de exprimir em funcção das grandezas dadas.

Sendo evidentemente

$$S \Sigma_0 \times B_0 B = S B \times B_0 \beta_0$$

e os triangulos $S A_0 \alpha_0$ e $S B_0 \beta_0$ dando

$$B_0 \beta_0 = \frac{S B_0}{S A_0} \times A_0 \alpha_0$$

será

$$S \Sigma_0 = \frac{S B_0}{S A} \times \frac{S B}{B_0 B} \times A_0 \alpha_0$$

e como é

$$A_0 \alpha_0 \times S A = A_0 A \times S C$$

ter-se-á

$$S \Sigma_0 = \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{\overline{S A}^2 \times B_0 B} \times S C \ldots \ldots \ldots (94)$$

e sendo

$$\sup i_0 B i = \frac{m B}{m B'} \times \sup i_0 B i = \frac{B_0 B}{B'_0 B'} \times \sup i_0 B i$$

teremos

$$W_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{\overline{S A}^2 \times B'_0 B'} \times S C \times \sup i_0 A i \ldots \quad (95)$$

e o volume V_s da pyramide $S(i_0 A i)$ tendo por expressão

$$\frac{1}{3} . SC \times \sup i_0 A i = \frac{1}{6} . SC (CA \times i_0 \widehat{Ai} - 2 . Cm \times mi) \ldots \quad (96)$$

ter-se-á, tornando explicitos os signaes dos segmentos,

$$V_c = \frac{1}{6} [CA \times i_0 \widehat{Ai} \mp 2 . Cm \times mi$$

$$- 4 . \frac{CA \times SB_0 \times SB}{\overline{SA}^2 \times B'_0 B'} \times \sup i_0 B' i] SC \ldots \ldots \quad (97)$$

e por conseguinte

$$V_c = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\sigma}{90} \pi - \frac{2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)} . 2 . \operatorname{sen} \sigma \right) R^2 \right.$$

$$\left. - 4 . \frac{\lambda_0 . \lambda}{L(\lambda_0 + \lambda)} \left(J_c - \frac{2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)}{L(\lambda_0 - \lambda)} . R^2 . \operatorname{sen} \sigma \right) \right] H \quad (98).$$

Se nas fórmulas (93) e (98) pozermos os valores de Q_c e J_c (n.º 4), acharemos a fórmula geral

$$(1') \ldots \ldots V_c = \frac{1}{6} \left[\frac{\sigma}{90} - \frac{\lambda_0 . \lambda \sqrt{\lambda_0 . \lambda}}{L^3} . \frac{\omega}{90} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 - \lambda)^2 + [(2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)]^2}{L^2 (\lambda_0^2 - \lambda^2)} . 2 . \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\pi} \right] \pi . R^2 . H \quad (99)$$

ou

$$V_c = \pm \frac{1}{6.L^2}\left[\frac{\sigma L^3 - \omega.\lambda_0.\lambda\sqrt{\lambda_0.\lambda}}{90.L}\right.$$

$$\left. + \frac{(L^2+\lambda_0.\lambda)(\lambda_0+\lambda) - 4.L.\lambda_0.\lambda}{\lambda_0-\lambda}.2.\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\pi}\right]\pi.R^2.H \quad (100)$$

adoptando-se, como sabemos, o signal superior ou o inferior, segundo σ e ω forem positivos ou negativos, isto é, segundo considerarmos a cunha situada acima ou abaixo do plano π_c.

Deduzidas, pois, as expressões geraes de V_c, passaremos a considerar alguns casos particulares.

17. *Discussão.* — Quando fôr $\sigma = \pm 90^g$ (n.º 5), temos

$$2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0+\lambda) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

d'onde [fórmulas (93), (98) e (99)]

$$V'_c = \frac{1}{3}.\frac{R}{L}.Q'_c.H \ldots\ldots\ldots\ldots (93)'$$

ou

$$V'_c = \frac{1}{6}(\pi R^2 - 2.J'_c)H \ldots\ldots\ldots (98)'$$

ou

$$V'_c = \pm\frac{1}{6}\left[1 - \frac{\lambda^2.\sqrt{L}}{L^2(2.\lambda-L)\sqrt{2.\lambda-L}}.\frac{\omega'}{90}\right.$$

$$\left. + \frac{L-\lambda}{2.\lambda-L}.\frac{2.\lambda}{\pi L}\right]\pi R^2.H \ldots\ldots\ldots (99)'.$$

Se considerarmos o caso de ser $\sigma = \omega = +180^g$, ou $\lambda_0 = L$, teremos

$$V''_c = \frac{1}{3(L+\lambda)}\left[2.\frac{\lambda}{L}.Q''_c - (\lambda - L)\pi.R\right]R.H \ldots (93)''$$

ou

$$V''_c = \frac{1}{3}[\pi.R^2 - 2.\frac{\lambda}{L+\lambda}.J''_c].H \ldots\ldots (98)''$$

ou

$$V''_c = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{\lambda}{L}\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\right]\pi.R^2.H \ldots\ldots (99)''.$$

Quando finalmente fôr $\sigma = \omega = -180°$, ou $\lambda = L$, acharemos

$$V'''_c = \frac{1}{3(L+\lambda_0)}[2.\frac{\lambda_0}{L}.Q'''_c - (\lambda_0 - L)\pi.R]R.H \quad (93)'''$$

ou

$$V'''_c = \frac{1}{3}[\pi.R^2 - 2.\frac{\lambda_0}{L+\lambda_0}.J'''_c].H \ldots\ldots (98)'''$$

ou

$$V'''_c = -\frac{1}{3}\left[1 - \frac{\lambda_0}{L}\sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}\right]\pi.R^2.H \ldots (99)'''.$$

Caso da secção parabolica

18. Supponde, por exemplo, que o plano secante π_e é parallelo á geratriz SA_0, ou que $\lambda_0 = \infty$ (fig. f_3), vamos ver como podemos obter mui facilmente as respectivas fórmulas, partindo das que deduzimos para o caso da secção elliptica (n.° 17).

1.° Fazendo $\lambda_0 = \infty$, $Q_c = Q_{c\infty}$ e $\sigma = \sigma_\infty$ (n.° 6) na fórmula (93) (n.° 17), teremos

$$V_{c\infty} = \frac{1}{6.L^2}\left[4.\lambda.Q_{c\infty} - R(2.\lambda - L)\right.$$

$$\left.\left(\frac{\sigma_\infty}{90}\pi.L + (2.\lambda - L)2.\text{sen}\,\sigma_\infty\right)\right]R.H \ldots (93)_\infty$$

2.° Se na fórmula (98) (n.° 17) fizermos $\lambda_0 = \infty$, $\sigma = \sigma_\infty$ e $J_c = J_{c_\infty}$ (n.° 6), acharemos

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sigma_\infty}{90}\pi + \frac{2.\lambda - L}{L}.2.\operatorname{sen}\sigma_\infty\right)R^2\right.$$
$$\left. + 4.\frac{\lambda}{L}\left(J_{c_\infty} - \frac{2.\lambda - L}{L}.R^2.\operatorname{sen}\sigma_\infty\right)\right]H\ldots (98)_\infty$$

Quando n'estas fórmulas pozermos os valores de Q_{c_∞} e J_{c_∞} (n.° 6), acharemos a fórmula geral

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6}\left[\frac{\sigma_\infty}{90}\pi + \frac{8.\lambda^2 + (3.L - 14.\lambda)L}{3.L^2}.2.\operatorname{sen}\sigma_\infty\right]R^2.H\ldots (99)_\infty$$

ou

$$V_{c_\infty} = \frac{1}{6}\left[\frac{\sigma_\infty}{90} + \frac{8.\lambda^2 + (3.L - 14.\lambda)L}{3.\pi.L^2}.2.\operatorname{sen}\sigma_\infty\right]\pi.R^2.H\,(100)_\infty.$$

Taes são as fórmulas que nos dão o volume pedido.

Com a mesma facilidade achariamos as fórmulas correspondentes ao caso de ser $\lambda = \infty$.

Observação. — É claro que estas fórmulas tambem se podem deduzir simplesmente e directamente, partindo da fig. f_3.

19. *Caso particular.* — Quando fôr $\sigma_\infty = +90°$ será (n.° 7) $2.\lambda = L$, $Q_{c_\infty} = Q'_{c_\infty}$ e $J_{c_\infty} = J'_{c_\infty}$, e então teremos

$$V'_{c_\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)R^2.H\ldots\ldots (93)_\infty.$$

§ II

TRONCO CONICO

20. Analogamente ao que fizemos com respeito á quadratura da superficie lateral do tronco conico (n.° 11), exporemos tambem os dois methodos alli seguidos, por meio dos quaes tractaremos de determinar o volume V_c do tronco conico $A_0 D_0 A D B_0 E_0 B E$ (fig. f_5), quer seja de *primeira* quer de *segunda especie*.

Methodo directo. — Devemos observar que, para determinar o valor de V_c, somos dispensados de calcular novamente a grandeza da perpendicular M'_0M, baixada de M sobre a geratriz rectilinea SA, e as grandezas das alturas MC e $S\Sigma_0$ das pyramides $M(A_0 D_0 A D)$ e $S(B_0 E_0 B E)$, por serem egualmente dadas pelas respectivas fórmulas que deduzimos para a cunha conica, na hypothese da secção (E) ser elliptica (n.° 16).

1.° Sendo (fig. f_5)

$$W_m = \frac{1}{3} . M'_0 M \times \sup A_0 D_0 A D B_0 E_0 B E$$

e

$$V_m = \frac{1}{3} . C M \times \sup A_0 D_0 A D$$

teremos

$$V_c = \frac{1}{3}[M'_0M \times \sup A_0D_0ADB_0E_0BE - CM \times \sup A_0D_0AD] \quad (101)$$

e logo

$$V_c = \pm \frac{1}{3 . L(\lambda_0 + \lambda)}\left[2 . \frac{\lambda_0 . \lambda}{L} . Q_c - \{(2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)\}\pi R\right] H \quad (102)$$

adoptando-se o signal superior ou o inferior, segundo a secção elliptica (E) estiver acima ou abaixo da secção recta (C).

Quando a secção (E) estiver na segunda folha do cone S(C), teremos o tronco de segunda especie, e ainda a fórmula (102) satisfaz: porque os segmentos λ_0 e λ sendo então negativos, a sua somma $(\lambda_0 + \lambda)$ será affecta do signal —.

Assim, tornando explicitos os signaes em todos os casos, teremos

$$V_c = \pm \frac{1}{\pm 3 . L(\lambda_0 + \lambda)}\left[2 . \frac{\lambda_0 . \lambda}{L} . Q_c - \{2 . \lambda_0 . \lambda - [\pm(\lambda_0 + \lambda)]\}\pi R\right] H \ldots\ldots (103).$$

2.° O volume W_s da pyramide $S(B_0 E_0 B E)$ tendo por expressão

$$\frac{1}{3} S \Sigma_0 \times \sup B_0 E_0 B E$$

e sendo

$$\sup B_0 E_0 B E = \frac{B_0 B}{B'_0 B'} \times \sup B'_0 E' B' E'$$

teremos [fórmula (94)]

$$W_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{\overline{SA}^2 \times B'_0 B'} \times S C \times \sup B'_0 E'_0 B' E'$$

e o volume V_s da pyramide S (C) tendo por expressão

$$\frac{1}{3} S C \times \sup A_0 D_0 A D$$

ter-se-á

$$V_c = \frac{1}{3} \Big[\sup A_0 D_0 A D - \frac{A_0 A \times S B_0 \times S B}{\overline{SA}^2 \times B'_0 B'}$$

$$\times \sup B'_0 E'_0 B' E'\Big] S C \ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

e por conseguinte

$$V_c = \pm \frac{1}{3} \Big[\pi R^2 - 2 \cdot \frac{\lambda_0 . \lambda}{\pm(\lambda_0 + \lambda)} . J_c\Big] H \ldots (105).$$

Se nas fórmulas (103) e (105) pozermos os valores de Q_c e J_c, relativos ao tronco conico (n.° 11), teremos a expressão geral

$$V_c = \pm \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_0 . \lambda \sqrt{\lambda_0 . \lambda}}{L^3}\right) \pi R^2 . H \ldots (106).$$

Methodo indirecto. — Se na fórmula (99) relativa ao caso da secção elliptica (n.° 16) fizermos $\sigma = \omega = \pm 180°$, teremos immediatamente a fórmula (106), correspondente ao tronco conico.

21. Consideremos agora o caso do tronco conico ser limitado pelas secções (E_1) e (E_2) (fig. f_6) (n.° 12); sendo $S\overset{1}{B_0}=+L_0$, $SB_1=+L$, $S\overset{2}{B_0}=\pm\lambda_0$ e $SB_2=+\lambda$.

Então os volumes dos troncos determinados pela secção recta (C) (correspondentes ao segmento L) e por cada uma das outras secções obliquas consideradas, terão respectivamente por expressão

$$\frac{1}{3}\left[1-\frac{\lambda_0 \cdot \lambda\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3}\right]\pi \cdot R^2 \cdot H$$

e

$$\frac{1}{3}\left[\frac{L_0}{L}\sqrt{\frac{L_0}{L}}-1\right]\pi \cdot R^2 \cdot H$$

logo, representando por V_{c_e} o volume pedido, teremos

$$V_{c_e}=\frac{1}{3}\left[\frac{L_0}{L}\sqrt{\frac{L_0}{L}}-\frac{\lambda_0 \cdot \lambda\sqrt{\lambda_0 \cdot \lambda}}{L^3}\right]\pi \cdot R^2 \cdot H \ldots \quad (107).$$

Se as bases (E_1) e (E_2) forem parallelas, teremos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{L_0}{L}$$

e portanto

$$V'_{c_e}=\frac{1}{3}\frac{L_0}{L}\sqrt{\frac{L_0}{L}}\left(1-\frac{\pm\lambda^3}{L^3}\right)\pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{L^3\mp\lambda^3}{L^3}\pi R^2 \cdot H \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108).$$

ou

$$V'_{c_e}=\frac{1}{3}\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{L-\lambda}{L^3}(L^2\pm L \cdot \lambda+\lambda^2)\pi R^2 \cdot H \quad (109).$$

22. *Discussão.* — Quando fizermos successivamente $\lambda_0 = L$ e $\lambda = L$, a fórmula (106) transforma-se nas fórmulas $(99)''$ e $(99)'''$ (relativas á cunha conica na hypothese da secção (E) ser uma ellipse).

Se fôr $\lambda_0 = \lambda$, as fórmulas (106) e (109) dão

$$V'_c = V'_{c_e} = \frac{1}{3}\frac{L^3 \mp \lambda^3}{L^3}\pi R^2.H \ldots\ldots\ (110)$$

ou

$$V'_c = V'_{c_e} = \frac{1}{3}\frac{L \mp \lambda}{L^3}(L^2 \pm L.\lambda + \lambda^2)\pi R^2.H \ldots\ (111)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos de primeira e segunda especie)

$$V''_c = V''_{c_e} = \frac{1}{3}.\frac{L - \lambda}{L^3}(L^2 + L.\lambda + \lambda^2)\pi R^2.H \ldots\ (112)$$

e

$$V'''_c = V'''_{c_e} = \frac{1}{3}.\frac{L + \lambda}{L^3}(L^2 - L.\lambda + \lambda^2)\pi R^2.H \ldots\ (113).$$

Taes são as duas fórmulas que correspondem a serem rectas as secções que limitam estes dois troncos.

Sendo, pois, r o raio da segunda base ou secção recta (C_b), será

$$\lambda = \frac{r}{R}.L$$

e portanto [fórmula (111)]

$$V'_c = V'_{c_e} = \frac{1}{3}\pi(R^2 \pm R.r + r^2)\frac{L \mp \lambda}{L}.H \ldots\ (114)$$

ou

$$V'_c = V'_{c_e} = \frac{1}{3}\pi(R^2 \pm R.r + r^2)\frac{R \mp r}{R}.H \ldots\ (115).$$

Considerando separadamente os dois troncos conicos, teremos

$$V''_c = V''_{c_e} = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R.r + r^2)\frac{R-r}{R}.H\ldots \quad (116)$$

e

$$V'''_c = V'''_{c_e} = \frac{1}{3}\pi(R^2 - R.r + r^2)\frac{R+r}{R}.H\ldots \quad (117)$$

e se representarmos por h_1 e h_2 as alturas $\frac{R-r}{R}.H$ e $\frac{R+r}{R}.H$ dos troncos, ter-se-ão as fórmulas ordinarias

$$V''_c = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R.r + r^2)h_1\ldots\ldots\ldots \quad (116)'$$

e

$$V'''_c = \frac{1}{3}\pi(R^2 - R.r + r^2)h_2\ldots\ldots\ldots \quad (117)'.$$

Como se vê, estas expressões dependendo só de R, r, h_1 e h_2, são egualmente applicaveis aos troncos conicos obliquos de bases parallelas.

Quando n'estas fórmulas (116)' e (117)' fizermos $R = r$, teremos

$$V^{IV}_c = \pi.R^2.h_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)''$$

e

$$V^{V}_c = \frac{1}{3}\pi.R^2.h_2\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (117)''.$$

Então a primeira expressão, como sabemos, representará o volume d'um cylindro recto ou obliquo com a altura h_1 e bases de raio R; e a segunda ainda representará o volume d'um tronco conico de segunda especie de bases eguaes, ou o volume d'um cone da mesma altura h_2 do tronco, e tendo a base de raio R egual ás bases d'este tronco.

Observação geral

23. Devemos notar que, se não entrámos em mais detalhes n'este estudo, foi para não o tornarmos demasiadamente extenso sem utilidade, visto julgarmos ter estabelecido os pontos capitaes da questão proposta, de modo que, com extrema facilidade, os nossos illustres leitores chegarão a esses detalhes.

Como já dissemos (n.º 1), mais tarde havemos de publicar o nosso rapido estudo sobre as questões propostas, etc., e então tractaremos d'outros pontos que agora omittimos, por não serem completamente elementares, e diremos tambem algumas palavras ácerca da determinação da área da superficie lateral e do volume da cunha cylindrica, bem como sobre a sua relação com a determinação da superficie e da capacidade das abobadas de *barrete de clerigo e de aresta.*

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA N.º 13

POR

L. F. Marrecas Ferreira

***Determinar o vertice commum de dois triangulos symetricamente similhantes, de bases dadas* AD *e* BC.**

Supponha-se que os pontos A e B estão situados d'um mesmo lado do vertice; D e C do outro; seja V este vertice commum que se deseja determinar; Vp e Vq as alturas respectivas dos dois triangulos similhantes, pertencendo a primeira ao triangulo VAD, a segunda a VBC. Da condição de symetria resulta:

$$A\hat{V}D = B\hat{V}C; \quad V\hat{A}D = V\hat{B}C; \quad V\hat{D}A = V\hat{C}B$$

e

$$\frac{VA}{VB} = \frac{VD}{VC} = \frac{Vp}{Vq} = \frac{AD}{BC} = k.$$

Vê-se evidentemente que o ponto V existe em dois logares geometricos distinctos: na circumferencia, logar dos pontos, cujas distancias a A e B guardam a relação k, e na outra circumferencia correspondente aos pontos D e C, existindo o centro da primeira no prolongamento de AB, o da segunda no prolongamento de DC, e ambos d'um mesmo lado em relação á menor das bases dos triangulos.

Haverá portanto duas soluções, quando os logares geometricos se interceptarem; uma no caso de tangencia; nenhuma, se as curvas forem exteriores, ou existir uma no interior da outra.

Quando houver duas soluções, devem ser estas symetricamente dispostas em relação á linha dos centros das circumferencias, e como esta é exterior ao quadrilatero, é facil o suppor-se que as soluções podem ficar egualmente no exterior, o que não succede, porque existe qualquer d'ellas n'uma recta, passando pelo vertice do angulo formado por A D e B C, e satisfazendo á condição de ser o logar geometrico dos pontos, cujas distancias a A D e B C têm entre si a relação k; ora, como é claro, só duas rectas satisfazem a esta condição: uma existe no interior do angulo, a outra no exterior; portanto, havendo duas soluções, cabe a uma d'estas a posição sobre a primeira recta, á outra sobre a segunda.

Apesar da propriedade reconhecida para estas linhas, não podem ellas servir para a resolução do problema; mas sim como verificação das construcções para esse fim realisadas; vê-se bem que ellas produzem sempre duas intersecções com qualquer das circumferencias, e podem estas não estar situadas sobre a outra.

No caso de tangencia, devendo haver um unico ponto commum sobre a linha dos centros, estará o vertice obtido fóra do quadrilatero e do lado correspondente á menor das bases, sobre a recta exterior, tornando-se por conseguinte a outra parasita.

As reflexões expendidas applicam-se egualmente, quando pelo parallelismo de dois lados oppostos do quadrilatero se converta este n'um trapesio, não sendo os dois casos dignos de menção especial.

Se os pontos A e B, por exemplo, se confundissem, isto é, se A D e B C fossem segmentos dos lados d'um angulo, tomados a partir do vertice, confundiam-se V A e V B, e pela condição de symetria: $V\hat{A}D = V\hat{B}C$, segue-se que o ponto V devia estar situado sobre a bissectriz do angulo, e como as distancias d'um ponto d'esta aos lados são eguaes, o problema só é possivel, quando os segmentos A D e B C forem tambem eguaes; n'este caso particular os pontos da bissectriz, situados tanto d'um como do outro lado do vertice, resolvem o problema, determinando qualquer d'elles dois triangulos eguaes; ha uma infinidade de soluções, e é impossivel qualquer no exterior da bissectriz.

Excluindo este caso, podemos, pois, dizer que da condição de symetria resultam duas soluções, uma, ou nenhuma, como demonstrarei ainda por outro modo.

Seguindo-se o processo anterior póde-se resolver o caso de dissymetria, caracterisado pelas seguintes condições:

$$A\hat{V}D = B\hat{V}C; \quad V\hat{A}D = V\hat{C}B; \quad V\hat{B}C = V\hat{D}A$$

de que resulta:

$$\frac{VA}{VC}=\frac{VD}{VB}=\frac{Vp}{Vq}=\frac{AD}{BC}=k.$$

Um dos centros fica situado no prolongamento da diagonal AC do quadrilatero, o segundo no prolongamento da diagonal BD, e ambos do lado correspondente á menor das bases dos triangulos.

As duas rectas passando pelo vertice do angulo, formado por A D e B C, desempenham o mesmo papel que anteriormente, e sobre a posição das soluções tem ainda logar a analyse apresentada.

Se n'esta hypothese os pontos A e B, por exemplo, se confundirem, o numero de soluções, ao contrario do caso precedente, é limitado; facilmente se reconhece que as duas circumferencias subsistem, tendo uma d'ellas o centro sobre um dos lados do angulo formado e a outra sobre o prolongamento do segundo, podendo haver duas soluções; uma apenas no interior ou no exterior do angulo, segundo que o ponto de tangencia das curvas existe no interior ou no exterior; nenhuma solução, quando se não interceptarem ou estiver uma d'ellas no interior da outra, — ha aqui a notar a importante equivalencia de areas: $\overline{VA}^2=VD\times VC$ e se fôr recto o angulo D A C, as linhas D V e V C confundir-se-ão n'uma unica, incidindo perpendicularmente sobre esta a recta VA.

Se A D e B C forem parallelas á solução interna ao quadrilatero, existe no cruzamento das diagonaes interiores.

Póde-se ainda resolver o problema proposto por um processo diverso que vou succintamente descrever.

Supponhamos que V existe dentro do quadrilatero

$$V\hat{A}D=V\hat{B}C=\alpha;$$

será

$$V\hat{A}B=D\hat{A}B-\alpha;\quad V\hat{B}A=C\hat{B}A-\alpha;$$

logo

$$V\hat{A}B-V\hat{B}A=D\hat{A}B-C\hat{B}A=\text{constante}.$$

Da mesma sorte

$$V\hat{D}C-V\hat{C}D=\text{constante}.$$

O vertice d'um triangulo, cuja base é dada em grandeza e posição, sendo constante a differença dos angulos na base, acha-se n'um ramo de hyperbole, que passa pelo extremo da base, vertice do maior dos dois angulos; o segundo ramo da curva, n'este caso parasita, que passa pelo outro extremo, só é util, quando a differença subsistir a favor do angulo, cujo vertice n'elle existe.

Tinhamos portanto para a determinação do ponto interior dois ramos de hyperboles distinctas, e como elles não podem ter mais d'um cruzamento sobre a recta, que passa pelo vertice do angulo e no interior d'este, com a propriedade já designada, segue-se que só póde haver uma unica solução dentro do quadrilatero.

Para determinar a solução externa teremos:

$$V\hat{A}B + V\hat{B}A = D\hat{A}B + C\hat{B}A = \text{constante},$$

logo o angulo AVB é tambem constante e determina-se a posição do vertice, construindo sobre AB o segmento capaz d'aquelle angulo; da mesma sorte se determina a grandeza do angulo DVC e se construe sobre DC o segmento que o deve conter; da intersecção dos dois arcos podem resultar dois pontos, um só, ou nenhum e como aquelle, que resolve o problema n'estas circumstancias, deve estar na recta, que passa pelo vertice do angulo formado por AD e BC, situada exteriormente a elle, segue-se que só resultará uma unica solução externa, ou nenhuma.

Os dois pontos de intersecção podem ser simultaneamente soluções, uma no exterior do quadrilatero, outra no interior, quando n'estas duas posições não variarem os angulos AVB e DVC.

A nenhum dos cinco casos de dissymetria convém este processo e aos quatro que do primeiro processo foram excluidos, não póde convir, segundo supponho, nenhum que seja elementar.

RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE ASSUJETTI A COUPER CONTINUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Suite)

II

Cas des cercles non concentriques

§ I

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

27. En considérant, dans le cas précédent (fig. 1), les constructions relatives à chaque point b, b_1, . . . , du cercle (E), il est évident que, quand nous donnerons à l'autre cercle (I) *un mouvement de translation quelconque*, le premier cercle restant fixe, *tous les points et tous les lignes de la figure prendront leurs positions relatives correspondantes à la solution du problème dans le cas général*, que nous allons étudier.

Désignons, donc, par C_0 la position finale du centre du cercle (I) (fig. 2), et considérons les deux points b et a'_1 du cercle (E) correspondants à sa corde $b\,a'_1$.

Cela posé, il est évident que, pendant le mouvemente du cercle (I) les rayons $C_0 c_s$ et $C_0 c'_s$ tourneront autour des sommets c_s et c'_s du rectangle auxiliaire $c_s c'_s c_i c'_i$, et les perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$, élevées sur les points milieux n_s et n'_s de ces rayons se coupant constamment sur la corde $b\,a'_1$, leur point d'intersection o sera le centre du cercle (x) ou (o), qui passe par b; et il en sera de même quand nous considérerons le déplacement des rayons, qui déterminent le centre o_1 du cercle (x_1) ou (o_1), lequel passe par l'autre extrémité a'_1 de la corde considérée.

D'après cela le cercle (X) (fig. 1) se transformera en *une courbe* (Σ) (fig. 2), qui continuera à couper la droite $b\,a'_1$ en *deux points* o *et* o_1, et par suite cette courbe sera *une conique*.

On reconnaîtra de même que *la transformée* du cercle (X′) sera *une autre conique* (Σ').

Si, dans la fig. I, le cercle (I) se réduit au centre C_0, nous avons déjà vu (n.° **14**; 5°) que les cercles (X) et (X′) se confondaient: par suite les coniques (Σ) et (Σ') de la figure transformée se confondront aussi en *une seule et même conique* (σ).

On arrive ainsi à ce théorème:

Théorème I. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (x) *variable de grandeur, assujetti à couper continuellement, sous des angles donnés* e *et* i, *deux cercles également donnés* (E) *et* (I); ou *à passer par un point donné* C_0 *et à couper, sous un angle donné* e, *un cercle également donné* (E).

En considérant le centre o du cercle variable (x) comme le point de rencontre des cordes $b\,a'_1$ et $b'\,b'''$ des cercles (E) et (I), coupés par celles-ci, sous les angles constants $(90°—e)$ et $(90°—i)$, que nous représenterons par e' et i', le théorème précédent se transformera dans le suivant:

Théorème II. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le point d'intersection* o *de deux cordes* $\mathrm{b\,a'_1}$ *et* $\mathrm{b'\,b'''}$, *appartenant respectivement à deux cercles donnés* (E) *et* (I), *et les coupant continuellement sous des angles également donnés* e′ *et* i′, *de manière que le point d'intersection considéré se trouve équidistant de deux des extrémités* b *et* b′ *de ces cordes;* ou *cette conique peut être considérée comme la courbe parcourue par le point* o *de la corde* $\mathrm{b\,a'_1}$ *d'un cercle donné* (E), *coupé par celle-ci sous un angle également donné* e′ *de manière que ce point se trouve équidistant d'un point donné* C_0, *et d'une des extrémités* b *de cette corde.*

28. Si nous considérons les circonférences enveloppes (E″) et (I″) de ces cordes, le point o sera aussi le point de concours des tangentes $o\,m_2$ et $o\,m'_2$ à ces circonférences, et *la somme algébrique de ces tangentes sera constante*, ou *égale à la somme* ou *à la différence des segments* $\mathrm{b\,m_2}$ *et* $\mathrm{b'\,m'_2}$ ou *des demi-cordes*

*

des cercles (E) *et* (I), *égales aux rayons* R′ *et* r′ *des cercles enveloppes* (E′) *et* (I′) *des cordes* b a *et* b′ d′ (perpendiculaires à ces demi-cordes), en tenant toujours compte du signe des segments respectifs.

En effet, on a (fig. 2)

$$o\,m_2 = o\,b + b\,m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

et

$$o\,m'_2 = o\,b' + b'\,m'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

et en prenant toujours les segments $o\,b$ et $o\,b'$ avec le même signe (n.° 16) on aura:

$$o\,m_2 - o\,m'_2 = b\,m_2 - b'\,m'_2 \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

or, en représentant par M_1 et M'_1 les points milieux des côtés $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du rectangle auxiliaire, le segment $b'\,m'_2$ étant égal à $b\,M'_1$ ou $b\,M_1$, sera constamment positif ou constamment négatif, selon que le point o décrit l'une ou l'autre des coniques (Σ) et (Σ′): donc, si nous représentons par τ et τ' les segments variables $o\,m_2$ et $o\,m'_2$, nous aurons pour l'une des coniques (Σ):

$$\tau \pm \tau' = R' + r' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

et pour l'autre conique (Σ′)

$$\tau \pm \tau' = R' - r' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Ainsi, par une conique quelconque, nous aurons, en général,

$$\tau \pm \tau' = \text{const.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Donc:

THÉORÈME III. — *Étant donnés deux cercles* (E″) *et* (I″), *si deux tangentes à ceux-ci se déplacent de manière que la somme algébrique des distances* τ *et* τ' *des points de contact aux points d'intersection* o *de ces tangents soit une grandeur constante, les lieux géométriques décrits par ce point d'intersection seront deux coniques* (Σ) *et* (Σ′) *données de forme et de position.*

Si le cercle directeur (I) se réduit à son centre C_0, on aura $r' = o$, et la tangente se confondra avec le rayon vecteur $C_0 = \rho'$ d'où il résulte la relation

$$\tau \pm \rho' = R' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

et les deux coniques se confondront en une seule conique (σ), ayant pour un des foyers le point C_0.

Donc:

THÉORÈME IV. — *Étant donné un cercle* (E″) *et un point* C_0, *si l'une tangente à ce cercle et un rayon vecteur, partant de ce point, se déplacent de manière que la somme algébrique des distances* τ *et* ρ', *du point de contact et du point donné à celui de l'intersection* o *de ces droites variables, soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique* (σ) *donnée de forme et de position.*

29. D'après cela, nous pouvons donner aux cercles enveloppes (E″) et (I″) le nom de *cercles focaux* ou *foyers tangentiels*, et à leurs tangentes τ et τ' le nom de *vecteurs tangentiels* ou *roulants*.

Dans le cas où ces cercles se réduisent à leurs centres ils peuvent recevoir le nom de *points focaux* ou *foyers rayonnants* et les vecteurs correspondants le nom de *vecteurs pivotants* ou *rayonnants:* en réservant la denomination ordinaire de *foyers* et de *vecteurs* pour exprimer les foyers et les vecteurs, quels qu'ils soient.

Si plusieurs coniques ont un même *cercle focal*, nous les appelons *monocyclomofocales* ou *monocycloconfocales*.

Quand les coniques auront un même *point focal*, elles seront nommées *monostigmoconfocales*.

Les coniques ayant les deux mêmes *cercles focaux*, nous les appellerons *cyclomofocales* ou *cycloconfocales;* et nous donnerons aux coniques le nom de *stigmoconfocales*, quand elles auront les deux mêmes *points focaux*.

Enfin ces courbes seront dites *monomofocales* ou *monoconfocales* et *homofocales* ou *confocales* suivant qu'elles aient un ou deux mêmes foyers, quels qu'ils soient.

30. *Tracé de la tangente en un point quelconque.* — Voyons maintenaut comme *la méthode de Roberval*, appliquée aux coniques ainsi engendrées, nous donne très-facilement la tangente en un quelconque de leurs points.

Considérons, donc, la conique (Σ), et proposons nous de lui mener la tangente au point o (fig. 2).

Soit o'' un point du lieu (Σ) infiniment voisin du point o, et abaissons de ce point-là les perpendiculaires $o''o'''$ et $o''o^{\text{IV}}$ sur les rayons $C_0 o$ et $C o$.

Si nous représentons par dt le temps infiniment petit que le point met à aller du point o au point o'', le rapport $\frac{o\,o''}{dt}$ sera la vitesse du point. Les rapports $\frac{o\,o'''}{dt}$ et $\frac{o'''o''}{dt}$ seront les composantes de cette vitesse suivant $o\,C_0$ et la perpendiculaire $o'''o''$. De même, $\frac{o\,o^{\text{IV}}}{dt}$ et $\frac{o^{\text{IV}}o''}{dt}$ seront les composantes de la vitesse absolue du point suivant $o\,C$ et la perpendiculaire $o^{\text{IV}}o''$.

Si nous considérons le point mobile o sur les cordes $b\,a'_1$ et $b'\,b'''$ des cercles (E) et (I), les espaces parcourus sur ces cordes, comptés à partir des points b et b', seront égaux, et alors les grandeurs des vitesses composantes $\frac{o\,o'''}{dt}$ et $\frac{o\,o^{\text{IV}}}{dt}$ du point, suivant $o\,C_0$ et $o\,C$, ne seront plus que les projections des vitesses égales entre elles, dont le point se trouve animé sur ces mêmes cordes.

En prenant, donc, pour grandeur de ces vitesses égales les rayons $o\,b$ et $o\,b'$ du cercle (o), les cordes $b\,b_1$ et $b'\,b'_2$, communes à ce cercle et à chacun des cercles donnés (E) et (I), représenteront les directions des vitesses composantes perpendiculaires aux rayons $C\,o$ et $C_0\,o$: de manière que, en unissant leur point de concours f au point o, nous aurons la *vitesse absolue* correspondante de ce point, en *grandeur* et en *direction*, et par conséquent la *tangente* $o\,f$ dans le point donné.

Autrement.—En vertu de la rotation des cordes $b\,a'_1$ et $b'\,b'''$, la vitesse absolue du point générateur o peut être considérée comme la résultante d'*une vitesse de translation* ou *de glissement* le long de ces cordes, et d'*une vitesse de rotation* autour de C et C_0, ou *d'entraînement*.

Puisque le point o se trouve toujours équidistant de b et b' les vitesses de glissement ou relatives seront égales: d'où il s'ensuit que, en représentant ces vitesses par $o\,b$ et $o\,b'$, les vitesses de rotation ou d'entraînement correspondantes seront représentées par les perpendiculaires $b\,b_1\,f$ et $b'\,b'_2\,f$ abaissées de b et b' sur les rayons $C o$ et $C_0 o$, qui les coupent en φ et φ', et la diagonale $o f$ du quadrilatère $o b f b'$ sera la tangente demandée.

Il résulte de là que, si, sur les deux couples de vecteurs tangentiels $m_2 o$, $m^{IV}_2 o$ et $m'_2 o$, $m'''_2 o$, nous marquons respectivement les deux couples de segments égaux $o b$, $o b_1$ et $o b'$, $o b'_2$, les segments $b b_1 \triangleq b o - b_1 o$ (*) et $b' b'_2 \triangleq b' o - b'_2 o$, se coupant en f, nous donneront la tangente $o f$.

31. Nous pouvons aussi arriver directement à cette construction en regardant le point o comme appartenant successivement à chacun des vecteurs tangentiels $m'_2 o$, $m^{IV}_2 o$ et $m'_2 o$, $m'''_2 o$.

En effet, la somme

$$m_2 o + m^{IV}_2 o \pm (m'_2 o + m'''_2 o) = 2 (m_2 o \pm m'_2 o)$$

restant constante (n.° 28), il en résulte nécessairement que les vitesses du point suivant ces vecteurs sont égales.

Ainsi les segments $o b$ et $o b_1$ représentant les vitesses égales du point, sur les vecteurs $m_2 o$ et $m^{IV}_2 o$, nous aurons la vitesse de translation $o \varphi \triangleq \frac{1}{2} (o b + o b_1)$, dont le segment $b b_1$ se trouve animé; et, si nous connaissions la vitesse de rotation du point autour de C, ou sa vitesse de glissement sur ce segment, il nous suffirait de la porter sur celui-ci, à partir de son point milieu φ, puis de joindre son extrémité f au point o, et la ligne $o f$, ainsi obtenue, serait la vitesse absolue de ce point.

De même les segments $o b'$ et $o b'_2$, égaux aux précédents, représentant les vitesses sur les vecteurs $m'_2 o$ et $m'''_2 o$, nous aurons la vitesse de translation $o \varphi = \frac{1}{2} (o b' + o b'_2)$ du segment $b' b'_2$, et en portant sur ce segment, à partir de son point milieu φ', la vitesse de rotation autour de C_0, et joignant son extrémité au point o, nous aurions encore la vitesse absolue de ce point.

L'extrémité de la ligne qui représente la vitesse absolue du point o, devant se trouver à la fois sur $b b_1$ et $b' b'_2$, sera donc le point f où ces lignes se rencontrent; et par conséquent $o f$ sera cette vitesse ou la tangente dans le point considéré.

(*) Cette notation de la *somme géométrique* des segments est celle que Mr. Bellavitis adopte dans sa méthode des équipollences, dont les principes seront quelquefois employés dans cette étude.

Dans le cas particulier où les cercles focaux se réduisent à leurs centres C et C_0, ou deviennent les points focaux de la conique transformée (σ) des coniques (Σ) et (Σ'), nous aurons $o b \triangleq o b_1 \triangleq o \varphi$ et $o b' \triangleq o b'_2 \triangleq o \varphi'$, c'est-à-dire les vecteurs de chaque couple tangentiel, étant équipollents, se confondront avec les rayons Co et $C_0 o$, qui seront alors les vecteurs pivotants ou ordinaires, et nous arriverons au procédé connu pour tirer la tangente en un point d'une conique au moyen des rayons vecteurs respectifs.

32. Le point M_1, situé sur le vecteur $m_2 o$, étant *symétrique* des extrémités m'_2 et m'''_2 des vecteurs $m'_2 o$ et $m'''_2 o$, par rapport aux bissectrices des angles $m'_2 o M_1$ et $m'''_2 o M_1$, décrit évidemment un cercle ($C M_1$) ayant le centre en C et le rayon égal au segment $C M_1 \triangleq C m_2 - M_1 m_2$.

De même si nous marquons sur le vecteur $m'_2 o$ le segment $m'_2 \overset{1}{M}$ égal à $m_2 M_1$ ou à la somme $o m_2 - o m'_2$, le point $\overset{1}{M}$ sera le symétrique de m_2 et m^{IV}_2, par rapport aux bissectrices des angles $m_2 o \overset{1}{M}$ et $m^{\text{IV}}_2 o \overset{1}{M}$, et décrira un cercle dont le centre sera C_0 et le rayon $C_0 \overset{1}{M} = C M_1$.

En considérant semblablement les vecteurs relatifs à l'autre conique (Σ'), décrite par le point o', nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

Nous pouvons donner au cercle ($C M_1$) le nom de *cercle directeur relatif au foyer* (I'').

La conique (Σ) a deux cercles directeurs égaux correspondants à ses deux foyers; et il en est de même de sa confocale (Σ').

33. Il est évident que, lorsque (fig. 2) la corde $b a_1$ tourne autour de C, entraînant le rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$, les rayons $C_0 c_s$ et $C_0 c'_s$ tourneront autour de C_0 et leurs points milieux n_s et n'_s décriront deux cercles ($\sigma_0 n_s$) et ($\sigma_0 n'_s$), dont le centre σ_0 sera le point milieu du segment $C C_0$; d'où il résulte que les enveloppes des perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$ seront deux *coniques stigmoconfocales* (ε) et (ε'), ayant pour points focaux les points C et C_0: car on sait que *le lieu géométrique des projections des points focaux d'une conique sur ses tangentes est un cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre.*

Les points N_s et N'_s où les rayons $C c_s$ et $C c'_s$ des cercles ($C c_s$) et ($C c'_s$) rencontrent les perpendiculaires $n_s o$ et $n'_s o$ sont les points de contact de celles-ci avec leurs enveloppes (ε) et (ε'):

attendu que ces points sont les centres des cercles $(N_s C_0)$ et $(N'_s C_0)$, qui passent par C_0 et touchent ces cercles-là, ou alors parce que l'on a évidemment

$$CN_s \pm N_s C_0 = Cc_s = \text{const.} \ldots\ldots \quad (39)$$

et

$$CN'_s \pm N'_s C_0 = Cc'_s = \text{const.} \ldots\ldots \quad (40).$$

D'après cela nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème V. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe porcourue par le point de rencontre* o *de deux tangentes* $N_s o$ *et* $N'_s o$ *à deux coniques stigmoconfocales* (ε) *et* (ε'), *dont les points de contact* N_s *et* N'_s *soient vus de l'un des foyers* C *sous un angle vecteur constant* $N_s C N'_s$: *les points focaux* C *et* C_0 *des coniques directrices étant les centres des cercles focaux de la conique engendrée.*

34. Le point o se trouvant, par construction, équidistant des points C_0, c_s et c'_s, il résulte de cette propriété de la figure la proposition suivante:

Théorème VI. — *Une conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (oC_0) *assujetti à passer continuellement par un point donné* C_0 *et par deux autres point* c_s *et* c'_s *de deux cercles concentriques* (Cc_s) *et* (Cc'_s) *également donnés, la distance* $c_s c'_s$ *entre ces derniers points étant constante.*

35. Quand, sans la distance $c_s c'_s = 2 . r''$ être nulle, les cercles (Cc_s) et (Cc'_s) se confondront, il en sera de même des coniques (Σ) et (Σ'), et nous aurons les deux théorèmes suivants, comme des cas particuliers des théorèmes V et VI:

Théorème VII. — *Si, autour de l'un des points focaux d'une conique* (ε_0), *on fait tourner un angle vecteur de grandeur constante, et que par les points où ses côtés rencontrent la conique on mène deux tangentes à la courbe, le point d'intersection* o *de ces deux tangentes aura pour lieu géométrique une seconde conique* (σ), *donnée de forme et de position* (*).

(à suivre).

(*) Voy. *Traité des propriétés projectives des figures*, par Mr. Poncelet, 2.e édition, t. I, n.o 480.

SOBRE A INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES ÁS DERIVADAS PARCIAES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

POR

F. Gomes Teixeira

É bem conhecido o methodo de Monge para integrar as equações ás derivadas parciaes lineares de segunda ordem, quando estas equações tem integral intermedio. No presente artigo vou dar um methodo novo para integrar estas equações no caso particular de a funcção arbitraria do integral intermedio conter só x e y. Faço depender esta integração da de duas equações ás derivadas parciaes de primeira ordem, não simultaneas e independentes, que são tambem lineares. Dou tambem as condições necessarias e sufficientes para haver integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y.

O methodo que apresento não é preferivel ao de Monge, mas serve de base a investigações mais importantes sobre esta doutrina, que mais tarde apresentarei.

Seja proposta a equação ás derivadas parciaes de segunda ordem com duas variaveis independentes

$$F = Ar + Bs + Ct + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

onde é

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

e onde A, B, C, D são funcções de x, y, z, p, q.

Notemos primeiro que só as equações ás derivadas parciaes da fórma (1) é que podem ter integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y. É o que se vê derivando relativamente a x e y o integral $v_1 = \varphi(v_2)$, sendo v_2 funcção de x e y, e eliminando entre as equações resultantes $\varphi'(v_2)$, pois que se chega assim a uma equação da fórma (1).

Procuremos as condições necessarias e sufficientes para que a equação (1) tenha um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y, isto é, da fórma

$$u = \varphi(x, y) = f(x, y, z, p, q) \ldots\ldots\ldots (2).$$

Derivando esta equação, o que dá

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)r + \left(\frac{df}{dq}\right)s \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \left(\frac{df}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)q + \left(\frac{df}{dp}\right)s + \left(\frac{df}{dq}\right)t \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

e, eliminando em (1) tres das seis quantidades z, p, q, r, s, t por meio de (2) e (3), deve vir um resultado tal que, se a funcção φ fosse conhecida, substituindo-a n'esse resultado, deveria elle tornar-se identicamente nullo, o que não póde acontecer em quanto tiver alguma das quantidades z, p, q, r, s, t, visto que φ é só funcção de x e y. Logo quando se eliminam tres das quantidades precedentes, devem desapparecer as outras tres e vir um resultado da fórma

$$\psi\left[x, y, \left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right] = 0 \ldots\ldots\ldots (4).$$

As condições necessarias e sufficientes para que desappareçam tres das quantidades z, p, q, r, s, t quando se eliminam as outras tres são, em virtude de um theorema de Jacobi sobre os determinantes funccionaes:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dt}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0\ , & 0\ , & 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right) \\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & 0\ , & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dp}\right) \\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dp}\right) \end{vmatrix} = 0 \ldots . \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dq}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0\ , & 0\ , & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{df}{dp}\right) \\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dp}\right) \\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dp}\right) \end{vmatrix} = 0 \ldots . \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dz}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0\ , & 0\ , & \left(\frac{df}{dz}\right), & \left(\frac{df}{dp}\right) \\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dz}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dp}\right) \\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dz}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dp}\right) \end{vmatrix} = 0 \ldots . (7)$$

logo estes tres determinantes representam as condições necessarias e sufficientes para que a equação (1) tenha um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y.

A equação de condição (5) dá

$$\left(\frac{df}{dp}\right) \begin{vmatrix} A\ , & B\ , & C \\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & 0 \\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Se $\left(\frac{df}{dp}\right) = 0$, deve-se eliminar q em logar de p em (1) por meio da equação (2), o que dá o mesmo determinante multiplicado por $\left(\frac{df}{dq}\right)$; mas $\left(\frac{df}{dq}\right)$ não póde ser nullo ao mesmo tempo que $\left(\frac{df}{dp}\right)$, logo deve o determinante ser sempre nullo. Este determinante dá

$$C\left(\frac{df}{dp}\right)^2+A\left(\frac{df}{dq}\right)^2-B\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{df}{dq}\right)=0\ldots\ldots (8)$$

ou

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=\Omega\left(\frac{df}{dq}\right),\quad \left(\frac{df}{dp}\right)=\Omega'\left(\frac{df}{dq}\right)\ldots\ldots (9)$$

chamando Ω e Ω' as raizes da equação

$$C\Omega^2-B\Omega+A=0\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Cada uma das equações (9) é uma equação ás derivadas parciaes lineares de primeira ordem com duas variaveis independentes, e portanto a sua integração é sempre possivel. Temos assim dois valores para o segundo membro da fórmula (2). Substituamos nas equações de condição (6) e (7) as derivadas tiradas do segundo membro de (2), que já é conhecido, e eliminemos depois n'ellas p ou q pela mesma equação (2) para o que não é necessario conhecer a fórmula da funcção φ, que entra no primeiro membro. Se o resultado que assim se obtem é identicamente nullo para ambas as fórmas da funcção f dadas por (9), a proposta tem dois integraes intermedios; se é identicamente nullo para uma só d'estas fórmas, a proposta tem um só integral intermedio da fórma considerada; se não é identicamente nullo para nenhuma das fórmas da funcção f, a proposta não tem integral intermedio da fórma considerada.

Vejamos como se acaba de determinar o integral (2) quando as equações da condição (6) e (7) são satisfeitas. N'este caso a eliminação de tres das quantidades p, q, r, s, t entre as equações (1), (2), (3), leva, como já vimos, a uma equação da fórma (4), que por ser ás derivadas parciaes de primeira ordem com duas variaveis independentes se integra, e dá a fórma da funcção φ, isto é, o primeiro membro de (2), e temos assim o integral intermedio da proposta com uma funcção arbitraria introduzida ou por (9) ou por (4).

A vantagem de proceder á verificação das equações de condição (6) e (7) antes da eliminação, está em que assim começamos por formar dos termos da equação final só aquelles que devem desapparecer, e só depois de se verificar que desapparecem, é que se acham os outros.

De resto, quando se queira fazer a verificação, é conveniente, visto que os determinantes (6) e (7) differem só na terceira columna, dar-lhes a fórma

$$\left(\frac{df}{dp}\right)^3\left(\frac{dF}{dq}\right)-\begin{vmatrix}\left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right)\\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dp}\right)\\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dp}\right)\end{vmatrix}\left(\frac{df}{dq}\right)$$

$$-\left(\frac{df}{dp}\right)^2\left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dq}\right)$$

$$+\left(\frac{df}{dp}\right)\begin{vmatrix}\left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right)\\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right)\end{vmatrix}\left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dq}\right)=0$$

$$\left(\frac{df}{dp}\right)^3\left(\frac{dF}{dz}\right)-\begin{vmatrix}\left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right)\\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{ds}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dp}\right)\\ 0\ , & \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dp}\right)\end{vmatrix}\left(\frac{df}{dz}\right)$$

$$-\left(\frac{df}{dp}\right)^2\left(\frac{dF}{dr}\right)\left(\frac{d\frac{df}{dx}}{dz}\right)$$

$$+\left(\frac{df}{dp}\right)\begin{vmatrix}\left(\frac{dF}{dr}\right), & \left(\frac{dF}{ds}\right)\\ \left(\frac{df}{dp}\right), & \left(\frac{df}{dq}\right)\end{vmatrix}\left(\frac{d\frac{df}{dy}}{dz}\right)=0.$$

Appliquemos esta doutrina á integração da equação

$$rx^2+2xys+y^2t=0.$$

(Continúa).

A equação (10) dá n'este caso

$$\Omega = \frac{x}{y}$$

o que reduz (9) a

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{x}{y}\left(\frac{df}{dq}\right)$$

que integrada, para o que se deverá empregar as equações

$$df = 0, \quad dq + \frac{x}{y}dp = 0,$$

dá o segundo membro de (2), isto é

$$f(x, y, z, p, q) = q + \frac{x}{y}p.$$

As equações de condição (6) e (7) são satisfeitas, pois que os determinantes

$$\begin{vmatrix} x^2, & 2xy, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y}, & 1, & 0, & \frac{1}{y} \\ 0, & \frac{x}{y}, & 0, & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^2, & 2xy, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y}, & 1, & 0, & \frac{1}{y} \\ 0, & \frac{x}{y}, & 0, & -\frac{x}{y^2} \end{vmatrix}$$

são nullos. Logo haverá um integral com uma funcção arbitraria de x e y.

Vem pois

$$\varphi(x,y)=q+\frac{x}{y}p$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{p}{y}+\frac{x}{y}r+s$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=-\frac{xp}{y^2}+\frac{x}{y}s+t$$

e, substituindo na proposta os valores de r e t tirados d'estas ultimas equações e o valor de q tirado da primeira,

$$x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0$$

que dá

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

logo o integral intermedio da proposta é

$$q+\frac{x}{y}p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

sendo φ a funcção arbitraria.

Passando á doutrina geral faremos ainda duas observações:

1.ª Por ser a equação proposta do primeiro grau relativamente a r, s e t, a equação (4) será tambem do primeiro grau relativamente a $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ e $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$, pois que as fórmulas de transformação (3) são do primeiro grau relativamente a todas estas quantidades.

2.ª Se, antes de fazer a eliminação de tres das quantidades p, q, r, s e t na proposta por meio de (2) e (3), verificarmos que as equações de condição (6) e (7) têm logar, podemos nas fórmulas (1), (2), (3) annullar as duas das quantidades p, q, r, s e t, que devem desapparecer pela eliminação, e proceder depois á eliminação que fica assim mais simples, Discutamos agora a equação (10).

1.º Se A, B, C forem só funcções de x e y, virá, integrando (9)

$$u = q + p\Omega$$

e as equações de condição (6) e (7) reduzir-se-ão ás seguintes:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \left(\frac{dF}{dq}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & 1\,, & -\Omega \\ \Omega, & 1, & 0\,, & \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \\ 0, & \Omega, & 0\,, & \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \left(\frac{dF}{dz}\right), & \left(\frac{dF}{dp}\right) \\ 0, & 0, & 0\,, & \Omega \\ \Omega, & 1, & 0\,, & \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \\ 0, & \Omega, & 0\,, & \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(A + B\Omega)\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) - \Omega\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \Omega^2\left[\left(\frac{dF}{dq}\right)\Omega - \left(\frac{dF}{dp}\right)\right] = 0$$

$$\frac{dF}{dz} = 0.$$

Logo para haver no caso que estamos considerando um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y, é necessario que a proposta não contenha z, e que tenha logar a equação de condição precedente, sendo Ω uma das raizes de (10).

Haverá dois integraes intermedios, quando a equação de condição precedente fôr satisfeita por ambas as raizes da equação de condição (10).

Passemos outra vez ao caso de A, B, C serem funcções de x, y, z, p, q.

2.° Se fôr $\Omega = \Omega'$, para o que é necessaria a condição

$$B^2 - 4AC = 0,$$

os dois integraes intermedios, se os houver, reduzir-se-ão a um só, e os argumentos das funcções arbitrarias do integral primitivo serão eguaes.

3.° Se fôr $A = 0$, será

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = \frac{B}{C}$$

e portanto

$$\left(\frac{df}{dp}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{B}{C} \cdot \left(\frac{df}{dq}\right)$$

logo uma das fórmas da funcção f não conterá p.

4.° Se fôr $C = 0$, será

$$\Omega = \infty, \quad \Omega' = \frac{A}{B}$$

logo

$$\left(\frac{df}{dq}\right) = 0, \quad \left(\frac{df}{dp}\right) = \frac{A}{B} \left(\frac{df}{dq}\right)$$

e portanto uma das fórmas da funcção f não conterá q.

5.° Se fôr ao mesmo tempo $A = 0$, $C = 0$, virá

$$\Omega = 0, \quad \Omega' = \infty$$

logo

$$\left(\frac{df}{dp}\right)=0, \quad \left(\frac{df}{dq}\right)=0$$

isto é, uma das fórmas da funcção f não conterá p e a outra não conterá q.

6.° Se fôr ao mesmo tempo $A=0$ e $B=0$, virá

$$\Omega=0 \text{ e } \Omega'=0$$

e portanto sempre

$$\left(\frac{dF}{dp}\right)=0$$

isto é, as duas fórmas da funcção f não conterão p.

7.° Se fôr $B=0$ e $C=0$, virá

$$\Omega=\infty, \quad \Omega'=\infty$$

e será sempre

$$\left(\frac{df}{dq}\right)=0$$

isto é, as duas fórmas de f não conterão q.

O estudo d'estes diversos casos é importante, pois a elles se reduzem muitas vezes os casos mais complicados. Vamos, pois, occupar-nos d'elles.

I. *Caso de ser* $C=0$. — Consideremos a equação ás derivadas parciaes

$$F=Ar+Bs+D=0$$

onde B e D são funcções de x, y, z, p, q.

Já vimos que n'este caso a equação (5) reduz-se ás duas seguintes:

$$\left(\frac{df}{dq}\right)=0, \quad A\left(\frac{df}{dp}\right)=B\left(\frac{df}{dq}\right).$$

A segunda solução não leva o resultado notavel.

Considerando, pois, só a solução $\left(\frac{df}{dq}\right)=0$, vem

$$u=f(x,y,z,p)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

que dá

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)&=\left(\frac{df}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)p+\left(\frac{df}{dp}\right)r\\ \left(\frac{du}{dy}\right)&=\left(\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)q+\left(\frac{df}{dp}\right)s\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (12).$$

A segunda equação de condição (6) dá

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \frac{dF}{dq}, & \frac{dF}{dp} \\ 0, & 0, & 0, & \frac{df}{dp} \\ \frac{df}{dp}, & 0, & 0, & \frac{d\frac{df}{dx}}{dp} \\ 0, & \frac{df}{dp}, & \frac{df}{dz}, & \frac{d\frac{df}{dy}}{dp} \end{vmatrix}=0$$

ou

$$B\frac{df}{dz}-\frac{dF}{dq}\frac{df}{dp}=0\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

A funcção f deve pois ser dada por esta equação, e como ella não deve conter q, é necessario e basta que a proposta seja da fórma

$$F = A r + B s + H q + G = 0$$

sendo A, B, H e G funcções de x, y, z, p.

A equação (13) reduzir-se-ha então á forma

$$B \frac{df}{dz} - H \frac{df}{dp} = 0$$

que dá

$$u = \int \lambda (B\,dp + H\,dz) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

chamando λ o factor que torna integravel a expressão com duas variaveis $B\,dp + H\,dz$.

A terceira equação de condição (7) dá

$$\begin{vmatrix} A, & B, & \frac{dF}{dz}, & \frac{dF}{dp} \\ 0, & 0, & \lambda H, & \lambda B \\ \lambda B, & 0, & \frac{d\frac{df}{dx}}{dz}, & \frac{d\frac{df}{dx}}{dp} \\ 0, & \lambda B, & \frac{d\frac{df}{dy}}{dz}, & \frac{d\frac{df}{dy}}{dp} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{dF}{ds}\left[H \frac{d\frac{df}{dy}}{dp} - B \frac{d\frac{df}{dy}}{dz}\right] + A B \lambda^2 \left[H \frac{d\frac{df}{dx}}{dp} - B \frac{d\frac{df}{dx}}{dz}\right]$$

$$- B\lambda \left[H \frac{dF}{dp} - B \frac{dF}{dz}\right] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Se esta equação fôr satisfeita identicamente quando se elimina n'ella quatro das quantidades r, s, p, q, z, por meio da equação proposta e das equações (12) e (14), a proposta terá um integral intermedio da fórma (11). N'este caso vamos achar u.

Para isso derivando (14) vem

$$\frac{du}{dy}=\frac{df}{dy}+\lambda(\mathrm{H}q+\mathrm{B}s),$$

e, substituindo na proposta o valor de $\mathrm{H}q+\mathrm{B}s$ tirado d'esta e r tirado de (12), resulta

$$\lambda\mathrm{A}\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{df}{dp}\left(\frac{du}{dy}\right)+\mathrm{G}\lambda\frac{df}{dp}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dp}$$

$$-\mathrm{A}\lambda\frac{df}{dx}-\mathrm{A}\lambda\frac{df}{dz}p=0.$$

Eliminando n'esta equação uma das quantidades p ou z por meio de (14), deve desapparecer a outra, por ter logar a equação de condição (15), e virá uma equação da fórma

$$\psi\left(x,y,\frac{du}{dx},\frac{du}{dy}\right)=0,$$

que é ás derivadas parciaes de primeira ordem com duas variaveis independentes, e que, integrada, dará u com uma funcção arbitraria de x e y. Substituindo depois este valor de u em (14), teremos o integral intermedio da proposta.

II. *Caso de ser* $\mathrm{A}=0$. — Tudo o que dissémos no caso anterior, tem logar n'este, mudando x em y, p em q, r em t, C em A e vice-versa.

III. *Caso de ser* $\mathrm{A}=0$ *e* $\mathrm{C}=0$. — Já vimos que n'este caso a equação (5) reduz-se a

$$\frac{df}{dp}=0 \quad \text{e} \quad \frac{df}{dq}=0.$$

Resolve-se pois a questão ou pelo caso I fazendo nas fórmulas $A=0$, ou pelo caso II fazendo nas fórmulas $C=0$. Se ambos os casos forem applicaveis, obtêm-se assim dois integraes de primeira ordem da proposta.

IV. *Caso de ser* $B=0$ *e* $C=0$. — A equação (8) dá n'este caso

$$\left(\frac{df}{dq}\right)^2=0$$

logo será sempre

$$u=f(x,y,z,p)$$

que dá

$$\frac{du}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}p+\frac{df}{dp}r.$$

N'este caso a equação proposta é

$$F=Ar+D=0$$

e para que desappareça q quando n'ella se elimina r e p por meio das precedentes, é necessario que seja (fórmula 6)

$$\frac{df}{dp}=0$$

logo u não poderá conter p, o que não póde ser, logo a proposta não póde conter n'este caso um integral intermedio com uma funcção arbitraria de x e y.

Exceptua-se o caso de a proposta não conter q, pois então a equação de condição (6) tem logar, sem ser necessario que a funcção f não contenha p, mas n'este caso a equação integra-se como se fosse ás derivadas ordinarias, junctando ao integral em logar de uma constante arbitraria, uma funcção arbitraria de y.

V. *Caso de ser* $B=0$ *e* $A=0$. — Applica-se a este caso tudo o que se disse no anterior, mudando x em y, p em q, r em t, e vice-versa.

TROIS THÉORÊMES RELATIFS A LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

M. BIRGER HAUSTED

I

La fraction irréductible $\frac{M}{N}$ ne conténant à son dénominateur que des facteurs prémiers différants de 2 et 5, soit convertie en fraction décimale purement périodique à k chiffres dans la période. Les restes partiels de la division, dûs à cette conversion, soient

$$b_1, b_2, \ldots b_{r-1}, b_r, b_{r+1}, \ldots b_k.$$

THÉORÊME.—*A chaque valeur de* N *corresponde un nombre* p, *indépendant de* M *et de* r, *pour lequel on a*

$$b_r \equiv M p^{k-r} \pmod{N}.$$

On a en premier lieu

$$M\, 10^{k-r} \equiv b_{k-r} \pmod{N},$$

qui multipliée par la congruence

$$M p^{k-r} \equiv b_r \pmod{N},$$

donne

$$M^2 (10\, p)^{k-r} \equiv b_r\, b_{k-r} \pmod{N};$$

mais

$$b_r\, b_{k-r} \equiv M^2 \pmod{N}$$

reduit la congruence ci-dessus à

$$(10\, p)^{k-r} \equiv 1 \pmod{N};$$

ainsi l'on a que la congruence

$$b_r \equiv \mathrm{M}\, p^{k-r} \ (\mathrm{mod.\ N})$$

est satisfaite quand p est racine de la congruence linéaire

$$10\,p \equiv 1 \ (\mathrm{mod.\ N}).$$

Ce théorême donne occasion à la règle de multiplication assez curieuse ci-dessous nommée :

Un nombre arbitraire a, *ayant un chiffre, soit multiplié par un autre nombre* p *parfaitement arbitraire, et le nombre* b *des unités du produit* a p *soit écrit à gauche de* a. *Ce soit multiplié par* p, *leur produit* b p *additionné à les dizaines de* a p, *et les unités* c *de cette somme soient écrites à gauche de* b. *Ce soit multiplié par* p, *le produit* c p *additionné à les dizaines de* b p, *et les unités de la somme placées à la gauche de* c, *et ainsi de suite jusqu'au moment où une telle somme dévient égale au nombre* a, *et le nombre*

$$\ldots c\, b\, a$$

peut être multiplié par k *nombres entiers ou fractions par changement cyclique des chiffres, dont le nombre est aussi* k.

Soit

$$\mathrm{P} = t.10^{k-1} + s.10^{k-2} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a$$

et

$$\mathrm{P}p = a.10^{k-1} + t.10^{k-2} + \ldots + c.10 + b,$$

l'on aura

$$p\,\mathrm{P} = a.10^{k-1} + \frac{\mathrm{P}-a}{10},$$

qui donne

$$\frac{a}{10\,p-1} = \frac{\mathrm{P}}{10^k-1}.$$

Ainsi P est le nombre composé par les k chiffres dans la période de la fraction décimale, en laquelle est convertie la fraction irréductible

$$\frac{M}{N}=\frac{a}{10p-1}.$$

Exemple

$$\begin{array}{r} P=0689655172413793103448275862 \\ 3 \\ \hline 2068965517241379310344827586 \end{array}$$

P est ici le période de la fraction décimale en laquelle est convertie la fraction $\frac{2}{29}$, qui sera multiplié par changement cyclique des chiffres par 28 nombres de la forme $\frac{M'}{2}$, en substituant par M' chacun des nombres 1, 2, 3, ... 28.

II

Destination du nombre de termes d'un déterminant ne contenant pas des éléments de la série diagonale.

Je suppose donné un déterminant de n^2 éléments. Σ_n désigne le nombre des termes qui ne contiennent pas des éléments de la série diagonale. Maintenant je decompose le déterminant en ses sous-déterminants, dont le nombre est n. Seulement un de ceux-ci será multiplié par un élément de la série diagonale du déterminant donné. Dans chacun de tous les autres sous-déterminants de $(n-1)^2$ éléments ils se trouvent $n-2$ éléments de la série diagonale du déterminant donné en des lignes parallèles à la diagonale du sous-déterminant. En changeant successivement les piles (séries verticales) et les séries (séries horizontales) ces $n-2$ éléments viennent entrer dans la diagonale dans laquelle encore se trouve un élément étranger à la série diagonale du déterminant donné. Nous l'appelerons a_2. Le nombre des termes du sous-déterminant qui ne contiennent pas des éléments de la série diagonale est Σ_{n-1}.

Parmi les termes restants a_n se trouve la seule et tous les termes de la série diagonale dans Σ_{n-2} termes. L'élément a_n ne faisant pas partie de la série diagonale du déterminant donné, l'on aura

$$\Sigma_n = (n-1)(\Sigma_{n-1} + \Sigma_{n-2}).$$

On a aussi

$$(n-2)\Sigma_{n-3} = \Sigma_{n-1} - (n-2)\Sigma_{n-2}$$

laquelle équation est déduite de la prémière en y substituant $n-1$ par n, et par conséquent

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_{n-2} - (n-2)\Sigma_{n-3} = (-1)^n,$$

qui, pour n pair, devient

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_2 - 2\Sigma_1 = +1,$$

et, pour n impair, devient

$$\Sigma_n - n\Sigma_{n-1} = \Sigma_3 - 3\Sigma_2 = -1.$$

Donc

$$\Sigma_n = n\Sigma_{n-1} + (-1)^n,$$

$$\Sigma_{n-1} = (n-1)\Sigma_{n-2} + (-1)^{n-1},$$

. . . .

$$\Sigma_3 = 3\Sigma_2 - 1,$$

$$\Sigma_2 = 0 + 1,$$

lequel algorithme donne

$$\Sigma_n = [n]\left(\frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]} + \frac{1}{[4]} - \ldots + \frac{(-1)^n}{[n]}\right)$$

$$= [n]\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]} + \ldots + \frac{(-1)^n}{[n]}\right).$$

Maintenant on sait que

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{[2]} - \frac{1}{[3]} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{[n]} + \frac{(-1)^{n+1}}{[n+1]} + \frac{(-1)^{n+2}}{[n+2]} + \ldots$$

donc

$$\Sigma_n - \frac{[n]}{e} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots \right).$$

Mais la quantité

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots$$

est toujours numériquement moindre que $\frac{1}{n+1}$, ainsi l'on aura pour tous les valeurs positives de n que numériquement

$$\Sigma_n - \frac{[n]}{e} < \frac{1}{2}$$

et par conséquent Σ_n est l'entier le plus approché de $\frac{[n]}{e}$.

III

Développement de $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ en fraction continue de la forme

$$\alpha_0 + \beta_0\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_1 + \beta_1\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_2 + \beta_2\sqrt{c}} + \ldots}$$

Les lettres désignent des nombres entiers réels positifs ou negatifs, c est positif et constant, a et b sont indépendants l'un de l'autre et peuvent avoir tous les valeurs entiers de $-\infty$ à $+\infty$. Le systeme de la forme $a+b\sqrt{c}$ a tous ses propriétés essentielles communes à le systeme ordinaire de nombres entiers. Par exemple, deux nombres de cet systeme sont inégales, car l'équation

$$a+b\sqrt{c}=\alpha+\beta\sqrt{c}$$

conduira à l'équation impossible

$$\frac{a-\alpha}{b-\beta}=\sqrt{c}.$$

Au contraire on peut toujours, quand $a+b\sqrt{c}$ soit donné, trouver un autre nombre dans le même systeme $\alpha+\beta\sqrt{c}$ dont la difference de celui-là est moindre qu'une quantité finie donnée quelconque. Il en résulte que les nombres de le systeme de la forme $a+b\sqrt{c}$ ne se rangent pas comme les nombres entiers de le systeme ordinaire.

Tous les calculs faits avec les nombres de la forme $a+b\sqrt{c}$ donnent des nombres de la même forme. Par exemple,

$$(1)\; a_0+b_0\sqrt{c}\pm(a_1+b_1\sqrt{c})=a_0\pm a_1+(b_0\pm b_1)\sqrt{c}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{c}$$

$$(2)\; (a_0+b_0\sqrt{c})(a_1+b_1\sqrt{c})=a_0\,a_1+b_0\,b_1\,c\pm(a_0\,b_1+a_1\,b_0)\sqrt{c}$$
$$=\mathrm{A}_1+\mathrm{B}_1\sqrt{c}$$

$$(3)\qquad \frac{a_0+b_0\sqrt{c}}{a_1+b_1\sqrt{c}}=\mathrm{A}_2+\mathrm{B}_2\sqrt{c}$$

où

$$\mathrm{A}_2=\frac{\begin{vmatrix} a_0 & c\,b_1 \\ b_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c\,b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}},\quad \mathrm{B}_2=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c\,b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}}.$$

L'on aura de même

$$(4)\qquad \sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}} = x + y\sqrt{c}$$

si

$$(5)\qquad a_0 = x^2 + y^2 c,$$

$$(6)\qquad b_0 = 2xy.$$

On voit par les équations (5) et (6) que $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$ devient imaginaire dans le systeme de la forme $a + b\sqrt{c}$ pour a_0 negatif, que x et y ont les mêmes signes ou les signes contraires suivant et que b est positif ou negatif.

Si on résout les équations (5) et (6), l'on aura

$$(7)\qquad x = \pm\sqrt{\frac{a_0 \pm \sqrt{a^2_0 - b^2_0 c}}{2}}$$

$$(8)\qquad y = \mp\sqrt{\frac{a_0 \mp \sqrt{a^2_0 - b^2_0 c}}{2c}}.$$

Si $a_0 + b_0\sqrt{c}$ n'est pas nombre carré dans le systeme de la forme $a + b\sqrt{c}$, $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$ deviendra nombre irrationel.

Les explications ci-dessus données constatent l'impossibilité de trouver deux nombres entiers consecutifs dans le notre systeme entre lesquels la quantité irrationelle soit placée. D'abord il faut donner nécessairement une définition de *la valeur approximative de* $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$. Je dis donc que $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{c}$ sera la valeur approximative de $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$ si α_0 et β_0 sont les nombres entiers les plus prochains aux valeurs de x et y trouvées par les équations (5) et (6) et $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{c}$ est au même temps moindre que $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$.

Le nombre irrationel $\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}}$ peut être développé en une fraction continue dont les dénominateurs sont des nombres entiers dans le notre systeme. La méthode pour faire, cella est en tous ses points essentiels analogue à celui qu'on suive dans le systeme des nombres ordinaires.

Or, l'on a

$$\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}=(\alpha_0+\beta_0\sqrt{c})+\frac{\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}-(\alpha_0+\beta_0\sqrt{c})}{1}$$

$$=\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}+\frac{1}{x_1},$$

où $\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}$ est la valeur approximative de $\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}$, et

$$x_1=\frac{\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}+\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}}{a_0+b_0\sqrt{c}-(\alpha_0+\beta_0\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}+\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}}{m_0+n_0\sqrt{c}}$$

$$=\alpha_1+\beta_1\sqrt{c}+\frac{\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}+m_1+n_1\sqrt{c}}{m_0+n_0\sqrt{c}}=\alpha_1+\beta_1\sqrt{c}+\frac{1}{x_2},$$

où est

$$m_0+n_0\sqrt{c}=a_0+b_0\sqrt{c}-(\alpha_0+\beta_0\sqrt{c})^2$$

et

$$m_1+n_1\sqrt{c}=\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}-(m_0+n_0\sqrt{c})(\alpha_1+\beta_1\sqrt{c}),$$

et enfin α_1 et β_1 sont les nombres entiers qui sont les valeurs approximatives des déterminants

$$\frac{2\begin{vmatrix}\alpha_0 & n_0 c\\ \beta_0 & m_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m_0 & n_0 c\\ n_0 & m_0\end{vmatrix}},\quad \text{et}\quad \frac{2\begin{vmatrix}m_0 & \alpha_0\\ n_0 & \beta_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m_0 & n_0 c\\ n_0 & m_0\end{vmatrix}}$$

en même temps que $(m_0+n_0\sqrt{c})(\alpha_1+\beta_1\sqrt{c})$ est moindre que

$$\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}+\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}.$$

Ici comme dans tous les opérations suivantes où l'on opère avec $\sqrt{a_0+b_0\sqrt{c}}$, la valeur approximative $\alpha_0+\beta_0\sqrt{c}$ la remplace.

Ensuite l'on aura

$$x_2 = \frac{(m_0 + n_0\sqrt{c})\left(\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}} - (m_1 + n_1\sqrt{c})\right)}{m_2 + n_2\sqrt{c}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}} - (m_1 + n_1\sqrt{c})}{m_3 + n_3\sqrt{c}},$$

où

$$m_3 + n_3\sqrt{c} = \frac{m_2 + n_2\sqrt{c}}{m_0 + n_0\sqrt{c}} = \frac{a_0 + b_0\sqrt{c} - (m_1 + n_1\sqrt{c})^2}{m_0 + n_0\sqrt{c}}$$

et

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{c} + \frac{\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}} + m_4 + n_4\sqrt{c}}{m_3 + n_3\sqrt{c}},$$

$\alpha_2 + \beta_2\sqrt{c}$ étant la valeur approximative de x_2.

En continuant ce développement l'on aura

$$\sqrt{a_0 + b_0\sqrt{c}} = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_1 + \beta_1\sqrt{c} + \cfrac{1}{\alpha_2 + \beta_2\sqrt{c} + \dots}}$$

L'application de la methode aux exemples $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2 + 5\sqrt{2}}$ peut servir à la faire mieux comprendre.

I. Je mets

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{2} + \frac{1}{x_1}$$

où α_0 et β_0 sont les nombres entiers plus prochaines à faire identiques les rélations:

$$5 \geqq \alpha_0^2 + 2\beta_0^2$$

$$2 \geqq 2\alpha_0\beta_0.$$

En posant $\alpha_0=1$ et $\beta_0=1$, la rélation

$$1+\sqrt{2}<\sqrt{5+2\sqrt{2}}$$

sera satisfaite. $1+\sqrt{2}$ sera la valeur approximative de $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ et dans les opérations suivantes $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ doit être remplacée par $1+\sqrt{2}$.

Ainsi l'on a

$$\sqrt{5+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}-(1+\sqrt{2})}{1}=1+\sqrt{2}+\frac{1}{x_1}$$

et

$$x_1=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}}{2}=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}+\frac{1}{x_2},$$

où α_1 et β_1 sont les nombres entiers les plus approximatifs aux valeurs des déterminants

$$\frac{2\begin{vmatrix}1, & 0\\ 1, & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2, & 0\\ 0, & 2\end{vmatrix}}, \quad \text{et} \quad \frac{2\begin{vmatrix}2, & 1\\ 0, & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2, & 0\\ 0, & 2\end{vmatrix}}$$

c'est à dire $\alpha_1=1$, $\beta_1=1$, ce qui donne

$$x_1=1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}-(1+\sqrt{2})}{2}=1+\sqrt{2}+\frac{1}{x_2}$$

et

$$x_2=\frac{2\left(\sqrt{5+2\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}}{1}$$

$$=2+2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}-(1+\sqrt{2})}{1}=2+2\sqrt{2}+\frac{1}{x_3}.$$

Ainsi l'on aura

$$\sqrt{5+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{2+2\sqrt{2}+\cfrac{1}{x_3}}}.$$

II. De la même manière on trouve

$$\sqrt{2+5\sqrt{2}}$$

$$=1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{7+4\sqrt{2}+\cfrac{1}{-1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+3\sqrt{2}+\ldots}}}}}}}$$

ou

$$\sqrt{2+5\sqrt{2}}$$

$$=1+\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{2+\sqrt{2}+\ldots}}}}}}$$

Nous voyons ici qu'il-y-a souvent plusieurs manières de développer une quantité irrationnelle du système de la forme $a+b\sqrt{c}$ en fraction continue de le même système.

SOBRE UM PROBLEMA

POR

L. F. Marrecas Ferreira

Determinar o numero de anneis de dois cadeados, satisfazendo estes ás seguintes condições:

a) o numero de anneis d'um é egual ao das lettras, que o outro contém em cada annel;

b) os anneis de cada um têm egual numero de lettras;

c) o numero de arranjos das lettras é o mesmo para os dois cadeados.

SOLUÇÃO

Se n'um cadeado forem x e y respectivamente os numeros de anneis e de lettras, será x^y o numero de arranjos que n'elle admittem as lettras.

Para o outro cadeado o numero de arranjos é representado por y^x.

Será por hypothese $x^y = y^x$; equação que deve ser resolvida em numeros inteiros.

Teremos:

$$\frac{x}{\text{Log.}\, x} = \frac{y}{\text{Log.}\, y},$$

e sendo m um coefficiente arbitrario podemos fazer:

$$x = m \,.\, y$$

$$\text{Log.}\, x = m \,.\, \text{Log.}\, y$$

d'onde se deduz:

$$\text{Log.}\,x = \text{Log.}\,m + \text{Log.}\,y = m.\text{Log.}\,y$$

ou:

$$y = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)}$$

$$x = m^{\left(\frac{m}{m-1}\right)}.$$

Os valores de y e x resultando d'aquelles que forem arbitrados a m, temos portanto que fazer todas as hypotheses possiveis a respeito d'esta quantidade, para se determinarem as soluções do problema.

m negativo.

N'esta hypothese $\frac{1}{m-1}$ (expoente do valor de y) deve ser numero inteiro positivo e par; mas sendo m negativo, o expoente torna-se egualmente negativo, concluindo-se que a hypothese é inadmissivel.

m positivo e fraccionario.

Esta hypothese é inadmissivel, porque qualquer que seja o expoente de m, o resultado nunca será inteiro.

m inteiro e positivo.

N'este caso $\frac{1}{m-1}$ deve ser inteiro e positivo; mas logo que $(m-1)$ seja maior que a unidade, será $\frac{1}{m-1} < 1$; para $m=1$ vem $y=\infty$, $x=\infty$ e para $m=2$ vem $y=2$, $x=4$.

Excluindo portanto as soluções obtidas para o caso de $m=1$, impossiveis de realisar, resultam como soluções unicas para o problema:

$$y=2 \quad x=4.$$

SOBRE UMA FORMULA INTEGRAL

POR

J. A. Martins da Silva

Alferes alumno de Artilheria

Vamos dar a deducção de uma formula, que suppomos nova, applicavel a todas as expressões $F(x+\alpha)$ susceptiveis de se desenvolverem segundo as potencias de $e^{-\alpha}$ e propria para servir na determinação de varios integraes definidos.

Seja:

$$F(x+\alpha)$$

a funcção desenvolvida segundo as potencias de $e^{-\alpha}$; por conseguinte:

$$F(x+\alpha)=A+B_1 e^{-\alpha}+B_2 e^{-2\alpha}+\ldots+B_n e^{-n\alpha}+\ldots$$

$A, B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ são independentes de a e dependentes de x.

Suppondo agora o desenvolvimento applicado aos valores imaginarios, temos:

$$F(x+\alpha t\sqrt{-1})=A+B_1 e^{-\alpha t\sqrt{-1}}+B_2 e^{-2\alpha t\sqrt{-1}} +\ldots+B_n e^{-n\alpha t\sqrt{-1}}+\ldots$$

$$F(x-\alpha t\sqrt{-1})=A+B_1 e^{\alpha t\sqrt{-1}}+B_2 e^{2\alpha t\sqrt{-1}} +\ldots+B_n e^{n\alpha t\sqrt{-1}}+\ldots$$

d'onde:

$$F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})=-B_1(e^{\alpha t\sqrt{-1}}-e^{-\alpha t\sqrt{-1}})$$
$$-B_2(e^{2\alpha t\sqrt{-1}}-e^{-2\alpha t\sqrt{-1}})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-B_n(e^{n\alpha t\sqrt{-1}}-e^{-n\alpha t\sqrt{-1}})$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

mas:

$$e^{n\alpha t\sqrt{-1}}=\cos. n\alpha t+\sqrt{-1}\,.\text{sen.}\, n\alpha t$$

$$e^{-n\alpha t\sqrt{-1}}=\cos. n\alpha t-\sqrt{-1}\,.\text{sen.}\, n\alpha t$$

e:

$$e^{n\alpha t\sqrt{-1}}-e^{-n\alpha t\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\,.\text{sen.}\, n\alpha t$$

portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}[F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})]=-2B_1.\text{sen.}\ \alpha t$$
$$-2B_2.\text{sen.}\, 2\alpha t$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2B_n.\text{sen.}\, n\alpha t$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\dfrac{F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})}{t}\right)}{1+t^2}dt=$$

$$-2B_1\int_0^\infty \frac{\left(\dfrac{\text{sen.}\,\alpha t}{t}\right)}{1+t^2}dt-2B_2\int_0^\infty \frac{\left(\dfrac{\text{sen.}\,2\alpha}{t}\right)}{1+t^2}dt-\ldots$$

$$-2B_n\int_0^\infty \frac{\left(\dfrac{\text{sen.}\,n\alpha t}{t}\right)}{1+t^2}dt-\ldots$$

e como:

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\text{sen.}\, n\alpha t}{t}\right)}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.(1-e^{-n\alpha})$$

resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})}{t}\right)}{1+t^2}\, dt =$$

$$\begin{aligned} &-B_1\pi.(1-e^{-\alpha})\\ &-B_2\pi.(1-e^{-2\alpha})\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-B_n\pi.(1-e^{-n\alpha})\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &=\pi.[B_1 e^{-\alpha}+B_2 e^{-2\alpha}+\ldots+B_n e^{-n\alpha}+\ldots\\ &\quad -B_1-B_2-\ldots-B_n-\ldots]\\ &=\pi.[F(x+\alpha)-(A+B)] \end{aligned}$$

sendo:

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots$$

Para $\alpha = 0$, é:

$$F(x) = A + B$$

logo:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})}{t}\right)}{1+t^2}\, dt$$

$$= \pi.[F(x+\alpha)-F(x)].$$

A hypothese $\alpha = 0$ é permittida e a formula ultima é por consequencia applicavel a todas as expressões $F(x+\alpha)$, susceptiveis de se desenvolverem segundo as potencias de $e^{-\alpha}$.

Façamos duas applicações da formula:

I. $F(x)=\frac{1}{x}$; temos então:

$$F(x+\alpha t\sqrt{-1})-F(x-\alpha t\sqrt{-1})=-\frac{2\alpha t\sqrt{-1}}{\overline{\alpha t}^2+x^2}$$

$$F(x+\alpha) \qquad -F(x) \qquad =-\frac{\alpha}{x(x+\alpha)}$$

logo:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(\overline{\alpha t}^2+x^2)(1+t^2)}=\frac{\pi}{2x.(x+\alpha)}$$

resultado egual ao que obteriamos, se fizessemos a mesma hypothese $F(x)=\frac{1}{x}$ na formula:

$$\int_0^\infty \frac{F(x+\alpha t\sqrt{-1})+F(x-\alpha t\sqrt{-1})}{1+t^2}\,dt=\pi.F(x+\alpha)$$

de Abel (vide *Tratado de calculo differencial e integral* do sr. Bertrand, tomo II, pag. 171).

Fazendo:

$$\begin{cases} 1.^\circ \text{———} & \alpha=x\gtrless 0 \\ 2.^\circ \text{———} & \begin{cases}\alpha=0\\ x\gtrless 0\end{cases}\end{cases}$$

vem:

$$\begin{cases} 1.^\circ \text{———} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{\pi}{4} \\ 2.^\circ \text{———} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

II. $F(x) = \frac{1}{x^n}$. A hypothese :

$$\begin{cases} \alpha t = z.\text{sen.}\,\varphi \\ x = z.\cos.\,\varphi \end{cases}$$

dá :

$$F(x + \alpha t\sqrt{-1}) - F(x - \alpha t\sqrt{-1}) = -\frac{2\sqrt{-1}}{z^n}.\text{sen.}\,n\,\varphi$$

$$z = \sqrt{\overline{\alpha t}^2 + x^2}$$

$$\varphi = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{\alpha t}{x}\right)$$

logo :

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} . \frac{\text{sen.}\left[n\,\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{\alpha t}{x}\right)\right]}{(\overline{\alpha t}^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{x^n} - \frac{1}{(x+\alpha)^n}\right].$$

Sendo $\alpha = x$, resulta :

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen.}\,[n\,\text{arc.}\,(\text{tang.} = t)]}{t(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}\,dt = \frac{2^n - 1}{2^n}.\frac{\pi}{2};$$

para $n = 1$, é :

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen.}\,[\ \text{arc.}\,(\text{tang.} = t)]}{t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Se tomassemos agora φ para variavel em logar de t, teriamos:

$$t=\frac{x}{\alpha}\operatorname{tang.}\varphi$$

$$dt=\frac{x}{\alpha}\cdot\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}$$

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\alpha x\, d\varphi}{\alpha^2\cos.^2\varphi+x^2\operatorname{sen.}^2\varphi}$$

$$z^{-n}=\frac{\cos.^n\varphi}{x^n}$$

logo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos.^n\varphi\,.\operatorname{sen.}n\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2\cos.^2\varphi+x^2\operatorname{sen.}^2\varphi)\operatorname{tang.}\varphi}=-\frac{\pi}{2\alpha^2}\left[\frac{x^n}{(x+\alpha)^n}-1\right];$$

para $\alpha=x$, tiramos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos.^n\varphi\,.\operatorname{sen.}n\varphi}{\operatorname{tang.}\varphi}d\varphi=\frac{2^n-1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2};$$

no caso de ser $n=1$, vem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos.^2\varphi\, d\varphi=\frac{\pi}{4}$$

integral definido já conhecido.

QUESTÕES PROPOSTAS N.os 14 E 15

Do sr. Birger Hansted, de Copenhague, recebemos as seguintes questões para propôr n'este Jornal:

Sendo p *um numero primo maior que 41, e* r *o menor numero primo, exceptuando a unidade, que satisfaz á congruencia*

$$p \equiv \pm r \text{ (mod. } 40),$$

demonstrar que a congruencia

$$10^{\frac{p-1}{k}} \equiv 1 \text{ (mod. } p)$$

é verdadeira, quando

$$10^{\frac{r-1}{k}} \equiv 1 \text{ (mod. } r).$$

Dada uma figura plana composta de um hexagono regular, sobre os lados da qual estão seis outros hexagonos regulares congruentes ao primeiro, quer-se saber como se póde cortar esta figura por tres linhas rectas que a dividam em partes congruentes ou não congruentes, de modo que com estas partes se possa formar um hexagono regular.

RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE ASSUJETTI A COUPER CONTINUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS (*)

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Suite)

THÉORÈME VIII. — *Une conique quelconque* (σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (oC_0) *assujetti à passer continuellement par un point donné* C_0 *et à couper un cercle également donné suivant une corde* $c_s c'_s$ *de grandeur constante.*

36. Les cercles (x) et (x'), et leurs cercles complémentaires (x_c) et (x'_c), passant par un même point b du cercle (E), se coupent deux à deux sur le cercle (I) aux points b', b'', b''_1, b'_2 (comme il avait lieu dans la fig. 1), étant maintenant de même applicable au cas général ou à la figure transformée (fig. 2) ce qui nous avons dit au n.° 9 sur les tangentes à ces cercles dans leurs points d'intersection.

Il est clair que, analoguement à ce que l'on a noté au n.° 6, dans la figure transformée les droites on_s et $o'n_s$ concourent encore

(*) **Errata:** — Page 132, Theor. III — Au lieu de *aux points*, lisez *au point*; et au lieu de *les lieux etc.*, lisez *le lieu géometrique décrit par ce point d'intersection sera une conique* (Σ) *donnée.*

Page 133, ligne 36 — Au lieu de *comme*, lisez *comment*.

Page 135, ligne 25 — Substituez $=$ par $\stackrel{\frown}{=}$.

Page 136, ligne 2 — Supprimez $=$ *ou deviennent... c'est-à-dire.*

Page 136, ligne 18 — Au lieu de $C_0 \overset{1}{M} = C_0 M_1$, lisez $C_0 \overset{1}{M}$.

Page 136, ligne 24 — Au lieu de *directeurs égaux correspondants*, lisez *directeurs correspondants*.

dans un même point t de la corde $b\,a$, et les droites $o\,n'_s$ et $o'\,n'_s$ dans le point t', ces points étant les intersections des tangentes $b'\,t$, $b''\,t$ et $b''_1\,t'$, $b'_2\,t'$ aux cercles (x) et (x') dans les points b', b'' et b''_1, b'_2, ou les centres des cercles (x_c) et (x'_c), et qui décrivent deux autres coniques (Σ_c) et (Σ'_c), en général, distinguées des coniques (Σ) et (Σ') décrites par les centres de deux premiers cercles.

Nous pouvons donner aux coniques (Σ_c) et (Σ'_c) le nom de *complémentaires* des coniques (Σ) et (Σ'), attendu la dénomination adoptée pour leurs cercles générateurs.

37. Soient (x_3) et (x'_3) (fig. 3) les deux cercles générateurs des coniques (Σ) et (Σ') tangents à l'extrémité a de la corde $b\,a$ du cercle (E), et désignons par o_3 et o'_3, leurs centres évidemment situés sur la corde $a\,b_3$ de ce même cercle, équipollente à la corde $b\,a'_1$, sur laquelle se trouvent les centres o et o' des cercles générateurs correspondants (x) et (x').

Tirons les droites $o\,o_3$ et $o'\,o'_3$, qui unissent les centres des deux couples de cercles correspondants (x), (x_3) et (x'), (x'_3), et qui couperont évidemment la corde $b\,a$ en un même point T; et par le point milieu m_1 de cette corde abaissons sur les droites $T\,o\,o_3$ et $T\,o'\,o'_3$ les perpendiculaires $m_1\,P\,E$ et $m_1\,P'\,E'$, qui rencontrent ces droites aux points P et P′, et la droite $C\,C_0$ aux points E et E′.

Comme nous savons, ces perpendiculaires sont *les cordes* ou *sécantes* (réelles ou idéales) *communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants* (x), (x_3) *et* (x'), (x'_3), *ou leurs axes radicaux.*

Considérons maintenant le rectangle auxiliaire $c''_s\,c'''_s\,c'''_i\,c''_i$, relatif aux points o_3 et o'_3, les côtés $c''_s\,m'_e\,c''_i$ et $c'''_s\,m'_d\,c'''_i$ étant respectivement symétriques des côtés $c'_s\,m_e\,c'_i$ et $c_s\,m_d\,c_i$ du rectangle auxiliaire $c_s\,c'_s\,c'_i\,c_i$ par rapport à $C\,m_1$.

Représentons par n''_s et n''_i les points milieux des vecteurs $C_0\,c''_s$ et $C_0\,c''_i$; et par M″ et M‴ ceux des droites $o\,o_3$ et $o'\,o'_3$, ou leurs points de rencontre avec le rayon $C\,m_1$ du cercle (E′); et finalement soient M, M_2 les points d'intersection de la droite $c_s\,c'''_s$ avec ce rayon et la corde $a\,b_3$ du cercle (E), et M′, M'_2 les points d'intersection de ces deux dernières droites avec la droite $c_i\,c'''_i$.

Si dans le cercle (I′) nous tirons le diamètre $n_{s_0}\,C_0\,n_{i_s}$, parallèle au diamètre $m_1\,C\,m_0$ du cercle (E′), *les droites* $m_d\,n_s\,n_{s_0}$ *et* $m_d\,n_i\,n_{i_0}$, *menées par les points milieux* m_d, n_s *et* n_i *du côté* $c_s c_i$ *et des vecteurs* $C_0 c_s$ *et* $C_0 c_i$, *passeront par les extrémités* n_{s_0} *et* n_{i_0} *du premier diamètre* $n_{s_0} C_0 n_{i_0}$: ce qu'on reconnaîtra immédiatement en considérant les triangles égaux $n_s C_0 n_{s_0}$, $n_s c_s m_d$, $n_i C_0 n_{i_0}$, $n_i c_i m_d$ ou les parallélogrammes $n_{s_0} m_d c_i C_0$ et $C_0 c_s m_d n_{i_0}$, au moyen desquels on reconnaîtra aussi que *les droites* $t o n_s$ *et* $t o' n_s$ *coupent orthogonalement en* p_i *et* p_s *les droites* $m_d n_s p_i n_{s_0}$ *et* $m_d p_s n_i n_{i_0}$.

Il est évident que ces deux propriétés auront encore lieu quand, dans les rectangles auxiliaires $c_s c'_s c'_i c_i$ et $c''_s c'''_s c'''_i c''_i$, nous ferons varier la grandeur de leurs côtés parallèles à la corde ab du cercle (E), ou égaux au rayon r'' du cercle (I''); et quand cette corde tournera autour de C.

38. Si nous considérons les points C_0, o, o_3, o' et o'_3 comme fixes, et faisons coincider les côtés constants $c'_s c'_i$ et $c''_s c''_i$ des rectangles auxiliaires, les vecteurs $C_0 c'_s$ et $C_0 c''_s$ ainsi que leurs perpendiculaires $o n'_s$ et $o_3 n''_s$ se confondront respectivement avec le vecteur $C_0 M$ et avec la droite $T o o_3$, qui unit les centres o et o_3 des cercles correspondants (x) et (x_3), et par suite ces deux droites se couperont orthogonalement.

De même on reconnaîtra que le vecteur $C_0 M'$ sera aussi coupé orthogonalement par la droite $T o' o'_3$, qui unit les centres o' et o'_3 des deux autres cercles correspondants (x') et (x').

On arrive au même résultat en considérant chacun des couples de cercles générateurs $C_0 c_s c'_s r_0$, $C_0 c'''_s c''_s r_0$ et $C_0 c_i c'_i r'_0$, $C_0 c'''_i c''_i r'_0$, qui, étant circonscrits aux triangles $C_0 c_s c'_s$, $C_0 c'''_s c''_s$ et $C_0 c_i c'_i$, $C_0 c'''_i c''_i$ (Théor. VI), ont évidemment pour sécantes réelles communes les vecteurs $C_0 r_0 M$ et $C_0 r'_0 M'$.

Donc, *les cordes* $m_1 P E$ *et* $m_1 P' E'$ *communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants* (x), (x_3) *et* (x'), (x'_3) *passent par les extrémités* n_{s_0} *et* n_{i_0} *du diamètre* $n_{s_0} C_0 n_{i_0}$ *du cercle* (I'), *perpendiculaire à la corde* ab *du cercle* (E) *(tangente commune à ces cercles-là)*.

Le vecteur $C_0 r r_0 M$ sera aussi la sécante réelle commune des deux cercles $C_0 n_s o n'_s r$ et $C_0 o_3 n'''_s n''_s r$ décrits sur $C_0 o$ et $C_0 o_3$ comme diamètres; et le vecteur $C_0 r' r'_0 M'$ la sécante réelle commune des cercles $C_0 n_i o' n'_i r'$ et $C_0 o'_3 n'''_i n''_i r'$ décrits sur $C_0 o'$ et $C_0 o'_3$ comme diamètres.

Quand la corde ba *du cercle* (E) *tournera autour de* C *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites* $m_1 E n_{i_0}$ *et* $m_1 n_{s_0} E'$ *tourneront aussi autour des points* E *et* E', *qui, comme nous savons, divisent harmoniquement la distance* CC_0, *entre les centres des cercles donnés, et représentent les points de concours des tangentes* (réelles ou imaginaires) *communes aux cercles enveloppes* (E') *et* (I'), ou *leurs centres d'homothétie.*

En effet, puisque pendant la rotation des diamètres $m_1 E m_0$ et $n_{s_0} C_0 n_{i_0}$ des cercles (E') et (I'), les triangles CC_0M et CC_0M' sont respectivement semblables aux triangles $C_0 E n_{i_0}$ et $C_0 E' n_{s_0}$, il s'ensuit que les côtés CM, CM', CC_0 et $C_0 n_{s_0} = n_{i_0} C_0$ étant constants, il en sera de même des côtés EC_0 et C_0E: donc, etc. (*).

En désignant par (x_4) et (x'_4) les cercles générateurs, qui, ayant pour centres les points o_4 et o'_4 de la corde ab_3 du cercle (E), touchent à l'extrémité b_3 la corde $b_3a'_1$ de ce cercle, équipollente à sa corde ab, les cordes ou sécantes (reélles ou idéales) communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (x_1), (x_4) et (x'_1), (x'_4), ou tangents aux extrémités de cette corde-là, seront les droites $m_0 E n_{s_0}$ et $m_0 n_{i_0} E'$, qui, avec les deux autres cordes considérées $m_1 E n_{i_0}$ et $m_1 n_{s_0} E'$, détermineront le quadrilatère complet $E' n_{s_0} E n_{i_0}$, $m_1 m_0$.

Si nous considérons maintenant deux quelconques des couples de cercles (x), (x_3), et (x_1), (x_4), appartenant à la première suite de cercles, qui coupent les cercles fixes (E) et (I) sous les angles constants e et i, nous reconnaîtrons immédiatement que *les axes radicaux de ces quatre cercles, pris deux à deux, se coupent aussi au point fixe* E, *et, par suite, ce point sera le centre radical de trois cercles quelconques de la suite considérée.*

Nous reconnaîtrons de même que *les axes radicaux de la seconde suite de cercles* (x'), (x'_1), (x'_3), (x'_4), . . ., *pris deux à deux, passent par le point fixe* E', *qui sera donc le centre radical de trois cercles quelconques de cette suite.*

(*) Nous pouvons aussi prouver immédiatement que les points E et E' restent fixes, pendant la rotation de ab, en considérant respectivement *ces points, les cercles enveloppes* (E') *et* (I'), *et les côtés du quadrilatère complet* $E' n_{s_0} E n_{i_0}$, $m_1 m_0$ *comme les projections des sommets, des sections circulaires parallèles et des génératrices de deux cônes.*

12

D'après cela nous avons ce théorème:

THÉORÈME IX.—*Étant donnés deux cercles* (E) *et* (I), *chacune des deux suites des cercles* (x), (x_1), (x_3), (x_4), ..., *et* (x'), (x'_1), (x'_3), (x'_4), ..., *qui les coupent sous des angles constants e et i, étant pris trois par trois, ont respectivement pour centres radicaux les centres d'homothétie* E *et* E' *des cercles donnés.*

Observation.—Il est évident que lorsque le centre radical des deux suites de cercles est intérieur à l'un d'eux il l'est aussi à tous les autres. De même lorsq'il est extérieur à l'un d'eux, il est extérieur à tous les autres; c'est alors le seul point du plan d'où l'on puisse mener à tous les cercles de chaque suite des tangentes égales, et c'est aussi le centre du seul cercle qui puisse couper tous ces cercles orthogonalement.

39. Supposons encore que nous faisons varier les rectangles auxiliaires considérés de manière que les côtés $c'_s c'_i$ et $c''_s c''_i$ restant constants viennent coincider avec le segment M M', ou que les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') sont égaux (n.° 37); et représentons par $M_0M'_0$ et ${}^0M^0M'$ les côtés $c_s c_i$ et $c'''_s c'''_i$ dans leur position correspondante.

Alors les vecteurs $C_0 c'_s$ et $C_0 c''_s$, ainsi que les perpendiculaires $n'_s o$ et $n''_s o_3$ élévées dans leurs points milieux n_s et n'_s se confondrons respectivement avec le vecteur C_0M et sa perpendiculaire $\theta\,\omega\,\varpi\,\pi\,\mu''\,\omega_3$, menée par son milieu ϖ, laquelle coupe les droites $ab\theta$, ba'_1, Em_1, Cm_1 et ab_3 aux points θ, ω, π, μ'' et ω_3. De même les vecteurs $C_0 c'_i$ et $C_0 c''_i$ et leurs perpendiculaires $n'_i o'$ et $n''_i o'$ aux points milieux n'_i et n''_i se confondront respectivement avec le vecteur C_0M' et sa perpendiculaire $\theta\,\omega'\,\pi'\,\varpi'''\,\omega'_3$, élévées dans son milieu ϖ', laquelle coupe les droites $ab\theta$, ba'_1, $E'm_1$, Cm_1 et ab_3 aux points θ, ω', π', ϖ''' et ω'_3.

Au moyen d'une telle variation des rectangles auxiliaires, ou des cercles (I) et (I'), les coniques cycloconfocales (Σ), (Σ') et les stigmoconfocales (ε_1), (ε'_1), engendrées par les points o, o', et par les points d'intersection N'_s, N'_i des vecteurs Cc'_s, Cc'_i avec les droites on'_s, $o'n'_i$, perpendiculaires aux points milieux n'_s, n'_i des vecteurs $C_0c'_s$, $C_0c'_s$, seront respectivement remplacées par les cycloconfocales (Ω), (Ω'), et les stigmoconfocales (Ω_0), (Ω'_0), décrites par les points ω, ω' et par les points μ'', μ'''.

Ainsi (fig. 4) les droites $\theta\,\omega\,\omega_3$ et $\theta\,\omega'\,\omega'_3$, qui unissent les centres des deux couples des cercles générateurs correspondants (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3) des coniques (Ω), (Ω') toucheront les coniques

(Ω_o), (Ω'_o) aux points μ'', μ''', lesquelles seront aussi *les transformées* des premières, quand on aura $R = R'$ et $r = r'$, et par suite *ces transformées auront pour cercles générateurs les cercles doubles* (μ''), (μ'''), *tangents au cercle* (E') *au point* m_1 *et au cercle* (I') *aux points* n'_i *et* n''_i, *évidemment situés sur les axes radicaux* $m_1 E$ *et* $m_1 E'$, ou *cordes communes à ces deux couples de cercles générateurs.*

Considérons aussi les deux couples de cercles générateurs (fig. 4) (ω_1), (ω_4) et (ω'_1), (ω'_4), des coniques (Ω) et (Ω'), ayant leurs centres ω_1, ω_4 et ω'_1, ω'_4 sur les cordes $b\,a_1$ et $a\,b_3$ du cercle (E), et par sécantes communes les droites $m_o\,n'_s E$ et $m_o E' n''_{s_0}$, dont les points d'intersection avec les lignes des centres $\omega_1\,\omega_4$ et $\omega'_1\,\omega'_4$ nous désignons par π_1 et π'_1.

Si nous prenons sur $m_o C\, m_1$ les points N et N′, symétriques de M et M′ par rapport à C, les lignes des centres $\theta_o\,\omega_1\,\bar{\omega}_1\,\pi_1\,\omega_4$ et $\theta_o\,\omega'_1\,\bar{\omega}'_1\,\pi'_1\,\omega_4$ des deux couples de cercles considérés seront les perpendiculaires aux vecteurs $C_o N$ et $C_o N'$ dans leurs points milieux $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}'_1$, et couperont la corde $a_1 b_3$ de (E) au même point θ_o, et $m_o C\, m_1$ aux points μ''_1 et μ'''_1, où elles toucheront les coniques (Ω_o) et (Ω'_o), ou qui représenteront les centres des cercles doubles (μ''_1) et (μ'''_1), tangents au cercle (E') au point m_o et au cercle (I') aux points n'_{s_0} et n_{i_0}, par lesquels passent les axes radicaux $m_o\,n'_s E$ et $m_o E' n''_{s_0}$ des deux couples de cercles considérés (ω_1), (ω_4) et (ω'_1), (ω'_4).

Lorsque nous considérons les deux tangentes $\theta\,\beta_o\,n'_{i_0}\,\alpha_o$ et $\theta\,\beta'_o\,n''_{s_0}\,\alpha'_o$ communes aux deux couples de cercles (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3), qui concourent dans le point θ, étant respectivement β_o, α_o et β'_o, α'_o les points de contact de ces cercles avec les tangentes, les points milieux n'_{i_0} et n''_{s_0} des segments $\alpha_o\,n'_{i_0}\,\beta_o$ et $\alpha_o n''_{s_0}\beta'_o$, ou cordes du cercle (I), seront évidemment les points de contact entre les cercles doubles (μ'') et (μ'''), et le cercle (I'), ou les points de ce cercle *anti-homologues* du point m_1 du cercle (E'), par rapport aux centres d'homothétie E et E′. Le point θ sera, donc, le centre d'un cercle $(\theta\, m_1)$, qui coupera orthogonalement les cercles (E') et (I'); et par suite *ce point, pendant la rotation de la corde* $a\,b$, *décrire l'axe radical* $\theta\,\Omega_{m_0}$ *de ces cercles*, ou *leur corde commune située à distance finie*.

De même si nous considérons les deux tangentes $\theta_0 \alpha_1 n'_{s_0} \beta_1$ et $\theta_0 \alpha'_1 n''_{i_0} \beta'_1$ communes aux deux couples de cercles (ω_1), (ω_4) et (ω'_1), (ω'_4), concourant dans le point θ_0, étant respectivement α_1, β_1 et α'_1, β'_1 les points de contact de ces cercles avec les tangentes, les points milieux n'_{s_0} et n''_{i_0} des segments $\alpha_1 \beta_1$ et $\alpha'_1 \beta'_1$ ou cordes du cercle (I) seront évidemment les points de contact entre les cercles doubles (μ''_1), (μ'''_1), et le cercle (I′), ou les points anti-homologues du point m_0 du cercle (E′), par rapport aux centres d'homothétie E et E′; et par conséquent le point θ_0, étant le centre d'un cercle $(\theta_0 m_0)$, coupant orthogonalement les cercles (E′) et (I′), se trouvera aussi sur l'axe radical $\theta \Omega_{m_0} \theta_0$ de ces cercles.

Maintenant par le point de concours θ_1 des droites $\theta \omega \mu'' \theta_1 \omega_3$ et $\theta_0 \omega'_1 \mu'''_1 \theta_1 \omega'_4$, menons les trois droites ${}^0a \theta_1 {}^1\mu'' {}^0b$, ${}^0\alpha_0 \theta_1 {}^0\mu'' {}^0\beta_0$ et ${}^0\alpha'_1 {}^0\mu'''_1 \theta_1 {}^0\beta'_1$ respectivement parallèles aux droites $a m_1 b$, $\alpha_0 n'_{i_0} \beta_0$ et $\alpha'_1 n''_{s_0} \beta'_1$. Représentons par ${}^0a$, ${}^1\mu''$, ${}^0b$ les points d'intersection de la première droite avec les droites $\omega_3 a$, $\mu'' m_1$, ωb; par ${}^0\alpha_0$, ${}^0\mu''$, ${}^0\beta_0$ ceux de la deuxième avec les droites $\omega_3 \alpha_0$, $\mu'' n'_{i_0}$, $\omega \beta_0$; et par ${}^0\alpha'_1$, ${}^0\mu'''_1$, ${}^0\beta'_1$ ceux de la troisième avec les droites $\omega'_1 \alpha'_1$, $\mu'''_1 n''_{i_0}$, $\omega'_4 \beta'_1$; puis décrivons les deux couples de cercles (E_i), (E'_i) et (I_e), (I'_e), ayant respectivement les segments $C{}^0a$, $C{}^1\mu''$ et $C_0{}^0\alpha_0$, $C_0{}^0\mu''$ pour rayons et les points C et C_0 pour centres.

Il en résulte que le point θ_1 sera évidemment le centre d'un cercle $(\theta_1 {}^1\mu'')$, qui coupe orthogonalement le cercle (I'_e) au point ${}^1\mu''$, et le cercle (E'_i) aux points ${}^0\mu''$ et ${}^0\mu'''_1$, anti-homologues du premier, par rapport aux centres d'homothétie ^{0}E et ^{0}E′; et alors *le point* θ_1 *décrira l'axe radical* $\theta_1 \Omega_m$ *de ces mêmes cercles.*

Sans qu'il soit besoin de nouvelles considérations, si nous représentons par ${}^0\mu''_1$, ${}^0\mu'''$ et ${}^1\mu''_1$ les points d'intersection des vecteurs $C_0 \mu''_1$, $C_0 \mu'''$ et $C \mu'''_1$ avec leurs perpendiculaires $\theta_2 {}^0\mu''_1$, $\theta_2 {}^0\mu'''$ et $\theta_2 {}^1\mu''_1$ abaissées du point de concours θ_2 des droites $\theta \omega' \mu''' \omega'_3 \theta_2$ et $\theta_0 \omega_1 \mu''_1 \omega_4 \theta_2$, nous voyons immédiatement que ce point sera le centre d'un cercle $(\theta_2 {}^1\mu'')$, que coupe orthogonalement le cercle (I'_e) au point ${}^1\mu''_1$, et le cercle (E'_i) aux points ${}^0\mu''_1$ et ${}^0\mu'''$, anti-homologues du premier, par rapport aux centres d'homothétie ^{0}E et ^{0}E′, et par suite il se trouvera de même sur l'axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_2$ de ces cercles.

Les triangles isocèles semblables $m_1 \mu'' n'_{i_0}$ et ${}^1\mu'' {}^0\mu''$, donnent ${}^0\mu'' n'_{i_0} = m_1 {}^1\mu''$, d'où

$$C^1\mu'' = C_0 n'_{i_0} = r', \quad C_0 {}^0\mu'' = C m_1 = R'$$

et

$$C^0 a = C_0 \alpha_0 = r, \quad C_0 {}^0\alpha_0 = C a = R$$

et donc les cercles (E_i), (E'_i) et (I_e), (I'_e) seront respectivement égaux aux cercles (I), (I′) et (E), (E′), et symétriques de ceux-ci, par rapport au point milieu σ_0 de $C C_0$.

D'après cela il est évident que les centres ω, ω_3, ..., et ω'_1, ω'_4, ..., des cercles $(\omega^0 b)$, $(\omega_3{}^0 a)$, ..., et $(\omega'_1 \alpha'_1)$, $(\omega'_4 \beta'_1)$, ..., coupant alors les cercles (E_i) et (I_e) sous les angles i et e engendreront encore les coniques (Ω) et (Ω'); et de même les centres μ'', ..., et μ'''_1, ..., des cercles doubles $(\mu'' {}^1\mu'')$, ..., et $(\mu'''_1 {}^1\mu'')$, ..., engendreront les coniques (Ω_0) et (Ω'_0).

Tirons dans le cercle focal (E'') des coniques (Ω) et (Ω') le diamètre de contact $m_2 C^0 m_2$ (fig. 4) des vecteurs tangentiels $m_2 \omega$ et ${}^0m_2\omega_3$, et dans l'autre cercle focal (I''), égal au premier, le diamètre de contact $m^{v}_2 C_0 {}^0m^{v}_2$ des vecteurs tangentiels $m^{v}_2 \omega$ et ${}^0m^{v}_2 \omega_3$.

Le premier diamètre de contact, étant équidistant des tangentes ${}^1\mu'' \theta_1$ et ${}^1\mu''_1 \theta_2$ au cercle (E'_i) aux extrémités de son diamètre ${}^1\mu'' C\, {}^1\mu''_1$, passera par le point milieu θ_m du segment $\theta_1 \theta_2$ de l'axe radical $\theta_1 \Omega_m \theta_2$, et par le point de concours θ_c des cordes $\omega \mu'' \omega_3$ et $\omega_1 \mu''_1 \omega_4$ de la conique (Ω), ou tangentes de la conique (Ω_0), duquel nous abaissons la perpendiculaire $\theta_c M_{c_2} M_c M_{c_1}$ sur les droites $\alpha_0 \omega_3$, $n'_{i_0} \mu''$ et $\beta_0 \omega$, étant M_{c_2}, M_c et M_{c_1} leurs points d'intersection, et la perpendiculaire $\theta_c N_{c_2} N_c N_{c_1}$, sur les droites $\beta_1 \omega_4$, $n'_{s_0} \mu''_1$ et $\alpha_1 \omega_1$, étant N_{c_2}, N_c et N_{c_1} leurs points d'intersection. Ce point θ_c sera donc le centre d'un cercle $(\theta_c M_c)$ qui coupe orthogonalement le cercle $(C_0 M_c)$ aux points M_c et N_c, ainsi que le cercle limite C, et alors il décrira l'axe radical $\theta_c \Omega_c$ de ces cercles.

Les triangles isocèles $C_0 \mu'' M$ et $C \mu'' M_c$ donnant $C_0 M_c = CM$, nous aurons $C_0 M_{c_2} = C M_2$, et par conséquent les cercles $(C_0 M_c)$, $(C_0 M_{c_2})$ seront égaux aux cercles (C M), $(C M_2)$, et symétriques de ceux-ci par rapport au point σ_0, centre du segment $C_0 C$.

Il en résulte évidemment que la conique (Ω), qui était engendrée par les centres des cercles (ωM_1), $(\omega_3 M_2)$, ..., coupant sous un angle constant e_1 le cercle $(C M_1)$, et orthogonalement le cercle $(C_0 m^{v}_2)$ ou (I''), égal au cercle (E''), sera aussi engendrée par les centres des cercles (ωM_{c_1}), $(\omega_3 M_{c_2})$, ..., coupant sous le même angle e_1 le cercle $(C m_2)$ ou (E''). De même la conique (Ω_0), qui était déterminée par le centre du cercle double $(\mu'' C_0)$, passant par le point focal C_0 et touchant le cercle (CM), sera également engendrée par le centre du cercle double $(\mu'' C)$ passant par l'autre point focal C et touchant le cercle $(C_0 M_c)$.

Le diamètre $m_2 C^0 m_2$ du cercle focal (I''), passe aussi par le point de concours θ'_c des cordes $\omega'\omega'_3$ et $\omega'_1\omega'_4$ de la conique (Ω'), ou tangentes de la transformée (Ω_0): car ce diamètre, passant par le sommet θ_c du quadrilatère $\theta_c\theta_1\theta'_c\theta_2$, $\theta\theta_0$, et par le point milieu θ_m de la diagonale $\theta_1\theta_2$, sera lui-même la diagonale $\theta_c\theta'_c$. La démonstration directe serait tout à fait analogue à celle relative au point θ_c.

Du point θ'_c abaissons la perpendiculaire $M'_{c_2}\theta'_c M'_c M'_{c_1}$ sur les droites $\alpha'_0\omega'_3$, $n''_{s_0}\mu'''$ et $\beta'_0\omega'$, les points M'_{c_2}, M'_c et M'_{c_1} étant leurs intersections, et la perpendiculaire $N'_{c_1}N'_c\theta'_c N'_{c_2}$ sur les droites $\alpha'_1 N'_{c_1}$, $n''_{t_0}\mu'''_1$ et $\beta'_1\omega'_4$, étant N'_{c_1}, N'_c et N'_{c_2} leurs points d'intersection. Ce point θ'_c étant alors le centre d'un cercle $(\theta'_c M'_c)$, coupant orthogonalement le cercle $(C_0 M'_c)$ aux points M'_c et N'_c et le cercle limite C, se trouvera continuellement sur l'axe radical $\theta'_c\Omega'_c$ de ces cercles.

Comme précédemment on reconnaîtra que les cercles $(C_0 M'_c)$, $(C_0 M'_{c_2})$ seront égaux aux cercles $(C M')$, $(C M'_2)$, et symétriques de ceux-ci, par rapport au point σ_0, et que la conique (Ω'), qui était engendrée par les centres des cercles $(\omega' M'_1)$, $(\omega'_1 M'_2)$, ..., coupant sous un angle constant e'_1 le cercle (CM'_1), et orthogonalement le cercle $(C_0 m^{v}_2)$ ou (I''), égal au cercle (E''), sera aussi engendrée par les centres des cercles $(\omega' M'_{c_1})$, $(\omega'_3 M'_{c_2})$, ..., coupant sous le même angle e'_1 le cercle $(C_0 M'_{c_2})$, et orthogonalement le cercle $(C m_2)$ ou (E''). La conique (Ω'_0), qui était engendrée par le centre du cercle double $(\mu''' C_0)$, passant par le point focal C_0 et touchant le cercle $(C M')$, sera de même determinée par le centre du cercle double $(\mu''' C)$, passant par l'autre point focal C et touchant le cercle $(C_0 M'_c)$. *(à suivre)*.

QUELQUES TRANSFORMATIONS DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS PAR SUBSTITUTION D'UNE NOUVELLE VARIABLE

PAR

M. BIRGER HANSTED

Soit proposée l'équation

$$(1)\quad \frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0.$$

En considérant le signe de différentiation $\frac{d}{dx}$ comme coefficient de y, et les indices de différentation comme des exposants des puissances de $\frac{d}{dx}$ on peut écrire (1) sous la forme symbolique:

$$(2)\quad y\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-k\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-\nu\right)=0$$

si est

$$(3)\quad \varphi(r)=r^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_1 r+a_0$$
$$=(r-\alpha)(r-\beta)\ldots(r-k)(r-\lambda)\ldots(r-\nu).$$

Substituons donc en (2)

$$(4)\quad v=y\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-k\right)$$

et nous aurons

$$v\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\nu\right)=0, \tag{5}$$

sans regarder si (3) a des racines égales ou non.

Nous avons donc:

Si l'intégral général de l'équation différentielle linéaire

$$y\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-k\right)=0$$

de l'ordre p est un intégral particulier de l'équation différentielle linéaire d'ordre n (2), on peut par la substitution (4), transformer (2) en une équation différentielle linéaire (5) d'ordre $n-p$, et l'on aura que chaque intégral particulier de (5) sera aussi intégral particulier de (2).

De cette théorème on déduit un autre de plus grand intéret, savoir:

L'équation différentielle linéaire d'ordre p

$$y\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-k\right)=f(x)$$

peut être transformée dans une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre $m+p$ et à coefficients constants

$$y\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-k\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\nu\right)=0$$

quand $f(x)$ est l'intégral complet v d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre m

$$v\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\nu\right)=0.$$

Substituons en (1)

$$y = e^{rx}.z \tag{6}$$

et nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{[n-1]}\varphi^{(n-1)}(r)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \\ &+ \frac{1}{[n-2]}\varphi^{(n-2)}(r)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \ldots + \varphi(r).z \end{aligned}\right\} = 0 \tag{7}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &z\left(\frac{d}{dx} - (\alpha - r)\right)\left(\frac{d}{dx} - (\beta - r)\right) \\ &\ldots\left(\frac{d}{dx} - (k - r)\right)\left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r)\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - (\nu - r)\right) \end{aligned}\right\} = 0. \tag{8}$$

Pour $\alpha = r$ et $\dfrac{dz}{dx} = v$, (8) se transforme en

$$\left.\begin{aligned} &v\left(\frac{d}{dx} - (\beta - r)\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - (k - r)\right)\left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r)\right) \\ &\ldots\left(\frac{d}{dx} - (\nu - r)\right) \end{aligned}\right\} = 0 \tag{9}$$

qui, à cause de $\varphi(r) = (r - \alpha)\varphi_1(r)$, dévient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \frac{1}{[n-2]}\varphi^{(n-2)}{}_1(\alpha)\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} \\ &+ \frac{1}{[n-3]}\varphi^{(n-3)}{}_1(\alpha)\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} + \ldots + \varphi_1(\alpha).v \end{aligned}\right\} = 0. \tag{10}$$

Soit

$$\alpha = \beta = \ldots = k = r,$$

ou

$$\varphi(r) = (r - \alpha)^p \varphi_2(r)\,;$$

(8) se transforme par la substitution

$$\frac{d^p z}{dx^p} = w$$

en

$$(11) \qquad w\left(\frac{d}{dx} - (\lambda - r)\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - (\nu - r)\right) = 0$$

ou

$$(12) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{d^{n-p} w}{dx^{n-p}} + \dfrac{1}{[n-p-1]}\varphi^{(n-p-1)}{}_2(\alpha)\dfrac{d^{n-p-1} w}{dx^{n-p-1}} \\ \qquad + \ldots + \varphi_1(\alpha).w \end{array}\right\} = 0.$$

Les équations (11) et (12) proviennent aussi de la substitution

$$w = z\left(\frac{d}{dx} - (\alpha - r)\right)\left(\frac{d}{dx} - (\beta - r)\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - (k - r)\right)$$

quand α, β, ... k sont tous inégales. Dans (12) α peut être changé à chaque une des autres quantités $\beta, \gamma, \ldots k$, et ainsi $p-1$ nouvelles équations différentielles sont trouvées. Tous ceux sont liées l'une à l'autre à une rélation certaine. En prenant, par exemple, pour r la valeur β, (11) donne

$$(13) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{d^{n-p} w_1}{dx^{n-p}} + \dfrac{1}{[n-p-1]}\varphi^{(n-p-1)}{}_2(\beta)\dfrac{d^{n-p-1} w_1}{dx^{n-p-1}} \\ \qquad + \ldots + \varphi_2(\beta)\, w_1 \end{array}\right\} = 0.$$

(12) et (13) résultent ici des substitutions

$$w = \frac{dz}{dx}\left(\frac{d}{dx} - (\beta - \alpha)\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - (k - \alpha)\right)$$

$$w_1 = \frac{dz}{dx}\left(\frac{d}{dx} - (\alpha - \beta)\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - (k - \beta)\right)$$

d'où il résulte

$$w_1 = e^{(\beta - \alpha)x} w.$$

QUESTÕES PROPOSTAS N.os 16 E 17 (*)

Sendo dadas n *quantidades positivas* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, *e formando com ellas as expressões*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad \sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{\Sigma a_1 a_2 a_3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}}, \ldots \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

demonstrar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{\frac{n(n-1)}{2}}} > \sqrt[3]{\frac{\Sigma a_1 a_2 a_3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}}$$

$$> \ldots > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

J. Perott.

Sendo dado um quadrado magico formado por n^2 *numeros distinctos, pergunta-se de quantos modos é possivel permutar estes* n^2 *numeros, sem que o quadrado magico cesse de existir.*

Birger Hansted.

(*) Errata: — Na primeira das questões propostas no numero anterior em logar de k deve ser 2.

NOTICIA SOBRE G. BELLAVITIS

POR

F. Gomes Teixeira

Por participação da esposa e do filho do professor Bellavitis, vimos de saber a triste noticia de que falleceu em Padua este illustre mathematico, que ainda ha pouco havia collaborado n'este Jornal, resolvendo algumas questões de Geometria, usando do seu bello methodo das equipollencias.

Dotado de uma vastissima erudição, escreveu sobre todos os ramos da mathematica, deixando uma grande e valiosa collecção de memorias, que lhe abriram as portas de todas as academias e sociedades scientificas de Italia.

Era, com effeito, socio effectivo do Instituto de Veneza, da Academia dos Lynces de Roma, um dos quarenta da Sociedade Italiana, socio correspondente das academias ou sociedades scientificas de Veneza, Padua, Bolonha, Bassano, Udine, Napoles, Treviso, Palermo, Urbino, Modena, Torim, Bordeaux, etc.

Era tambem senador do reino de Italia.

Não fallarei n'esta breve noticia de todos os trabalhos scientificos de Bellavitis, direi só algumas palavras sobre o seu trabalho capital — o methodo das equipollencias —, pelo qual é principalmente conhecido na Europa.

Depois de algumas tentativas da parte de Kühn e Buée, Argand, em 1808, chegou a representar geometricamente as quantidades imaginarias por meio de rectas tomadas em grandeza e direcção. Depois extendeu as definições de somma e producto de linhas, usadas na Geometria, ás linhas dadas em grandeza e direcção, e viu que se chegava aos mesmos resultados que sommando e multiplicando imaginarios.

Substituiu, pois, as demonstrações algebricas feitas com imaginarios, que nada significavam por construcções geometricas com um sentido bem determinado. O fim de Argand era dar demonstrações rigorosas dos theoremas a que se chegava na Algebra com os imaginarios, e deu apenas uma ligeira indicação do uso que a sua theoria poderia ter em Geometria.

Esta theoria de Argand, que é a base dos trabalhos mais importantes dos tempos modernos, ficou por muitos annos esquecida, até que Bellavitis e Gauss se occuparam d'ella sem ter conhecimento dos trabalhos da Argand.

Bellavitis, depois de chegar a extender as definições de somma e multiplicação ás linhas consideradas em grandeza e direcção, lembrou-se de considerar esta generalisação das operações como meio de resolver questões geometricas. Aqui se separam Argand e Bellavitis. Aquelle apenas toca na Geometria e preoccupado só com os imaginarios, vae dar demonstrações rigorosas dos resultados a que se chegava na Algebra, usando d'essas expressões sem sentido; este tracta de aproveitar esta generalisação das operações como meio de resolver questões de Geometria plana. Este novo methodo de Geometria, que elle desenvolveu com tanto successo, foi chamado methodo das equipollencias, e publicado pela primeira vez em 1832 nos *Annaes do Instituto Lombardo-Veneziano.*

Depois em 1833 publicou no *Poligrafo de Verona* algumas applicações ao triangulo e ás curvas.

Bellavitis quando publicou a sua primeira Memoria, não imaginava, como elle diz, a generalidade que podia dar-se ao novo methodo, e as vantagens que elle tinha na resolução de muitas questões de Geometria analytica plana. Considerava-o apenas como um meio de derivar de propriedades de pontos collocados sobre uma linha recta propriedades de pontos collocados sobre um plano. Em breve, porém, lhe reconheceu a importancia tanto nas questões de Geometria elementar, como nas questões mais elevadas da theoria das curvas, notando que por elle se simplificavam as soluções graphicas dos problemas geometricos elementares e os calculos das questões relativas ás linhas curvas, por introduzir no calculo os pontos em logar das suas coordenadas, realisando assim o desejo manifestado por Carnot.

Publicou, pois, nos *Annaes do Instituto Lombardo-Veneziano* uma segunda Memoria em 1837, desenvolvendo mais o methodo e a applicação á theoria das curvas, e uma terceira em 1843 em que o applica á solução graphica de alguns problemas geometricos.

Emfim, na collecção das Memorias da *Sociedade italiana das sciencias de Modena* publicou uma Memoria intitulada—*Spozione del Metodo delle equipollenze*, onde dá ao novo methodo geometrico uma fórma definitiva. Esta Memoria importante foi traduzida em francez e em bohemio.

Depois fez innumeraveis applicações do methodo das equipollencias ás questões de Geometria elementar e á theoria das curvas, ou deduzindo propriedades conhecidas por meios mais simples, do que os empregados anteriormente, ou descobrindo propriedades novas. As Memorias em que se occupa d'estas applicações estão espalhadas pelas collecções das sociedades scientificas de Italia; não daremos aqui a sua lista por ser muito extensa.

Publicou uma *Revista dos Jornaes* que chegou ao volume XV, onde resume alguns trabalhos publicados nas Revistas de sciencias mathematicas dos diversos paizes, em que mostrou que possuia em alto grau a qualidade de condensar em pequeno espaço, sem lhe fazer perder a clareza, as doutrinas de que se ia occupando. Esta *Revista* é tambem preciosa pelas indicações bibliographicas que dá relativamente ás questões de que tracta.

Revelou ainda a qualidade que tinha de resumir muito bem as doutrinas nos seus livros para ensino, taes como nos Resumos das *Lições de Algebra* e das *Lições de Geometria Descriptiva*, que dava na Universidade de Padua.

Terminamos aqui esta breve noticia. O nosso fim foi só chamar a attenção dos mathematicos portuguezes para os trabalhos d'este sabio, e principalmente para o seu importante methodo das equipollencias.

Coimbra, novembro de 1880.

INDICE