Sala
Gab. B(S R.)
Est.
Tab. 5
N.º 15

BIBLIOTECA MATEMÁTICA
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
*1328183820*

# LIÇÕES DE ALGEBRA

Ao seu velho amigo e venerado collega o Dr.

# LIÇÕES DE ALGEBRA

Luiz da Costa e Almeida, illustre decano da faculdade de mathematica

POR


J. D. SOUTO RODRIGUES

Director do Real Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra,
Sócio correspondente da A. R. das Sciencias de Lisboa
e honorário do Instituto de Coimbra.



Bibliotheca Mathematica — Universidade de Coimbra


Terceira edição
Inteiramente refundida


Biblioteca da Secção de Matemática
OFERTA
Faculd. de Ciências de Coimbra

N.º de Reg. 7165

OFERTA
Ex.mo Dr. Eugenio de Castro



PORTO
Livraria — MAGALHÃES & MONIZ — Editores
11 — Largo dos Loyos — 14

1902

COIMBRA — IMPRENSA DA UNIVERSIDADE — 1902

# I

# Determinantes.

# DETERMINANTES.

## CAPÍTULO I.

### Primeiras noções.

**1.** O numero de permutações de *n elementos* é expresso pelo producto $1.2.3\ldots n$, que se designa por alguma das notações $\underline{|n}$ ou $n!$. Os elementos podem ser representados por letras ou por numeros.

A troca de dois elementos $\alpha$, $\beta$ chama-se *transposição*, e representa-se pela notação $(\alpha, \beta)$. Todas as permutações de $n$ elementos dados podem deduzir-se de uma d'ellas, escolhida arbitrariamente e chamada *principal*, por meio de transposições successivas. Assim, por exemplo, passa-se da permutação $P = 2134$ para $P' = 3412$ trocando o primeiro elemento de P por aquelle que occupa o primeiro logar em $P'$, o que produz a permutação $P_1 = 3124$, trocando depois o segundo elemento de $P_1$ com aquelle que tem o segundo logar em $P'$, o que produz $P_2 = 3421$, e finalmente transpondo os dois ultimos elementos de $P_2$. As transposições effectuadas são (2,3), (1,4), (2,1).

*

Geralmente toma-se para principal a permutação cujos elementos se succedem na ordem alphabética ou numeral; por exemplo, *abcd* ou 1234. Nas permutações derivadas da principal dá-se uma *inversão* cada vez que se trocam dois elementos; e o numero das inversões de cada uma conta-se, sommando os numeros de inversões que cada elemento produz com todos os que lhe ficam á direita. Em 3412 ha quatro inversões, duas que provêem de 3 com 1 e 2, outras duas de 4 com estes mesmos elementos.

Dizem-se de *primeira classe*, ou *pares*, as permutações que teem um numero par de inversões; de *segunda classe*, ou *impares*, aquellas que teem um numero impar. A somma e a differença dos numeros de inversões em duas permutações da mesma classe são numeros pares, e reciprocamente.

**2.** *Theorema de Bezout: uma permutação muda de classe por uma transposição.*

Se $P_1$ e $P_2$ são duas permutações que só differem na ordem de dois elementos $\alpha$ e $\beta$, dois casos podem dar-se.

1.° Se estes elementos forem contíguos, a transposição $(\alpha, \beta)$ produz ou desfaz *uma* inversão, e qualquer dos numeros $v \pm 1$ é de paridade differente de $v$.

2.° Se entre $\alpha$ e $\beta$ houver $k$ elementos, passa-se da disposição $\alpha \ldots \beta$ para $\beta \ldots \alpha$, ou reciprocamente, permutando primeiro $\beta$ com cada um d'aquelles $k$ elementos e com $\alpha$, e permutando depois $\alpha$ com os mesmos elementos intermédios. Teremos assim effectuado $2k+1$ transposições de elementos contíguos; e como cada uma d'ellas produz mudança de classe, $P_1$ e $P_2$ são de classes differentes.

*Cor.* O numero das permutações pares de $n$ elementos é egual ao das ímpares, pois que a cada permutação $P_1$, com os elementos $\alpha$, $\beta$ numa certa ordem, corresponde outra $P_2$ com estes elementos invertidos.

**3.** Invertendo todos os elementos d'uma permutação, obtém-se a permutação *inversa* da primeira.

A permutação inversa da principal contém o máximo numero d'inversões, por que cada um dos seus elementos produz inversões com todos os que lhe ficam á direita. Assim o primeiro elemento dá logar a $n-1$ inversões, o segundo a $n-2$, etc., e o numero total d'ellas será

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

Este numero é par quando $n$ tem alguma das formas $4i$ ou $4i+1$, sendo $i$ inteiro, e impar no caso de ser $n=4i+2$ ou $n=4i+3$: o que se exprime dizendo que a permutação inversa da principal de ordem $n$ é par ou impar, conforme o maior numero par contido em $n$ é *duplamente* ou *simplesmente* par.

**4.** Trocando successivamente o primeiro elemento d'uma permutação de ordem $n$ com cada um dos seguintes, obtém-se a permutação *circular* da primeira. As duas são da mesma classe quando $n$ é impar, e reciprocamente, visto que se passa d'uma para outra por $n-1$ transposições.

Assim, por exemplo, 4321 é a permutação circular de 1432; a segunda é impar e a primeira é par.

**5.** Supponhamos expressos por numeros os $n$ elementos de uma permutação P; os primeiros $i$, que designamos por $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ na ordem natural, formam uma permutação parcial $p$. Um d'estes elementos, como $\alpha_h$, produz inversões com $\alpha_1, \alpha_2, \dots (\alpha_h-1)$; mas $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{h-1}$ pertencem a $p$, e por conseguinte o numero das inversões que $\alpha_h$ faz com os $n-i$ elementos da segunda parte de P será

$$\alpha_h-1-(h-1)=\alpha_h-h.$$

Dando a $h$ todos o valores desde 1 até $i$, sommando e fazendo $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i=s_i$, o numero das inversões que os primeiros $i$ elementos de P fazem com os $n-i$ restantes é dado pela expressão

$$t=(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\cdots+(\alpha_i-i)=s_i-\frac{i(i+1)}{2}.$$

Designando por $u$ e $u'$ os numeros d'inversões que ha em $p$ e na permutação $p'$ composta com os ultimos $n-i$ elementos de P, o numero total $v$ das inversões de P será

$$v=u+u'+s_i-\frac{i(i+1)}{2}.$$

O numero $t$ não pode ser zero sem que seja simultaneamente $\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \ldots,\ \alpha_i=i$.

**6.** No producto $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ permutem-se os índices em todas as ordens possiveis, conservando as letras na disposição alphabética; obteremos assim $n!$ productos distinctos, cujos factores differentes são em numero de $n^2$ e formam o quadro

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n . \end{matrix} \qquad (2)$$

Os *elementos* d'este quadro acham-se dispostos em $n$ *filas* horizontaes, chamadas *linhas*, e $n$ verticaes ou *columnas*. As linhas distinguem-se pelos índices, e contam-se de cima para baixo; as columnas distinguem-se pelas letras, e contam-se da esquerda para a direita. Chama-se *primeira diagonal* do quadro (2) a que parte da esquerda descendo, ou $a_1 b_2 \ldots l_n$; a outra $a_n b_{n-1} \ldots l_1$ é a *segunda diagonal*.

Será mais conveniente em alguns casos representar os elementos (2) por uma só letra affecta de dois índices, como se vê no quadro seguinte:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} . \end{matrix} \qquad (3)$$

Nesta notação o numero de ordem das columnas é designado pelo segundo índice, e o que dissermos d'estes índices applica-se ás letras na notação anterior.

7. Um producto de $n$ elementos distinctos do quadro (3) terá a fórma

$$P = a_{\alpha\alpha'}\, b_{\beta\beta'} \ldots a_{\lambda\lambda'}\ ,$$

sendo $\alpha\beta\ldots\lambda$ e $\alpha'\beta'\ldots\lambda'$ duas permutações dos índices $1, 2, \ldots n$.

Trocando em P a ordem de dois factores $a_{\delta\delta'}$ e $a_{\theta\theta'}$, faz-se a transposição $(\delta, \theta)$ nos primeiros índices e $(\delta', \theta')$ nos segundos; portanto ambas as permutações mudam de classe. Designando por $v$ e $v'$ os numeros d'inversões nestas permutações antes da troca dos dois factores, e por $v_1$ e $v'_1$ os numeros d'inversões nas permutações que resultam d'aquella troca, os numeros $v + v'$ e $v_1 + v'_1$ serão da mesma paridade.

8. *Definição.* — Chama se *determinante* dos elementos (3), e representa-se por $\Delta_n$, a somma algébrica de todos os productos distinctos P (*n.*° 7), tomados com o signal + ou — conforme são da mesma ou differente classe as duas permutações dos índices dos dois systemas.

Segundo esta definição e as notações precedentes, será

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{v+v'} \cdot a_{\alpha\alpha'}\, a_{\beta\beta'} \ldots a_{\lambda\lambda'}\ , \tag{4}$$

representando por $\Sigma$ a somma de que se trata. O determinante de $n^2$ elementos diz-se de *ordem n*.

Um elemento $a_{\delta\delta'}$ diz-se *par* quando os índices $\delta$ e $\delta'$ são da mesma paridade ou $\delta + \delta' = 2i$. Os elementos da primeira diagonal são pares, porque são da forma $a_{\delta\delta}$.

*Cor. 1.* Pertence ao determinante $\Delta_n$ o termo

$$+ a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}\ ,$$

chamado *principal*. Os factores d'este termo são os elementos da primeira diagonal, que tambem se chamam *principaes*.

*Cor.* 2. Pertence ao determinante $\Delta_n$ o termo

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{n1}\, a_{n-1,2} \cdots a_{1n}$$

cujos factores são os elementos da segunda diagonal; as permutações dos índices neste termo são a principal e a sua inversa (1).

*Cor.* 3. Á expressão (4) pode dar-se a fórma

$$\Delta_n \equiv \Sigma(-1)^v \cdot a_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} \ldots a_{\lambda n}\,, \tag{5}$$

ou ainda

$$\Delta_n \equiv \Sigma(-1)^{v'} \cdot a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{n\lambda}\,, \tag{6}$$

porque a ordem dos factores não influe no valor numérico nem no signal de cada termo (*n.*° 7). Estas expressões mostram que o desenvolvimento do determinante se pode obter, effectuando sómente as permutações dos índices d'um systema.

*Cor.* 4. O determinante de ordem $n$ tem $n!$ termos, metade positivos e metade negativos; ou melhor, metade dos termos tomam-se com o respectivo signal, e outra metade com o signal contrário.

*Cor.* 5. A expressão (5), ou (6), mostra que num termo do determinante entra um elemento de cada linha e de cada columna, mas um só.

**9.** Exprime-se o determinante nos seus elementos encerrando o quadro (2) ou (3) em dois traços verticaes, como se vê na expressão

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dois exemplos mostrarão como pode sempre obter-se o desenvolvimento d'um determinante.

1.º Seja

$$\triangle_2 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ :$$

o determinante de 2.ª ordem é a differença dos productos cruzados dos seus elementos.

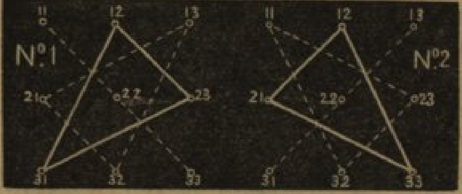
2.º Seja $\triangle_3 \equiv \Sigma \pm a_1 b_2 c_3$. Formam-se as permutações dos índices

$$123, \quad 132, \quad 312, \quad 213, \quad 231, \quad 321 \ ;$$

e attendendo á regra dos signaes, será

$$\triangle_3 \equiv a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \ .$$

O determinante de 3.ª ordem desenvolve-se ordinariamente pela *regra de Sarrus*. Tirem se as rectas (12, 23) e (32, 21) parallelas á primeira diagonal (*fig. 1*), e completem-se os trian-




gulos da mesma figura; o producto dos elementos principaes, bem como cada um dos que se obteem multiplicando entre si os elementos que estão nos vértices de cada triangulo, são os termos positivos de $\Delta_3$. Tirem-se do mesmo modo as rectas (21, 12) e (23, 32) parallelas á 2.ª diagonal, e completem-se os triangulos da *fig. 2;* os elementos d'esta diagonal dão um dos termos negativos, e os que estão nos vertices de cada triangulo darão cada um dos outros dois termos d'esta espécie.

A regra de Sarrus pode empregar-se d'outro modo. Á direita da 3.ª columna repetem-se as outras duas; os tres elementos da 1.ª diagonal e os de cada uma das duas linhas parallelas a esta dão os termos positivos; os elementos da 2.ª diagonal e os de cada uma das suas parallelas dão os termos negativos. Por exemplo:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right. ,$$

$\Delta = 2\times 6\times 3 + (-1)\times(-3)\times 1 + 1\times 4\times 2 - 1\times 6\times 1 - 2 \times(-3)\times 2 - (-1)\times 4\times 3 = 65$. Podemos tambem repetir as duas primeiras linhas por baixo da terceira, e proceder do mesmo modo.

No desenvolvimento dos determinantes numéricos teriamos de identificar os seus elementos com os do quadro (1) ou (2). A regra de Sarrus dispensa esta preparação nos determinantes de 3.ª ordem.

**10.** Se num determinante dado os indices não corresponderem aos numeros d'ordem das linhas, ou das columnas, ou das linhas e das columnas, o quadro do determinante preenche-se facilmente, quando é dado o termo principal.

Basta escrever este termo em linha obliqua descendente da esquerda para a direita, e completar as linhas de modo que se encontre sempre em cada uma o mesmo indice d'um systema e em cada columna o mesmo indice do outro systema.

Um determinante pode representar-se abreviadamente pelo termo principal, pondo

$$\Delta_n = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} ,$$

ou na notação do quadro (2)

$$\Delta_n = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots l_n \,.$$

Tambem se tem escripto sómente

$$\Delta_n = \left| a_i^s \right| \,;$$

e ainda

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix}.$$

Muitas vezes bastará escrever $\Delta_3 = |a\,b\,c|$, por exemplo.

**11.** Apagando $i$ linhas e $i$ columnas no quadro d'um determinante de ordem $n$, os elementos restantes formam um determinante de ordem $n-i$, que se chama *menor* de *classe* $i$ do proposto.

Em $\Delta_n$ ha $n^2$ menores de 1.ª classe, pois que o systema de filas orthogonaes, que se cruzam sobre um elemento dado, é distincto d'aquelle que corresponde a outro qualquer elemento.

Cada um d'estes menores tem $(n-1)^2$ menores de 1.ª classe, que são menores de 2.ª classe de $\Delta_n$: mas não são todos distinctos, porque duas linhas e duas columnas cruzam-se sobre $2^2$ elementos. Assim o numero de menores distinctos de 2.ª classe que ha em $\Delta_n$ é

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} \,.$$

Por uma inducção evidente se conclue que o numero de menores distinctos de classe $i$, que ha em $\Delta_n$, é

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{3^2} \cdots \frac{(n-i+1)^2}{i^2} \,.$$

Este numero torna-se em $n^2$ para $i=n-1$; com effeito, cada elemento de $\Delta_n$ pode ser considerado como um menor de classe $n-1$ d'este determinante.

**12.** Chamam-se *conjugados* os elementos symetricamente situados d'um e outro lado da primeira diagonal. No quadro (3) os elementos conjugados teem os indices trocados: $a_{\alpha\beta}$, $a_{\beta\alpha}$. Os elementos principaes são conjugados de si mesmos.

Dois menores da mesma classe dizem-se conjugados quando os elementos d'um são respectivamente conjugados dos elementos do outro.

Determinante de *diagonal vasia* é aquelle em que todos os elementos principaes são eguaes a zero.

O determinante diz-se *symétrico*, quando têm os elementos conjugados eguaes entre si, dois a dois; *contrasymétrico* ou *pseudosymétrico*, quando os elementos conjugados teem, dois a dois, o mesmo valor numérico e signaes contrarios; *hemysimétrico*, quando é conjunctamente contrasymétrico e de diagonal vasia.

Exemplos:

1.° $$S=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \theta \end{vmatrix};$$

desenvolvendo este determinante symétrico pela regra de Sarrus, vém

$$S=\alpha\delta\theta+2\beta\gamma\varepsilon-\beta^2\theta-\gamma^2\delta-\varepsilon^2\alpha.$$

Se fôr $\alpha=\delta=\theta=0$, será $S=2\beta\gamma\varepsilon$.

2.° $$S'=\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & \gamma \\ \beta & \delta & -\varepsilon \\ -\gamma & \varepsilon & \theta \end{vmatrix};$$

desenvolvendo este determinante pela regra de Sarrus, acha-se

$$S' = \alpha\partial\theta + \beta^2\theta + \gamma^2\delta + \varepsilon^2\alpha$$

Se fôr $\alpha = \partial = \theta = 0$, $S'$ é hemisymétrico e egual a zero.

## Exercícios

**1.** Determinar quantas inversões ha em 3 1 5 4 2.

**2.** Determinar a classe de 3 1 4 2 5, da sua inversa e da circular.

**3.** Obtêr 5 2 1 4 3 por tantas transposições na ordem natural, quantas são as suas inversões.

**4.** Verificar as egualdades

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix} = x^5 + y^5, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ z & 0 & x & 0 & 0 \\ y & x & \alpha & \beta & \lambda \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^5$$

sem effectuar os desenvolvimentos.

**5.** Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

sem recorrer á regra de Sarrus.

**6.** Effectuar o desenvolvimento de $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$.

**7.** Preencher o quadro do determinante cujo termo principal é $b_1 d_2 a_3 c_4$.

**8.** Mostrar que o numero total de inversões nas permutações de $n$ elementos é $\frac{(n-1)}{4} \cdot \underline{|n}$.

## CAPÍTULO II.

### Propriedades dos determinantes.

**13.** Para multiplicar ou dividir um determinante por $m$ multiplicam-se ou dividem se por $m$ todos os elementos de uma fila. Com effeito, cada termo do determinante contém um elemento d'essa fila, e um só, e fica assim multiplicado ou dividido por $m$.

*Cor. 1.* Podemos pôr em factor do determinante um factor commum a todos os elementos de uma fila, dividindo estes elementos por aquelle factor.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2z^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{z}{xy} & \frac{y}{xz} \\ 1 & \frac{z}{xy} & 0 & \frac{x}{yz} \\ 1 & \frac{y}{xz} & \frac{x}{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ xyz & z^2 & 0 & x^2 \\ xyz & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z_2 & y_2 \\ 1 & z^2 & 0 & x_2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

*Cor. 2.* Para multiplicar um determinante por $-1$ basta mudar o signal aos elementos de uma fila, ou de um numero impar de filas.

*Cor. 5.* Mudar os signaes a todos os elementos do determinante de ordem $n$ é o mesmo que multiplica-lo por $(-1)^n$.

**14.** Se no determinante $\Delta$ permutarmos de qualquer maneira as linhas, ou as columnas, ou as linhas e as columnas, obtem-se um determinante $\Delta'$, que será egual a $\pm\Delta$ conforme os termos principaes de $\Delta$ e $\Delta'$ forem ou não da mesma classe. Com effeito, os termos de $\Delta$ e $\Delta'$ só podem ser differentes nos signaes. Ora, se os principaes T e T' são da mesma classe, as permutações da mesma classe que T ou T' serão positivas em ambos os determinantes e vice-versa; se são de classes differentes, as permutações da mesma classe que T serão positivas em $\Delta$ e negativas em $\Delta'$, e vice-versa. No primeiro caso é $\Delta=\Delta'$, no segundo é $\Delta=-\Delta'$.

**15.** Um determinante não se altera quando as linhas se mudam em columnas e inversamente, isto é, quando o quadro gira de 180° sobre a primeira diagonal. Assim será

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

porque os termos principaes são identicos. Os elementos, que occupam as mesmas casas nos dois determinantes, são os mesmos com os índices invertidos.

*Cor.* O determinante *hemisymétrico* de ordem impar é nullo. A mudança das columnas em linhas não lhe altera o valor, e a mudança posterior dos signaes em todos os elementos faria que elle mudasse de signal (*n.° 13, cor. 5*), passando de $\Delta$ para $-\Delta$; porém o determinante volta á fórma primitiva, e portanto será $\Delta=-\Delta$ ou $2\Delta=0$.

**16.** Um determinante $\Delta$ muda de signal quando se permutam duas filas parallelas. Troquemos a columna $i$ com a $k$; os elementos principaes de $\Delta$ nestas duas columnas serão $a_{ii}$ e $a_{kk}$, e teremos a disposição seguinte

$$\begin{array}{ccc} \triangle & \qquad & \triangle' \\ a_{ii} \ldots a_{ik} & & a_{ik} \ldots a_{ii} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{ki} \ldots a_{kk} & & a_{kk} \ldots a_{ki} \end{array}$$

Nestes dois quadros os termos principaes dos determinantes $\triangle$ e $\triangle'$ são da fórma

$$\mathrm{A}\, a_{ii}\, \mathrm{B}\, a_{kk}\, \mathrm{C}\ , \quad \mathrm{A}\, a_{ik}\, \mathrm{B}\, a_{ki}\, \mathrm{C}\ ;$$

do primeiro passa-se para o segundo pela transposição dos indices do segundo systema. Logo estes termos são de classe differente e (*n.° 14*) é $\triangle = -\triangle'$; o mesmo se diria da troca de duas linhas, pelo principio do n.° 15.

Trocando entre si $p$ filas parallelas, o novo determinante $\triangle'$ será egual a $\triangle \times (-1)^p$. Fazer uma permutação circular de $p$ linhas ou de $p$ columnas é o mesmo que fazer $p-1$ trocas de filas parallelas, ou multiplicar o determinante por $(-1)^{p-1}$.

**17.** Se no determinante $\triangle$ forem eguaes duas filas parallelas, será $\triangle = 0$. Com effeito a troca d'estas duas filas produz mudança de signal; mas os dois determinantes ficam identicos, donde $\triangle = -\triangle$ ou $\triangle = 0$.

*Cor.* O determinante é nullo quando os elementos de uma fila são eguaes respectivamente aos de outra fila parallela multiplicados pelo mesmo factor.

**18.** Quando se trocam as duas diagonaes de um determinante de ordem $n$, o determinante conserva o seu valor absoluto; e muda ou não de signal, conforme é simples ou duplamente par o maior numero par contido em $n$ (*n.° 5*).

A troca das diagonaes effectua-se trocando as duas columnas extremas e simultaneamente todas as que são equidistantes d'ellas; portanto, se $2p$ é o maior numero par contido em $n$, será necessario fazer $p$ permutações de duas columnas e o novo determinante será egual ao proposto multiplicado por $(-1)^p$, isto é, por $+1$ se $p$ é par ou por $-1$ se $p$ é impar. Assim,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix}.$$

**19.** Pela propriedade do n.° 13 podem simplificar-se os determinantes. Seja por exemplo

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix};$$

multiplicando as tres linhas respectivamente por $a$, $b$ e $c$, o determinante virá multiplicado por $abc$ e será

$$abc \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix};$$

e dividindo depois a primeira columna por $abc$, acha-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

É sempre possivel reduzir á unidade todos os elementos d'uma fila. Assim, multiplicando as columnas de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

respectivamente por $bc$, $ca$ e $ab$, o determinante virá multiplicado por $a^2b^2c^2$ e será

$$a^2 b^2 c^2 . \Delta = \begin{vmatrix} abc & bac & cab \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix};$$

e dividindo depois a primeira linha por $abc$, acha-se finalmente

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix}.$$

Se o determinante fosse de ordem $n$, o divisor do novo determinante seria $a^{n-2}\, b^{n-2} \ldots l^{n-2}$.

Como na reducção de fracções ao mesmo denominador, se não forem primos entre si os elementos da fila que se quer transformar, basta reduzi-los ao seu menor múltiplo. Seja, por exemplo, o determinante seguinte, em que 16 é o menor múltiplo dos elementos da primeira columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 16 & 1 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4.8.2}{1}\begin{vmatrix} 16 & 12 & 20 & 8 \\ 16 & 56 & 24 & 32 \\ 16 & 1 & 8 & 6 \\ 16 & 4 & 10 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 12 & 20 & 8 \\ 1 & 56 & 24 & 32 \\ 1 & 1 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

O último determinante ainda pode ser simplificado; basta dividir as duas últimas columnas por 2 e multiplicar fora dos travessões por 4, o que dá

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 10 & 4 \\ 1 & 56 & 12 & 16 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Estas proposições teem importancia no cálculo dos determinantes numéricos.

## CAPÍTULO III.

### Propriedades dos menores.

**20.** Além do termo principal, ha no desenvolvimento do determinante outros que teem por factor o primeiro elemento $a_{11}$. Para os determinar, conserve-se fixo este elemento em $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$, permutem-se em todas as ordens possiveis os indices do segundo systema nos outros elementos e dê-se a cada resultado o signal que o termo correspondente tem no determinante proposto; acharemos assim todos os termos pedidos. Por outra parte, o signal de cada um será o que resultar do numero de inversões que se encontrarem nos índices 2, 3, . . $n$, porque o índice 1, escripto no principio, não influe naquelle numero; por conseguinte, designando por $a_{11}$ $A_{11}$ a parte do desenvolvimento de $\Delta_n$ em que entra o elemento $a_{11}$, o factor $A_{11}$ será o determinante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que é o menor de primeira classe que resulta da suppressão da primeira linha e da primeira columna de $\Delta_n$.

Outro elemento qualquer $a_{is}$, da linha $i$ e da columna $s$, entra no desenvolvimento do determinante em diversos termos, que podemos representar todos por $a_{is}$ $A_{is}$. Para determinar $A_{is}$, leve-se o elemento considerado ao logar do primeiro $a_{11}$, por meio de $i-1$ trocas de linhas e $s-1$ trocas de columnas duas a duas. O novo determinante será

$$\Delta' = \begin{pmatrix} s, 1, 2, \ldots s-1, s+1, \ldots n \\ i, 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots n \end{pmatrix};$$

e como no termo principal de $\Delta'$ ha $i-1$ inversões nos indices do primeiro systema e $s-1$ nos do segundo, será $\Delta_n = \pm \Delta'$ (*n.° 14*) conforme $i-1$ e $s-1$, ou antes, conforme $i$ e $s$ forem ou não da mesma paridade. Este resultado pode representar-se por meio da relação

$$\Delta_n = (-1)^{i+s} . \Delta' .$$

Por outra parte ao elemento $a_{is}$, que occupa o primeiro logar de $\Delta'$, é applicavel o que dissemos de $a_{11}$ com respeito a $\Delta_n$; portanto os termos que no desenvolvimento de $\Delta'$ conteem o elemento $a_{is}$ podem ser todos representados por $Ma_{is}$, sendo M o primeiro menor que se obtém apagando a primeira linha e a primeira columna de $\Delta'$.

Ora éste menor M é o primeiro menor de $\Delta_n$ relativamente ao elemento $a_{is}$; e attendendo aos signaes será

$$A_{is} = (-1)^{i+s} \times \begin{pmatrix} 12 \dots s-1\, s+1 \dots n \\ 12 \dots i-1\, i+1 \dots n \end{pmatrix}.$$

O signal é + se o elemento $a_{is}$ é par, — se é impar.

O signal pode tambem determinar-se percorrendo orthogonalmente o determinante, desde o seu primeiro elemento até áquelle que se considera, lendo + no primeiro elemento e mudando de signal na passagem de cada um d'elles para o seguinte.

Assim para determinar o signal do factor de $r$ no determinante

$$\begin{vmatrix} p & a & b & c \\ a & q & -d & e \\ b & -d & r & f \\ c & e & f & s \end{vmatrix},$$

diremos + em $p$, — em $a$, + em $b$, — em $-d$, + em $r$. Notaremos que é sempre positivo o termo que tem por factor um elemento principal, porque estes elementos são todos pares.

**21.** Podemos dar outra forma a $A_{is}$, trazendo o elemento $a_{is}$ ao primeiro logar de

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1, 2 \dots s-1, s, s+1, \dots n \\ 1, 2 \dots i-1, i, i+1, \dots n \end{pmatrix}$$

por meio de $i-1$ permutações circulares das linhas e $s-1$ das columnas.

Cada uma d'estas permutações equivale a $n-1$ trocas de filas parallelas, e estas últimas operações virão a ser ao todo $(n-1)(i+s-2)$; portanto o novo determinante $\Delta''$ está ligado com $\Delta_n$ pela relação

$$\Delta_n = (-1)^{(n-1)(i+s)} . \Delta'' .$$

Por outra parte é

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} s, s+1, \ldots n, 1, \ldots s-1 \\ i, i+1, \ldots n, 1, \ldots i-1 \end{pmatrix};$$

donde se conclue, como no n.° anterior, que será

$$A_{is} = (-1)^{(n-1)(i+s)} . \begin{pmatrix} s+1, \ldots n, 1, \ldots s-1 \\ i+1, \ldots n, 1, \ldots i-1 \end{pmatrix} .$$

Se $n$ fôr impar, o factor $A_{is}$ tem sempre o signal $+$; se $n$ fôr par, este factor deve tomar-se com o signal $+$ para os elementos pares e com o signal $-$ para os impares.

Assim no determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

o factor do elemento $a_{23}$ será

$$+ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} .$$

Quando é $s=n$, o índice $s+1$ representa simplesmente o numero $1$.

**22.** Seja $\Delta_n^{(p)}$ um menor de classe $n-p$ do determinante $\Delta_n$, e $\Delta_n^{(n-p)}$ o menor que fica do proposto quando nelle se apagam as $p$ linhas e $p$ columnas em que o primeiro se contém; o producto $\Delta_n^{(p)} . \Delta_n^{(n-p)}$, com o mesmo signal ou com signal contrário, fará parte do desinvolvimento de $\Delta_n$. Com effeito, os termos d'este producto encerram todos os índices de $\Delta_n$, sem repetições nem omissões; e dois d'elles são distinctos um do outro pelas permutações de algum dos factores, ou pelas de ambos.

Para determinar o signal que ficou incerto, consideremos positivo um dos factores e procuremos o signal que deve attribuir-se ao outro factor, suppondo em cada um d'elles os elementos do termo principal dispostos na ordem natural. Seja em primeiro logar

$$\Delta_n^{(p)} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{pp}\,,$$

isto é, supponhamos que o menor $\Delta_n^{(n-p)}$ resulta da suppressão das primeiras $p$ linhas e das primeiras $p$ columnas do determinante proposto e que é

$$\Delta_n^{(n-p)} = \Sigma \pm a_{p+1,\,p+1}\, a_{p+2,\,p+2} \ldots a_{nn}\,.$$

O producto dos termos principaes dos dois menores é positivo em $\Delta_n$, porque é o termo principal d'este determinante; logo a parte considerada do desenvolvimento deve ser tomada com o signal $+$.

Se fôr em geral, com os índices dispostos na ordem natural,

$$\Delta_n^{(p)} = \Sigma \pm a_{is}\, a_{i's'} \ldots,$$

leve-se o elemento $a_{is}$ ao primeiro logar da primeira diagonal por meio de $i-1$ trocas de linhas e $s-1$ trocas de columnas;

leve-se depois o elemento $a_{i's'}$ ao logar do segundo elemento da mesma diagonal por meio de $i'-2$ trocas de linhas e $s'-2$ trocas de columnas, e assim por deante. O novo determinante será $\Delta'=\Delta_n$ ou $\Delta'=-\Delta_n$, conforme a somma $i+s-2+i'+s'-2.2+\ldots$ fôr par ou impar.

Por conseguinte o signal do producto considerado será definido pelo coefficiente

$$(-1)^{i+s+i'+s'+\cdots};$$

ou ainda pelo numero de inversões que o primeiro factor apresenta em relação ao segundo nos indices dos dois systemas.

Os factores $\Delta_n^{(p)}$ e $\Delta_n^{(n-p)}$, formados pelo modo que acabamos de dizer, chamam-se *complementares*. Tambem se lhes dá o nome de *recíprocos*, por serem complementares um do outro.

**23.** Num determinante symétrico dois elementos conjugados $a_{is}$, $a_{si}$ são eguaes. Os seus factores complementares $A_{is}$ e $A_{si}$ tambem são eguaes porque, mudando as linhas em columnas e reciprocamente, cada elemento vae occupar o logar do seu conjugado e vice-versa, ficando todas as casas eguaes.

Nos determinantes hemisymétricos os factores complementares de elementos conjugados são numéricamente eguaes; e do mesmo ou differente signal, conforme o grau $n$ do determinante é impar ou par. Mudando as linhas em columnas e reciprocamente, o elemento $a_{is}$ vem para o logar do seu conjugado $a_{si}$; e mudando os signaes a todos os elementos o novo determinante é $\Delta'=\Delta_n.(-1)^n$, o elemento $a_{is}$ torna-se em $-a_{is}$ e as casas ficam todas com o valor que tinham em $\Delta_n$. Ora o factor complementar de $-a_{is}$ em $(-1)^n.\Delta_n$ é egual ao de $a_{si}$ em $\Delta^n$, portanto o factor complementar de $-a_{is}$ em $\Delta_n$ será $(-1)^n A_{si}$; isto é, o factor recíproco de $a_{is}$ será

$$(-1)^{n-1}.A_{si}.$$

**24.** Em determinantes symétricos os factores complementares de menores conjugados são eguaes. Demonstra-se como a primeira parte do n.° anterior.

Num determinante hemisymétrico de ordem $n$, sejam $\delta$ e $\delta'$ dois menores conjugados de ordem $p$, e $\alpha$ e $\alpha'$ os seus factores complementares. Pela mudança das linhas em columnas e d'estas naquellas, leve-se $\delta$ ao logar de $\delta'$ e reciprocamente; mudando depois os signaes de todos os elementos, $\Delta_n$ torna-se em $(-1)^n \,.\, \Delta_n$ e $\delta$ em $(-1)^p \,.\, \delta$. Ora o factor complementar de $(-1)^p \,.\, \delta$ em $(-1)^n\, \Delta_n$ será o mesmo que o de $\delta'$ em $\Delta_n$, ou $\alpha'$; logo o reciproco de $\delta$ em $\Delta_n$ será

$$\alpha = (-1)^{n-p} \,.\, \alpha' \,,$$

e $\alpha$ e $\alpha'$ serão eguaes, do mesmo ou differente signal conforme os graus $n$ e $p$ forem ou não da mesma paridade.

## CAPÍTULO IV.

### Desenvolvimento do determinante pelos seus menores.

**25.** Em cada termo d'um determinante entra um só elemento de cada linha e um só de cada columna; assim, convirá effectuar o desenvolvimento, ordenando $\Delta_n$ em relação aos elementos de uma fila. Vimos (*n.° 20*) como se determina o factor complementar de cada elemento; assim teremos para a linha $i$

$$\Delta_n = A_{i1}\, a_{i1} + A_{i2}\, a_{i2} + \cdots + A_{in}\, a_{in} \,,$$

e para a columna $s$

$$\Delta_n = A_{1s}\, a_{1s} + A_{2s}\, a_{2s} + \cdots + A_{ns}\, a_{ns} \,.$$

Os factores $A_{is}$, com o signal implicito, são determinantes de ordem $n-1$, que pelo mesmo modo se fariam depender de outros de ordem $n-2$, como estes se resolveriam noutros de ordem $n-3$ e assim por deante.

**26.** Considerando mais particularmente o determinante da 3.ª ordem, teremos pelo processo do n.º 20

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A estas relações pode dar-se a forma

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 \\
&= B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 = A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2 c_2 \qquad (7) \\
&= C_1 c_1 + C_2 c_2 + C_3 c_3 = A_3 a_3 + B_3 b_3 + C_3 c_3
\end{aligned}$$

sendo

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \qquad (8)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Pelo processo do n.° **21**, todos os termos se tomariam com o signal + porque $3-1$ é par; desenvolvendo, por exemplo, em ordem aos elementos da segunda columna teriamos

$$\Delta_3 = b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

que é a segunda das expressões precedentes, attendendo ás permutações de linhas e columnas.

**27.** Se nos desenvolvimentos do n.° **25** substituirmos os elementos $a_{i1}$, $a_{1s}$, etc. pelos de outra fila parallela, o resultado será egual a zero; ou

$$A_{i1}\,a_{k1} + A_{i2}\,a_{k2} + \cdots + A_{in}\,a_{kn} = 0 \ ,$$

$$A_{1s}\,a_{1t} + A_{2s}\,a_{2t} + \cdots + A_{ns}\,a_{nt} = 0 \ ,$$

para todos os valores de $k$ ou de $t$ desde 1 até $n$, com excepção de $k=i$ e de $t=s$. Com effeito, os primeiros membros d'estas fórmulas são, respectivamente, o desenvolvimento d'um determinante em que são eguaes as linhas de ordem $i$ e $k$ ou as columnas de ordem $s$ e $t$.

D'este modo obteremos nos determinantes de 3.ª ordem doze relações, que resultam de trocar em cada uma das seis fórmulas (7) os elementos $a_1$, $b_1$, etc. pelos das outras duas filas parallelas. Estas relações são:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3=0\ , & A_1c_1+A_2c_2+A_3c_3=0\ ; \\ B_1a_1+B_2a_2+B_3a_3=0\ , & B_1c_1+B_2c_2+B_3c_3=0\ ; \\ C_1a_1+C_2a_2+C_3a_3=0\ , & C_1b_1+C_2b_2+C_3b_3=0\ ; \\ A_1a_2+B_1b_2+C_1c_2=0\ , & A_1a_3+B_1b_3+C_1c_3=0\ ; \\ A_2a_1+B_2b_1+C_2c_1=0\ , & A_2a_3+B_2b_3+C_2c_3=0\ ; \\ A_3a_1+B_3b_1+C_3c_1=0\ , & A_3a_2+B_3b_2+C_3c_2=0\ . \end{array}\right\} \quad (9)$$

**28.** Se um determinante fôr nullo, haverá a mesma relação linear homogénea entre todos os elementos de cada linha ou columna.

Seja o determinante de 3.ª ordem $\Sigma \pm a_1b_2c_3$. Se elle fôr nullo, teremos por esta hypóthese e pelas fórmulas (7) e (9)

$$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3=\triangle_3=0\ ,$$
$$A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3=0\ ,$$
$$A_1c_1+A_2c_2+A_3c_3=0\ ,$$

ou

$$A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1=\triangle_3=0\ ,$$
$$A_1a_2+B_1b_2+C_1c_2=0\ ,$$
$$A_1a_3+B_1b_3+C_1c_3=0\ .$$

Reciprocamente, se existir a mesma relação linear homogénea entre os elementos de cada linha ou columna, o determinante será egual a zero. Seja

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = 0 ,$$
$$\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \delta_3 b_3 = 0 ,$$
$$\delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3 = 0 ;$$

multiplicando estas egualdades respectivamente por $A_1$, $B_1$, $C_1$ e sommando os productos, teremos

$$\delta_1(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1) + \delta_2 (A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2) + \delta_3 (A_1 a_3 + B_1 b_3 + C_1 c_3) = 0 .$$

Ora os dois ultimos termos são nullos (9); logo, se $\delta_1$ é differente de zero, será

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \Delta_3 = 0 .$$

**29.** Quando todos os elementos d'uma fila são nullos, o determinante é egual a zero; porque, deesenvolvendo-o segundo os elementos d'essa fila, todos os termos do desenvolvimento tem zero por factor.

Quando são nullos todos os elementos d'uma fila com excepção d'um, o grau do determinante abaixa-se d'uma unidade. Assim

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Inversamente, podemos escrever um determinante sob a forma d'outro determinante de grau mais elevado, accrescentando successivamente ao proposto linhas e columnas em numero egual, e taes que em cada um dos systemas accrescentados o elemento commum seja $+1$ ou $-1$ conforme o numero d'ordem das filas, e que numa d'estas os restantes elementos sejam zeros podendo os da outra ser quaesquer.

Assim

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ * & a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ * & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{vmatrix}$$

Os asteriscos podem ser substituidos por elementos quaesquer, que não influirão no valor do determinante.

**30.** Quando são nullos todos os elementos situados do mesmo lado da primeira diagonal, o determinante reduz-se ao termo principal:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3d_4\,.$$

Quando são nullos todos os elementos situados do mesmo lado da segunda diagonal, o determinante d'ordem $n$ reduz-se ao producto dos elementos d'esta diagonal, com o mesmo ou differente signal conforme o maior numero par contido em $n$ é dupla ou simplesmente par.

**31.** O determinante pode tambem desenvolver-se em menores d'outras classes.

Viu-se (*n.*° 22) que o producto dos dois menores $\Delta_n^{(p)}$ e

$\Delta_n^{(n-p)}$ pertence ao desenvolvimento de $\Delta_n$, comtanto que se lhe dê o signal + ou — conforme no principal de qualquer dos factores as sommas dos índices dos dois systemas sejam da mesma ou differente paridade, e esses principaes se escrevam sem inversões.

Combinemos $p$ a $p$ em todas as ordens possiveis as $n$ linhas que no quadro do determinante cruzam as $p$ columnas de $\Delta_n^{(p)}$ e formemos os correspondentes

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

menores distinctos d'ordem $p$, que se conteem nas mesmas $p$ columnas; multipliquemos cada um d'estes menores pelo seu complementar, com o signal conveniente. A somma algébrica dos productos será identicamente $\Delta_n$.

Com effeito, os termos, em que se resolvem estes productos, pertencem ao determinante proposto, são distinctos e teem o mesmo signal com que entram em $\Delta_n$; por outra parte o seu numero é

$$p!\,\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\,.(n-p)!=n!$$

sem reducções; e este é tambem o numero de termos do determinante d'ordem $n$.

Egual raciocinio se applicaria ao desenvolvimento do determinante segundo os menores contidos nas $p$ linhas de $\Delta_n^{(p)}$.

**32.** A proposição do n.° 31 tem principal applicação no desenvolvimento segundo os menores contidos em duas filas parallelas, porquanto os determinantes de 2.ª ordem se resolvem immediatamente nos seus elementos.

D'este modo teremos, para as duas primeiras columnas,

$$\Delta^n = B_{12}(a_{11}\,a_{22}) + B_{13}(a_{11}\,a_{32}) + \cdots$$
$$+ B_{1n}(a_{11}\,a_{n2}) + \cdots + B_{n-1,\,n}(a_{n-1,\,1}\,a_{n,\,2}) \,,$$

onde se tomará $B_{12}$ com o signal $+$, $B_{13}$ com o signal $-$, etc.; mas os signaes não serão sempre alternados, e o último termo deve tomar-se com o signal $+$.

Em geral é sempre positivo o factor complementar do menor de 2.ª ordem contido em filas consecutivas duas a duas; porque, se este menor fôr

$$\Sigma \pm a_{is}\,a_{i+1,\,s+1} \,,$$

o signal do factor complementar será dado (*n.*º 22) pelo coefficiente

$$(-1)^{i+s+i+1+s+1} = (-1)^{2(i+s+1)} = +1 \,.$$

Esta forma de desenvolvimento é sobretudo util, quando o determinante proposto é de 4.ª ordem, porque assim se resolve immediatamente em determinantes de 2.ª ordem.

Observaremos tambem que os factores complementares dos menores contidos nas duas primeiras e nas duas últimas linhas de duas columnas quaesquer devem ter ambos o mesmo signal. Com effeito, se os numeros d'ordem d'estas duas columnas são $s$ e $s+s'$, os menores de que se trata serão

$$\Sigma \pm a_{1s}\,a_{2,\,s+s'} \,, \quad \Sigma \pm a_{n-1,\,s}\,a_{n,\,s+s'} \,;$$

e a somma dos índices no último é egual á somma dos índices no primeiro accrescentada com o numero par $2(n-2)$.

**33.** Um determinante $\Delta_n$ pode elevar-se directamente á ordem $n+p=m$ pelo seguinte processo.

Forma-se um determinante R de ordem $p$ e egual á unidade, o que pode obter-se de muitos modos; o mais simples será suppôr egual a 1 cada elemento principal d'este determinante e nullos todos os que ficam para o mesmo lado da primeira diagonal, sendo os outros arbitrarios.

Assim, teremos

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ * & 1 & 0 & . & . & 0 \\ * & * & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ * & * & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Colloca-se depois a primeira diagonal de R em seguimento da primeira diagonal do determinante proposto; e finalmente completa-se o quadro, preenchendo as linhas, ou as columnas, d'um dos determinantes com zeros e as columnas ou as linhas, do outro com elementos quaesquer, do modo seguinte:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & l_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_2 & b_2 & . & l_2 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & l_n & 0 & 0 & . & 0 \\ * & * & . & * & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ * & * & . & * & * & * & . & 1 \end{vmatrix} .$$

Com effeito, este determinante, desenvolvido nos menores de ordem $n$ contidos nas $n$ primeiras columnas, reduz-se ao primeiro termo

$$R \times \Delta_n = \Delta_n ,$$

porque em cada um dos termos restantes entra como factor um determinante com uma linha de zeros.

*Cor. 1. Se num determinante de ordem* m *forem nullos os elementos communs ás* n *primeiras linhas e ás* m — n *últimas columnas, o proposto reduz-se ao producto d'um determinante de ordem* n *por outro de ordem* m — n.

*Cor. 2. Se forem nullos os elementos communs ás* n *primeiras linhas e ás últimas* m — n + 1 *columnas d'um determinante de ordem* m, *este determinante será egual a zero.* Porque num dos dois factores do *Cor. 1* haverá uma linha de zeros.

*Cor. 3.* Se num determinante de ordem $m = 2n$, dividido em quatro de ordem $n$ por uma mediana horizontal e outra vertical, forem nullos todos os elementos communs ás primeiras $n$ linhas e ás últimas $n$ columnas, ou ás primeiras $n$ columnas e ás últimas $n$ linhas, o proposto reduz-se ao producto dos dois determinantes parciaes, adjacentes ao que é composto de zeros.

*Cor. 4.* O producto de dois determinantes de ordem $p$ e $q$ pode sempre representar-se por um determinante de ordem $p + q$, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & * & * \\ c_2 & d_2 & e_2 & * & * \\ c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Se os determinantes dados fossem ambos de ordem $n$, o seu producto seria representado por um determinante de ordem $2n$.

**34.** O determinante pode tambem desenvolver-se segundo os elementos de duas filas orthogonaes.

No desenvolvimento de

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1s} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2s} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{is} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{ns} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pelos elementos das duas filas que se cruzam em $a_{is}$, haverá um grupo de termos $A_{is}\, a_{is}$ *(n.º 20)* que teem por factor aquelle elemento. Designamos por $A_{is}$, com o signal implícito, o primeiro menor do proposto em ordem a $a_{is}$; nos elementos d'este menor ha todos os índices, menos $i$ nos do primeiro systema e $s$ nos do segundo.

No resto do desenvolvimento pedido, os termos são todos da forma $Ka_{ps} . a_{it}$: sendo $a_{ps}$ qualquer elemento da columna $s$, menos $a_{is}$, de modo que $p$ pode ter qualquer valor desde 1 até $n$, menos $i$; e $a_{it}$, qualquer elemento da linha $i$, menos o mesmo $a_{is}$, de modo que $t$ pode ser qualquer numero desde 1 até $n$, menos $s$.

Ora, em $\Delta_n$ os coefficientes de $a_{pt}\, a_{is}$ e $a_{ps}\, a_{it}$ são eguaes e de signal contrário, pela troca dos índices superiores (*Theor. de Bezout*). Mas o producto $a_{pt}\, a_{is}$ só se encontra em $A_{is}\, a_{is}$; logo o coefficiente K é, com signal contrário, egual ao coefficiente de $a_{pt}$ em $A_{is}$, isto é, ao primeiro menor $B_{pt}$ d'este determinante $A_{is}$ em ordem áquelle elemento $a_{pt}$. Esse menor $B_{pt}$ é o segundo menor que resulta do proposto pela suppressão das linhas $i$ e $p$ e das columnas $s$ e $t$.

Dando successivamente a $p$ e a $t$ todos os valores que podem competir a cada um d'estes índices, e representando por $\Sigma$ a somma algébrica dos resultados, será finalmente

$$\Delta_n = A_{is}\, a_{is} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{ps}\, a_{it}\,.$$

Se as duas filas consideradas se cruzarem na primeira diagonal, em $a^{ii}$, será

$$\triangle_n = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{pi}\, a_{it}\,.$$

Se o determinante fôr symétrico, $A_{ii}$ tambem o será; e como neste caso é $a_{pi} = a_{ip}$, a fórmula anterior torna-se em

$$\triangle_n = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{ip}\, a_{it}\,.$$

Mas como é tambem $B_{pt} = B_{tp}$, a expressão $B_{tp}\, a_{ip}\, a_{it}$ não muda de valor quando se trocam $p$ em $t$ e $t$ em $p$; portanto os termos correspondentes a valores deseguaes d'estes índices são eguaes dois a dois.

Supponhamos, por exemplo, que se quer desenvolver o determinante symétrico

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix},$$

em ordem aos productos dos elementos da primeira linha pelos da primeira columna. Neste caso é $i = 1$ e $a_{11} = 0$; teremos pois

$$\begin{aligned} \triangle = &- a_{12}\,(a_{12}\,.\,B_{22} + a_{13}\,.\,B_{23} + a_{14}\;\; B_{24}) \\ &- a_{13}\,(a_{12}\,.\,B_{32} + a_{13}\,.\,B_{33} + a_{14}\,.\,B_{34}) \\ &- a_{14}\,(a_{12}\,.\,B_{42} + a_{13}\,.\,B_{43} + a_{14}\,.\,B_{44})\;; \end{aligned}$$

mas é $B_{23} = B_{32}$, $B_{24} = B_{42}$ e $B_{34} = B_{43}$: portanto será

$$\begin{aligned} \triangle = &- (a_{12})^2\,.\,B_{22} - (a_{13})^2\,.\,B_{33} - (a_{14})^2\,.\,B_{44} \\ &- 2\,a_{12}\,.\,a_{13}\,.\,B_{23} - 2\,a_{12}\,.\,a_{14}\,.\,B_{24} - 2\,a_{13}\,.\,a_{14}\,.\,B_{34}\,. \end{aligned}$$

Os segundos menores B calculam-se pelo primeiro $A_{11} = (a_{22}\, a_{33}\, a_{44})$, que tem o signal + no desenvolvimento procurado; e assim é

$$B_{23} = - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -(a_{32}\, a_{44} - a_{42}\, a_{34}) \ ,$$

por exemplo. Formando do mesmo modo os restantes B e substituindo os elementos symbólicos pelos valores que lhes correspondem no quadro do determinante dado, achariamos,

$$a_{23} = c_1 \ , \quad B_{23} = a_1 b_1 \ , \quad \text{etc.}$$

Do mesmo modo, para desenvolver

$$\Delta_4 = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44})$$

pelos elementos da segunda linha e terceira columna, faremos na fórmula geral $i = 2$, $s = 3$; daremos primeiro a $p$ o valor 1 com $t = 1, 2, 4$, e depois successivamente o valor 3 e 4 com os mesmos de $t$. Acharemos assim

$$\begin{aligned} \Delta = A_{23}\, a_{23} - a_{13}\, (B_{11}\, a_{21} + B_{12}\, a_{22} + B_{14}\, a_{24}) \\ - a_{33}\, (B_{31}\, a_{21} + B_{32}\, a_{22} + B_{34}\, a_{24}) \\ - a_{43}\, (B_{41}\, a_{21} + B_{42}\, a_{22} + B_{44}\, a_{24}) \ . \end{aligned}$$

Substituem-se depois os B e $A_{23}$ pelas suas expressões, que são:

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \ ,$$

$$B_{11} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{12} = +\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{14} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

$$B_{31} = +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{34} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

$$B_{41} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad B_{42} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad B_{44} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim se faz depender o calculo do determinante de 4.ª ordem d'um da 3.ª e de nove da 2.ª, contendo o desenvolvimento final $3! + 9 . 2 = 24$ termos, como deve ser.

Este méthodo é sobre tudo vantajoso quando $a_{is} = 0$, porque faz depender o determinante de ordem $n$ sómente de outros de ordem $n-2$; e é principalmente usado para os determinantes symétricos, que já considerámos, e ainda quando o primeiro elemento é zero e os outros da primeira linha são eguaes aos que lhe correspondem na primeira columna.

## Exercicios

**9.** Achar o coefficiente de $a_{11}$ em $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55}$.

**10.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (15 - 16) - 2(10 - 12) + 3(8 - 9) = 0 .$$

**11.**
$$\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$=1+c^2+a(a-bc)+b(ac+b)$$
$$=1+a^2+b^2+c^2.$$

**12.**
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

**13.**
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2-2.4(3+2)-3(-4)-2(1-12)=-4.$$

**14.**
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & 6 & a & y \\ 0 & 2 & c & b & x \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 36; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -112.$$

**15.**
$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

**16.** Demonstrar a egualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ ou } = 0.$$

**17.** Achar o mesmo resultado para o determinante cujos elementos são todos zero, com excepção de $a_{p,\,p-1} = 1$, $a_{q,\,q+r} = -1$, fazendo successivamente $p = 2, 3, .. n$ e $q = 1, 2, .. n - r$.

**18.** Em $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55}$ achar o factor de $\Sigma \pm a_{23}\, a_{35}$.

**19.** Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix} = -(a_2 c_3) \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix} .$$

**20.** Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} .$$

**21.** Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & b_6 & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

**22.** Desenvolver em ordem aos elementos da primeira linha e da primeira columna o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & a & b \\ -y & c & 0 & d \\ -z & e & f & 0 \end{vmatrix} = dfx^2 + bey^2 + acz^2 - xy\,(bf + de) - xz\,(ad + cf) - yz\,(bc + ae) .$$

**23.** Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} = x^3 - x(ac + be + df) + ade + bcf.$$

**24.** Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + x^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + (af - be + cd)^2$$

# CAPÍTULO V.

## Addição das linhas.

**35.** Desenvolvendo pelos elementos da primeira columna o determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n + \alpha_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix},$$

acha-se (*n.º 25*) a expressão

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a_1 + \alpha_1) A_{11} + (a_2 + \alpha_2) A_{21} + \cdots + (a_n + \alpha_n) A_{n1} \\ &= (a_1 A_{11} + a_2 A_{21} + \cdots + a_n A_{n1}) \\ &\quad + (\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \cdots + \alpha_n A_{n1}); \end{aligned}$$

d'onde se conclue que é

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Por conseguinte: 1.° Quando os elementos de uma fila forem binomios, o determinante de ordem $n$ decompõe-se na somma de outros dois; a fila, correspondente áquella de que se trata, é composta em um dos determinantes parciaes pelos primeiros termos, e no outro pelos segundos termos d'aquelles binomios; as restantes $n-1$ filas parallelas são communs a estes dois determinantes e ao proposto.

2.° Se $\alpha_1, \alpha_2, .. \alpha_n$ mudarem de signal, o proposto será a differença dos dois determinantes que estão no segundo membro de (10).

3.° Reciprocamente, a somma ou differença de dois determinantes da mesma ordem, que, só differem em uma columna ou linha, será um determinante da ordem dos propostos, com as mesmas $n-1$ columnas ou linhas communs a ambos e a outra formada pelas sommas ou differenças ordenadas dos elementos differentes.

Pelo principio contido na equação (10) se mostra que os determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & a \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix}$$

são eguaes e de signaes contrarios; com effeito, o segundo é egual a

$$\begin{vmatrix} a & a & b \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{vmatrix},$$

e a somma d'este determinante com o primeiro dos propostos é

$$\begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

**36.** Se forem binomios os elementos de mais de uma columna, decompõe-se primeiro o determinante proposto em dois, considerando monomios os elementos de todas as columnas menos uma; depois decompõe-se cada um d'estes em outros dois pela mesma maneira, e assim por deante. O numero final de parcellas será $2^m$, sendo $m$ o numero de columnas em que se verifica a hypóthese.

Seja, por exemplo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

decompondo cada um dos determinantes que estão no 2.º membro, acha-se

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (11)$$

**37.** Os elementos $\alpha_1$, $\beta_1$, etc. são quaesquer, e alguns podem ser zero. Se fôr, por exemplo,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1+x & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix}$$

acha-se primeiro

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2+x & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} b_2+x & c_2 \\ b_3 & c_3+x \end{vmatrix};$$

e proseguindo pelo mesmo estylo teriamos finalmente

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\} + x^2 (a_1 + b_2 + c_3) + x_3 .$$

Applicando esta forma de desenvolvimento ao determinante symétrico

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A-s & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-s \end{vmatrix},$$

acha-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} - (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) s + (A + A' + A'') s^2 - s^3 , \qquad (12)$$

fazendo $AA' - B''^2 = \partial_1$, $AA'' - B'^2 = \partial_2$ e $A'A'' - B^2 = \partial_3$.

**38.** Se em (10) fôr

$$\alpha_1 = pc_1 , \quad \alpha_2 = pc_2 , \quad \ldots \quad \alpha_n = pc_n ,$$

o segundo determinante do 2.º membro será egual a zero *(n.º 17, cor.)*, e teremos

$$\begin{vmatrix} a_1 + pc_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 + pc_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n + pc_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} .$$

Semelhantemente, se os elementos da primeira columna forem compostos de mais termos proporcionaes aos elementos de outras columnas, o determinante subsistirá o mesmo. E como esta proposição pode applicar-se a qualquer outra fila, concluiremos que:

*1.º Um determinante não se altera quando juntamos ordenadamente aos elementos de uma fila os de outras filas parallelas, respectivamente multiplicados por factores constantes, positivos ou negativos.*

Se além das relações precedentes fôr tambem

$$a_1 = kb_1 , \quad a_2 = kb_2 , \quad a_n = kb_n ,$$

os dois determinantes do segundo membro de (10) são eguaes a zero, e portanto o proposto egualmente o será. Logo:

2.º *Quando os elementos de uma linha, ou columna, são eguaes á somma dos productos dos elementos correspondentes de duas ou mais linhas, ou columnas, multiplicados respectivamente por factores constantes, positivos ou negativos, o determinante é egual a zero.*

*Applicações:* 1.ª O determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

é egual a zero. Com effeito, juntando a segunda columna á terceira, vem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

2.ª Quaesquer que sejam $x$, $y$, $z$, será sempre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & x & y \\ -\alpha & -\beta & \gamma & z \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & \delta \end{vmatrix} = 2^3\alpha\beta\gamma\delta ;$$

porque, juntando a primeira linha a cada uma das seguintes, vem

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 2\beta & x+\gamma & y+\delta \\ 0 & 0 & 2\gamma & z+\delta \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta \end{vmatrix} = \alpha \,.\, 2\beta \,.\, 2\gamma \,.\, 2\delta \,.$$

Em geral, o determinante de ordem $n$, em que a primeira linha e a primeira diagonal são identicas e em cada columna o respectivo elemento principal se repete até ao fim com signal trocado, reduz-se ao producto do termo principal por $2^{n-1}$.

**39.** *Theorema.* — Se fôr o determinante $\Delta_4 = (a_1 b_2 c_3 d_4) = 0$, e simultaneamente os menores

$$A_1 = 0 \,,\quad A_3 = 0 \,,\quad A_4 = 0 \,:$$

será tembem $A_2 = 0$, se algum dos elementos da segunda linha fôr differente de zero.

Se fôr $a_2$ differente de zero, a proposição resulta evidentemente da egualdade

$$\Delta_4 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 = 0 \,.$$

Se fôr $a_2 = 0$, supponhamos que é, por exemplo, $b_2$ differente de zero. Sommando a 2.ª columna com a 1.ª, teremos (n.º 38, 1.º)

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 + b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \,;$$

e desenvolvendo depois pela primeira columna, vem

$$\Delta_4 = (a_1 + b_1)\,A_1 + (a_2 + b_2)\,A_2 + (a_3 + b_3)\,A_3 + (a_4 + b_4)\,A_4 = 0$$

ou $\Delta_4 = b_2 A_2 = 0$ e portanto $A_2 = 0$. É evidente a generalisação d'este principio.

**40.** O principio da addição das linhas emprega-se com vantagem no cálculo dos determinantes, abaixando successivamente uma unidade á ordem do proposto; mas convirá primeiro simplificar este determinante, dividindo *(n.º 13)* os elementos de cada linha, ou columna, pelo seu maior divisor commum.

Basta um exemplo, para se ficar conhecendo o processo que deve seguir-se. Seja

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \times \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix},$$

onde o segundo determinante se obtém dividindo por 4 e 5, respectivamente, a 1.ª columna e a 2.ª linha do proposto. Subtrahindo da 1.ª, 3.ª e 4.ª linha a 2.ª multiplicada ordenadamente por 3, 5 e 7, resulta *(n.ºs 25 e 38, 1.º)*

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix};$$

e continuando pela mesma maneira, achariamos $\Delta = -20$.

Como se vê, todos os elementos d'uma columna se reduziram a zero, menos um que é a unidade. Em geral, reduzem-se primeiro á unidade todos os elementos significativos d'uma linha, ou columna *(n.º 19)*, e depois a zero todos os elementos da mesma fila menos um *(n.º 38, 1.º)*.

**41.** Consideremos ainda o determinante de ordem $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 3 & 3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & n & {}^2C_n & . & . & 0 \\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & . & n+1 \end{vmatrix},$$

em que os elementos da linha de ordem $r$ são os coefficientes, menos o último, da potencia $r$ do binomio, completando-se a mesma linha com zeros. Será portanto *(n.º 30)* $\Delta = (n+1)!$

Multiplicando a última columna por $x^n$ e juntando-lhe as antecedentes respectivamente multiplicadas por $x^0, x^1, x^2, \ldots x^{n-1}$, acha-se *(n.os 13 e 38, 1.º)*

$$x^n \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & (x+1)-x \\ 1 & 2 & 0 & . & (x+1)^2-x^2 \\ 1 & 3 & 3 & . & (x+1)^3-x^3 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & (x+1)^{n+1}-x^{n+1} \end{vmatrix}$$

e o novo determinante resolve-se pela última columna na differença de dois, que podemos representar por $f(x+1)$ e $f(x)$ porque elles se compõem da mesma maneira com $x+1$ e $x$.

Teremos pois, segundo o valor de $\triangle$,

$$f(x+1)-f(x)=(n+1)!\,x^n\,;$$

e mudando successivamente $x$ em $x-1$, acha-se

$$\begin{aligned} f(x)-f(x-1)&=(n+1)!\,(x-1)^n\,,\\ f(x-1)-f(x-2)&=(n+1)!\,(x-2)^n\,,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ f(2)-f(1)&=(n+1)!\times 1^n\,. \end{aligned}$$

Sommando estas egualdades com a precedente, reduzindo, fazendo $1^n+2^n+3^n+\ldots+x^n=S_n$, e notando que segundo a forma de $f(x)$ é $f(1)=0$ e que na última columna de $f(x+1)$ ha o factor commum $x+1$, resulta finalmente

$$S_n=\frac{x+1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & . & 0 & x+1\\ 1 & 3 & 3 & . & 0 & (x+1)^2\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & {}^2C_{n+1} & (x+1)^n \end{vmatrix}.$$

Para $n=1$, vem

$$1+2+\cdots+x=\frac{x+1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & x+1 \end{vmatrix}=\frac{x(x+1)}{2}\,,$$

como já era sabido.

Para $n=2$, acha-se do mesmo modo

$$S_2=\frac{x+1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & x+1\\ 1 & 3 & (x+1)^2 \end{vmatrix}.$$

ou, desenvolvendo pela 1.ª linha,

$$S_2 = \frac{x+1}{3!}\left\{(x+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right\};$$

e desta expressão resulta

$$1^2 + 2^2 + \cdots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Para $n=3$, teriamos tambem, desenvolvendo o determinante pela 1.ª linha,

$$S_3 = \frac{(x+1)^2}{4!} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & x+1 \\ 4 & 6 & (x+1)^2 \end{vmatrix},$$

porque o menor recíproco do último elemento d'aquella linha é

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

o último d'estes determinantes forma-se do primeiro, subtrahindo a 1.ª linha da 2.ª e esta da 3.ª.

Desenvolvendo $S_3$ pela 1.ª linha e continuando o cálculo, achava-se por último

$$S_3 = \frac{x^2(x+1)^2}{2^2};$$

donde, comparando com $S_1$, resulta

$$(1+2+\cdots+x)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + x^3.$$

## Exercicios.

**25.** Mostrar que é egual a 1 o determinante *(numeros figurados)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & . & n-1 & n \\ 1 & 3 & 6 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} .$$

**26.** Mostrar que é zero o determinante cujos elementos são os primeiros $n^2$ numeros inteiros, dispostos de modo que a somma dos elementos de cada linha ou columna é constante *(quadrado mágico)*. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 & 1 & 13 \\ 10 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 7 & 14 & 2 \\ 5 & 9 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 .$$

**27.** Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = (a+b-c)(a-b-c) - 2b(a+c-b) .$$

**28.** Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} ax+b & e \\ cx+d & f \end{vmatrix} = 0$$

**29.** Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 . \begin{vmatrix} x^2 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2(x^2 - a^2 - b^2 - c^2) .$$

**30.** Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c) \times (x+b-c-a)(x+c-a-b) ,$$

que se torna, para $x=0$, em $-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

## CAPÍTULO VI.

## Producto de determinantes da mesma ordem.

**42.** O producto de dois determinantes da mesma ordem pode ser expresso por um determinante da ordem de cada um dos factores.

Sejam, com effeito, os determinantes de 3.ª ordem

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \quad Q = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} :$$

designando o seu producto por $R = P \times Q$, será *(n.º 33, cor. 4)*

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & * & * & * \\ a_2 & b_2 & c_2 & * & * & * \\ a_3 & b_3 & c_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} .$$

Substitua-se neste quadro o determinante de $3^2$ elementos arbitrarios por

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 ;$$

junte-se respectivamente a cada uma das tres primeiras columnas de R a somma dos productos das tres últimas por $a_1$, $a_2$, $a_3$, por $b_1$, $b_2$, $b_3$ e por $c_1$, $c_2$, $c_3$.

O determinante R conserva o seu valor *(n.º 38, 1.º)* e toma a forma

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_1 & l_1 & m_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} ,$$

sendo

$$k_1 = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 , \quad k_2 = a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 ,$$

$$k_3 = a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 ,$$

$l_1$, $l_2$, $l_3$ estas mesmas expressões com a mudança de $a$ em $b$, finalmente $m_1$, $m_2$, $m_3$ ainda as mesmas expressões com a mudonça de $a$ em $c$.

Posto isto, pela troca das diagonaes R torna-se *(n.º 18)* em $R' = (-1) . R$. Mas, designando por $R_1$ o determinante dos $3^2$

elementos $k_1, l_1, \ldots m_3$, será tambem *(n.º 33, cor. 4)* $R' = S . R_1 = (-1)^3 . R_1$.

Logo é $R = R_1$, ou

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Este resultado é geral. Se os factores P e Q são de ordem $n$, é $S = (-1)^n$, o producto R é de ordem $2n$ *(n.º 33, cor. 4)*, e *(n.º 3)* o numero de inversões da 2.ª diagonal de R é $n(2n-1)$. Mas este numero é da mesma paridade de $n$; e portanto viria ainda $(-1)^n . R = (-1)^n . R_1$, e $R = R_1$.

Logo, *o producto de dois determinantes de ordem* n *é um determinante da mesma ordem, cujos elementos são as sommas dos productos que se obteem multiplicando todos os elementos de cada columna d'um dos factores pelos elementos correspondentes de todas as linhas do outro factor.*

**43.** Pode verificar-se o resultado (13), decompondo o 2.º membro em determinantes de elementos monomios. Com effeito, fazendo a decomposição pela primeira columna sómente, veem tres determinantes com a primeira columna de elementos monomios e as outras duas de elementos trinomios. Cada um d'estes, decomposto pela segunda columna, daria outros tres, ao todo nove, com elementos trinomios na terceira columna sómente. Cada um d'estes nove daria ainda tres, ao todo vinte e sete, com todos os elementos monomios.

Entre estes vinte e sete determinantes ha seis, como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 & c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 & c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 & b_2\beta_3 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

que teem por factor commum o determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = Q .$$

Os restantes, como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\alpha_1 & c_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_1\alpha_2 & c_2\beta_2 \\ a_1\alpha_3 & b_1\alpha_3 & c_2\beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\alpha_1 & c_1\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & b_1\alpha_2 & c_1\alpha_2 \\ a_1\alpha_3 & b_1\alpha_3 & c_1\alpha_3 \end{vmatrix},$$

são nullos por terem, pelo menos, duas columnas compostas de elementos proporcionaes *(n.º 38, 2.º)*. Assim pode-se escrever

$$R_1 = Q \times T ,$$

representando por T um factor que só depende dos elementos do determinante P.

Designando por R′ o valor que toma $R_1$ quando em Q cada um dos elementos principaes é a unidade e cada um dos restantes é zero, a relação precedente torna-se em $R' = T$, visto que T é independente dos elementos de Q e que naquella hypóthese é $Q=1$; simultaneamente é $R'=P$: donde se conclue que será $T=P$, e portanto $R_1=P\times Q$.

**44.** Do principio do n.º 15 resulta que o producto de dois determinantes do mesmo grau é susceptivel de quatro formas, que se obteem combinando:

*1.º Os elementos de cada linha de P com os de todas as linhas de Q;*

*2.º Os elementos de cada linha de P com os de todas as columnas de Q;*

*3.º Os elementos de cada columna de P com os de todas as linhas de Q;*

*4.º Os elementos de cada columna de P com os de todas as columnas de Q.*

Se os factores são do segundo grau, estas quatro formas são

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1+b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1+a_2\beta_2 & b_1\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2 & a_1\beta_1+b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2 & a_2\beta_1+b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

Do mesmo modo se achariam sem difficuldade as quatro formas do producto de dois determinantes de 3.ª ordem.

**45.** Para formar o quadrado d'um determinante applica-se a regra precedente á multiplicação de dois determinantes eguaes.

Assim, com a multiplicação por linhas achava-se

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2+ b_1^2+ c_1^2, & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2, & a_2^2+ b_2^2+ c_2^2, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3, & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3, & a_3^2+ b_3^2+ c_3^2 \end{vmatrix},$$

que é um determinante symétrico de 3.ª ordem. Do mesmo modo se veria que o quadrado d'um determinante de ordem $n$ é um determinante symétrico de ordem $n$.

Fazendo nas últimas fórmulas do n.º anterior

$$a_1=\alpha_1\ ,\quad a_2=\alpha_2\ ,\quad b_1=\beta_1\ ,\quad b_2=\beta_2\ ,$$

teremos as tres formas do quadrado do determinante de 2.ª ordem, a saber:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+a_2b_1 & a_1b_1+b_1b_2 \\ a_1a_2+a_2b_2 & a_2b_1+b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_1a_2+b_1b_2 & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}.$$

A última d'aquellas fórmulas dava o mesmo resultado que a primeira.

Desenvolvendo os determinantes na segunda das expressões precedentes, acha-se a relação

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right) \\ &= \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2 + \left(a_1a_2 + b_1b_2\right)^2 . \end{aligned} \tag{15}$$

**16.** Sendo eguaes a 1 todos os elementos da 1.ª linha ou da 1.ª columna, simplifica-se a notação do determinante, supprimindo essa fila e escrevendo só, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

em vez de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo pelos elementos da 1.ª linha, acha-se que este determinante é a somma dos tres

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

e por este motivo se chama *múltiplo*. Aquellas parcellas estam ligadas (*n.º* 27) pelas relações

$$a_1(b_1c_2) + b_1(c_1a_2) + c_1(a_1b_2) = 0 \;,$$
$$a_2(b_1c_2) + b_2(c_1a_2) + c_2(a_1b_2) = 0 \;.$$

Applicando a regra da multiplicação a dois determinantes múltiplos da mesma ordem, o resultado é a somma dos productos que resultariam de multiplicar cada termo de um dos factores pelo termo correspondente do outro. Assim, fazendo

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} ,$$

o producto será

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} ;$$

e desenvolvendo viria

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} . \end{aligned} \tag{16}$$

Com effeito, decompondo a penúltima expressão de P em determinantes de elementos monomios, uns são como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

os outros repartem-se, dois a dois, em grupos da forma

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 \\ b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2)\times(\alpha_1\beta_2)\,.$$

A regra da multiplicação, applicada a quadros que teem mais linhas do que columnas, produz um determinante egual a zero. Com effeito seria, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3 \end{vmatrix} = 0\;; \qquad (17)$$

porquanto este resultado representa o producto de dois determinantes, dos quaes um ou ambos teem uma columna de zeros.

## Exercícios.

**31.** Fazendo na penúltima das fórmulas (14)

$$\begin{aligned} a_1 &= \phantom{-}a+b\sqrt{-1}, & \alpha_1 &= \phantom{-}a'+b'\sqrt{-1}, \\ a_2 &= \phantom{-}c-d\sqrt{-1}, & \alpha_2 &= \phantom{-}c'+d'\sqrt{-1}, \\ b_1 &= -b+b\sqrt{-1}, & \beta_1 &= -c'+d'\sqrt{-1}, \\ b_2 &= \phantom{-}c-d\sqrt{-1}, & \beta_2 &= \phantom{-}a'+b'\sqrt{-1} \end{aligned}$$

achar a relação

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+d^2)\times(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\ &=(ab'+ba'+cd'+dc')^2+(ac'+bd'-ca'-db')^2\\ &+(aa'-bb'+cc'-dd')^2+(ad'-bc'-cb'+da')^2,\end{aligned}$$

na qual se vê que: *o producto de duas sommas de quatro quadrados é tambem a somma de quatro quadrados* (Euler).

**32.** Achar o desenvolvimento

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = -(b+c+d-a)(a+c+d-d) \\ \times(a+b+d-c)(a+b+c-d).$$

**33.** Formar o producto

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A\,x+B\,y+C & A\,x'+B\,y'+C & A\,x''+B\,y''+C \\ A'x+B'y+C' & A'x'+B'y'+C' & A'x''+B'y''+C' \\ A''x+B''y+C'' & A''x'+B''y'+C'' & A''x''+B''y''+C'' \end{vmatrix}.$$

## CAPÍTULO VII.

### Determinantes adjunto e de Vandermonde.

**47.** O determinante, formado com os primeiros menores de outro determinante $\Delta$ de ordem $n$, é tambem de ordem $n$ e chama-se *adjunto* do proposto. Assim $\Delta$ e o seu adjunto são dados pelos quadros

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots & L_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots & L_2 \\ . & . & \ldots & . \\ A_n & B_n & \ldots & L_n \end{vmatrix}.$$

Multiplicando estes dois determinantes, acha-se

$$\Delta \times \Delta' =$$

$$\begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + \cdots, & a_1A_2 + b_1B_2 + \cdots, & \cdots & a_1A_n + b_1B_n + \cdots \\ a_2A_1 + b_2B_1 + \cdots, & a_2A_2 + b_2B_2 + \cdots, & \cdots & a_2A_n + b_2B_n + \cdots \\ . & . & . & . \\ a_nA_1 + b_nB_1 + \cdots, & a_nA_2 + b_nB_2 + \cdots, & \cdots & a_nA_n + b_nB_n + \cdots \end{vmatrix};$$

neste ultimo determinante cada um dos elementos principaes é egual a $\Delta$ (*n.*° *25*) e todos os mais são eguaes a zero (*n.*° *27*); donde se conclue (*n.*° *30*) que é $\Delta \times \Delta' = \Delta^n$ e portanto $\Delta' = \Delta^{n-1}$.

**48.** Ao primeiro menor de $\Delta'$, recíproco do elemento $A_1$, pode dar-se a forma (*n.*° *29*)

$$\mathscr{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots \\ A_3 & B_3 & C_3 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ A_n & B_n & C_n & \ldots \end{vmatrix};$$

e multiplicando por $\Delta$, vem

$$\Delta \times \mathscr{A}_1 = \begin{vmatrix} a_1, & a_1 A_2 + b_1 B_2 + \cdot, & \cdots & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdots \\ a_2, & a_2 A_2 + b_2 B_2 + \cdots, & \cdots & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdots \\ a_3, & a_3 A_2 + b_3 B_2 + \cdots, & \cdots & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & a_n A_2 + b_n B_2 + \cdots, & \cdots & a_n A_n + b_n B_n + \cdots \end{vmatrix}.$$

N'este ultimo determinante cada um dos elementos principaes é egual a $\Delta$, com excepção do primeiro $a_1$; e todos os elementos para o lado superior da primeira diagonal são eguaes a zero: logo é $\Delta \times \mathscr{A}_1 = a_1 \,.\, \Delta^{n-1}$, ou $\mathscr{A}_1 = a_1 \,.\, \Delta^{n-2}$.

O menor complementar de $B_1$ é do mesmo modo

$$\mathscr{B}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdot\cdot \\ A_3 & B_3 & C_3 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ A_n & B_n & C_n & \cdot\cdot \end{vmatrix},$$

e multiplicando por $\Delta$ vem

$$\Delta \times \mathscr{B}_1 = \begin{vmatrix} b_1, & a_1 A_2 + b_1 B_2 + \cdots, & . & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdots \\ b_2, & a_2 A_2 + b_2 B_2 + \cdots, & . & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdots \\ b_3, & a_3 A_2 + b_3 B_2 + \cdots, & . & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n, & a_n A_2 + b_n B_2 + \cdots, & . & a_n A_n + b_n B_n + \cdot \end{vmatrix}.$$

Cada um dos elementos principaes d'este último determinante é egual a $\triangle$, com excepção do primeiro que é $b_1$; e todos os elementos para o lado superior da primeira diagonal são eguaes a zero: logo é $\triangle \times \mathcal{B}_1 = -b_1 . \triangle^{n-1}$, ou $\mathcal{B}_1 = -b_1 . \triangle^{n-2}$, com o signal determinado pela posição do elemento $B_1$. Obtinham-se expressões análogas para cada um dos outros menores de primeira classe do determinante adjunto.

O menor de segunda classe, complementar do menor $(A_1 B_2)$, será do mesmo modo

$$K \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & .. \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & .. \\ . & . & . & . & .. \\ A_n & B_n & C_n & D_n & .. \end{vmatrix};$$

multiplicando K por $\triangle$, acha-se o producto

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_1 A_3 + b_1 B_3 + \cdot\cdot, & \cdot\cdot & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdot\cdot \\ a_2, & b_2, & a_2 A_3 + b_2 B_3 + \cdot\cdot, & \cdot\cdot & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdot\cdot \\ a_3, & b_3, & a_3 A_3 + b_3 B_3 + \cdot\cdot, & \cdot\cdot & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdot\cdot \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & a_n A_3 + b_n B_3 + \cdot\cdot, & \cdot\cdot & a_n A_n + b_n B_n + \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Nas duas primeiras linhas todos os elementos são nullos, com excepção de $a_1, b_1, a_2, b_2$; portanto o determinante precedente é o producto do menor $(a_1 b_2)$ pelo determinante contido nas últimas $n-2$ linhas e $n-2$ columnas. Este determinante tem cada elemento principal egual a $\triangle$, os que ficam para o lado superior da primeira diagonal nullos, e é portanto egual a $\triangle^{n-2}$; assim, será o producto

$$\triangle \times K = (a_1\, b_2) \times \triangle^{n-2}\ ,$$

e portanto

$$K = (a_1\, b_2)\, \triangle^{n-3}\,.$$

Outro menor de segunda classe formava-se pela mesma lei, attendendo á regra dos signaes. E em geral: *um menor de classe* $n - p$ *do determinante adjunto é egual ao menor correspondente do determinante primitivo multiplicado pela potencia* $p - 1$ *d'este último, com o signal* $+$ *ou* $-$ *conforme convier áquelle determinante menor.*

*Cor.* Se fôr $\triangle = 1$, é tambem o seu adjunto $\triangle' = 1$. Se fôr $\triangle = 0$, $\triangle'$ e os seus menores de qualquer classe são nullos; para os de 2.ª ordem, ou de classe $n - 2$, teremos

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0\ ,\quad A_1C_2 - A_2C_1 = 0\ ,\ \text{etc.}$$

$$A_1B_3 - A_3B_1 = 0\ ,\quad A_1C_3 - A_3C_1 = 0\ ,\ \text{etc.};$$

donde

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \cdots$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{B_1}{B_3} = \frac{C_1}{C_3} = \cdots$$

A estas relações pode dar-se tambem a forma

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \cdots\ ,$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2} = \frac{A_3}{C_3} = \cdots\ .$$

Logo: *quando um determinante é egual a zero, os menores de primeira classe relativos aos elementos de duas linhas ou duas columnas são proporcionaes.*

**49.** No *determinante de Vandermonde* cada columna, ou cada linha, é formada pelas potencias successivas da mesma quantidade, a partir da potencia de grau zero; o de ordem $n$ será

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ a & b & . & l \\ . & . & . & . \\ a^{n-1} & b^{n-1} & . & l^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Quando duas das quantidades $a, b, \ldots l$ são eguaes, é $\Delta = 0$; portanto $\Delta$ terá por factor cada uma das differenças distinctas $a-b$, $a-c$, $\ldots$ $k-l$. Ora, se formarmos o producto P d'estas differenças, ou

$$\begin{aligned} P = (a-b)(a-c) & \ldots (a-l) \\ \times (b-c) & \ldots (b-l) \\ & \ldots \\ & \times (k-l), \end{aligned}$$

veremos que $\Delta$ é do mesmo grau que P; e portanto este determinante será, em geral, o producto de P por um coefficiente numerico. Por outra parte, o termo principal de $\Delta$ entra em P com o coefficiente

$$(-1) \cdot (-1)^2 \ldots (-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

logo, será $\Delta = \pm P$ conforme seja dupla ou simplesmente par o maior numero par contido em $n$. D'aqui resulta $\Delta^2 = P^2$; por onde se mostra que o quadrado de $\Delta$ é o producto dos quadrados de todas as differenças distinctas das $n$ quantidades dadas.

Formando aquelle quadrado e representando em geral por $S_r = a^r + b^r \, . \, . + l^r$ a somma das potencias semelhantes dos numeros $a, \, b, \, . \, . \, l$, acha-se

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & . & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & . & S_n \\ . & . & . & . \\ S_{n-1} & S_n & . & S_{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

Do mesmo modo se acharia

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ a & b & . & l \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix},$$

formando pelo principio da multiplicação (*n.° 44, 1.°*) o quadrado que está no 1.° membro; mas este quadrado é (16) a somma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \cdots + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & l \end{vmatrix}^2 :$$

logo o menor de 2.ª ordem formado com os primeiros quatro elementos de $\Delta^2$ é

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 + \cdots + (k-l)^2 ,$$

ou a somma dos quadrados das differenças distinctas das quantidades dadas.

**50.** *Propriedades dos determinantes.* — As propriedades fundamentaes dos determinantes são, em resumo, as seguintes:

*I. Não influe no valor do determinante a conversão das columnas em linhas e das linhas em columnas.*

*II. Multiplicar uma columna ou linha por um factor* m *é multiplicar o determinante por* m:

$$|(ma)\,bc| = m\,|abc|\,,\quad |abc| = m\left|\left(\frac{a}{m}\right) bc\right|\,.$$

D'aqui resulta $|0\,bc| = 0$, $|(-a)\,bc| = -|abc|$.

*III. Pela troca de duas linhas parallelas o determinante muda de signal:*

$$|abc| = -|acb| = |cab| = -|cba|\,.$$

*IV. Se os elementos de duas linhas parallelas, considerados ordenadamente, são eguaes ou proporcionaes, o determinante é nullo:*

$$|abb| = 0\,,\quad |aba| = 0\,,\quad |(ma)\,ba| = 0\,.$$

*V. Aos elementos d'uma linha, ou columna, pode-se juntar, sem alterar o valor do determinante, os elementos d'uma ou mais linhas, ou columnas, respectivamente multiplicados por factores constantes:*

$$|(a + mb + nc)\,bc| = |abc|\,.$$

*VI. Se todos os elementos d'uma linha são polynomios de* m *termos, o determinante é a somma de* m *determinantes de elementos monomios:*

$$|(a + a' + a'')\,bc| = |abc| + |a'bc| + a''bc|\,,$$

$$|(a + a')\,(b + b')\,c| = |abc| + |a'bc| + |ab'c| + |a'b'c|\,.$$

*VII. O producto de dois determinantes de ordem* n *é um determinante da mesma ordem, cujos elementos são as sommas dos productos dos elementos de cada linha do primeiro multiplicados pelos de cada linha do segundo:*

$$|abc| \times |\alpha\beta\gamma| =$$
$$|(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)\ (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2)\ (a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3)|\ .$$

*O producto pode ter quatro formas, que resultam da propriedade I.*

**51.** *Propriedades dos menoros* — Continuando a designar por $A_{is}$ o primeiro menor d'um determinante $\Delta_n$, complementar do elemento $a_{is}$ do mesmo determinante, consideremos as expressões

$$a_{i1} A_{t1} + a_{i2} A_{t2} + \cdots + a_{in} A_{tn} = \delta\ ,$$
$$a_{1s} A_{1t} + a_{2s} A_{2t} + \cdots + a_{ns} A_{nt} = \delta'\ ,$$

podendo os inteiros $i$, $s$ e $t$ ter qualquer valor, desde 1 até $n$. As propriedades dos primeiros menores são as seguintes:

*I. $\delta$ e $\delta'$ são eguaes ao determinante proposto, quando são respectivamente* $i = t$ *e* $s = t$;

*II. $\delta$ e $\delta'$ são eguaes a zero, quando* i *e* s *são differentes de* t.

## Exercícios.

**34.** Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x + 3a)(x - a)^3\ .$$

e em geral, para a ordem $n$,

$$\Delta = [x + (n-1)\,a]\,(x-a)^{n-1}\;;$$

**35.** A equação

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix} = 0\,,$$

torna-se primeiro em

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x-a & b-x & 0 & 0 \\ x-a & 0 & c-x & 0 \\ x-a & 0 & 0 & d-x \end{vmatrix} = 0\;;$$

mostrar que ella se reduz finalmente a

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - x(x-a)(x-c)(x-d)$$
$$-x(x-a)(x-b)(x-d) - x(x-a)(x-b)(x-c) = 0\,.$$

**36.** Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+x)^3 & (2b+x)^3 & (c+x)^3 \\ (2a+x)^3 & (2b+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Tres raizes são eguaes a zero, e duas são dadas pela equação do 2.º grau

$$(a+b+c)\,x^2 + 3\,(ab+ac+bc)\,x + 6\,abc = 0\,.$$

## CAPÍTULO VIII.

### Equações lineares.

**52.** Lemmas — 1.° Dado um systema de $n+1$ equações do 1.° grau com $n$ incógnitas.

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \cdots + l_1 x_n - p_1 = 0 \,, \\ f_2 &\equiv a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \cdots + l_2 x_n - p_2 = 0 \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n+1} &\equiv a_{n+1} x_1 + b_{n+1} x_2 + \cdots + l_{n+1} x_n - p_{n+1} = 0 \,, \end{aligned} \qquad (i)$$

se entre as funcções $f_r$ houver uma relação linear homogenea

$$f_{n+1} = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \cdots t_n f_n \,, \qquad (ii)$$

o determinante $R_{n+1} = |abc\ldots lp|$ será egual a zero.

Com effeito, de $(ii)$ resulta

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \,, \\ b_{n+1} &= t_1 b_1 + t_2 b_2 + \cdots + t_n b_n \,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_{n+1} &= t_1 p_1 + t_2 p_2 + \cdots + t_n p_n \,; \end{aligned}$$

por onde se vê que a linha $n+1$ de $R_{n+1}$ será a somma das $n$ primeiras linhas d'este mesmo determinante, respectivamente multiplicadas por factores constantes.

2.º Se o systema proposto se compozér de $n$ equações com $n$ incógnitas e se entre os primeiros membros d'estas equações tiver logar a relação

$$f_n = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_{n-1} f_{n-1}\,, \qquad (iii)$$

ainda será, como anteriormente,

$$R_{n+1} = |abc\;.\;.\;lp| = 0\,.$$

Mas agora serão tambem nullos os menores de 1.ª classe de $R_{n+1}$, correspondentes aos elementos da linha $n+1$ d'este determinante; porquanto em cada um d'estes menores a linha $n$ será a somma das $n-1$ antecedentes, respectivamente multiplicadas por factores constantes. Logo (*n.º 48, cor.*) neste caso serão nullos o determinante $R_{n+1}$ e *todos* os seus menores de 1.ª classe.

Este raciocinio estende-se facilmente ao caso de $n-1$ equações com $n$ incógnitas, e assim por deante.

3.º São verdadeiras as recíprocas das duas proposições precedentes. Supponhamos em primeiro logar que entre os coefficientes de $(i)$ tem logar a relação $R_{n+1} = 0$, sem que sejam conjunctamente nullos todos os menores de 1.ª classe de $R_{n+1}$; seja $|abc\,.\,.\,kl|$ um d'estes menores differentes de zero.

O desenvolvimento do determinante $|abc\ldots klf|$ na somma de determinantes da mesma ordem segundo os elementos da última columna é (*n.º 50, II e VI*)

$$\begin{aligned} &|abc\,.\,.\,klf| = \\ &|abc\ldots kla|\,x_1 + |abc\ldots klb|\,x_2 + \cdots \\ &\qquad + |abc\ldots kll|\,x_n - |abc\ldots klp|\,; \end{aligned}$$

d'onde, pela hypóthese $|abc\ldots klp| = 0$ e pela propriedade IV, se conclue que será

$$|abc\ldots klf| = 0\,.$$

Mas, por outra parte, o desenvolvimento de $|abc\,.\,.\,klf|$ pela propriedade I dos menores de 1.ª classe é

$$|abc\,.\,.\,klf| =$$
$$(a_2\,b_3\,c_4\ldots k_n\,l_{n+1})\,f_1 - (a_1\,b_3\,c_4\ldots k_n\,l_{n+1})\,f_2 + \cdots$$
$$\pm (a_1\,b_2\,c_3\ldots k_{n-1}\,l_n)\,f_{n+1} = 0\ ;$$

e dividindo ambos os membros d'esta egualdade pelo coefficiente de $f_{n+1}$, que suppomos differente de zero, recahimos na relação (*ii*).

Se todos os menores de 1.ª classe de $R_{n+1}$ forem nullos, sem que o sejam conjunctamente todos os menores de 2.ª classe d'este determinante, supponhamos que $|abc\ldots k|$ é differente de zero. Teremos, como precedentemente,

$$|abc\ldots kf| = |abc\ldots kl|\,x_n - |abc\ldots kp|$$
$$= (a_2\,b_3\ldots k_n)\,f_1 - (a_1\,b_3\ldots k_n)\,f_2 + \cdots$$
$$\pm (a_1\,b_2\ldots k_{n-1})\,f_n = 0\,.$$

Esta última expressão é equivalente a (*iii*), por ser $|abc\ldots k|$ differente de zero.

**53.** *Resolução de* n *equações lineares a* n *incógnitas.* — Sejam as propostas

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\,x_1 + b_1\,x_2 + \cdots + l_1\,x_n - p_1 = 0\ , \\ f_2 &= a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + l_2\,x_n - p_2 = 0\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= a_n\,x_1 + b_n\,x_2 + \cdots + l_n\,x_n - p_n = 0\ ; \end{aligned} \qquad (18)$$

e supponhamos que o determinante $\Delta$ dos coefficientes das incógnitas é differente de zero. Multiplicando estas equações respectimente pelos primeiros menores $A_1$, $A_2 \ldots A_n$ de $\Delta$, relativos aos elementos da primeira columna ou aos coefficientes de $x_1$, e sommando os productos, resulta uma nova equação em que, pelas propriedades dos menores, o coefficiente de $x_1$ é $\Delta$ e os coefficientes das outras incognitas são nullos; o termo conhecido d'esta equação é

$$\Delta_1 = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots + A_n p_n = |pbc\ldots kl|,$$

isto é, um determinante que resulta de $\Delta$ pela mudança dos $a$ nos $p$ do mesmo índice. Procedendo do mesmo modo com os menores $B_1$, $B_2 \ldots B_n$, relativos aos elementos da segunda columna de $\Delta$ ou aos coefficientes de $x_2$, depois com os menores $C_1$, $C_2 \ldots C_n$, relativos á terceira columna, e assim por deante, até os menores $L_1$, $L_2 \ldots L_n$, relativos á última columna, obteem-se finalmente as relações

$$\begin{aligned} A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n &= \Delta x_1 - \Delta_1 = 0\,, \\ B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_n f_n &= \Delta x_2 - \Delta_2 = 0\,, \\ \cdots\cdots & \\ L_1 f_1 + L_2 f_2 + \cdots + L_n f_n &= \Delta x_n - \Delta_n = 0\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Destas equações, em que as incógnitas estão separadas, tira-se immediatamente

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\,. \tag{20}$$

É evidente que os valores das incógnitas que satisfazem ao systema (18) conveem a (19); falta mostrar, como observou Gauss, a proposição recíproca. Ora, multiplicando os primeiros membros de (19) por $a_1$, $b_1$, $c_1 \ldots l_1$ e sommando os productos, multiplicando depois por $a_2$, $b_2$, $c_2 \ldots l_2$ e sommando, continuando operações análogas até multiplicar por $a_n$, $b_n$, $c_n$ ... $l_n$: aquelle systema fica substituido, conforme as propriedades dos menores, por

$$\Delta f_1 = 0\,, \quad \Delta f_2 = 0\,, \quad \ldots \quad \Delta f_n = 0\,,$$

que é o mesmo systema (18) visto ser $\Delta$ differente de zero por hypóthese. Assim, as soluções (20) conveem ao systema (18), e são as únicas que lhe satisfazem.

No caso particular de serem nullos os termos conhecidos de todas as equações propostas menos uma, $f_i = 0$ por exemplo, temos, conforme à notação adoptada,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & . & . & l_1 \\ . & . & . & . & . \\ p_i & b_i & . & . & l_i \\ . & . & . & . & . \\ 0 & b_n & . & . & l_n \end{vmatrix} = A_i p_i\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & . & . & l_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_i & p_i & . & . & l_i \\ . & . & . & . & . \\ a_n & 0 & . & . & l_n \end{vmatrix} = B_i p_i\,,$$

etc.; e assim as relações (20) tornam-se neste caso em

$$\frac{x_1}{A_i} = \frac{x_2}{B_i} = \frac{x_3}{C_i} = \cdots = \frac{x_n}{L_i} = \frac{p_i}{\Delta}\,.$$

Logo: *se todas as equações forem homogeneas menos uma, os valores das incógnitas são proporcionaes aos primeiros menores de $\Delta$ relativos aos elementos da linha que corresponde á equação não homogenea.*

**54.** Se fôr $\Delta = 0$, a equação (19) $\Delta x_1 - \Delta_1 = 0$ não poderá verificar-se, para valores finitos de $x_1$, sem que seja conjunctamente $\Delta_1 = 0$. Mas, sendo $\Delta = 0$, os primeiros menores relativos aos elementos das columnas d'este determinante, são ordenadamente proporcionaes (*n.º 48, cor.*); portanto da relação

$$\Delta_1 = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots + A_n p_n = 0$$

conclue-se que será

$$\Delta_2 = B_1 p_1 + B_2 p_2 + \cdots + B_n p_n = 0 \,,$$

e do mesmo modo $\Delta_3 = 0, \ldots \Delta_n = 0$. Assim, as expressões (20) das incógnitas tomam todas neste caso a forma $\frac{0}{0}$.

Por outra parte $\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_n$ são, em valor absoluto, os menores de 1.ª classe correspondentes aos elementos da linha $n+1$ do determinante $R_{n+1}$ do n.º 52. Se todos estes menores forem nullos e se entre os de 2.ª classe de $R_{n+1}$ reconhecermos que um pelo menos, $|abc\ldots k|$ por exemplo, é differente de zero, concluiremos que entre os polynomios $f_1, f_2, \ldots f_n$ haverá uma relação linear homogenea, como se mostrou na segunda parte do caso 3.º d'aquelle n.º. Logo o systema (18) reduz-se nesta hypóthese a $n-1$ equações distinctas com $n$ incógnitas.

Se todos os primeiros menores de $\Delta$ forem nullos, mas um, pelo menos, de segunda classe fôr differente de zero, seja $(a_1 b_2 \ldots h_{n-2}) \gtrless 0$. Considerando successivamente os systemas formados pelas $n-2$ primeiras equações com cada uma das outras duas, formaremos dois grupos de $n-1$ equações em que o determinante das incógnitas é zero. Se o systema fôr compativel, cada um d'estes grupos conduzirá a uma identidade e as $n$ equações dadas reduzem-se a $n-2$ distinctas com $n$ incógnitas.

Em geral se, além de $\Delta = 0$, forem nullos os seus menores de todas as classes até os de ordem $n-i+1$ inclusivamente, separa-se um grupo de $n-i$ equações em que o determinante de $n-i$ incógnitas não é nullo, e o systema proposto é incompativel ou reduz-se a essas $n-i$ equações com $n$ incógnitas.

**55.** *Resolução de* n − i *equações a* n *incógnitas.* — Consideremos as primeiras $n-i$ equações (18) e demos-lhe a forma

$$a_1x_1+b_1x_2+\cdots+h_1x_m=p_1-k_1x_{m+1}-\cdots-l_1x_n=r_1\ ,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+\cdots+h_2x_m=p_2-k_2x_{m+1}-\cdots-l_2x_n=r_2\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_mx_1+b_mx_2+\cdots+h_mx_m=p_m-k_mx_{m+1}-\cdots-l_mx_n=r_m\ ,$$

fazendo $n-i=m$. Multiplicando pelos primeiros menores do determinante $\Delta'=|ab..h|$, que suppomos differente de zero, e seguindo um processo análogo ao que empregámos no n.° 53, resolvem-se as propostas em ordem ás $m=n-i$ incógnitas cujos coefficientes satisfazem á condição $\Delta'\gtrless 0$; e os valores achados verificam o systema proposto, quaesquer que sejam os valores das incógnitas restantes.

Sejam, por exemplo, as equações

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+d_1x_4=e_1\ ,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+d_2x_4=e_2\ ,$$
$$a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3+d_3x_4=e_3\ ,$$

e $(a_1b_2c_3)\gtrless 0$, e demos-lhes a fórma

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=e_1-d_1x_4\ ,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=e_2-d_2x_4\ ,$$
$$a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3=e_3-d_3x_4\ .$$

O processo do n.° 53 é applicavel a estas equações, por ser differente de zero o determinante dos coefficientes das incógnitas

$x_1$, $x_2$, $x_3$; e dará, para qualquer valor de $x_4$,

$$x_1=\frac{|(e-dx_4)\,bc|}{|abc|}=\frac{|ebc|}{|abc|}-\frac{|dbc|}{|abc|}x_4\,.$$

$$x_2=\frac{|a\,(e-dx_4)\,c|}{|abc|}=\frac{|aec|}{|abc|}-\frac{|adc|}{|abc|}x_4$$

$$x_3=\frac{|ab\,(e-dx_4)|}{|abc|}=\frac{|abe|}{|abc|}-\frac{|abd|}{|abc|}x_4\,.$$

Viu-se no n.º 54, que, sendo $\Delta=0$ com $|abc..k|\gtrless 0$, o systema (18) se reduz a $n-1$ equações com $n$ incógnitas. Supponhamos pois que além das equações dadas ha outra

$$a_4x_1+b_4x_2+c_4x_3+d_4x_4=e_4\,,$$

e que é $|abcd|=0$ com $(a_1b_2c_3)\gtrless 0$; ou as quatro equações são incompativeis, caso que terá logar se fôr $|abce|\gtrless 0$, ou são equivalentes ao systema proposto. Deve notar-se que só $x_4$ tem *em todos os casos* valor arbitrário, porque os valores de $x_1$, $x_2$ ou $x_3$ não dependem de $x_4$ quando $|dbc|$, $|adc|$ ou $|abd|$ são eguaes a zero. Esta circumstancia explica-se, observando que o processo do n.º 53 presume que os multiplicadores A, B, .. L são differentes de zero: condição que só temos a certeza de verificar-se, no caso actual, com os multiplicadores que servem para eliminar $x_4$.

**56.** *Resolução de* n + i *equações com* n *incógnitas.* — Supponhamos em primeiro logar que é $i=1$ e que são propostas as equações do n.º 52, 1.º. Se fôr

$$a_{n+1}\Delta_1+b_{n+1}\Delta_2+\cdots+l_{n+1}\Delta_n-p_{n+1}\Delta=0\,, \qquad (iv)$$

as soluções (20), únicas que resolvem as equações (18), satisfazem tambem a última equação dada. No caso contrário o systema proposto não admitte solução alguma, e diz-se então que as equações são incompativeis.

Ora por definição é

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |pbc..kl| = (-1)^{n-1}.|bc..lp|\,, \\
\Delta_2 &= |apc..kl| = (-1)^{n-2}.|ac..lp|\,, \\
&\cdots\cdots \\
\Delta_{n+1} &= |abc..pl| = (-1).|abc..lp|\,, \\
\Delta_n &= |abc..kp|\,, \\
\Delta &= |abc..kl|\,;
\end{aligned}$$

portanto o 1.º membro de $(iv)$, com o competente signal, é o determinante $R_{n+1}$ do n.º 53; e a condição de possibilidade do problema é $R_{n+1}=0$, d'onde resulta

$$f_{n+1} = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \cdots + t_n f_n\,.$$

Assim, neste caso, a equação $f_{n+1}=0$ não é distincta das outras equações do systema.

O determinante $R_{n+1} = |abc..klp|$ chama-se ELIMINANTE do systema proposto; a equação

$$R_{n+1} = 0$$

é a RESULTANTE do mesmo systema.

Se forem dadas, em geral, $n+i$ equações com $n$ incógnitas, podemos tirar os valores de todas as incógnitas de $n$ equações; e substituindo depois estes valores nas $i$ equações restantes, obteremos outras tantas relações, que traduzem as condições de compatibilidade do systema. Estas relações podem-se achar, juntando ás $n$ primeiras equações successivamente cada uma das seguintes e egualando a zero o determinante de cada um d'estes $i$ grupos.

**57.** *Equações homogeneas.* — Supponhamos em (18) $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$; teremos as $n$ equações homogeneas

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \cdots + l_1x_n &= 0 \,, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \cdots + l_2x_n &= 0 \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \cdots + l_nx_n &= 0 \,. \end{aligned}$$

Neste caso as equações (19) tornam-se em

$$\Delta x_1 = 0 \,, \quad \Delta x_2 = 0 \,, \quad \ldots \quad \Delta x_n = 0 \,,$$

porque todos os determinantes $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ teem uma linha de zeros. Se fôr $\Delta \lesseqgtr 0$, as relações precedentes mostram que os unicos valores que satisfazem as propostas são $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; se fôr $\Delta = 0$, os valores das incógnitas veem com a forma de indeterminação.

Dividindo as propostas por uma das incógnitas $x_n$, recahe-se num systema de $n$ equações lineares com as $n-1$ incógnitas

$$y_1 = \frac{x_1}{x_n}, \; y_2 = \frac{x_2}{x_n}, \cdots y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} \,.$$

As equações serão compativeis *(n.º 56)*, se fôr $\Delta = 0$; e assim os valores de $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ serão determinados, embora o não sejam os dois termos de cada um d'elles. Chama-se ainda a $\Delta$ o *eliminante* das equações dadas, e a equação $\Delta = 0$ é a sua *resultante*. Sendo $\Delta = 0$, uma d'aquellas equações é consequencia das outras; e, se algum dos primeiros menores de $\Delta$ fôr differente de zero, os valores das $n-1$ incógnitas, $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, exprimem-se em funcção da que resta, $x_n$. Se forem nullos todos esses menores de 1.ª classe, mas algum de 2.ª fôr differente de zero, demonstra-se como precedentemente que duas das propostas são consequencia das outras $n-2$, e os valores das incógnitas $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ exprimem-se em funcção de $x_{n-1}$ e $x_n$. Assim por deante.

Sejam, por exemplo, as equações

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_4 = 0 \ , \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4 = 0 \ , \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 = 0 \ , \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 + d_4 x_4 = 0 \ , \end{aligned}$$

e $\Delta = (a_1 b_2 c_3 d_4) = 0$. Suppondo o primeiro menor $(a_1 b_2 c_3)$ differente de zero, o systema pode considerar-se composto de tres equações distinctas e compativeis, com quatro incógnitas. Fazendo nas últimas fórmulas do n.° 55 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, os valores de $x_1, x_2, x_3$ tornam-se em

$$x_1 = -\frac{|dbc|}{|abc|} x_4, \quad x_2 = -\frac{|adc|}{|abc|} x_4, \quad x_3 = -\frac{|abd|}{|abc|} x_4 ;$$

ou, ordenando as letras (III),

$$x_1 = -\frac{|bcd|}{|abc|} x_4, \quad x_2 = \frac{|acd|}{|abc|} x_4, \quad x_3 = -\frac{|abd|}{|abc|} x_4 ,$$

e mais simplesmente

$$\frac{x_1}{A_4} = \frac{x_2}{B_4} = \frac{x_3}{C_4} = \frac{x_4}{D_4} ,$$

representando $A_4$, $B_4$, $C_4$ e $D_4$ os menores relativos á ultima linha de $\Delta$, com os signaes implícitos. No caso de $n$ equações homogeneas a $n$ incógnitas achava-se do mesmo modo, suppondo $\triangle = 0$,

$$\frac{x_1}{A_n} = \frac{x_2}{B_n} = \frac{x_3}{C_n} = \ldots = \frac{x_n}{L_n}.$$

Se transformarmos as equações (18) pela relação

$$y_r + x_r\, y_{n+1} = 0\,,$$

onde $r$ tomará todos os valores $1, 2, \ldots n-1, n$, resulta o systema homogeneo

$$\begin{array}{l} a_1\, y_1 + b_1\, y_2 + \cdots - p_1\, y_{n+1} = 0\,, \\ a_2\, y_1 + b_2\, y_2 + \cdots - p_2\, y_{n+1} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\, y_1 + b_n\, y_2 + \cdots - p_n\, y_{n+1} = 0\,; \end{array}$$

e as fórmulas (19) darão

$$-\frac{y_1}{y_{n+1}} = \frac{\triangle_1}{\triangle}, -\frac{y_2}{y_{n+1}} = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \text{ etc.},$$

ou, attendendo a que $\triangle_1, \triangle_2, \ldots$ mudam alternadamente de signal quando se collocam as letras na ordem alphabética,

$$\frac{y_1}{(b_1 c_2 \ldots p_n)} = \frac{-y_2}{(a_1 c_2 \ldots p_n)} = \ldots = \frac{\pm\, y_{n+1}}{(a_1\, b_2 \ldots l_n)},$$

onde $y_{n+1}$ é uma quantidade qualquer differente de zero. Fazendo $y_{n+1} = 1$ e notando que é indifferente dar o signal $+$ ou $-$ ao primeiro membro, por isso que os signaes se alternam, passamos d'aquellas relações para as fórmulas

$$\frac{x_1}{(b_1 c_2 \ldots p_n)} = \frac{-x_2}{(a_1 c_2 \ldots p_n)} = \ldots = \frac{\pm 1}{(a_1 b_2 \ldots l_n)}.$$

Se forem dadas, por exemplo, as equações

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

acham-se immediatamente pelo processo exposto as relações

$$\frac{x}{(b_1 c_2)} = \frac{-y}{(a_1 c_2)} = \frac{1}{(a_1 b_2)}, \tag{21}$$

que dão as expressões das incógnitas com grande commodidade.

# II

# Theoria das equações.

# THEORIA DAS EQUAÇÕES.

## CAPÍTULO I.

### Numeros complexos.

**58.** O imaginario $\sqrt{-1}$ designa-se pela letra $i$. Por definição é $i^2 = -1$, donde resulta que as potencias inteiras e positivas de $i$ reproduzem indefinidamente o periodo

$$i^{4n} = +1 \ , \ i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \ , \ i^{4n+3} = -i \ ;$$

de $1 = -i^2$ tira-se $\frac{1}{i} = -i$, e os termos do periodo são os mesmos para $n$ negativo ou positivo.

O imaginario $ai$ considera-se formado com a *unidade* imaginaria $i$ do mesmo modo que $a$ se forma com a unidade dos numeros reaes. Assim faremos $ai = bi$ quando fôr $a = b$, e reciprocamente; e a somma de numeros d'esta espécie é definida pela expressão

$$ai + bi + \cdots = (a + b + \cdots)\, i \ .$$

Em $a+bi$ o signal $+$ não representa propriamente uma *somma;* e este numero chama-se *complexo*, porque as partes $a$ e $bi$ são de espécies *distinctas*. Pelo mesmo motivo, se fôr $a+bi=c+di$, serão separadamente eguaes as partes reaes e as imaginarias, ou $a=c$ e $b=d$.

Assim as egualdades entre numeros complexos reduzem-se a egualdades entre numeros reaes, e as combinações que podem fazer-se com umas podem egualmente fazer-se com as outras.

*Cor. 1.* Se fôr $a+bi=c$, será $a=c$ e $b=0$. Assim aos numeros reaes pode dar-se a forma de complexos.

*Cor. 2.* Se fôr $a+bi=di$, será $a=0$, $b=d$ e aos imaginarios puros tambem se pode dar a forma de complexos.

*Cor. 3.* Se fôr $a+bi=0$, será conjunctamente $a=0$ e $b=0$.

**59.** *Módulo* do complexo $a+bi$ é o numero positivo $\sqrt{a^2+b^2}$. Sendo nullo o módulo, é $a=0$, $b=0$, $a+bi=0$; e reciprocamente.

Complexos eguaes teem o mesmo módulo, mas a inversa não é verdadeira. Os numeros $3+4i$ e $4+3i$, por exemplo, teem ambos o módulo 5.

Dois complexos da forma $a\pm bi$ dizem-se *conjugados* e teem módulos eguaes.

**60.** Sejam OX um eixo orientado, O a origem, $a$ a abscissa e $b$ a ordenada de qualquer ponto M, $\rho$ o raio vector OM do mesmo ponto; designe-se por $\alpha$ o angulo que o vector $\rho$ faz com o eixo, sendo este angulo contado de OX para a parte superior do plano, desde 0 até 360°. Por definição de seno e coseno (*Trig.*) é sempre, para qualquer valor de $\alpha$,

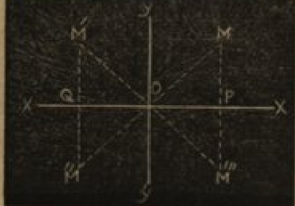


Fig. 1

$$a=\rho\cos\alpha\ ,\quad b=\rho\,\text{sen}\,\alpha\ , \qquad (1)$$

e por conseguinte

$$a+bi=\rho(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)\,. \qquad (ii)$$

Assim o complexo $a+bi$ é definido pelo ponto cujas coordenadas são $a$ e $b$, ou pelo *vector* $\rho$ e pelo *argumento* $\alpha$. De ($i$) tira-se $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$; portanto o vector $\rho$, que é sempre positivo, é egual ao módulo. O 2.º membro de ($ii$) representa-se abreviadamente por $(\rho)_\alpha$.

Para $b=0$, é $\text{sen}\,\alpha=0$ e $(\rho)_\alpha$ real; este numero é positivo ou negativo, conforme é $\cos\alpha=\pm 1$, isto é, $\alpha=0$ ou $\alpha=\pi$. Para $a=0$, é $\cos\alpha=0$ e $(\rho)_\alpha=\pm bi$ conforme é $\text{sen}\,\alpha=\pm 1$, isto é, conforme é $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ ou $\alpha=\frac{3}{2}\pi$. Assim, $+i$ e $-i$ representam duas direcções oppostas, perpendiculares a OX, como os simples signaes $+$ e $-$ designam duas direcções oppostas, contadas sobre OX. As direcções intermédias são indicadas por $\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha$, que representa o papel d'um signal directivo.

Dois pontos M e M''', ou M' e M'', symétricos relativamente a OX, representam imaginarios conjugados. Dois pontos M e M'', symétricos em relação á origem, definem imaginarios de signáes contrarios.

De ($i$) tira-se para $\alpha$ um só valor menor que $2\pi$; mas na realidade o argumento pode ter uma infinidade de valores da forma $2k\pi+\alpha$, sendo $k$ um inteiro positivo ou negativo. Pelas condições de egualdade de dois complexos (n.º 58), vê-se que complexos eguaes teem módulos eguaes, e argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ que satisfazem ás condições $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$ e $\text{sen}\,\alpha_1=\text{sen}\,\alpha_2$; donde

$$\alpha_2-\alpha_1=2k\pi\,. \qquad (22)$$

Para os argumentos $\alpha$ e $\alpha'$ de complexos conjugados será $\cos\alpha=\cos\alpha'$ e $\text{sen}\,\alpha=-\text{sen}\,\alpha'$, donde

$$\alpha+\alpha'=2k\pi\,. \qquad (23)$$

**61.** As definições das operações fundamentaes tornam-se applicaveis aos numeros complexos, generalisando-as nos termos seguintes.

1.° *Addição*. A expressão

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \qquad (iii)$$

define a *addição*. O resultado da operação depende unicamente das sommas $a_1 + a_2$ e $b_1 + b_2$ de partes reaes; por conseguinte os principios relativos á somma de numeros reaes são applicaveis á addição de complexos, isto é, *a ordem das parcellas é arbitraria*, etc.

Pela definição $(iii)$ será

$$\rho\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \qquad (iv)$$
$$\rho_1 (\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1) + \rho_2 (\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)$$

suppondo

$$\rho\cos\alpha = \rho_1\cos\alpha_1 + \rho_2\cos\alpha_2\,,$$
$$\rho\operatorname{sen}\alpha = \rho_1\operatorname{sen}\alpha_1 + \rho_2\operatorname{sen}\alpha_2\,.$$

Quadrando e sommando estas expressões, acha-se

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right);$$

por onde se vê, suppondo $\rho_1 > \rho_2$ que é $\rho = \rho_1 \pm \rho_2$ para $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 1$, e em todos os outros casos $\rho < \rho_1 + \rho_2$ e $\rho > \rho_1 - \rho_2$.

É evidente a generalisação d'estes resultados para maior numero de parcellas, cujos módulos sejam $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$; o módulo $\rho$ da somma será

$$\rho \leqq \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n\,. \qquad (24)$$

*O módulo da somma é menor que a somma dos módulos das* *parcellas, ou egual a esta somma quando todos os numeros teem o mesmo argumento.*

A *subtracção* torna-se na addição, mudando o signal a uma das parcellas.

2.° *Multiplicação.* A expressão

$$(a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\ , \qquad (v)$$

onde se fez $i^2=-1$, define a multiplicação. Se fôr nullo um dos factores, $a_1+b_1i=0$ por exemplo, será $a_1=0$ e $b_1=0$; neste caso o producto é zero, porque todos os seus termos teem o factor $a_1$ ou $b_1$. Se fôr nullo o producto, ou

$$a_1a_2-b_1b_2=0\ ,\ a_1b_2+a_2b_1=0\ ,$$

teremos, quadrando e sommando,

$$\left(a_1a_2-b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=0\ ;$$

e portanto será zero o quadrado do módulo d'um dos factores, $a_1^2+b_1^2$ ou $a_2^2+b_2^2$. Logo, *o producto annulla-se quando um dos factores é zero, e reciprocamente.*

Por outra parte, o resultado da operação depende unicamente de productos de numeros reaes, e os princípios relativos á multiplicação d'estes numeros são applicaveis á multiplicação dos complexos; isto é, *a ordem dos factores é arbitraria,* etc.

Pela definição $(v)$ será

$$\begin{gathered}\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=\\ \rho_1(\cos\alpha_1+i\operatorname{sen}\alpha_1)\times\rho_2(\cos\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_2)\end{gathered} \qquad (vi)$$

suppondo

$$\rho=\rho_1\rho_2\ ,\quad \alpha=\alpha_1+\alpha_2\ ;$$

e é evidente a generalisação d'estes resultados para maior numero de factores. Logo, *o módulo e o argumento do producto são respectivamente o producto dos módulos e a somma dos argumentos dos factores.*

Na somma $\alpha$ tomam-se as parallelas $\alpha_1$, $\alpha_2$, etc., com os seus signaes. No caso de dois factores conjugados, a somma dos argumentos é $2k\pi$ e $\rho_1 = \rho_2$, ou

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \times \rho_1 (\cos \alpha_1 - i \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho_1^2 \; ; \qquad (25)$$

logo, *o producto de imaginarios conjugados é o quadrado do módulo commum.*

A *divisão* reduz-se á multiplicação, por serem operações inversas uma da outra; logo *o argumento e o módulo do quociente são respectivamente a differença dos argumentos e o quociente dos módulos do dividendo e do divisor.*

**62.** A somma e a multiplicação de complexos representam-se geometricamente do modo que vamos indicar.

1.° *Addição.* Sejam $M_1$ e $M_2$ (*fig.* 2) os pontos que definem as parcellas (*iv*), e M a intersecção das rectas $M_1 M$ e $M_2 M$ tiradas por aquelles pontos e parallelas respectivamente a $OM_2$ e $OM_1$. As coordenadas de $M_1$ e $M_2$ serão

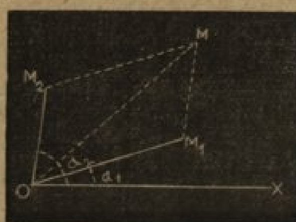


Fig. 2

$$(\rho_1 \cos \alpha_1 \; , \; \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1) \; ,$$

$$(\rho_2 \cos \alpha_2 \; , \; \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \; ;$$

e as de M são evidentemente

$$(\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 \cos \alpha_2 \; , \; \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \; .$$

Por conseguinte o ponto M define a somma das parcellas representadas por $M_1$ e $M_2$; e determina-se este ponto, construindo a *resultante* dos dois segmentos $OM_1$ e $OM_2$, cujos comprimentos são expressos pelos módulos $\rho_1$ e $\rho_2$ e cujas direcções são dadas pelos argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ das parcellas. A troca dos pontos $M_1$ e $M_2$ conduz ao mesmo ponto M, e corresponde á inversão na ordem das parcellas.

Sendo tres as parcellas, compõe-se a resultante de duas d'ellas com o vector da terceira, e assim por deante.

2.° *Multiplicação.* Sejam $M_1$ e $M_2$ (*fig. 3*) os pontos que definem os factores (*vi*), e tome-se no eixo o comprimento OU egual á unidade a que estam referidos os módulos $\rho_1$ e $\rho_2$; tirem-se as rectas $M_2$ M e OM, que fazem com $OM_2$ os angulos $MOM_2 = \alpha_1$ e $OM_2M = OUM_1$.

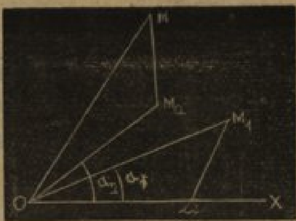


Fig. 3

Sendo $XOM = \alpha_1 + \alpha_2$, este angulo é o argumento $\alpha$ do 2.° membro de (*vi*). Da semelhança dos triangulos resulta $OM : OM_2 :: OM_1 : OU$, ou $OM = \rho_1 \rho_2$, e OM é o módulo $\rho$ d'aquella mesma expressão.

Logo o ponto M define o producto dos factores considerados; e a multiplicação por um factor imaginario $\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ consiste na multiplicação pelo módulo $\rho_1$, executada ao modo ordinario, seguida d'uma *rotação* egual ao argumento $\alpha_1$. Assim, *o producto forma-se com o multiplicando do mesmo modo que o multiplicador se forma com a unidade.*

A troca dos pontos $M_1$ e $M_2$ corresponde á inversão dos factores, e conduz ao mesmo ponto M por ser $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ e $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$.

**63.** 1.° *Elevação a potencias.* A potencia d'expoente inteiro e positivo é um caso particular da multiplicação, e será

$$[\rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) . \qquad (26)$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Moivre*, e pode enunciar-se nos termos seguintes:

*Sendo $\rho$ e $\alpha$ o módulo e o argumento d'um numero, $\rho^n$ e $n\alpha$*

*são o módulo e o argumento da potencia inteira, positiva e do grau* n *do mesmo numero.*

Por definição d'expoente negativo é

$$[\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{-n} = \frac{1}{[\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n}.$$

Sendo $n$ inteiro, a fórmula de Moivre pode applicar-se ao denominador do 2.º membro; multiplicando ambos os termos da fracção resultante por $\cos n\alpha - i \operatorname{sen} n\alpha$, cujo módulo é 1, e attendendo a (25), chega-se á fórmula

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{-n} &= \rho^{-n}(\cos n\alpha - i \operatorname{sen} n\alpha) \\ &= \rho^{-n}[\cos(-n\alpha) + i \operatorname{sen}(-n\alpha)].\end{aligned}$$

Por onde se vê que a fórmula (26) é applicavel ao caso do expoente negativo.

4.º *Extracção de raizes.* Por definição, a raiz de grau $n$ d'um numero $\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ é o numero $r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ que satisfaz a egualdade

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha);$$

donde resulta por (26) e por (22)

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = 2k\pi + \alpha.$$

A valores differentes de $k$, ou de $\varphi = \dfrac{2k\pi + \alpha}{n}$, podem corresponder raizes differentes do mesmo numero dado. Usaremos do expoente fraccionario para indicar todos os valores possiveis da raiz, e do radical para exprimir um valor determinado como

$\sqrt{9}=3$. Segundo esta convenção, das relações precedentes conclue-se

$$[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}=\left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\frac{2k\pi+\alpha}{n}}=\left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\frac{\alpha}{n}}\times(1)_{\frac{2k\pi}{n}}; \qquad (27)$$

e a última d'estas expressões resulta immediatamente da regra de multiplicação dos imaginarios. O factor

$$(1)_{\frac{2k\pi}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \qquad (28)$$

é que produz a multiplicidade de valores de $[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}$; para $k=0$ é $(1)_{\frac{2k\pi}{n}}=1$, e

$$\sqrt[n]{(\rho)_\alpha}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{n}\right).$$

Por conseguinte a fórmula de Moivre ainda tem logar para os expoentes fraccionarios, quando se considera sómente o valor da raiz correspondente a $k=0$, ou a $\sqrt[n]{1}=1$.

A $k=h$ e $k=tn+h$ correspondem em (27) os argumentos

$$\alpha_1=\frac{2h\pi+\alpha}{n}, \qquad \alpha_2=2t\pi+\frac{2h\pi+\alpha}{n},$$

para os quaes é $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$ e $\mathrm{sen}\,\alpha_1=\mathrm{sen}\,\alpha_2$. Logo os valores distinctos da raiz $[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}$ não podem ser mais de $n$; e são com effeito $n$, porque de 0 até 360° não ha dois angulos differentes que tenham conjunctamente o mesmo seno e o mesmo coseno. Os $n$ valores d'aquella raiz correspondem aos $n$ argumentos

$$\frac{\alpha}{n},\ \frac{2\pi+\alpha}{n},\ \frac{2.2\pi+\alpha}{n},\ \ldots\ \frac{(n-1).\,2\pi+\alpha}{n}, \qquad (vii)$$

que procedem numa progressão arithmética cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Estes argumentos só darão valores reaes para a raiz, quando fôr *(n.º 60)*

$$\frac{2k\pi+\alpha}{n}=0\,,\ \text{ou}\ \frac{2k\pi+\alpha}{n}=\pi\,. \qquad (viii)$$

A primeira d'estas condições só pode verificar-se com $\alpha=0$ e $k=0$; para ter logar a segunda, pode ser $\alpha=0$ e $n=2k$, ou $\alpha=\pi$ e $n=2k+1$. D'aqui resultam as seguintes consequencias:

1.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr imaginario, não pode ser $\alpha=0$ nem $\alpha=\pi$, e as raizes são todas imaginarias.

2.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr real e positivo, é $\alpha=0$. Para $n$ par, ambas as condições (*viii*) se verificam e ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa; para $n$ impar, é impossivel a segunda e ha só uma raiz real, que é positiva. Em ambos os casos as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas porque, pondo de parte o primeiro termo de (*vii*), nos restantes a somma de dois equidistantes dos extremos é sempre egual á somma dos mesmos extremos e tem a forma (23); para $n$ par, o termo médio $\pi$ dá a raiz negativa.

3.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr real e negativo, é $\alpha=\pi$. Neste caso não pode verificar-se a primeira condição (*viii*). Para $n$ par, não ha raiz real; e para $n$ impar, ha uma raiz negativa cujo argumento $\pi$ é o termo medio de (*vii*). Em ambos os casos as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas.

*Exemplo:* seja $x=8^{\frac{1}{3}}$, d'onde $\rho=8$, $\sqrt[3]{\rho}=2$ e $\alpha=0$. Os argumentos (*vii*) são agora

$$0,\quad 120°,\quad 240°;$$

e sendo $\operatorname{sen}120°=-\operatorname{sen}240°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 120°=\cos 240°=-\frac{1}{2}$, acha-se $x=2$ e $x=-1\pm i\sqrt{3}$.

## CAPITULO II.

### Funcções inteiras.

**64.** Diz-se *racional e inteira* a funcção algébrica

$$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$$

em que $n$ é inteiro e positivo.

Designa-se por $f(a)$ o resultado da substituição de $x$ por $a$ em $f(x)$. O cálculo de $f(a)$ faz-se pelo seguinte processo.

Os coefficientes $p_0, p_1, \ldots p_n$ dispõem-se em linha horizontal. Estes numeros podem ser positivos ou negativos, como $a$; e alguns podem ser zero, dizendo-se então que o polynomio é incompleto. Attende-se, porém, a todos; multiplica-se o primeiro por $a$, applicando a regra dos signaes, e assenta-se o producto por baixo de $p_1$. Faz-se a somma $ap_0 + p_1 = q_1$, e multiplica-se $a$ por $q_1$; o producto assenta-se por baixo de $p_2$, e faz-se a somma $aq_1 + p_2 = q_2$, que se multiplica por $a$; somma-se o novo producto com $p_3$ e continua-se pelo mesmo estylo até o ultimo termo da funcção proposta.

Seja, por exemplo, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x + 7$ e $a = -3$; dispõe-se o cálculo do modo seguinte:

$$\begin{array}{rrrrr}
3 & -2 & 0 & -5 & +7 \\
 & -3.3=-9 & -3.(-11)=33 & -3.33=-99 & -3.(-104)=312 \\
\hline
 & -11, & 33, & -104, & 319
\end{array}$$

e acha-se $f(-3) = 319$.

**65.** *O resto da divisão d'uma funcção racional e inteira de* x *pelo binomio* x — a *é o resultado da substituição de* x *por* a *na funcção dada.*

Seja Q o quociente e R o resto da divisão, ou

$$f(x) \equiv (x-a) . Q + R .$$

O resto R é independente de $x$, por ser o divisor do 1.º grau, e no quociente não ha termos com $x$ em denominador; logo, fazendo nesta identidade $x = a$, virá

$$R = f(a) . \tag{29}$$

D'aqui resulta um processo simples para achar o quociente e o resto da divisão ds $f(x)$ por $x-a$. Dada a funcção com a forma que lhe temos supposto, o resto é (29)

$$R \equiv p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + \cdots + p_{n-1} a + p_n ,$$

e o quociente será dado pela egualdade $(x-a) Q \equiv f(x) - R$ ou

$$(x-a) Q \equiv p_0(x^n - a^n) + p_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots \\ + p_{n-2}(x^2 - a^2) + p_{n-1}(x-a) ;$$

d'onde se tira, dividindo por $x-a$,

$$\begin{aligned} Q \equiv\ & p_0 (x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-2} x + a^{n-1}) \\ & + p_1 (x^{n-2} + a x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p_{n-2}(x+a) + p_{n-1} . \end{aligned}$$

Ordenando o 2.° membro e reduzindo, acha-se

$$Q = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \cdots q_{n-2} x + q_{n-1} ,$$

onde se fez

$$q_0 = p_0 , \; q_1 = a q_0 + p_1 , \text{ etc.}$$

e portanto

$$R = a q_{n-1} + p_n .$$

Estas sommas são as mesmas do numero anterior, e os resultados precedentes mostram que: *os coefficientes do quociente e o resto da divisão de* f (x) *por* x — a *se formam multiplicando o coefficiente do termo antecedente do quociente por* a *e juntando ao producto o coefficiente do termo da mesma ordem do dividendo.*

Seja, por exemplo, $f(x) = 3x^6 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x - 4$ a dividir por $x + 1$; fazendo $a = -1$, teremos o quadro seguinte:

| | |
|---|---|
| *1.° coef.* . . . . . | $+3$ , |
| *2.°* » . . . . . | $0 + 3 \times (-1) = -3$ , |
| *3.°* » . . . . . | $-3 - 3 \times (-1) = 0$ , |
| *4.°* » . . . . . | $2 + 0 \times (-1) = 2$ , |
| *5.°* » . . . . . | $2 + 2 \times (-1) = 0$ , |
| *6.°* » . . . . . | $-7 + 0 \times (-1) = -7$ . |

O quociente é $3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7$, e o resto $R = -4 - 7 \times (-1) = 3$.

**66.** *Fórmula de Taylor.* — Mudando $x$ em $x + h$ na funcção inteira $f(x)$, desenvolvendo cada termo pela fórmula do binomio,

*

reduzindo e ordenando segundo as potencias de $h$, acha-se

$$\begin{aligned} f(x+h) = & \, p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n \\ & + h\,(np_0x^{n-1} + (n-1)\,p_1x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}) \\ & + \frac{h^2}{2!}\,[n(n-1)p_0x^{n-2} + \cdots] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{h^n}{n!}\,(n\,!\,p_0)\,. \end{aligned}$$

Neste desenvolvimento a primeira linha é a funcção proposta $f(x)$; e qualquer das seguintes se forma da anterior, multiplicando cada um dos termos d'esta pelo expoente de $x$ nesse termo e diminuindo uma unidade ao mesmo expoente. Esta operação chama-se *derivação;* o coefficiente da primeira potencia de $h$ é a *derivada* de $f(x)$, e representa-se por $f'(x)$; o coefficiente de $h^2/2$ é a derivada de $f'(x)$, que se chama *segunda derivada* de $f(x)$ e se representa por $f''(x)$; em geral o coefficiente de $h^r/r!$ é a *derivada de ordem* $r$ de $f(x)$, e representa-se por $f^r(x)$. Segundo estas convenções, a expressão de $f(x+h)$ torna-se em

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots \\ + \frac{h^r}{r!}f^r(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x)\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*. O seu último termo reduz-se a $p_0h^n$, e é $f^n(x) = n\,!\,p_0$, como facilmente se veria. Finalmente:

*Derivada de* f(x) *é o coefficiente da primeira potencia de* h *no desenvolvimento de* f(x + h)*;*

*A derivada da funcção inteira obtem-se multiplicando cada termo da funcção pelo respectivo expoente de* x *e diminuindo uma unidade a este expoente.*

**67.** Por ser $f''(x)$ a primeira derivada de $f'(x)$, $f'''(x)$ a primeira derivada de $f''(x)$, etc., teremos

$$f'(x+h)=f'(x)+hf''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x),$$

$$f''(x+h)=f''(x)+hf'''(x)+\cdots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^n(x), \quad (31)$$

etc.

Do mesmo modo será tambem

$$f(h+y)=f(h)+yf'(h)+\cdots+\frac{y^n}{n!}f^n(h).$$

Fazendo nesta expressão $h=0$, resulta a *fórmula de Maclaurin*,

$$f(y)=f(0)+yf'(0)+\cdots+\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+p_0y^n;$$

e fazendo $y+h=x$, vem

$$f(x)=f(h)+(x-h)f'(h)+\cdots+\frac{(x-h)^n}{n!}f^n(h). \quad (32)$$

**68.** Na funcção $f(x,y)$ de duas variaveis *independentes* podem dar-se a $x$ e a $y$ accrescimos quaesquer. Mudando $x$ em $x+h$ virá

$$f(x+h,y)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+\frac{h^2}{2!}f''_x(x,y)+\cdots,$$

designando por $f^{r}_{x^r}(x,y)$ a derivada de $f(x,y)$, de ordem $r$ a respeito de $x$; para formar esta derivada não se considera $y$ como variavel.

Se depois dermos a $y$ o accrescimo $k$, será tambem

$$f(x+h, y+k)=f(x, y+k)+hf'_x(x, y+k)+\cdots$$

Neste último desenvolvimento $f^{r}_{x^r}(x, y+k)$ é ainda uma funcção de $y$, e por (30) teremos

$$f(x, y+k)= f(x, y)+kf'_y(x, y)+\frac{k^2}{2!}f''_{y^2}(x, y)+\cdots$$

$$f'_x(x, y+k)=f'_x(x, y)+kf''_{x,y}(x, y)+\cdots$$

etc.,

onde $f'_y(x, y)$ representa a respeito de $y$ o mesmo que $f'_x(x, y)$ a respeito de $x$ e, em geral, $f^{r}_{x^p, y^q}(x, y)$ é o resultado que se obtém derivando $p$ vezes em ordem a $x$ e $q$ vezes em ordem a $y$ a funcção $f(x, y)$. É claro que será sempre $r=p+q$; e que a ordem das derivações é arbitraria, pois que se chegaria ao mesmo resultado dando primeiro o accrescimo $k$ a $y$.

Das relações precedentes resulta a fórmula

$$f(x+h, y+h)=f(x, y)+hf'_x(x, y)+kf'_y(x, y) \tag{33}$$

$$+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x, y)+hkf''_{x,y}(x, y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x, y)$$

$$+\text{etc.}$$

Seja, por exemplo, $f(x, y)\equiv ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f$;

as primeiras derivadas em ordem a $x$ e $y$ são

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2by + 2cx + 2e\,, \\ f'_y(x,y) &= 2ay + 2bx + 2d\,; \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

a segunda derivada relativamente a $x$ e $y$ obtém-se derivando $f'_x(x,y)$ em ordem a $y$ ou $f'_y(x,y)$ em ordem a $x$, e de qualquer dos modos se acha

$$f''_{x,y}(x,y) = 2b\,.$$

As segundas derivadas em ordem a $x$ ou a $y$ são $2c$ e $2a$.

**69.** De (30) deduz-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon\,,$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade que se annulla para $h=0$.

D'esta relação resulta a seguinte definição:

*Derivada da funcção* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *é o limite da razão* $\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})-\mathrm{fx}}{h}$ *quando* $\mathrm{h}$ *tende para zero.*

**70.** Supponhamos que a funcção $f(x)$ é definida por operações indicadas sobre outras funcções; consideremos os casos seguintes:

1.° *Somma.* A derivada de

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + \cdots\,,$$

é evidentemente

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) - f'_3(x) + \cdots$$

2.° *Producto.* Mudando $x$ em $x+h$ no producto

$$f(x)=f_1(x)\times f_2(x)\times\cdots,$$

teremos

$$f(x+h)=\left(f_1(x)+hf'_1(x)+\cdots\right)$$
$$\times\left(f_2(x)+hf'_2(x)+\cdots\right)\times\text{etc.};$$

e o coefficiente da 1.ª potencia de $h$ neste desenvolvimento é

$$f'(x)=f'_1(x)\times f_2(x)\times\cdots$$
$$+f'_2(x)\times f_1(x)\times\cdots+\text{etc.}$$

Logo, *a derivada do producto é a somma dos productos que se formam multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

3.° *Quociente.* Representando por $f(x)$ o quociente da divisão de $f_1(x)$ por $f_2(x)$, será $f_1(x)=f(x)\times f_2(x)$, e pela regra anterior

$$f'_1(x)=f'(x)\times f_2(x)+f'_2(x)\times f(x);$$

donde se tira, eliminando $f(x)$,

$$f'(x)=\frac{f'_1(x)\times f_2(x)-f'_2(x)\times f_1(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

Logo, *a derivada do quociente é o quociente que se obtém dividindo pelo quadrado do divisor a differença entre os productos da derivada do dividendo multiplicada pelo divisor e da derivada do divisor multiplicada pelo dividendo.*

Uma *constante* $a$ pode ser considerada como coefficiente da potencia *zero* da variavel, e a sua derivada é nulla. Portanto, se fôr

$$f(x)=\frac{a}{f_2(x)},$$

a derivada d'esta fracção será

$$f'(x)=-\frac{af'_2(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

4.° *Potencia.* A potencia inteira é o producto de factores eguaes; por conseguinte a derivada de $f(x)=[f_1(x)]^n$ será (2.°)

$$f'(x)=n[f_1(x)]^{n-1}\times f'_1(x).$$

Logo, *a derivada da potencia* n *de* f(x) *forma-se multiplicando a potencia* n − 1 *da mesma funcção pelo expoente* n *e pela derivada de* f(x).

Assim, por exemplo, a derivada de $(x-a)^n$ é $n(x-a)^{n-1}$, porque neste caso a funcção dada é $x-a$, cuja derivada é 1. O mesmo resultaria do desenvolvimento de

$$(x+h-a)^n=[(x-a)+h]^n,$$

onde o coefficiente da primeira potencia de $h$ é $n(x-a)^{n-1}$.

**71.** Se numa dada funcção $f(u, v)=y$ as variaveis $u=\varphi(x)$ e $v=\psi(x)$ são funcções d'uma variavel independente $x$, os accrescimos $i$, $k$ e $l$ de $y$, de $u$ e de $v$, correspondentes ao accrescimo $h$ de $x$, são

$$k = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \cdots$$

$$l = h\psi'(x) + \frac{h^2}{2}\psi''(x) + \cdots$$

$$i = kf'_u(u, v) + lf'_v(u, v) + \cdots$$

Segundo os valores de $k$ e $l$, a última expressão torna-se em

$$i = f'_u(u, v) \times [h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \cdots]$$
$$+ f'_v(u, v) \times [h\psi'(x) + \frac{h^2}{2}\psi''(x) + \cdots] + h^2\varepsilon ,$$

representando por $h^2\varepsilon$ todos os termos restantes, que teem por factores potencias de $h$ não inferiores á segunda.

Designando por $u,'$ $v'$ e $y'$ as primeiras derivadas de $u$, de $v$ e de $y$, o coefficiente da 1.ª potencia de $h$ no 2.º membro d'este desenvolvimento é

$$y' = u' . f'_u(u, v) + v' . f'_v(u, v) .$$

As derivadas $f'_u$ e $f'_v$ chamam-se *parciaes*, por se tomarem em ordem a uma variavel sómente: e da relação precedente resulta que:

*A derivada d'uma funcção composta é a somma dos productos de cada derivada parcial da funcção pela derivada da variavel correspondente.*

*Cor. 1.* No caso da *funcção de funcção* é $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, e a derivada

$$y' = u' . f'_u(u) .$$

*Cor.* 2. Na relação $f(x, y) = 0$ a cada valor attribuido a $x$ correspondem valores determinados de $y$, e esta variavel é funcção *implícita* da independente $x$. Pelo princípio antecedente será $f'_x(x, y) + y' \cdot f'_y(x, y) = 0$, pois que a derivada de $x$ é a unidade; e d'esta relação tira-se

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} .$$

Assim, por exemplo, na equação do 2.° grau a duas variaveis será

$$y' = -\frac{by + cx + e}{ay + bx + d}, \tag{35}$$

attendendo ás expressões (34).

72. Se fôr dada a funcção inteira do grau $n$

$$f(x) \equiv p_{n-1}x + p_{n-2}x^2 + \cdots + p_0 x^n ,$$

que se annulla para $x = 0$, sejam $\rho_1$ o módulo de $x$ e $\rho_2$ o maior dos módulos dos coefficientes; por (24) teremos *mod.* $f(x) < \rho_2 \left(\rho_1 + \rho_1^2 + \cdots + \rho_1^n\right)$, ou

$$\text{mod.}\, f(x) < \rho_2 \cdot \frac{\rho_1 - \rho_1^{n+1}}{1 - \rho_1} ,$$

segundo a regra para a formação do módulo do producto e da potencia.

D'esta deseguałdade conclue-se pór maioria de razão, para valores de $\rho_1 > 1$,

$$\text{mod.}\, f(x) < \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1} ;$$

e pode tornar-se *mod.* $f(x)$ inferior a qualquer quantidade positiva $\delta$, determinando $\rho_1$ pela condição $\rho_1\rho_2/(1-\rho_1)<\delta$ ou

$$\rho_1<\frac{\delta}{\rho_2+\delta}=r\,.$$

*Cor. 1.* Ordenando a funcção $f(x)$ segundo as potencias ascendentes da variavel, o expoente de $x$ no primeiro termo $Ax^k$ será um inteiro positivo que pode ser zero. Fazendo

$$f(x)=Ax^k(1+\varepsilon)\,,$$

será $\varepsilon$ uma funcção de $x$ que se annulla para $x=0$; podemos, pois, determinar uma quantidade positiva $r$ tal, que para todos os valores de $x$, cujos módulos estejam comprehendidos entre $0$ e $r$, o módulo de $\varepsilon$ seja inferior a $1$ ou a qualquer quantidade assignavel.

*Cor. 2.* Se a funcção $f(x)$ estiver ordenada segundo as potencias descendentes da variavel, fazendo

$$f(x)=A'x^n(1+\varepsilon)\,,$$

será $\varepsilon$ uma funcção de $x$ que se annulla para $1/x=0$. Por consequencia pode sempre determinar-se uma quantidade positiva $1/r$ tal, que para todos os valores de $1/x$ cujos módulos sejam inferiores a $1/r$, ou antes, para todos os valores de $x$ cujos módulos sejam superiores a $r$, o módulo de $\varepsilon$ seja inferior a $1$ ou a qualquer quantidade assignavel.

*Cor. 3.* Sendo reaes a variavel e os coefficientes, é sempre possivel dar a $x$ um valor positivo $r$ tal, que o signal da funcção, depois de ordenada, seja o do seu primeiro termo. O mesmo succederá para todos os valores de $x$ *menores* que $r$, se os termos da funcção procedem na ordem *crescente* dos seus graus; e para todos os valores de $x$ *maiores* que $r$, se aquella ordem é *decrescente*.

*Cor. 4*. Pela fórmula de Taylor a differença $f(x+h)-f(x)$ annulla-se com $h$, e portanto o módulo respectivo pode tornar-se menor que qualquer quantidade assignavel. Por conseguinte a funcção, sendo real, passa por differenças insensiveis do valor $f(a)$ a outro $f(b)$ quando a variavel $x$ passa do mesmo modo do valor real $a$ para $b$.

É isto que se entende por *continuidade* da funcção. Não é essencial que na passagem de $f(a)$ para $f(b)$ a funcção proceda sempre no mesmo sentido; pode crescer e diminuir durante este intervallo, *alternadamente* mas *continuamente*. Os termos *crescer* e *diminuir* tomam-se aqui no sentido algébrico, isto é: diremos que $z$ é um valôr *intermédio* a $t$ e $u$, quando $z-t$ e $u-z$ tiverem o mesmo signal.

## CAPÍTULO III

### Composição das equações.

**73.** Dizem-se *algébricas, racionaes e inteiras* as equações da forma $f(x)=0$, sendo $f(x)$ uma funcção inteira (*n.*° *64*). O *grau* d'esta equação é o grau $n$ de $f(x)$.

Com aquella forma a equação está *transposta*; e tambem se suppõe *reduzida, ordenada* e *completa*. Quando se não verificar a última condição, restituiremos os termos que faltam, dando a cada um o coefficiente zero. Assim se entenderão sempre os enunciados; quando se falar do 1.°, 2.°, e *último* termo, deve entender-se que se trata do termo dos graus $n$, $n-1$ e zero.

Os coefficientes $p_0$, $p_1$, etc. suppõem-se inteiros; se o não fossem multiplicava-se toda a equação pelo denominador commum. O primeiro $p_0$ suppõe-se positivo; se o não fosse, multiplicava-se a equação por $-1$.

*Raiz* da equação $f(x)=0$ é todo o numero $a$ que torna

$f(a) = 0$. De (29) resulta que, sendo $a$ raiz da equação $f(x) = 0$, é $f(x)$ divisivel por $x - a$; e vice-versa.

**74.** *Se o valor real ou imaginario* $x_0$, *substituido por* x *na funcção inteira* $f(x)$ *de coefficientes reaes ou imaginarios, não faz* mod. $f(x_0) = 0$, *ha sempre uma quantidade real ou imaginaria* h *que torna* mod. $f(x_0 + h) <$ mod. $f(x_0)$.

Se fosse *mod.* $f(x_0) = 0$, seria $x_0$ raiz da equação $f(x) = 0$. Não sendo assim, pode o mesmo valor $x_0$ annullar successivamente $f'(x)$ e algumas das derivadas seguintes de $f(x)$, menos a última que é constante; se fôr $p$ a ordem da primeira que não se annulla, de (30) tira-se

$$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} = 1 + h^p \cdot \frac{f^p(x_0)}{p!\,f(x_0)} + \cdots + h^n \cdot \frac{f^n(x_0)}{n!\,f(x_0)},$$

e representando por Q o quociente que está no 1.º membro d'esta egualdade, será (*n.º 61*, *2.º*)

$$\text{mod. } Q = \frac{\text{mod. } f(x_0 + h)}{\text{mod. } f(x_0)}.$$

Sejam $\alpha$ e $\rho$ o augmento e o módulo de $h$, $\alpha_k$ e $\rho_k$ os mesmos elementos para o coefficiente de qualquer potencia $k$ de $h$ no desenvolvimento precedente; teremos (*n.os 61 e 63*)

$$Q = 1 + \rho_p \rho^p \left[\cos(\alpha_p + p\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha_p + p\alpha)\right] + S,$$

sendo S a somma dos termos restantes.

Determinando $\alpha$ pela condição $\alpha_p + p\alpha = \pi$, virá

$$Q = 1 - \rho_p \rho^p + S',$$

e os termos de $S'$ teem os mesmos módulos que os de S, a saber, $\rho_{p+1}\rho^{p+1}$, $\rho_{p+2}\rho^{p+2}$, ... $\rho_n \rho^n$, dos quaes todos podem ser zero menos o último. Por outra parte, para valores $\delta$ de $\rho$, que satisfaçam á condição $\rho_p \rho^p < 1$, é *mod.* $(1 - \rho_p \rho^p) = 1 - \rho_p \rho^p$; e portanto (24)

$$\text{mod.}\, Q < (1 - \rho_p \rho^p) + \text{mod.}\, S'.$$

Mas é tambem *mod.* $S' < \rho_{p+1} \rho^{p+1} + \rho_{p+2} \rho^{p+2} + \cdots + \rho_n \rho^n$; d'onde resulta, por maioria de razão,

$$\text{mod.}\, Q < 1 - (\rho_p \rho^p - \rho_{p+1} \rho^{p+1} - \cdots - \rho_n \rho^n).$$

Como os módulos são positivos, no parenthesis d'esta expressão só o primeiro termo é positivo. Ora pode achar-se sempre um numero $r$ tal (*n.° 72, cor. 3*), que para $\rho \overline{\overline{<}} r$ aquelle primeiro termo seja maior que a somma dos restantes. Logo, dando a $\rho$ o menor dos valores $r$ e $\delta$, virá *mod.* $Q < 1$ e portanto *mod.* $f(x_0 + h) <$ *mod.* $f(x_0)$.

**73.** O principio fundamental da theoria das equações, ou *theorema de Dalembert*, é o seguinte:

*Toda a equação algébrica racional e inteira tem pelo menos uma raiz, real ou imaginaria.*

Dando a $x$ todos os valores possiveis, reaes ou imaginarios, virão para *mod.* $f(x)$ diversos valores, um dos quaes será menor que todos os que forem differentes d'elle; este minimo não pode deixar de ser zero. Com effeito, se o minimo fosse *mod.* $f(a) = A$, differente de zero, haveria uma quantidade $h$ que tornaria *mod.* $f(a + h) < A$ e o numero A não seria o menor valor de *mod.* $f(x)$, como se tinha supposto.

Contra esta demonstração tem-se objectado que *mod.* $f(x)$, decrescendo indefinidamente, pode não attingir o limite zero. Entretanto notaremos que *mod.* $f(x)$ não se approxima de zero quando *mod.* $x$ cresce indefinidamente, pois que além d'um certo limite estas duas grandezas são conjunctamente crescentes (*n.° 72, cor. 2*); e para valores finitos de *mod.* $x$, o valor minimo de *mod.* $f(x)$ não pode deixar de ser zero, como se acaba de ver.

**76.** Pois que a equação $f(x)=0$ tem pelo menos uma raiz, designando por $a_1$ esta raiz, teremos (*n.° 65*)

$$f(x)\equiv(x-a_1).f_1(x)\ ,$$

sendo $f_1(x)$ um polynomio racional e inteiro do grau $n-1$. A equação $f_1(x)=0$ tem do mesmo modo uma raiz $a_2$; e assim teremos successivamente

$$f_1(x)\equiv(x-a_2).f_2(x)\ ,$$
$$f_2(x)\equiv(x-a_3).f_3(x)\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-1}(x)\equiv p_0(x-a_n)\ .$$

Multiplicando membro a membro estas identidades e a precedente, virá, depois de feitas as reducções,

$$f(x)\equiv p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\ ; \qquad (36)$$

e $a_1, a_2,\ldots a_n$ são raizes da proposta $f(x)=0$.

**77.** Se o polynomio inteiro $f(x)$ de grau $n$ se annulla para $n+1$ valores differentes de $x$, os coefficientes de todos os seus termos são zero.

Supponhamos o principio demonstrado para o grau $n-1$; vamos ver que elle tem logar para o grau $n$ e, como está verificado para o 2.° grau, concluimos que é geral.

Seja $f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ um polynomio de grau $n$ que se annulla para $n+1$ valores differentes de $x$, um dos quaes representamos por $a$. Teremos

$$f(x)\equiv(x-a).\varphi(x)\ ,$$

e o polynomio inteiro $\varphi(x)$, de grau $n-1$, annulla-se para os restantes $n$ valores de $x$ que annullam $f(x)$. Ora os coefficientes de $\varphi(x)$ estam achados no n.° 65 e, substituindo em cada um a expressão do anterior, vê-se que elles são

$$p_0, \quad p_0a+p_1, \quad p_0a^2+p_1a+p_2, \quad \text{etc.}$$

e todos se annullam segundo a hypóthese; logo será successivamente $p_0=0$, $p_1=0, \ldots p_n=0$, como queriamos demonstrar.

*Cor.* Na identidade $f(x)=F(x)$ cada potencia de $x$ tem coefficientes eguaes nos dois membros. Com effeito, transpondo os termos, o coefficiente d'essa potencia de $x$ em $f(x)-F(x)\equiv 0$ é a differença d'aquelles coefficientes e deve ser zero.

**78.** Se em (36) houver factores eguaes, diz-se que a equação $f(x)=0$ tem o mesmo numero de *raizes eguaes*. Sendo, por exemplo, $a_1=a_2=\cdots=a_k$, a proposta tem $k$ raizes eguaes a $a_1$, e $k$ é a *ordem de multiplicidade* d'esta raiz. Se fôr $k=2$ ou $k=3$, diz-se que $a_1$ é raiz *dupla* ou *tripla*.

A cada factor (36) corresponde uma raiz da equação $f(x)=0$, a qual por outra parte não tem mais de $n$ raizes (n.° 77); logo,

*Uma equação algébrica e inteira do grau* n *tem* n *raizes, reaes ou imaginarias, eguaes ou deseguaes.*

A forma mais geral d'aquelle producto será

$$f(x)\equiv(x-a_1)^r\cdot(x-a_2)^s\cdots(x-a_k)^v \tag{37}$$

com $r+s+\cdots+v=n$; a proposta $f(x)=0$ só tem raizes *simples*, quando é $r=s=\cdots=v=1$.

O grau da equação $f(x)=0$ pode abaixar-se em tantas unidades quantas forem as raizes conhecidas, dividindo o seu 1.° membro pelo producto dos factores binomios formados com estas raizes.

**79.** Nas equações de coefficientes reaes as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas, e portanto em numero par.

Seja, com effeito, $a+bi$ uma raiz da equação $f(x)=0$, ou

$$f(x)\equiv[x-(a+bi)]\times Q\,.$$

Sendo reaes os coefficientes dos termos de $f(x)$, a quantidade $i$ ha de desapparecer do 2.° membro d'esta identidade quando se effectuarem as multiplicações indicadas; o que não pode ter logar (n.° 58), sem que no producto se encontrem unicamente potencias pares de $i$. Logo a expressão precedente não se altera quando se muda $i$ em $-i$, e na identidade

$$f(x)\equiv[x-(a-bi)]\times Q'$$

$Q'$ será um polynomio inteiro, como $Q$; d'onde resulta que $a-bi$ tambem é raiz da proposta.

O producto $[(x-a)+bi]\times[(x-a)-bi]$ é (25) o quadrado $(x-a)^2+b^2$ do módulo commum dos factores; e este trinomio, do 2.° grau e de coefficientes reaes, é positivo para qualquer valor real de $x$. Por conseguinte, designando *todas* as raizes reaes da proposta por $a_1$, $a_2$, $\cdots a_m$, na expressão

$$f(x)\equiv(x-a_1)\,(x-a_2)\cdots(x-a_m)\cdot\varphi\,(x) \qquad (38)$$

o polynomio $\varphi\,(x)$ conserva-se positivo para todos os valores reaes de $x$. Os numeros $m$ e $n$ hão de ser da mesma paridade, porque o grau $mn$ de $\varphi\,(x)$ deve ser par.

**80.** Se as equações $f(x)=0$ e $F\,(x)=0$ tiverem $k$ raizes communs, os seus primeiros membros serão divisiveis pelo producto dos $k$ factores binomios correspondentes. Reciprocamente, se $\varphi\,(x)$ fôr o polynomio de grau mais elevado que divide conjunctamente $f(x)$ e $F\,(x)$, ou o *maior divisor commum* d'estes polynomios, as raizes da equação $\varphi\,(x)=0$ satisfarão as propostas.

Suppondo conhecido $\varphi\,(x)$, as outras raizes das propostas serão dadas pelas equações

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\ ,\quad \frac{F(x)}{\varphi(x)}=0\ .$$

Se houver raizes communs eguaes, $\varphi(x)=0$ conterá cada uma d'ellas com o seu menor grau de multiplicidade; assim, se forem divisiveis $f(x)$ por $(x-a)^k$ e $F(x)$ por $(x-a)^{k+h}$, $\varphi(x)$ será divisivel por $(x-a)^k$ e as equações $F(x)=0$ e $\frac{F(x)}{\varphi(x)}=0$ ainda teem raizes communs.

O maior divisor commum $\varphi(x)$ pode determinar-se, como se verá no n.° seguinte, sem serem conhecidos os binomios elementares em que $f(x)$ e $F(x)$ se decompõem, ou as raizes das equações $f(x)=0$ e $F(x)=0$; e depois abaixam-se os graus d'estas equações por meio da divisão, como já se ensinou.

**81.** Representemos por A e B dois polynomios ordenados segundo as potencias decrescentes da mesma letra $x$, e supponhamos que o grau de A não é inferior ao de B. Dividindo A por B, sejam Q o quociente e R o resto, ou

$$A=B\times Q+R\ .$$

Se fôr $R=0$, será B o maior divisor commum de A e B. Não sendo assim, ou R é um numero e os polynomios dados são *primos* entre si, ou R ainda contém $x$; neste último caso, ordenando R e dividindo B por R, virá

$$B=R\times Q_1+R_1\ .$$

A esta egualdade ainda se applicam as mesmas observações, notando além d'isto que o maior divisor commum de B e $R_1$ o será tambem de A e B. Continuando por este processo de *divisões successivas*, como para a determinação do maior divisor commum de dois numeros, os graus dos restos vão diminuindo constantemente, e ha de por último chegar-se a um resto independente de $x$ ou zero. No primeiro caso os polynomios A e B são primos

*

entre si; no segundo caso o divisor da última divisão é o maior divisor commum dos mesmos polynomios.

É evidente que em cada uma d'estas operações pode multiplicar-se ou dividir-se o dividendo ou o divisor por um factor primo com o outro termo da mesma operação. Faz-se uso d'este principio para simplificar o cálculo, que é sempre muito laborioso, procedendo do modo seguinte.

Primeiro, supprime-se no divisor qualquer factor, que não contenha $x$ e seja commum a todos os termos d'aquelle polynomio. Depois evita-se o emprego de coefficientes fraccionarios, multiplicando cada dividendo parcial por um factor conveniente, que tambem não contenha $x$. Se forem $k$ e $m$, respectivamente, os coefficientes dos primeiros termos do dividendo e do divisor, depois de simplificados, e $m = \alpha\beta$, sendo $\beta$ o factor de $m$ que não se encontra em $k$, basta multiplicar o dividendo por $\beta$ para obter o primeiro termo do quociente, por $\alpha\beta^2$ para ter os dois primeiros termos, etc. Se o grau do dividendo exceder numa unidade o grau do divisor, o quociente só tem dois termos e basta multiplicar o dividendo por $\alpha\beta^2$.

Se os polynomios A e B se acharem decompostos em factores do 1.º grau, o seu maior divisor commum é o producto dos factores communs, cada um elevado ao menor expoente com que entra em A e B.

**82.** Comparando os coefficientes dos termos semelhantes nos dois membros da identidade

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n = p_0 (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

e attendendo á regra da multiplicação binomial, resultam as egualdades

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 , \\ p_1 &= -p_0 (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) , \\ p_2 &= p_0 (a_1 a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n) , \qquad (39) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= (-1)^n \cdot p_0 a_1 a_2 \cdots a^n . \end{aligned}$$

D'estas relações se conclue, suppondo por brevidade $p_0 = 1$, que:

1.° *O coefficiente do 2.° termo da equação é a somma das raizes respectivas, tomadas com signal contrario.*

2.° *O coefficiente do 3.° termo é a somma dos productos distinctos das raizes, tomadas duas a duas,*

3.° *O coefficiente do 4.° termo é a somma, com signal contrario, dos productos distinctos das raizes tres a tres*, etc.

4.° *O último termo é o producto das raizes, com o mesmo signal ou com signal contrario conforme a equação é de grau par ou impar.*

Estas relações já eram conhecidas para a equação do 2.° grau. São evidentes os termos em que os enunciados se modificariam, quando fosse $p_0$ differente de 1.

**83.** A funcção $f(x)$ de grau $n$ tem, como se viu, $n$ divisores do 1.° grau. Combinando-os em todas as ordens possiveis, dois a dois, tres a tres, etc., vê-se que o mesmo polynomio admitte $n(n-1)/2$ divisores do 2.° grau, $n(n-1)(n-2)/3!$ divisores do 3.° grau, etc.

## Exercicios.

**37.** Achar o maior divisor commum dos polynomios

$$2x^4 + x^3 - 29x^2 - 34x + 24\ ,\quad 4x^3 + 4x^2 - 21x + 9.$$

**38.** Resolver as equações cujos primeiros membros são os polynomios do *Ex. 37.*

**39.** Compôr a equação cujas raizes são $-\frac{1}{2}$, $1$, $-\frac{3}{2}$, $2$,

**40.** Compôr $\varphi(x)$, sabendo que $1 \pm \sqrt{-3}$ e $1 \pm \sqrt{-2}$, são as raizes da equação $\varphi(x) = 0$.

**41.** Compôr a equação cujas raizes são $-\frac{1}{2}$, $1$, $1 \pm \sqrt{-3}$.

# CAPÍTULO IV.

## Transformação das equações.

**84.** *Transformar a equação* $f(x)=0$ *noutra que tenha as mesmas raizes com signaes contrarios.*

Segundo as relações (39), muda-se o signal a todos os termos cujos graus são de paridade differente do grau da proposta.

**85.** *Transformar a equação* $f(x)=0$ *noutra cujas raizes sejam* $h$ *vezes maiores.*

Da condição de transformação $y=hx$ tira-se $x=y/h$. Desembaraçando de denominadores, a transformada torna-se em

$$p_0 y^n + p_1 h y^{n-1} + \cdots + p_n h^n = 0 ;$$

portanto a transformação opera-se, mudando $x$ em $y$ e multiplicando cada coefficiente por uma potencia de $h$, cujo grau é complemento do expoente de $x$ no mesmo termo para o grau da proposta.

Sendo inteiros $h$ e os coefficientes da equação, os da transformada tambem o serão; mas estes últimos podem ser numeros muito elevados.

Na mesma hypóthese, fazendo $h=p_0$ e dividindo por esta quantidade, a transformada torna-se em

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_n p_0^{n-1} = 0 ;$$

por onde se vê que sempre se pode transformar uma equação de coefficientes inteiros noutra da mesma forma, em que o coefficiente do 1.º termo é a unidade.

Convirá fazer a transformação precedente com um valor fraccionario de $h=1/k$, isto é, tornar as raizes $k$ vezes menores, quando d'ahi não resultem coefficientes fraccionarios. Fazendo, por exemplo, $x=12y$ na equação $x^3-144x-10368=0$, ella torna-se em

$$y^3-y-6=0\ ,$$

com os coefficientes mais simples.

**86.** *Transformar a equação* $f(x)=0$ *noutra cujas raizes tenham menos que as da proposta a quantidade* h.

A condição de transformação é $y=x-h$ ou $x=h+y$, com $h$ positivo ou negativo. Pela fórmula de Taylor a transformada será

$$f(h+y)=f(h)+yf'(h)+\cdots=0\ .$$

Para determinar promptamente os coefficientes d'esta equação notaremos que o resto da divisão de $f(x)$ por $x-h$ é $f(h)$, e o quociente $Q_1$ d'esta operação acha-se dividindo $f(x)-f(h)$ por $x-h=y$; teremos pois

$$Q_1=f'(h)+\frac{1}{2}yf''(h)+\cdots\ .$$

Dividindo depois $Q_1$ por $y=x-h$, acha-se o resto $f'(h)$ e o quociente

$$Q_2=\frac{1}{2}f''(h)+\cdots\ ;$$

e assim por deante. Logo os coefficientes da transformada são os restos d'estas divisões por $x-h$; e cada um d'elles se forma, como o dividendo seguinte, pelo processo do n.º 65. É o que melhor se verá num exemplo.

Seja $f(x)=2x^4-2x^2+5x-4=0$ e procure-se a transformada em $y=x+2$; convém dar ao calculo a disposição seguinte, fazendo $h=-2$:

| | |
|---|---|
| *Coef. da proposta* .. | $2,\quad 0,\ -2,\ +5,\ -4$ |
| *1.ª divisão* ....... | $2,\ -4,\ +6,\ -7,\ +10$; |
| 2.ª » ....... | $2,\ -8,\ +22,\ -51$; |
| 3.ª » ....... | $2,\ -12,\ +46$; |
| 4.ª » ....... | $2,\ -16$. |

A transformada é $2y^4-16y^3+46y^2-51y+10=0$; os coefficientes de $Q_1$ são $2, -4, +6, -7$; etc. A equação é incompleta, mas restituiu-se o termo em $x^3$ dando-lhe o coefficiente zero.

**87.** Com a transformação precedente se resolvem os seguintes problemas:

1.º *Desembaraçar a equação do 2.º termo.* Ordenando o desenvolvimento *(n.º 66)*, é

$$f(y+h)=p_0y^n+(p_1+np_0h)y^{n-1}$$
$$+\left[p_2+(n-1)p_1h+\frac{n(n-1)}{2}p_0h^2\right]y^{n-2}+\cdots=0\ ;$$

e determinando $h$ de modo que seja $p_1+np_0h=0$, d'onde se tira

$$h=-\frac{p_1}{np_0}\ ,$$

desapparece da transformada o 2.º termo. Por ser $np_0$ differente de zero, o valor de $h$ é finito e determinado; o problema é sempre possivel, e tem uma solução única. A somma das raizes da transformada é zero (39).

2.° *Reduzir á unidade o coefficiente do 1.° termo e desembaraçar a equação do 2.° termo, sem introduzir coefficientes fraccionarios*. Pela primeira condição faremos $y = p_0 x$, e a transformada resultante é

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_0 p_2 y^{n-2} + \dots = 0\ ;$$

pela segunda condição faremos $y = y_1 - \frac{p_1}{n}$ ou, fazendo $z = ny_1$,

$$y = \frac{z - p_1}{n}\ .$$

Esta última transformação não introduz denominadores; e não influe nos coefficientes dos termos de graus $n$ e $n-1$, porque o segundo é zero. Estas transformações reduzem-se a uma só pela relação

$$x = \frac{z - p_1}{np_0}\ .$$

Do mesmo modo poderiamos desembaraçar a equação de outros termos; mas, em geral, a transformação que supprimisse um termo faria reapparecer outro, que tivessemos supprimido antes.

**88.** Para transformar uma equação $f(x) = 0$ noutra, cujas raizes sejam recíprocas das raizes da proposta, muda-se $x$ em $\frac{1}{y}$. Desembaraçando de denominadores e ordenando em sentido decrescente, os coefficientes da transformada são os mesmos de $f(x)$, tomados em ordem inversa.

*Cor.* Se forem nullos todos os $r$ primeiros termos da equação $f(x) = 0$, esta equação tem $r$ raizes infinitas. Com effeito, na transformada em $1/y$ faltam neste caso os $r$ ultimos termos; e esta equação, sendo divisivel por $y^r$, tem $r$ raizes eguaes a zero. A cada uma d'ellas corresponde na proposta uma raiz $x = \frac{1}{0}$.

### Exercicios.

**42.** Formar a equação cujas raizes são, com signal contrario, as de $x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 7 = 0$.

**43.** Reduzir á unidade, sem coefficientes fraccionarios, o coefficiente do 1.º termo da equação $6x^3 - 3x + 2 = 0$.

**44.** Sendo $a, b, c$ as raizes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, formar a equação cujas raizes são $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$.

**45.** Sendo $a, b, c$ as raizes da equação $x^3 + qx + r = 0$, achar a equação cujas raizes são $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$.

**46.** Transformar a equação $f(x) = 0$ noutra racional, cujas raizes sejam os quadrados das raizes da proposta.

## CAPÍTULO V.

### Limites das raizes.

**89.** *Limite superior* das raizes d'uma equação é qualquer numero maior que a maior d'ellas. O limite mais conveniente será aquelle que fôr mais próximo da maior das raizes.

Se forem positivos todos os termos, zero é limite superior das raizes da equação. Se os termos com potencias pares da incognita tiverem todos o mesmo signal, contrario ao dos termos com potencias impares de $x$, a equação não tem raizes negativas. Se houver só termos positivos com potencias pares de $x$, a equação só tem raizes imaginarias ou nullas, e estas últimas serão em numero par. Se houver só termos positivos com potencias impares de $x$, a equação tem um numero impar de raizes nullas, uma pelo menos, e as restantes imaginarias. O termo independente de $x$ considera-se de grau par.

Nos outros casos o limite superior das raizes determina-se por differentes méthodos, de que vamos dar a conhecer os principaes.

**90.** *Méthodo de Newton.* Mudando $x$ em $y+h$ na equação $f(x)=0$, resulta a transformada

$$f(y+h)=f(h)+yf'(h)+\cdots+\frac{y^n}{n!}f^n(h)=0\ .$$

Substituindo $h$ por um numero positivo que torne positivos os valores de $f(h)$, $f'(h)$, ... $f^n(h)$, da equação $f(y+h)$ não podem resultar raizes positivas para $y=x-h$; portanto na proposta não pode ser $x>h$, donde se segue que

*É limite superior das raizes da equação* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *o numero que, substituido por* x *em* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *e em todas as suas derivadas, dá sempre resultados positivos.*

A derivada de ordem $n$ é $f^n(h)=n!p_0$ e sempre positiva, como o coefficiente $p_0$ do 1.° termo da equação. A derivada anterior $f^{n-1}(h)$ é do 1.° grau em $h$, e facilmente se determina o inteiro $h$ que convém á condição $f^{n-1}(h)>0$. Verifica-se depois se este valor satisfaz á condição $f^{n-2}(h)>0$, e no caso contrário juntam-se successivamente a $h$ tantas unidades, quantas sejam necessarias para tornar aquella derivada positiva. Passa-se depois e do mesmo modo para $f^{n-3}(h)$, e assim por deante até se chegar a $f(h)$.

Tendo verificado que $f^r(l)$ e todas as suas derivadas até $f^n(l)$ são positivas, não é necessario experimentar nestas funcções qualquer numero $l+k$, sendo $k$ positivo. Com effeito, teremos por (30)

$$f^r(l+k)=f^r(l)+kf^{r+1}(l)+\cdots+\frac{k^{n-r}}{r!}f^n(l)\ ;$$

e portanto, sendo $f^r(l)>0$, $f^{r+1}(l)>0$, $\cdot\ \cdot f^n(l)>0$, será tambem $f^r(l+k)>0$.

**91.** *Méthodo de Lagrange.* — Supponhamos a equação dividida pelo coefficiente $p_0$ e seja $n-r$ o grau do seu primeiro termo negativo, ou

$$f(x) \equiv x^n + \cdots - P_r x^{n-r} + \cdots - P_{r+s} x^{n-r-s} + \cdots \quad \pm P^n = 0 .$$

Se houver um numero $k$ para o qual seja

$$k^n > P_r k^{n-r} + P_{r+s} k^{n-r-s} + \cdots ,$$

será tambem

$$1 > \frac{P_r}{k^r} + \frac{P_{r+s}}{k^{r+s}} + \cdots ,$$

e qualquer numero $l > k$ satisfaz a esta condição. Logo $k$ será limite superior das raizes positivas da proposta, porque ao segundo membro da desegualdade precedente viriam addicionar-se os termos positivos da equação.

Ora sendo P o maior coefficiente negativo da proposta, a referida desegualdade está contida na seguinte

$$k^n > P\left(k^{n-r} + k^{n-r-1} + \dots k + 1\right) = P . \frac{k^{n-r+1} - 1}{k-1} ;$$

esta última ainda se comprehende successivamente nas seguintes

$$k^n > P \frac{k^{n-r+1}}{k-1}, \quad k^{r-1}(k-1) > P, \quad (k-1)^r > P,$$

contentando-nos com valores de $k > 1$, e teremos finalmente

$$k \overline{\overline{>}} 1 + \sqrt[r]{P} .$$

Logo, *é limite superior das raizes d'uma equação a somma da unidade com a raiz do maior coefficiente negativo, de grau egual á differença entre o grau da equação e o expoente de* x *no seu primeiro termo negativo.*

Póde seguir-se outro processo na determinação d'este limite. Sendo P o inteiro immediatamente superior ao maior dos numeros

$$\sqrt[r]{P_r}, \quad \sqrt[r+s]{P_{r+s}}, \text{ etc.},$$

a desegualdade fundamental é successivamente comprehendida pelas seguintes:

$$k^n > P^r k^{n-r} + P^{r+s} k^{n-r-s} + \cdots,$$

$$k^n > P k^{n-1} + P^2 k^{n-2} + \cdots + P^n = P.\frac{k^n - P^n}{k - P},$$

$$k^n (k - P) > P k^n,$$

contentando-nos com limites superiores a P. Da última tira-se

$$k > 2P,$$

e portanto: *é limite superior o dobro do maior numero obtido quando a cada coefficiente negativo se extrahe a raiz de grau egual á differença entre o grau de equação e o expoente de* x *no termo respectivo.*

Na notação de que nos servimos, o numero $r$ pode ser qualquer desde 1 até $n$; do mesmo modo $s$ pode ser qualquer inteiro desde 1 até $n-r$, e assim por deante. Se fôr $r=1$, o limite superior é a somma do maior coefficiente negativo mais a unidade.

**92.** *Méthodo de Bret.*—Seja a proposta, com os signaes de cada termo em evidencia,

$$p_0 x^n + \cdots - p_r x^{n-r} + \cdots - p_{r+s} x^{n-r-s} + \cdots \pm p_n = 0.$$

Se nos termos positivos substituirmos as respectivas potencias de $x$ pela expressão

$$x^m = (x-1)\ \ (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots x + 1) + 1\ ,$$

e reduzirmos os termos semelhantes com os negativos, em que não se faz esta transformação, os coefficientes das potencias $n-r$, $n-r-s$, etc. de $x$, que correspondem a estes termos negativos, são

$$(p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1})(x-1) - p_r\ ,$$

$$(p_0 + p_1 + \cdots p_{r-1} + p_{r+1} + \cdots + p_{r+s-1})(x-1) - p_{r+s}\ ,$$

etc.

Na primeira d'estas expressões entram os coefficientes de todos os termos positivos que precedem $p_r$, na segunda todos os que precedem $p_{r-s}$, etc. Alem d'isto, substituindo por $x$, qualquer valor $k > 1$, os coefficientes dos outros termos compõem-se só de partes positivas; e portanto, determinando um numero que, substituido por $x$, torne aquellas expressões positivas este valor de $x$ deverá satisfazer ás condições

$$x > \frac{p_r}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1}} + 1\ ,$$

$$x > \frac{p_{r+s}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1} + p_{r+1} + \cdots + p_{r+s-1}} + 1\ ,$$

etc. ;

*e será limite superior das raizes da proposta.*

**93.** O méthodo de Newton, dá, em geral, o limite mais próximo da maior das raizes. Quando estas são todas reaes, este limite é o inteiro immediatamente superior á maior; ou mesmo a maior das raizes quando ella é inteira.

Com effeito, representando por $h$ o menor numero inteiro superior á maior raiz positiva da equação $f(x)=0$, as raizes da transformada $f(y+h)=0$ são todas negativas; e designando-as por $-b_1, -b_2, \cdots -b_n$, com os signaes em evidencia, os coefficientes de $f(y+h)$ serão todos positivos *(n.º 39)*. Mas estes coefficientes são $f(h)$ e todas as suas derivadas; por conseguinte $h$ é o limite, achado pelo méthodo de Newton.

Se as raizes são todas reaes e a maior d'ellas é o inteiro $h$, será $f(h)=0$ e

$$f(y+h)=yf'(h)+\cdots\frac{y^n}{n!}f^n(h)=0.$$

Esta equação tem a raiz $y=0$ e todas as outras negativas; portanto serão positivos, como no caso precedente, os coefficientes $f'(h),\ldots f^n(h)$, e $h$ é o limite achado pelo mesmo méthodo.

Dos méthodos de Lagrange e Bret, deve preferir-se o primeiro quando ha muitos termos negativos, e o segundo quando o primeiro termo negativo é precedido por muitos positivos e os maiores coefficientes negativos estam depois dos menores.

**94.** Para um numero $l$ ser limite superior das raizes d'uma equação $f(x)=0$ não basta que a substituição de $x$ por $l$ ou por qualquer numero maior que $l$ em $f(x)$ dê sempre resultados positivos; é necessario que estes resultados sejam *significativos.*

Assim em

$$(x-5)^4\quad(x-3)^2\quad(x-1)=0$$

qualquer inteiro $k>1$ dá resultados positivos; e **2**, por exemplo, não é limite superior das raizes d'esta equação.

Se unicamente soubermos que não ha numero algum maior que $k$ que dê resultados negativos, só poderemos concluir que a equação não tem raizes superiores a $k$ ou, se tem algumas, cada uma d'ellas é de ordem par de multiplicidade.

**95.** O limite das raizes negativas da equação $f(x)=0$ é o limite superior das raizes positivas da transformada $f(-x)=0$.

O limite inferior das raizes positivas da mesma equação é o limite superior das raizes da transformada $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Em geral, toma-se zero para limite inferior das raizes positivas.

**96.** Sejam $\alpha$ e $\rho$ o argumento e o módulo da variavel $x$, $\alpha_r$ e $\rho_r$ o argumento e o módulo do coefficiente $p_r$; dividindo a equação pelo coefficiente $p_0$ do 1.º termo, o módulo d'este termo será $\rho^n$ e o do termo $r+1$ é

$$\frac{\rho_r}{\rho_0}\,\rho^{n-r} = \mathrm{R}_r\;\rho^{n-r}.$$

O *mod.* $f(x)$ não pode ser menor que

$$\rho^n - \mathrm{R}_1\;\rho^{n-1} - \mathrm{R}_2\;\rho^{n-2}\cdots - \mathrm{R}_n;$$

se acharmos para $\rho$ um valor $l$ que torne esta expressão positiva, e tal que o mesmo tenha logar para qualquer valor de $\rho > l$, será $l$ limite superior dos módulos das raizes da equação proposta.

Ora a expressão precedente é funcção de quantidades reaes e tem todos os termos negativos, com excepção do primeiro; logo será *(n.º 91)*

$$l = 1 + \mathrm{R}_r,$$

representando por $\mathrm{R}_r$ o maior dos módulos R. Teriamos tambem, attendendo á relação entre $\mathrm{R}_r$, $\rho_r$ e $\rho_0$,

$$l = \frac{\rho_0 + \rho_r}{\rho_0};$$

e do mesmo modo se acharia o limite superior dos módulos das raizes da transformada em $\frac{1}{y}$, ou

$$l_1 = \frac{\rho_n + \rho_s}{\rho_n},$$

sendo $\rho_n$ o módulo do último termo da proposta e $\rho_s$ o maior dos módulos dos coefficientes dos outros termos. Invertendo, seria $\frac{\rho_n}{\rho_n + \rho_s}$ o limite inferior dos módulos das raizes da proposta.

### Exercícios.

**47.** Com as raizes $\pm\sqrt{8}$ e $\frac{7 \pm \sqrt{-3}}{2}$ formar a equação $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 56x - 104 = 0$.

**48.** Achar pelo 1.º méthodo o limite superior das raizes da equação precedente.

**49.** Resolver o mesmo problema pelos outros dois méthodos.

**50.** Achar pelo 1.º méthodo o limite superior das raizes da equação $4x^5 - 32x^4 + 55x^3 + 86x^2 - 179x - 84 = 0$.

**51.** Resolver o mesmo problema pelos outros dois méthodos.

## CAPÍTULO VI.

### Raizes eguaes.

**97.** O polynomio inteiro $f(x)$ de grau $n$ é, em geral, da forma (37).

Se as raizes $a_1$ e $a_2$ da equação $f(x)=0$ são da mesma ordem $r$ de multiplicidade, é

$$(x-a_1)^r.(x-a_2)^s=[(x-a_1)(x-a_2)]^r=X^r$$

e $a_1$ e $a_2$ são as raizes da equação do 2.° grau $X=0$. Se a proposta tem $m$ raizes $a_1, a_2, \ldots a_m$ da mesma ordem $r$ de multiplicidade, a parte correspondente de $f(x)$ é

$$[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)]^r=X_r^r,$$

e as quantidades $a_1, a_2, \ldots a_m$ são raizes simples da equação $X_r=0$, de grau $m<n$.

**98.** Dando ao producto (37) a forma

$$f(x)\equiv(x-a_1)^r.Q,$$

o polynomio

$$Q=\frac{f(x)}{(x-a_1)^r}$$

não é divisivel por $x-a_1$; e a derivada de $f(x)$ será (*n.° 70, 2.°*)

$$\begin{aligned} f'(x)&=r(x-a_1)^{r-1}.Q+(x-a_1)^r.Q' \\ &=(x-a_1)^{r-1}.[rQ+(x-a_1)Q'], \end{aligned} \qquad (i)$$

designando por $Q'$ a derivada de

$$Q=(x-a_2)^s\cdots(x-a_k)^v.$$

Do mesmo modo teremos

$$Q' = s(x-a_2)^{s-1}.R + (x-a_2)^s.R',$$

$$R = \frac{f(x)}{(x-a_1)^r.(x-a_2)^s}.$$

Se em (37) houvesse só tres factores e fosse $f(x) = (x-a_1)^r.(x-a_2)^s.(x-a_3)^t$, seria $R = (x-a_3)^t$ e

$$R' = t(x-a_3)^{t-1} = t.\frac{f(x)}{(x-a_1)^r.(x-a_2)^s.(x-a_3)};$$

donde resultaria

$$f'(x) = r.\frac{f(x)}{x-a_1} + s.\frac{f(x)}{x-a_2} + t.\frac{f(x)}{x-a_3}.$$

É evidente que se acharia para a derivada uma expressão análoga á precedente, no caso de serem mais de tres os factores differentes de $f(x)$; e em geral teremos

$$f'(x) = r.\frac{f(x)}{x-a_1} + s.\frac{f(x)}{x-a_2} + \cdots + v.\frac{f(x)}{x-a_k}.$$

Esta relação mostra que cada um dos factores differentes de $f(x)$ entra em $f'(x)$ com o respectivo expoente diminuido de uma unidade; por conseguinte entrará em $f''(x)$ com o expoente diminuido em duas unidades, por ser $f''(x)$ a derivada de $f'x$, e em geral:

*Se* $a_1$ *é raiz da ordem* r *de multiplicidade da equação* $f(x)=0$, *a mesma quantidade é raiz de ordem* $r-1$ *em* $f'(x)=0$, *de ordem* $r-2$ *em* $f''(x)=0$, *etc.*

Applicando a fórmula (32) a $f(x)$, viria

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^r}{r!} f^r(a_1) + \cdots + \frac{(x-a_1)^n}{n!} f^n(x_1),$$

pois que, sendo a raiz $a_1$ de ordem $r$ de multiplicidade, é

$$f(a_1)=f'(a_1)=\cdots=f^{r-1}(a_1)=0.$$

**99.** Designando por $X_r$, como anteriormente, o producto dos factores simples, cuja ordem de multiplicidade em $f(x)$ é $r$, teremos em geral

$$f(x)=X_1 . X_2^2 . X_3^3 . X_4^4 \ldots,$$

donde resulta ($i$)

$$f'(x)=X_2 . X_3^2 . X_4^3 \ldots \times S,$$

designando por S o producto dos factores de $f'(x)$ que não entram em $f(x)$. O maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$d_1=X_2 . X_3^2 . X_4^3 \ldots;$$

se fôr $X_2=X_3=X_4=\cdots=1$, a proposta só tem raizes simples, e é $d_1=1$. Logo,

*A equação* $f(x)=0$ *tem raizes eguaes quando o maior divisor commum de* $f(x)$ *e da sua derivada é differente da unidade, e vice-versa.*

**100.** O quociente da divisão de $f(x)$ por $d_1$, é

$$q_1=X_1 . X_2 . X_3 . X_4 \ldots$$

Do mesmo modo, representando por $d_2$ o maior divisor commum entre $d_1$ e a sua derivada, por $d_3$ o maior divisor commum entre $d_2$ e a sua derivada, e assim por deante, teremos

$$d_2=X_3 . X_4^2 \ldots,$$

$$d_3=X_4 \ldots,$$

etc.;

e dividindo $d_1$ por $d_2$, $d_2$ por $d_3$, etc. virão os quocientes

$$q_2 = X_2 . X_3 . X_4 \dots$$
$$q_3 = X_3 . X_4 \dots$$
$$\text{etc.}$$

Uma nova série de divisões fará conhecer os polynomios

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2},\ X_2 = \frac{q_2}{q_3},\ \text{etc.},$$

que só teem factores simples; e em geral a equação $X_r = 0$, que não tem raizes eguaes, é composta com as raizes de ordem $r$ de multiplicidade da proposta, cujo numero é dado pelo grau de $X_r$. Nem sempre saberemos resolver estas equações, mas em todo o caso:

*É sempre possivel fazer depender a resolução d'uma equação com raizes múltiplas da resolução de equações que só teem raizes simples, e cada uma d'estas equações dá todas as raizes da mesma ordem de multiplicidade da proposta.*

**101.** Se na equação não houver raizes da ordem $r$ de multiplicidade, será $X_r = 1$. O cálculo fará conhecer esta circumstancia, dando $q_r = q_{r+1}$.

Seja, por exemplo, $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$; a derivada é $f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$. Procedendo á divisão de $f(x)$ por $f'(x)$, depois de supprimir no divisor o factor 6 commum aos coefficientes de todos os termos de $f'(x)$, o primeiro resto, dividido por $-2$, é

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 .$$

Continuando as operações, acha-se que este polynomio é o maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$, donde concluimos que a proposta tem raizes eguaes; e seguindo o processo do n.º anterior, forma-se o quadro

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

$$\begin{array}{ll} d_1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & q_1 = x^2 - x - 2 \\ d_2 = x^2 + 2x + 1 & q_2 = x^2 - x - 2 \\ d_3 = x + 1 & q_3 = x + 1 \\ d^4 = 1 & q^4 = x + 1 \end{array}$$

donde se tira

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2} = 1, \quad X_2 = \frac{q_2}{q_3} = x - 2,$$

$$X_3 = \frac{q_3}{q_4} = 1, \quad X_4 = \frac{q_4}{1} = x + 1.$$

Portanto é $f(x) = (x-2)^2 . (x+1)^4$; a proposta não tem raizes simples nem triplas, tem a raiz dupla 2 e a quádrupla $-1$.

**102.** Este processo é laborioso, e por isso não se applica ao cálculo das raizes commensuraveis, cuja determinação é facil como adeante se verá.

Ora, suppondo racionaes os coefficientes da proposta, tambem o serão os coefficientes de qualquer das equações $X_r = 0$. Portanto, se $X_r$ fôr do 1.º grau, a raiz correspondente é commensuravel.

Posto isto, se a proposta é do 3.º grau e tem raizes eguaes, ellas são commensuraveis porque só poderão ser *uma* dupla ou *uma* tripla. Se a proposta é do 4.º grau e tem raizes eguaes, ellas só poderão deixar de ser commensuraveis se forem *duas* duplas; neste caso, a equação abaixa-se ao 2.º grau, extrahindo a raiz quadrada ao seu primeiro membro. Finalmente, se a proposta é do 5.º grau, as suas raizes múltiplas, havendo-as, são tambem commensuraveis, excepto se forem duas duplas; mas neste caso haverá uma raiz simples, que é commensuravel, e, dividindo pelo binomio correspondente, a equação abaixa-se ao 4.° grau e reduz-se ao caso anterior.

Em conclusão: o méthodo das raizes eguaes só se applica a equações de raizes incommensuraveis e de grau superior ao 5.°

**103.** Na indagação do maior divisor commum de uma funcção inteira e da sua derivada pode dispensar-se a primeira divisão. Sejam, com effeito,

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots,$$
$$f'(x)=np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}$$
$$+(n-3)p_3x^{n-4}+\cdots,$$

e multiplique-se $f(x)$ por $n^2p_0$ para evitar coefficientes fraccionarios *(n.° 81)*. Effectuando a divisão, acha-se o primeiro resto

$$[2np_0p_2-p_1(n-1)p_1]x^{n-2}+[3np_0p_3-p_1(n-2)p_2]x^{n-3}+\cdots,$$

que será o divisor da divisão immediata. Advertindo na composição d'este polynomio, reconhece-se que elle se forma pela regra seguinte:

*A partir do 3.° termo de* f(x), *multiplicam-se todos os coefficientes por 2, 3, 4, etc. vezes o coefficiente do 1.° termo de* f′(x); *multiplicam-se os coefficientes de* f′(x), *a partir do 2.° termo, pelo coefficiente do 2.° termo de* f(x), *e as differenças entre os segundos productos e os primeiros são os coefficientes do primeiro resto.*

A equação suppoe-se completa. Se fôr $p_1=0$, os coefficientes procuradores são os productos dos coefficientes de $f(x)$, a partir do 3.° termo, respectivamente multiplicados por 2, 3, 4, etc.

## Exercicios.

**52.** Reconhecer se a equação $x^6-2x^5+x^4+8x^3-16x^2-8x+20=0$ tem raizes eguaes.

**53.** Resolver a mesma equação.

**54.** Sem praticar a operação, achar o resto da divisão de $x^8-3x^6+2x^4-x^3+1$ pela sua derivada.

**55.** O mesmo problema para a equação do *Ex.* 52.

## CAPÍTULO VII.

### Raizes comprehendidas entre dois numeros. Máximos e mínimos.

**104.** A equação $f(x)=0$ pode sempre suppôr-se desembaraçada de raizes eguaes *(n.º 100)*. Representando por $a_1, a_2, \ldots a_m$ todas as suas raizes reaes, dispostas por ordem de grandezas crescentes, o 1.º membro da proposta terá a forma (38), onde o factor $\varphi(x)$, que só depende das raizes imaginárias, se conserva positivo e differente de zero para todos os valores reaes de $x$.

Substituindo $x$ em (38) successivamente pelos numeros $x_1$ e $x_2 > x_1$, e dividindo um dos resultados pelo outro, virá

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1-a_1}{x_2-a_1}\cdot\frac{x_1-a_2}{x_2-a_2}\cdots\frac{x_1-a_m}{x_2-a_m}\cdot\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}.$$

Se para a raiz real $a_k$ é $x_1 < a_k < x_2$, o factor correspondente $\dfrac{x_1-a_k}{x_2-a_k}$ é negativo. Logo o producto precedente é positivo, e $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem o mesmo signal, quando entre $x_1$ e $x_2$ ha um numero par de raizes reaes da equação, ou nenhuma; $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem signaes contrários, quando entre estes limites ha um numero impar de raizes da proposta.

Reciprocamente: *se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem o mesmo signal, entre* $x_1$ *e* $x_2$ *ha um numero par de raizes reaes da equação* $f(x)=0$, porque se este numero fosse impar, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teriam signaes contrários; do mesmo modo; *se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem signaes contrários, entre* $x_1$ *e* $x_2$ *ha um numero impar de raizes da proposta.*

Os termos *maior* e *menor* tomam-se no sentido algébrico, e zero é um caso dos numeros pares.

**105.** Suppondo independente da incógnita o último termo da proposta, do theorema precedente deduzem-se os seguintes corollarios:

1.° *As equações de grau impar teem um numero impar de raizes reaes, de signal contrario ao do seu último termo.*

Seja primeiro, com o signal em evidencia,

$$f(x) = p_0 x^n + \cdots - p_n = 0\,,$$

e $n = 2k + 1$; designando por $l$ o limite superior das raizes positivas d'esta equação, será

$$f(0) < 0,\ f(l) > 0\,,$$

e entre 0 e $l$ haverá um numero impar de raizes.

Se o último termo da equação fôr positivo, o termo correspondente da transformada em $-x$ é negativo *(n.° 84)*, e esta equação tem um numero impar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

2.° *As equações de grau par, com o último termo negativo, teem um numero impar tanto de raizes positivas como de raizes negativas.*

Neste caso será ainda

$$f(0) < 0\,,\ f(l) > 0\,;$$

mas o último termo da transformada em $-x$ conserva-se negativo, e esta equação tem um numero impar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

3.° *As equações de grau par, com o último termo positivo,* *teem um numero par tanto de raizes positivas como de raizes negativas.*

Neste caso é

$$f(0)>0\,,\ f(l)>0\,,$$

tanto na proposta como na transformada em $-x$. As raizes reaes podem ser todas positivas, todas negativas ou faltarem completamente na equação dada.

**106.** Se em (38) substituirmos $x$ por $x_1<a_1$ e depois fizermos crescer $x$ continuamente até $x=x_2>a_m$, o signal d'um dos factores e o de $f(x)$ muda, todas as vezes que $x$ passa por uma das raizes. No intervallo de duas raizes $f(x)$ passa por differentes estados de grandeza, e entre elles haverá, pelo menos, um *máximo* ou um *mínimo*. A funcção é *máxima* na passagem de crescente para decrescente, mínima no caso contrario.

Ora, pela fórmula de Taylor, para qualquer valor de $x$ é

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon\,,$$

designando por $\varepsilon$ uma quantidade que se annulla para $h=0$. Dado um valor $x_0$ de $x$, que não torna $f'(x_0)=0$, pode determinar-se um valor $r$ de $h$ *(n.º 72, cor. 3)* tal, que desde $x_0-r=x_1$ até $x_0+r=x_2$ a expressão precedente tenha o signal de $f'(x_0)$; e estreitando estes limites até não comprehenderem raiz alguma da equação $f'(x)=0$, $f'(x)$ conservará o mesmo signal *(n.º 104)* desde $f'(x_1)$ até $f'(x_2)$.

Posto isto, imaginemos o intervallo $x_2-x_1$ dividido em partes eguaes $\theta$, tão pequenas quanto se quizer, e entre os numeros resultantes

$$x_1,\ x_1+\theta,\ x_1+2\theta,\ldots,\ x_2$$

tomem-se dois consecutivos quaesquer, que designaremos por

$$x_1+(m-1)\,\theta=x',\quad x_1+m\theta=x'+\theta\,.$$

A expressão

$$\frac{f(x'+\theta)-f(x')}{\theta}$$

conserva o signal de $f'(x_0)$ em toda a extensão dos valores de $x$, desde $x_1$ até $x_2$. Por conseguinte, se $f'(x_0)$ é positiva, $f(x)$ é *crescente* desde $f(x_1)$ até $f(x_2)$, pois que em todo o intervallo é $f(x'+\theta)>f(x')$; se $f'(x_0)$ é negativa, a funcção $f(x)$ é *decrescente*.

Temos supposto $f'(x_0)$ differente de zero. Se, porém, fôr $f'(x_0)=0$ e $x_0=x_1+m\theta$ um numero comprehendido entre $x_1$ e $x_2$, estreitem-se estes limites de modo que entre elles não haja outra raiz, além de $x_0$, da equação $f'(x)=0$. Neste caso $f'(x)$ conserva-se positiva, ou negativa, para todos os valores de $x$ desde $x_1$ até $x_1+(m-1)\theta$; e é respectivamente negativa ou positiva, desde $x=x_1+(m+1)\theta$ até $x=x_2$. Logo $f(x)$ é crescente no primeiro intervallo e decrescente no segundo, ou vice-versa; e, pois que $\theta$ se pode tornar menor que qualquer grandeza assignavel, este resultado exprime-se nos seguintes termos:

*A funcção inteira de coefficientes reaes cresce com os valores reaes da variavel emquanto a sua derivada não se torna negativa, e decresce em quanto a derivada não se torna positiva.*

**107.** A variação de grandeza de $f(x)$ muda de sentido, como acabamos de ver, quando a derivada $f'(x)$ passa por zero. Portanto a funcção é *máxima* ou *mínima* para todos os valores reaes da variavel $x$, que sejam raizes da equação

$$f'(x)=0.$$

Se uma d'estas raizes é $x_0$, teremos

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2}[f''(x_0)+\varepsilon],$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade que se annulla para $h=0$. Suppondo $f''(x_0) \gtrless 0$, podemos dar a $h$ um valor $r$ tão pequeno *(n.º 72, cor. 3)* que o signal de $f''(x_0)+\varepsilon$ seja o de $f''(x_0)$, qualquer que seja o signal de $h$; e pois que o factor $\frac{h^2}{2}$ é positivo, o accrescimo $f(x_0+h)-f(x_0)$ terá o signal de $f''(x_0)$ para todos os valores de $h$ desde $h=-r$ até $h=+r$.

D'este modo, se $f''(x_0)$ é *positiva*, as differenças

$$f(x_0-r)-f(x_0)\,, \quad f(x_0+r)-f(x_0)$$

são positivas; por conseguinte é

$$f(x_0-r)>f(x_0)\,, \quad f(x_0+r)>f(x_0)\,,$$

e $f(x_0)$ é *minima*. Se $f''(x_0)$ é *negativa*, será

$$f(x_0-r)<f(x_0), \quad f(x_0+r)<f(x_0)$$

e a raiz $x_0$ corresponde a um *máximo*.

Supponhamos agora que é $f''(x_0)=0$ e representemos por $f^m(x)$ a primeira derivada a partir de $f'(x)$ que não se annulla para $x=x_0$; será

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^m}{m!}[f^m(x_0)+\varepsilon]\,.$$

Se $m$ fôr impar a funcção conserva-se crescente ou decrescente, em quanto $f^m(x)$ se conserva positiva ou negativa; se $m$ fôr par, $f(x_0)$ é máxima ou minima, conforme $f^m(x_0)$ é negativa ou positiva.

# CAPÍTULO VIII.

## Theoremas de Descartes, Budan e Sturm.

**108.** As equações suppõem-se reduzidas á forma $f(x)=0$, ordenadas em sentido decrescente, com o 1.° termo positivo e o último independente de $x$; designaremos por $n$ o grau da proposta.

Dois termos consecutivos de $f(x)$ produzem uma *permanencia* ou uma *variação*, conforme teem o mesmo ou differente signal.

Entre dois termos quaesquer haverá um numero par de variações, ou nenhuma, se ambos teem o mesmo signal. Porquanto, se nos termos intermédios houver mudanças de signal, estas só poderão fazer-se aos pares. A recíproca é evidente.

Se a equação proposta fôr completa, os numeros $p$ e $v$ das suas permanencias e variações hão de satisfazer á condição $p+v=n$; e mudando $x$ em $-x$, as permanencias tornam-se em variações e vice-versa.

Em geral a somma $v+v'$ das variações da proposta e da transformada em $-x$ não pode ser maior que $n$. O último termo de uma equação que só tem raizes imaginárias é positivo *(n.° 105)*, e portanto esta equação tem um numero par de variações.

**109.** A multiplicação da equação $f(x)=0$ por $x-a$, sendo $a$ positivo, introduz no producto a raiz positiva $a$ e um numero impar de variações, uma pelo menos.

Com effeito, a primeira variação da proposta dá-se no primeiro termo negativo de $f(x)$. Designando este termo por $-p_r x^{n-r}$, com $p_r>0$, esta parte de $f(x)$ será, com os signaes em evidencia,

$$(p_1x^n+\cdots+p_{r-1}x^{n-r+1})-(p_rx^{n-r}+\cdots)+\cdots;$$

donde resultam para $(x-a).f(x)=F(x)$ os termos

$$p_0x^{n+1}+\cdots-(ap_{r-1}+p_r)x^{n-r+1}.$$

O termo $p_0x^{n+1}$ é positivo e irreductivel; os termos seguintes podem reduzir-se ou produzir variações, e até pode ser $r=1$. Mas em todo o caso subsistirá o termo com $x^{n-r+1}$, de signal contrário ao primeiro: e entre os dois haverá um numero impar de variações, uma pelo menos.

A segunda variação de $f(x)$ apparece quando se chega novamente a um termo positivo, que designaremos por $p_sx^{n-s}$, com $p_s>0$; e pode ser $s\geqq r+1$. Em todo o caso, dos termos

$$-(p_rx^{n-r}+\cdots+p_{s-1}x^{n-s+1})+(p_sx^{n-s}+\cdots)+\cdots$$

de $f(x)$ resultam para $F(x)$

$$-(ap_{r-1}+p_r)x^{n-r+1}-\cdots+(ap_{s-1}+p_s)x^{n-s+1};$$

e estes dois termos subsistem sempre, produzindo pelo menos uma variação.

Continuando do mesmo modo, ha de chegar-se a um termo $\pm p_{n-r}x^r$ de $f(x)$, em que pode ser $r=0$, e depois do qual não ha variações ate $\pm p_n$ inclusivamente. Em $F(x)$ o termo com $x^{r+1}$ tem o signal de $\pm p_{n-r}$, em quanto que o último $\mp ap_n$ tem signal contrário áquelle. Por conseguinte em $F(x)$ ha pelo menos uma variação mais do que em $f(x)$.

Por outra parte, sendo $p_0x^n$ e $\pm p_n$ os termos extremos de $f(x)$, os de $F(x)$, sempre com os signaes em evidencia, serão $p_0x^{n+1}$ e $\mp ap_n$. Portanto os numeros $v$ e $V$ de variações em $f(x)$ e $F(x)$ são de paridades differentes; e sendo $V>v$, será

$$V-v=2k+1,$$

com $k$ inteiro e positivo ou zero.

**110.** *Theorema de Descartes.* — Sejam $a_1, a_2, \ldots a_m$ todas as raizes positivas da proposta; no producto

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m) \cdot \varphi(x)$$

o factor $\varphi(x)$ é formado unicamente com as raizes negativas e imaginárias da equação $f(x) = 0$.

Designando por $v$ e $v_1$ os numeros de variações de $f(x)$ e $\varphi(x)$, a multiplicação de $\varphi(x)$ por cada um d'aquelles factores binomios introduz no producto um numero impar de variações; portanto será

$$\begin{aligned} v &= v_1 + (1 + 2k_1) + (1 + 2k_2) + \cdots + (1 + 2k_m) \\ &= v_1 + m + 2k . \end{aligned}$$

Mas a equação $\varphi(x) = 0$ não tem raizes positivas, e por isso o seu último termo será positivo *(n.º 104)*, como o 1.º; donde resulta que o numero $v_1$ é par, e a expressão precedente toma a forma

$$v = m + 2l ,$$

sende $l$ inteiro e positivo ou zero.

Mudando $x$ em $-x$ e designando por $v'$ e $m'$ os numeros de variações e de raizes positivas da transformada, estas raizes são raizes negativas da proposta e teremos do mesmo modo $v' = m' + 2l'$. Logo:

*A equação* $f(x) = 0$ *não tem mais raizes positivas do que as variações que ha no seu 1.º membro, nem mais raizes negativas do que as variações da transformada em* $-x$.

O numero das raizes reaes, $m + m'$, é quando muito egual á somma $v + v'$ e a differença, havendo-a, é um numero par. O numero das raizes imaginárias não é inferior á differença $n - (v + v')$.

Se a equação fôr completa, o theorema de Descartes pode enunciar-se nos termos seguintes:

*A equação completa não tem mais raizes positivas do que variações nem mais raizes negativas do que permanencias.*

*Cor. 1.* Sendo positivos todos os termos, é $v=0$ e $m=0$. Sendo todas as raizes reaes e positivas, é $m=n=v$ e $l=0$; a equação é completa, e só tem variações. Sendo $v=1$, é $l=0$ e $m=1$; a equação, que tem só uma variação, tem uma raiz real positiva e só uma. Sendo $v'=1$, é $l'=0$ e $m'=1$; a equação tem uma raiz real negativa.

*Cor. 2.* Sendo reaes todas as raizes, é $m+m'=n=v+v'-2(l+l')$; e pois que $v+v'$ não pode ser superior a $n$, será $l=l'=0$, $v=m$ e $v'=m'$.

**111.** Havendo na equação faltas de termos consecutivos, ou *lacunas*, será em geral $v+v'<n$; neste caso será com mais razão $m+m'<n$, e a proposta tem raizes imaginárias.

Se faltam $2k$ termos entre os dois

$$px^l\,,\quad qx^{l-2k-1}\,,$$

o polynomio

$$F(x)=px^l+q_1x^{l-1}+q_2x^{l-2}+\cdots+qx^{l-2k-1}\,,$$

onde $q_1$, $q_2$, etc. são quaesquer, é completo e tem $2k+2$ termos; de modo que haverá $2k+1$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Por outra parte, os graus dos termos extremos são de differente paridade, e estes termos dão só uma variação para a proposta $f(x)=0$ e para a transformada em $-x$; portanto a falta dos termos intermédios faz perder $2k$ variações, e a equação $fx=0$ tem só por este facto, $2k$ raizes imaginárias.

Se faltam $2k+1$ termos entre os dois

$$px^l\,,\quad qx^{l-2k-2}\,,$$

o polynomio completo

$$F(x) = px^t + q_1 x^{t-1} + \cdots + qx^{t-2k-2}$$

tem $2k+3$ termos, e haverá $2k+2$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Por outra parte os graus dos termos extremos são da mesma paridade, e estes termos podem ter o mesmo ou differente signal em $f(x)$. No primeiro caso não dão variações na proposta e na transformada em $-x$, e estas equações perdem $2k+2$ variações pela falta d'aquelles termos intermédios. No segundo caso os termos extremos de $F(x)$ dão duas variações em $f(x)$ e $f(-x)$, e estes polynomios veem a perder só $2k$ variações. A proposta tem num caso $2k+2$ raizes imaginárias e no outro $2k$, provenientes só da lacuna considerada; e como pode ser $k=0$, se na equação faltar um termo só entre dois de signaes contrários, será $v+v'=n$, como na equação completa, e a proposta pode ter todas as raizes reaes.

**112.** *Theorema de Budan.* — Substitua-se $x$ successivamente por $\alpha$ e por $\beta > \alpha$ em $f(x)$ e em todas as suas derivadas; por baixo das funcções

$$f(x)\ , \quad f'(x)\ , \quad f''(x) \quad \ldots \quad f^n(x) \qquad (i)$$

assentem-se os signaes dos resultados correspondentes em duas linhas $(\alpha)$ e $(\beta)$. As variações da linha $(\beta)$ só podem ser differentes das variações da linha $(\alpha)$, quando alguma das funcções $(i)$ passa por zero no intervallo considerado *(n.º 104)*.

Supponhamos, em primeiro logar, que uma d'estas funcções, $f^p(x)$ por exemplo, passa por zero, sem que succeda o mesmo á antecedente nem á seguinte. Designando por $h$ um numero positivo, teremos (31)

$$f^p(x-h) = f^p(x) - hf^{p+1}(x) + \cdots\ ,$$

$$f^p(x+h) = f^p(x) + hf^{p+1}(x) + \cdots\ ;$$

por onde se vê que para $f^p(x)=0$

$$f^p(x-h) \text{ e } f^{p+1}(x)$$

teem signaes contrários, emquanto que

$$f^p(x+h) \quad \text{e} \quad f^{p+1}(x)$$

teem o mesmo signal, suppondo $h$ tão pequeno que cada um d'aquelles desenvolvimentos tenha o signal do seu primeiro termo significativo (*n.º* 72), e que entre $x-h$ e $x+h$ não haja raiz alguma das equações $f^{p-1}(x)=0$, $f^{p+1}(x)=0$.

D'aqui resulta que as tres funcções

$$f^{p-1}(x)\,,\quad f^p(x)\,,\quad f^{p+1}(x)$$

perdem uma variação nas duas últimas, quando só $f^p(x)$ passa por zero e podem ganhar ou perder outra variação nas duas primeiras; de modo que ao todo perdem duas ou nenhuma. A disposição dos signaes, immediatamente antes e depois do valor $x=a$ que torna $f^p(a)=0$, será alguma das seguintes:

$$\begin{array}{cccc} -+-\,, & ++-\,, & +-+\,, & --+ \\ --- & +-- & +++ & -++\,. \end{array}$$

Quando é $f(x)$ que passa por zero perde se sempre uma variação, porque não ha outra funcção antes d'esta. Logo:

*As funcções* (i) *perdem pelo menos uma variação na passagem de* x *por uma raiz da equação* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$; *e se perderem mais, o excesso é um numero par.*

Supponhamos, em segundo logar, que para o mesmo valor de $x=a$, se annullam algumas funcções consecutivas (*i*) desde $f^m(x)$, até $f^p(x)$ exclusivamente. Designando uma d'ellas por $f^k(x)$ teremos para esta funcção e para a seguinte, que é a sua derivada,

$$f^k(x+h) = \frac{h^p}{p!} f^p(x) + \cdots$$

$$f^{k+1}(x+h) = \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^p(x) + \cdots ;$$

e suppondo $h$ tão pequeno que o signal d'estes desenvolvimentos seja o do 1.º termo respectivo, as expressões precedentes mostram que, em geral, uma funcção, que se annulla para $x=a$ tem signal contrário ao da sua derivada para $x=a-h$ e o mesmo signal d'ella para $x=a+h$.

Por conseguinte as funcções

$$f^m(x) \, , \quad f^{m+1}(x) \, , \quad \ldots \, , \quad f^p(x)$$

dão só variações antes de passarem por zero e só permanencias depois; por forma que ainda neste caso haverá perda de variações, quando se passa por algum valor que annulla uma ou mais funcções ($i$). Se são as primeiras $p$ funcções que se annullam para $x=a$, perdem-se $p$ variações neste logar e a proposta tem $p$ raizes eguaes a $a$ *(n.º 98)*. O principio precedente é, pois, verdadeiro em todos os casos, e

*A equação* $f(x)=0$ *não tem entre* $\alpha$ *e* $\beta$ *mais raizes reaes do que são as variações perdidas pelas funcções (i) quando se passa de* $x=\alpha$ *para* $x=\beta$.

*Cor. 1.* A linha $(-\infty)$ de signaes só tem variações, porque as funcções ($i$) são alternadamente de graus pares e impares. A linha (0) reproduz os signaes do 1.º membro da proposta. A linha (+ 8) só tem permanencias, porque o 1.º termo de cada uma d'aquellas funcções é positivo. Nisto consiste precisamente o theorema de Descartes, que assim se encontra como caso particular do de Budan.

*Cor. 2.* Substituindo $x$ por um numero $l$, para o qual a linha ($l$) só tenha permanencias, não haverá raizes entre $l$ e $\infty$; assim $l$ é um limite superior das raizes positivas da proposta, e o theorema de Newton acha-se contido no de Budan.

*

*Cor. 3.* Se $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ teem signaes contrários e todas as outras funcções $(i)$ conservam os seus signaes para $x=\alpha$ e $x=\beta$, entre $\alpha$ e $\beta$ *ha só uma da raiz da proposta.* Com effeito, entre estes limites haverá neste caso um numero impar de raizes *(n.º 104)*; mas agora ha *uma só*, porque só se perde uma variação. Diz-se então que a raiz está *separada* por $\alpha$ e $\beta$; mas a separação das raizes não pode realisar-se sempre por este processo, porque algumas funcções $(i)$ podem annullar-se simultaneamente com $f(x)$, perdendo-se ao mesmo tempo mais d'uma variação. D'este objecto se tratará adeante.

*Cor. 4.* Pelas linhas de signaes $(\alpha)$ e $(\beta)$ das funcções $(i)$ pode determinar-se um limite superior do numero de raizes reaes comprehendidas entre $\alpha$ e $\beta$; mas não se pode affirmar que as haja imaginárias.

*Cor. 5.* Representando por $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ uma funcção inteira e a sua derivada, se fôr $\varphi(a)=0$ será tambem $\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}=0$, pois que o grau do binomio $x-a$ em $\varphi(x)$ excede uma unidade *(n.º 98)* o grau do mesmo binomio em $\varphi'(x)$. Mas aquella fracção, annullando-se, passa sempre de negativa para positiva.

*Exemplo:* Seja dada a equação

$$x^3-2^2-x+2=0\ ;$$

pelo theorema de Descartes esta equação tem duas raizes positivas ou nenhuma, porque no seu 1.º membro ha duas variações, e uma raiz negativa, porque na transformada em $-x$ ha uma variação.

Formando as funcções $(i)$ e substituindo $x$ successivamente por $-2$, 0 e 3, acham-se as linhas de signaes

$$\begin{array}{lll}(-2) & .. & -+-+ \\ (0) & .. & +--+ \\ (3) & .. & ++++\,.\end{array}$$

Pelo theorema de Budan as raizes positivas, havendo-as, estam entre 0 e 3; a negativa fica entre $-2$ e 0.

**113.** *Theorema de Rolle.* — *Duas raizes consecutivas da equação* $f(x)=0$ *comprehendem um numero impar de raizes da equação derivada* $f'(x)=0$.

Supponha-se a proposta desembaraçada de raizes eguaes, e sejam $a, b, c, \ldots l$ as suas raizes reaes, por ordem ascendente de grandeza. Acabamos de ver que $f(x)$ e $f'(x)$ teem o mesmo signal *logo depois* de um valor de $x$ que é raiz da proposta, e signaes contrários *immediatamente antes*; ou que

$$f(a+h)\,,\quad f'(a+h)$$

teem o mesmo signal, emquanto que

$$f(b-h)\,,\quad f'(b-h)$$

teem signaes contrários. Mas $f(a+h)$ e $f(b-h)$ teem o mesmo signal, porque entre os limites $a+h$ e $b-h$ não existe raiz alguma da proposta; logo $f'(a+h)$ e $f'(b-h)$ teem signaes contrários, donde resulta que a equação $f'(x)=0$ tem um numero impar de raizes, uma pelo menos, comprehendidas entre $a+h$ e $b-h$ ou, no limite, comprehendidas entre $a$ e $b$.

A equação $f'(x)=0$ pode ter raizes inferiores a $a$, mas em numero par; ou superiores a $l$, mas tambem estas em numero par. Com effeito, $f(l+h)$ e $f(\infty)$ são do mesmo signal, e ambas positivas porque a segunda o é; ora $f'(l+h)$ tem o mesmo signal de $f(l+h)$, e portanto $f'(l+h)$ e $f'(\infty)$ teem o mesmo signal. Do mesmo modo $f(a-h)$ e $f(-\infty)$ teem o mesmo signal, porque entre estes limites não ha raiz alguma da proposta; $f(a-h)$ e $f'(a-h)$ são de signaes contrários, bem como $f(-\infty)$ e $f'(-\infty)$ cujos graus são de differente paridade: logo $f'(a-h)$ e $f'(-\infty)$ teem o mesmo signal.

*Cor. 1.* Se todas as raizes forem reaes, haverá entre ellas $n-1$ intervallos e a equação derivada tem tambem todas as raizes reaes. Estas últimas ficam *separadas* pelas primeiras.

*Cor.* 2. Duas raizes da equação derivada não podem comprehender mais de uma da proposta. Se entre as raizes $b'$ e $c'$ da primeira equação houvesse duas $b$ e $c$ da segunda, entre estas últimas não existiria raiz alguma da equação derivada, contra o que se demonstrou. Designando por $a', b', \ldots l'$ as raizes reaes da equação $f'(x)=0$, em ordem crescente de grandezas, os numeros

$$-\infty, \quad a', \quad b', \quad \ldots, \quad l', \quad +\infty$$

são chamados *numeros de Rolle*. Dois d'elles consecutivos não comprehendem raiz alguma da equação $f(x)=0$, ou comprehendem uma só.

*Cor.* 3. Sendo $q$ as raizes distinctas da equação derivada, os numeros de Rolle apresentam $q+1$ intervallos e a proposta não pode ter mais de $q+1$ raizes reaes. Para que sejam reaes todas as raizes d'esta equação é necessário que a derivada tenha $n-1$ raizes differentes; mas a recíproca não é verdadeira. Se em cada um dos $n$ intervallos dos numeros de Rolle houver uma raiz da proposta, estas raizes são todas reaes e fiĉam separadas por aquelles numeros.

*Cor.* 4. Entre duas raizes reaes da equação $f(x)=0$ o polynomio $f(x)$ tem um numero impar de máximos e mínimos *(n.º 107)*.

**114.** Fazendo

$$f(x+h)-f(x)=h.\mathrm{K}\ ,$$

$$y=f(x+z)-f(x)-z\mathrm{K}\ ,$$

derivemos a funcção $y$ em ordem á variavel $z$; a derivada será

$$y'=f'(x+z)-\mathrm{K}\ .$$

Ora sendo $y=0$ para $z=h$ e para $z=0$, será $y'=0$ *(n.º 113)* para um valor de $z$ comprehendido entre $0$ e $h$: ou para $z = \theta h$, sendo $\theta$ positivo e menor que 1. Da última expressão tira-se, pois, $f'(x + \theta h) - K = 0$ ou $K = f'(x + \theta h)$; por onde teremos finalmente

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x + \theta h) .$$

Do mesmo modo, fazendo

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \frac{h^2}{2} . K ,$$

$$y = f(x + z) - f(x) - zf'(x) - \frac{z^2}{2} K ,$$

as duas primeiras derivadas de $y$ serão

$$y' = f'(x + z) - f'(x) - zK ,$$
$$y'' = f''(x + z) - K$$

Ora é $y = 0$ para $z = h$ e para $z = 0$, donde resulta $y' = 0$ para $z = \theta h$; mas é tambem $y' = 0$ para $z = 0$, e portanto será $y'' = 0$ para um valor de $z = \theta_1 h$, comprehendido entre $0$ e $\theta h$. Teremos por conseguinte $K = f''(x + \theta_1)h$ e

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta_1 h) ,$$

com $\theta_1$ positivo e menor que 1. Em geral será

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^p(x + \theta h) .$$

**115.** *Theorema de Sturm.* — Sejam: $f(x)=0$ uma equação sem raizes eguaes; $R_1$, $R_2$, ... R os restos, *com os signaes trocados*, das divisões successivas de $f(x)$ por $f'(x)$ de $f'(x)$ por $R_1$, etc.; $Q_1$, $Q_2$, etc. os quocientes d'estas operações. Os polynomios

$$f(x)\,,\quad f'(x)\,,\quad R_1\,,\quad \ldots\quad R$$

chamam-se *funcções de Sturm*, são de graus decrescentes e o último é um numero differente de zero, pois que a proposta não tem raizes eguaes *(n.º 99)*. Além disto, os mesmos polynomios verificam as duas condições seguintes:

1.ª *Dois d'elles consecutivos não podem annullar-se para o mesmo valor* a *de* x. Os dois primeiros, pela mesma condição de não haver raizes eguaes; dois intermédios $R_{p-1}$ e $R_p$ porque, sendo por definição

$$R_{p-1}=R_p\,.\,Q_{p+1}-R_{p+1}\,,$$

se para $x=a$ fosse $R_{p-1}=0$ e $R_p=0$, seria tambem $R_{p+1}=0$ e depois $R_{p+2}=0$ e assim por deante até $R=0$, contra a hypóthese.

2.ª *Se uma funcção intermédia se annulla para* $x=a$, *a anterior e a seguinte teem signaes contrários para o mesmo valor de* x. Para $R_p=0$, tira-se da relação precedente $R_{p-1}=-R_{p+1}$.

Posto isto, dando a $x$ valores crescentes, desde $x=\alpha$ até $x=\beta>\alpha$, e assentando por baixo de cada funcção o signal do resultado correspondente, a linha d'estes signaes não perde variação alguma quando uma das funcções intermédias $R_p$ passa por zero. Neste instante ha de verificar-se uma das disposições $+\ 0\ -$, ou $-\ 0\ +$; á primeira corresponderia, para um valor de $x$ immediatamente anterior ao valor $a$ que annullou $R_p$, um dos casos

$$++-\,,\quad \text{ou}\quad +--\,,$$

e respectivamente, para um valor de $x$ immediatamente superior a $a$,

$$+--, \quad \text{ou} \quad ++-,$$

visto que $R_{p-1}$ e $R_{p+1}$ não mudam de signal. Do mesmo modo se provaria para $-0+$ que depois da passagem de $R_p$ por zero os tres signaes apresentam a mesma variação que apresentavam antes, a qual se desloca mas não se perde.

Por outra parte, a última funcção R é um numero, e não se annulla para qualquer valor de $x$. Quanto á primeira, se fôr $f(a)=0$, $f(x)$ e $f'(x)$ teem signaes contrários para valores de $x$ immediatamente inferiores a $a$, e teem o mesmo signal logo que $x$ se torna maior que $a$ *(n.º 112)*; neste caso perde-se uma variação nos dois primeiros termos da linha dos signaes.

Continuando a dar valores crescentes a $x$, até chegar a outra raiz $x=b$ da proposta, $f'(x)$ mudará de signal no intervallo de $a$ a $b$, em que *(n.º 115)* se comprehende um numero impar de raizes da equação $f'(x)=0$, sem que esta mudança altere o numero de variações que havia entre $a$ e $b$. Depois de $x=b$, perde-se outra variação, e assim por deante; logo,

*Se nas funcções de Sturm fizermos successivamente* $x=\alpha$ *e* $x=\beta>\alpha$, *o numero das variações perdidas na passagem da primeira linha de signaes para a segunda é egual ao numero de raizes reaes da proposta comprehendidas entre* $\alpha$ *e* $\beta$.

Estes resultados ainda teem logar quando se multiplica ou divide alguma das funcções de Sturm por um numero *positivo*, a fim de evitar o apparecimento de coefficientes fraccionários na divisão respectiva; mas agora não podemos empregar factores *negativos*, como quando se tratava simplesmente da indagação do maior divisor commum entre $f(x)$ e a sua derivada.

*Cor. 1.* Substituindo $x$ por $-\infty$ e $+\infty$, a differença entre os numeros correspondentes de variações é o numero de raizes reaes da proposta.

*Cor. 2.* Sendo completo o grupo das funcções de Sturm, se os primeiros termos d'estas $n+1$ funcções apresentarem $k$ variações a proposta tem $2k$ raizes imaginárias. Com effeito, para $x=+\infty$ as funcções tomam respectivamente os signaes dos seus primeiros termos, com o numero de variações

$$v_{+\infty}=k\ ;$$

para $x=-\infty$ as permanencias tornam-se em variações e

$$v_{-\infty}=n-k\ ,$$

donde resulta finalmente

$$v_{-\infty}-v_{+\infty}=n-2k\ .$$

Para serem todas as raizes reaes, ou $k=0$, é necessário que o grupo das funcções de Sturm seja completo, e que os primeiros termos respectivos tenham o mesmo signal; isto é, que sejam todos positivos como o de $f(x)$.

*Cor. 3.* O theorema é applicavel ao caso de haver raizes eguaes. Sendo então R uma funcção de $x$, que divide todas as funcções de Sturm, effectuem-se estas divisões cujos quocientes representaremos por

$$F(x)\ ,\quad R'\ ,\quad R'_1\ ,\quad \ldots\ ,\quad 1\ .$$

A equação $F(x)=0$ contém todas as raizes da proposta, cada uma d'ellas só uma vez; as novas funcções verificam as condições em que se funda o theorema de Sturm, o qual por isso lhes pode ser applicado.

*Cor. 4.* Fazendo $x=-\infty$ e $x=0$ nas funcções de Sturm, $v_{-\infty}-v_0$ é o numero de raizes negativas da proposta. Do mesmo modo $v_0-v_\infty$ é o numero das raizes positivas.

**116.** *Exemplo.* — Seja dada a equação $f(x)\equiv x^6+3x^4-4x^3+6x^2+12x-18=0$, donde

$$\frac{1}{6}f'(x)=x^5+2x^3-2x^2+2x+2\ ;$$

dividindo $f(x)$ por este polynomio, acha-se o quociente $Q_1 = x$ e o resto $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 10x - 18$. Trocando os signaes, vem

$$R_1 = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18 \ ;$$

e dividindo por $R_1$ o divisor antecedente, resulta o quociente $Q_2 = -x - 2$ e e o resto $x^3 - 10\,x^2 + 19$. Será, pois,

$$R_2 = -x^3 + 10x^2 - 19 \ ;$$

e dividindo $R_1$ por $R_2$ vem o quociente $Q_3 = x + 8$ e o resto $-84\,x^2 + 9\,x + 170$, donde

$$R_3 = 84x^2 - 9x - 170 \ .$$

Dividindo finalmente $R_2$ por $R_3$, acha-se $Q_4 = x + 283$, depois de multiplicar $R_2$ e o primeiro resto por $84$; e o resto d'esta divisão é $-2267x + 2402$, que dá

$$R_4 = 2267\,x - 2402 \ .$$

A divisão seguinte daria o resto $R_5$ independente de $x$.

Fazendo nas funcções

$$f(x)\,,\quad f'(x)\,,\quad R_1\,,\quad R_2\,,\quad R_3\,,\quad R_4\,,\quad R_5$$

$x$ successivamente egual a $-\infty$, $0$ e $+\infty$, acham-se as linhas de signaes

$$\begin{array}{c} + - - + + - + \\ - + + - - - + \\ + + - - + + + \ . \end{array}$$

Na segunda linha perde-se uma variação, e a proposta tem uma raiz negativa. Da segunda linha para a terceira perde-se outra variação, e a proposta tem uma raiz positiva. Da primeira linha para a última perdem-se duas variações, a proposta tem duas raizes reaes e quatro imaginárias.

Pode notar-se que estes resultados são conformes com os principios demonstrados no n.° 105, 2.°.

## CAPÍTULO IX.

### Equações reciprocas. Equações binomias.

**117.** A equação $f(x)=0$ diz-se *reciproca* quando tem as mesmas raizes que a equação $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$; de modo que o 1.° membro da segunda, depois de desembaraçada de denominadores, só poderá distinguir-se de $f(x)$ por algum factor constante $\delta$. Será, pois,

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\delta \cdot f(x) \;;$$

ou, dando a $f(x)$ a forma mais geral do polynomio inteiro de grau $n$,

$$\begin{aligned} &p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \\ &= \delta p_0 x^n + \delta p_1 x^{n-1} + \cdots + \delta p_{n-1} x + \delta p_n \,. \end{aligned}$$

D'esta identidade deduzem-se as relações

$$p_n = \delta p_0 \,, \quad p_{n-1} = \delta p_1 \,, \quad \ldots \quad p_1 = \delta p_{n-1} \,, \quad p_0 = \delta p_n \;;$$

multiplicando as duas extremas uma pela outra, acha-se

$$\delta^2 = 1 \;, \quad \delta = \pm 1 \;,$$

e portanto

$$p_n = \pm p_0 \;, \quad p_{n-1} = \pm p_1 \;, \quad \text{etc.}$$

Se fosse $n = 2k$, haveria em $f(x)$ um termo médio cujo coefficiente designaremos por $p_k$, e entre as relações precedentes se encontraria a seguinte: $p_k = \pm p_k$. Mas esta egualdade só pode subsistir com o signal inferior quando é $p_k = 0$; e portanto:

*A equação recíproca tem os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos eguaes e do mesmo signal; ou numericamente eguaes e de signaes contrários, faltando neste caso o termo médio quando o grau da equação é par.*

**118.** A equação recíproca de grau impar tem a raiz $-1$, quando os termos equidistantes dos extremos são do mesmo signal, e $+1$ quando elles são de signaes contrários; porque em ambos os casos os termos se reduzem dois a dois, dando aquelles valores a $x$.

A equação recíproca de grau par tem, pela mesma razão, as duas raizes $\pm 1$, quando é $p_n = -p_0$, pois que neste caso lhe falta o termo médio.

Da relação $z^2 = 1$ ou $z = \pm 1$ tira-se $z = \dfrac{1}{z}$; por onde se vê que as raizes $+1$ e $-1$ são recíprocas de si mesmas e os casos precedentes estam incluídos na definição das equações recíprocas. É facil reconhecer directamente a existencia d'aquellas raizes, substituindo $x$ por $\pm 1$; bem como a ordem de multiplicidade de cada uma d'ellas, que se determinaria dividindo $f(x)$ por $x \mp 1$ quantas vezes fosse possivel. Tendo effectuado estas divisões, o quociente $\varphi(x)$ será de grau par $2m$, porque as raizes da equação $\varphi(x) = 0$ são, duas a duas, recíprocas umas das outras.

Por outra parte, em $\varphi(x)$ os termos equidistantes dos extremos terão o mesmo signal. Com effeito, para $x = \pm 1$ a relação

$$x^{2m} \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \delta \cdot \varphi(x)$$

torna-se em

$$\varphi(\pm 1)=\delta \, . \, \varphi(\pm 1) \, ,$$

donde se tira $\delta=1$ por ser $\varphi(\pm 1)$ differente de zero.

Por conseguinte a resolução das equações recíprocas vem a depender d'uma da forma

$$p_0 x^{2m}+p_1 x^{2m-1}+\cdots+p_1 x+p_0=0 \, ,$$

com os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos eguaes e do mesmo signal.

Dividindo por $x^m$ e reduzindo os termos do mesmo coefficiente, esta equação torna-se em

$$p_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+p_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\cdots+p_m=0 \, .$$

Mas da relação

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

tira-se, pondo $x+\frac{1}{x}=y$,

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)y-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right) \, ;$$

e fazendo successivamente $k=1, 2, 3, 4$, etc., acham-se as expressões

$$
\begin{aligned}
x+\frac{1}{x}&=y\,,\\
x^2+\frac{1}{x^2}&=y^2-2\,,\\
x^3+\frac{1}{x^3}&=y^3-3y\,,\\
x^4+\frac{1}{x^4}&=y^4-4y^2+2\,,\\
x^5+\frac{1}{x^5}&=y^5-5y^3+5y\,,
\end{aligned}
\tag{i}
$$

e assim por deante. Substituindo estas expressões na equação precedente, resulta a transformada em $y$, de grau $m$; da primeira d'ellas tira-se

$$x^2-yx+1=0\,, \tag{40}$$

e substituindo $y$ nesta equação por cada uma das raizes da transformada, teremos as duas raizes correspondentes da proposta. Logo,

*As equações reciprocas são susceptiveis de abaixamento. A reciproca de grau par, com os termos equidistantes dos extremos do mesmo signal, abaixa-se ao grau sub-duplo.*

**119.** Qualquer das equações

$$x^n \pm A = 0$$

se chama *binomia;* nenhuma d'ellas tem raizes eguaes, porque entre $x^n \pm A$ e a sua derivada não ha divisor commum senão a unidade.

O numero A pode ser real ou imaginário, e em geral faremos

$$A = R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) ;$$

este numero tem, pois, $n$ raizes *distinctas* do grau $n$. Designando uma d'ellas por $a$, será $a^n = A$; e fazendo $x = ay$, a transformada da equação binomia, dividida por $a^n$, será

$$y^n \pm 1 = 0 .$$

A resolução da equação $y^n + 1 = 0$ pode fazer-se depender de outra ou de outras da forma

$$y^n - 1 = 0 , \tag{41}$$

e só esta importa considerar. Com effeito, se $n$ é impar mudando $y$ em $-y$ na primeira equação, resulta logo a segunda. Sendo $n$ par e $k$ o expoente da maior potencia de 2 que se contém em $n$, será $n = 2^k . r$ e $r$ impar; fazendo $2^k = s$ e $y^s = z$, a equação $y^n + 1 = 0$ torna-se em $z^r + 1 = 0$, que está no caso anterior. A equação $y^s = z$ faz-se depender de uma equação da forma $t^s - 1 = 0$, do mesmo modo que da equação $x^n - A = 0$ se passou para $y^n - 1 = 0$.

Teriamos as raizes da equação (41), ou as *raizes da unidade*, dando a $k$ na fórmula (28) todos os valores inteiros desde 1 até $n$; mas as respectivas expressões viriam complicadas com funcções trigonométricas.

As raizes da unidade gosam de propriedades notaveis, que vamos dar a conhecer.

**120.** *As raizes communs ás equações*

$$y^m - 1 = 0 , \quad y^n - 1 = 0$$

*são raizes da equação*

$$y^d - 1 = 0 \,,$$

*em que* d *é o maior divisor commum de* m *e* n.

Com effeito, pelo processo das divisões successivas facilmente se reconhece que $y^d - 1$ é o maior divisor commum de $y^m - 1$ e $y^n - 1$.

Pelo theorema de Descartes, a equação (41) tem só uma raiz real se $n$ é impar, só duas se $n$ é par; aquella raiz é $+1$, e estas são $\mp 1$.

Uma raiz da equação (41) diz-se *primitiva* quando não é raiz de outra equação da mesma forma e de grau inferior. A raiz $+1$ nunca é primitiva; para $n = 2k$ a raiz $-1$ tambem o não é, excepto se fôr $n = 2$.

*Cor. 1.* Se $m$ e $n$ forem primos entre si, as equações $y^m - 1 = 0$ e $y^n - 1 = 0$ só teem a raiz commum $+1$.

*Cor. 2.* Se $n$ fôr numero primo, qualquer raiz imaginária da equação $y^n - 1 = 0$ é primitiva.

**121.** *Qualquer potencia de uma raiz da equação* (41) *é tambem raiz d'esta equação.*

Porque, designando aquella raiz por $\alpha$, teremos $(\alpha^n)^t = (\alpha^t)^n = 1$.

**122.** *Se* $\alpha$ *fôr uma raiz primitiva da equação* (41), *as potencias de* $\alpha$ *desde 1 até* n *darão todas as raizes da mesma equação.*

Em primeiro logar, na série de todas as potencias inteiras, positivas e negativas, de $\alpha$

$$\ldots \; \alpha^{-3} \,, \; \alpha^{-2} \,, \; \alpha^0 \,, \; \alpha^1 \,, \; \alpha^2 \,, \; \ldots$$

não ha mais de $n$ termos differentes. Com effeito, a qualquer inteiro $t$, positivo ou negativo, pode dar-se a forma

$$t = nq + r \,,$$

com $r$ positivo e menor que $n$; d'onde virá

$$\alpha^t = \alpha^r,$$

por ser $\alpha^{nq} = (\alpha^n)^q = 1$.

Por outra parte, sendo $\alpha$ raiz primitiva da equação $y^n - 1 = 0$, se entre os numeros

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^n$$

houver dois eguaes, $\alpha^h = \alpha^k$ por exemplo, d'esta relação tirava-se, suppondo $k > h$ e fazendo $k - h = m < n$,

$$\alpha^{k-h} = \alpha^m = 1,$$

e $\alpha$ seria raiz da equação $y^m - 1 = 0$, contra a hypóthese.

**123.** *A equação* (41) *tem sempre raizes primitivas.*

Com effeito, se $n$ é primo, todas as raizes differentes da unidade são primitivas, como já se disse. No caso contrário, a proposta terá tantas raizes primitivas, quantos forem os inteiros inferiores a $n$ e primos com este numero.

**124.** *Se* n *é o producto de dois factores primos simples,* $n = rs$, *obteem-se todas as raizes da equação* $y^n - 1 = 0$ *multiplicando todas as raizes de* $y^r - 1 = 0$ *por todas as de* $y^s - 1 = 0$.

Neste caso a proposta tem a forma $y^{rs} - 1 = 0$, e as raizes das equações

$$y^r - 1 = 0, \quad y^s - 1 = 0$$

satisfazem á primeira e não são raizes primitivas d'ella. Mas estas raizes, contando a unidade só uma vez, são em numero de $r + s - 1$;

logo o numero de raizes primitivas da equação (41) será agora

$$rs-r-s+1=(r-1)(s-1)$$
$$=n\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right).$$

Se $\beta$ e $\gamma$ forem respectivamente raizes primitivas das equações $y^r-1=0$, e $y^s-1=0$, o producto $\beta\gamma=\alpha$ será raiz primitiva da proposta. Com effeito, de $\beta^r=1$ e $\gamma^s=1$ deduz-se

$$\beta^{rs}=1,\ \gamma^{rs}=1,\ (\beta\gamma)^{rs}=\alpha^n=1\,,$$

por onde se vê que $\alpha$ é raiz da equação (41). E é raiz primitiva, porque no caso contrario só poderia ser raiz de alguma das equações $y^r-1=0$ ou $y^s-1=0$. Ora, se $\alpha$ fosse raiz da primeira, seria $(\beta\gamma)^r=1$, donde $\gamma^r=1$ por ser $\beta^r=1$, e $\gamma$ seria raiz de ambas as equações $y^r-1=0$ e $y^s-1=0$. cujos graus são primos entre si; o que não pode ter logar. Do mesmo modo se veria que $\alpha$ não póde ser raiz da equação $y^s-1=0$.

Na formação das potencias

$$(\beta\gamma),\quad(\beta\gamma)^2,\ldots(\beta\gamma)^n$$

que dariam todas as raizes da proposta, pode sempre abaixar-se o expoente de cada factor de modo que o de $\beta$ não exceda $r$ e o de $\gamma$ não exceda $s$; por conseguinte, formando as linhas

$$\beta^1,\ \beta^2,\ldots\beta^r,$$
$$\gamma^1,\ \gamma^2,\ldots\gamma^s,$$

das raizes das equações $y^r-1=0$ e $y^s-1=0$, e multiplicando cada termo da primeira linha por todos da segunda, resultarão todas as raizes da equação $y^n-1=0$.

*

Do mesmo modo se o grau da equação (42) fôsse o producto de tres factores primos, $n=rst$, as raizes das equações

$$\begin{array}{l} y^r-1=0\,,\quad y^s-1=0\,,\quad y^t-1=0\,,\\ y^{rs}-1=0\,,\quad y^{rt}-1=0\,,\quad y^{st}-1=0 \end{array} \qquad (ii)$$

verificariam a proposta e não seriam raizes primitivas d'ella. Ora, não contando a unidade, o numero das raizes das tres últimas equações é

$$rs+rt+st-3\,;$$

mas este numero encerra duas vezes o das raizes das tres primeiras, pelo que devemos subtrahir da expressão precedente a somma

$$r-1+s-1+t-1\,.$$

Juntando uma unidade á differença, pois que não se attendeu á raiz 1, acharemos o numero

$$rs+rt+st-r-s-t+1$$

das raizes não primitivas; e portanto o numero das raizes primitivas da proposta será a differença do anterior para $n=rst$ ou

$$(r-1)\,(s-1)\,(t-1)=n\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{1}{t}\right).$$

Se $\beta$, $\gamma$ e $\delta$ forem raizes primitivas das equações

$$y^r-1=0\,,\ y^s-1=0\,,\ y^t-1=0\,,$$

o producto $\beta\gamma\delta = \alpha$ será raiz da proposta; porque das identidades

$$\beta^r = 1, \quad \gamma^s = 1, \quad \delta^t = 1$$

se deduz

$$(\beta\gamma\delta)^{rst} = \alpha^n = 1 .$$

E $\alpha$ é raiz primitiva, porque não pode ser raiz de nenhuma das seis equações binomias (ii), únicas cujos graus são inferiores a $n$ e não são primos com $n$.

Facilmente se generalisariam estes resultados para o caso de $n$ ser formado pelo producto de mais de tres factores primos simples.

**125.** *A equação*

$$y^{r^p} - 1 = 0 ,$$

*em que* r *é numero primo, pode resolver-se por meio da equação* $y^r - 1 = 0$.

As raizes não primitivas da equação proposta satisfazem uma equação da mesma forma cujo grau divida $r^p$. Qualquer numero que satisfaz a esta condição, além do mesmo $r^p$, divide $r^{p-1}$; portanto todas as raizes não primitivas da proposta satisfazem a equação

$$y^{r^{p-1}} - 1 = 0 ,$$

e todas as raizes d'esta última equação satisfazem evidentemente a primeira. Logo o numero das raizes primitivas é agora

$$r^p - r^{p-1} = n\left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Se fôr $\beta$ uma raiz primitiva de $y^r - 1 = 0$, o numero

$$\alpha = \sqrt[r^{p-1}]{\beta}$$

é raiz da proposta por ser $\alpha^{r^p} = \beta^r = 1$; e é raiz primitiva, porque no caso contrario seria raiz da equação $y^{r^{p-1}} - 1 = 0$ e portanto

$$\alpha^{r^{p-1}} = \beta = 1,$$

contra a hypóthese.

Se a decomposição de $n$ em factores primos mostrar que o grau da equação (41) tem a forma

$$n = r^p . s^q . t^u,$$

veriamos como nos n.os precedentes que a resolução da proposta vem a depender das tres

$$y^{r^p} - 1 = 0, \quad y^{s^q} - 1 = 0, \quad y^{t^u} - 1 = 0;$$

e estas podem ainda fazer-se depender de $y^r - 1 = 0$, $y^s - 1 = 0$, $y^t - 1 = 0$. Por conseguinte o problema fundamental das equações binomias consiste na resolução da equação da forma (41) e de grau primo.

Os resultados obtidos n'este n.° e no anterior concordam com o que se disse no n.° 123, pois que, se $r, s, \ldots, u$ são os factores primos de $n$, o numero dos inteiros inferiores a $n$ e primos com $n$ é dado pela expressão

$$n\left(1 - \frac{1}{r}\right).\left(1 - \frac{1}{s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{u}\right).$$

**126.** Sendo $n$ primo, á equação recíproca (41) é applicavel o processo do n.° 118.

Divida-se, pois, a proposta pelo binomio $y - 1$, correspondente á raiz real $+1$; teremos no quociente a equação

$$y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1=0,$$

de grau par e com os termos todos positivos.

Fazendo

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

a transformada de grau sub duplo em $z$ terá todas as raizes reaes. Com effeito, designando por $\varphi$ um dos argumentos da expressão (28), será

$$y=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi,\ \frac{1}{y}=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi,$$

por ser (25) o producto $(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi)=1$. D'aquellas duas expressões resulta $z=2\cos\varphi$, e portanto $z$ é um numero real.

Se soubermos resolver a transformada, cada uma das suas raizes se substituirá por $z$ na equação $y^2-zy+1=0$, ou

$$y^2-2y\cos\varphi+1=0; \qquad (42)$$

por onde finalmente se obterão os dois valores correspondentes de $y$.

**127.** *Exemplo:* Dada a equação

$$y^{12}-1=0,$$

começaremos por decompor o seu grau em factores primos, e acharemos $12=2^2\times 3$; teremos pois de resolver as equações

$$y^{2^2}-1=0,\quad y^3-1=0.$$

A primeira depende da equação $y^2-1=0$, cuja raiz primitiva é $-1$; portanto a raiz primitiva d'aquella equação é $\beta=\sqrt{-1}$. Quanto a $y^3-1=0$, dividindo por $y-1$ vem $y^2+y+1=0$, que sabemos resolver por ser do 2.° grau; e assim se acha $\gamma=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ para raiz primitiva de $y^3-1=0$. A quantidade

$$\alpha=\beta\gamma=-\frac{1}{2}(\sqrt{-1}-\sqrt{3})$$

é raiz primitiva da proposta, e elevando $\alpha$ a todas as potencias, desde 1 até 12, teremos

$$\alpha=-\frac{1}{2}(\sqrt{-1}-\sqrt{3}),\ \alpha^2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),\ \alpha^3=-\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

D'este modo se acharia finalmente que

$$y=\pm 1,\ \pm\sqrt{-1},\ \mp\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{-1}\pm\sqrt{3})$$

são todas as raizes da equação $y^{12}-1=0$.

**128.** *Theorema de Cotes.* — Da equação (42) tira-se

$$y=\cos\varphi\pm i\operatorname{sen}\varphi\,,$$

e d'esta expressão resulta por (26) $y^n=\cos n\varphi\pm i\operatorname{sen} n\varphi$. Estes dois valores de $y^n$ são as raizes da equação do 2.° grau

$$y^{2n}-2y^n\cos n\varphi+1=0\,, \tag{43}$$

na qual o coefficiente do 2.° termo, com signal contrario, é a somma d'aquelles valores e o último termo é o producto d'elles.

Sendo conhecidos cos $\varphi$ e cos $n\varphi$, as equações (42) e (43) terão a raiz commum $y=\alpha$; e como são recíprocas, concluiremos que ellas tambem teem a raiz commum $y=\frac{1}{\alpha}$. Assim, havendo entre aquellas equações duas raizes communs, a primeira será divisor da segunda.

Faça-se $n\varphi=k\pi$, sendo $k$ um inteiro qualquer; será $\cos n\varphi = \pm 1$, conforme $k$ fôr par ou impar. D'este modo o trinomio (43) torna-se em $(y^n \mp 1)^2$ e (42) é agora

$$y^2-2y\cos\frac{k\pi}{n}+1\ ;$$

logo, este trinomio divide $y^n \pm 1$, advertindo que, se elle fôr um quadrado, se tomará para divisor a sua raiz.

Esta proposição foi enunciada pela primeira vez por Cotes, que a achou debaixo de uma forma geométrica.

Imagine-se que do centro O, com o raio OA $=1$, se descreve uma circumferencia e que M é um ponto do prolongamento de OA; faça-se OM $=y$ e, a partir de A, divida-se a circumferencia em $2n$ partes, cada uma egual a $\frac{\pi}{n}$. Se se tirar o vector MC para um d'estes pontos de divisão C, e se abaixarmos de C sobre OA a perpendicular que torna a encontrar a circumferencia em L e corta OM em P, do triangulo CMP deduz-se, suppondo COA $=\alpha$,

$$\text{CP}=\operatorname{sen}\alpha\,,\quad \text{OP}=\cos\alpha\,,\quad \text{PM}=y-\cos\alpha\,,$$

$$\begin{aligned}\text{MC}^2&=\text{CP}^2+\text{PM}^2=\\&=y^2-2y\cos\alpha+1=\text{MC}\times\text{ML}\,.\end{aligned}$$

Se o arco AC contiver $k$ divisões, será $\alpha=\frac{k\pi}{n}$; e sendo a expressão de MC$^2$ factor de $y^n \mp 1$, conforme $k$ fôr par ou impar, vê-se que os raios vectores tirados num caso para as divisões pares e no outro para as impares, constituem os factores da equação $y^n \mp 1 = 0$.

Designando por H a outra extremidade do diametro que passa por A, os vectores $MA = y - 1$ e $MH = y + 1$ correspondem aos factores reaes do 1.º grau. Sendo $n$ par, as divisões zero e H conveem á equação $y^n - 1 = 0$; sendo $n$ impar, só convém a esta equação o vector $MA = y - 1$.

É tão simples a construcção, que não pareceu necessario dar aqui a figura respectiva.

**129.** *Equações trinomias.* — Dá-se este nome ás equações da forma

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0 ;$$

donde, fazendo $x^n = z$, resulta a transformada

$$Az^2 + Bz + C = 0 .$$

1.º Se as duas raizes d'esta equação são reaes, designando-as por $a$ e $b$ teremos de resolver as duas equações trinomias $x^n = a$, $x^n = b$ para achar as raizes da proposta.

2.º Se as mesmas raizes são eguaes, será $B^2 - 4AC = 0$, o 1.º membro da proposta é um quadrado $(px^n + q)^2$ e extraindo a raiz quadrada, recáe-se na equação binomia $px^n + q = 0$.

3.º Se as raizes da transformada são imaginarias, ou $B^2 - 4AC < 0$, faremos $Ax^{2n} = Cy^{2n}$ e a proposta transforma-se em

$$y^{2n} + \frac{B}{\sqrt{AC}} y^n + 1 = 0 ,$$

onde o coefficiente de $y^n$ é menor que 2 por ser $B^2 < 4AC$. Podemos pois fazer

$$-\frac{B}{2\sqrt{AC}} = \cos\varphi ,$$

e a última equação, que se torna em

$$y^{2n} - 2y^n \cos\varphi + 1 = 0 ,$$

será divisivel por $y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + 1 = 0$, tomando por $\varphi$ todos os angulos determinados por aquelle valor do coseno.

Assim na equação $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$ é $A = C = 1$, $B = -2$ e $n = 3$; donde $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0, 360°, 720°$ e $\frac{\varphi}{3} = 0, 120°, 240°$. Os trinomios que dão as 6 raizes são $(x-1)^2$ e $(x^2+x+1)^2$, por ser $\cos 120° = \cos 240° = -\frac{1}{2}$.

## Exercícios.

**56.** Resolver a equação $y^5 - 1 = 0$.

**57.** Resolver a equação $y^6 - 1 = 0$. [Raiz primitiva $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$].

**58.** Resolver a equação $y^4 + 1 = 0$. ($k$ impar).

**59.** Resolver a equação $y^6 + 1 = 0$.

**60.** Resolver a equação $y^8 - 1 = 0$. [$y^8 - 1 = (y^4 + 1)(y^4 - 1)$].

**61.** Resolver a equação $y^9 - 1 = 0$.

**62.** Resolver a equação $y^9 + 1 = 0$.

**63.** Resolver a equação $x^6 - 133\, x^3 + 1000 = 0$.

**64.** Resolver a equação $\left(\frac{2x}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{2x}\right)^4 = 2$.

**65.** Resolver a equação $x^4 + x^2 + 25 = 0$.

## CAPÍTULO X.

### Funcções symétricas das raizes.

**130.** *Funcção symetrica* de muitas quantidades é a expressão que não se altera quando essas quantidades se permutam de todas as maneiras possiveis.

Assim os coefficientes de uma equação são funcções symétricas (39) das raizes da mesma equação.

Não tractaremos senão das funcções symétricas racionaes das raizes de uma equação, e veremos que é sempre possivel exprimi-las nos coefficientes da proposta, sem a resolver.

Representaremos por $S_k$ a somma das potencias do grau $k$ das raizes, ou

$$S_k = a^k + b^k + c^k + \cdots + l^k,$$

sendo $a, b, c, \ldots l$ as mesmas raizes; e por $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$ a funcção que tem um termo da fórma $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, e na qual se obteem os outros termos mudando cada uma das letras $a, b \ldots$ em todas as outras successivamente: chama-se *dupla* a funcção $[a^\alpha b^\beta]$, *tripla* a funcção $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$, etc.

**131.** O ponto de partida das *fórmulas de Newton,* que traduzem as relações entre os coefficientes e as funcções S das raizes de uma equação, é a egualdade

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \cdots + \frac{f(x)}{x-l}, \qquad (1)$$

que se deduz da expressão de $f'(x)$ dada no n.° 98, fazendo

$s=t=\cdots=v=1$. Supporemos a equação proposta reduzida á fórma

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p^n=0\,.$$

Pela regra do n.º 66, o primeiro membro da identidade $(i)$ é

$$nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots+2p_{n-2}x+p_{n-1}\,;$$

para o segundo membro a divisão dá immediatamente

$$\frac{f(x)}{x-a}=\begin{array}{r|r|r} x^{n-1}+a & x^{n-2}+a^2 & x^{n-3}+\cdots+a^{n-1} \\ +p_1 & +p_1a & +p_1\,a^{n-2} \\ & +p_2 & +p_2\,a^{n-3} \\ & & \cdots\cdots \\ & & +p_{n-1} \end{array}\,,$$

sem resto porque $a$ é raiz da equação. Mudando $a$ em $b, c, \ldots l$ achariamos os outros termos; e sommando viria, conforme a notação anterior,

$$\begin{aligned} &nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots 2p_{n-2}x+p_{n-1} \\ &\equiv nx^{n-1}+(S_1+np_1)x^{n-2}+(S_2+p_1S_1+np_2)x^{n-3}+\cdots \\ &\qquad +(S_{n-1}+p_1S_{n-2}+\cdots+np_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Por ser identica esta expressão, serão eguaes os coefficientes das mesmas potencias de $x$ nos dois membros; e assim se acham as fórmulas de Newton

$$\begin{aligned} S_0 &= n, \\ S_1 + np_1 &= (n-1)p_1 , \\ S_2 + p_1 S_1 + np_2 &= (n-2)p_2 , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \cdots + p_{n-2} S_1 + np_{n-1} &= p_{n-1} , \end{aligned}$$

ou, fazendo as reducções,

$$\begin{aligned} S_0 &= n , \\ S_1 + p_1 &= 0 , \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 &= 0 , \qquad (44) \\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 &= 0 , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \cdots + p_{n-2} S_1 + (n-1)p_{n-1} &= 0 . \end{aligned}$$

A primeira é evidente, e a segunda já se achou *(n.° 82)*.

Por meio d'estas fórmulas podemos exprimir successivamente $S_0$, $S_1$, $S_2, \ldots S_{n-1}$ em funcção dos coefficientes $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, e reciprocamente. Observemos que os valores das funcções S não terão denominadores, suppondo inteiros os coefficientes da proposta.

Podemos egualmente obter a expressão de qualquer funcção $S_r$, sendo $r$ positivo e maior do que $n-1$. Sendo $a$ uma raiz da equação proposta e multiplicando por $a^m$ a identidade

$$a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \cdots + p_n \equiv 0 ,$$

resulta, suppondo $m$ positivo,

$$a^{n+m} + p_1 a^{n+m-1} + p_2 a^{n+m-2} + \cdots + p_n a^m = 0 .$$

Para as outras raizes achavam-se expressões analogas; sommando-as membro a membro e fazendo $n+m=r$, vem segundo a definição de $S_k$,

$$S_r+p_1 S_{r-1}+p_2 S_{r-2}+\cdots+p_{n-1} S_{r-n+1}+p_n S_{r-n}=0 .$$

Para $r=n$ é $m=0$, e

$$S_n+p_1 S_{n-1}+\cdots+p_{n-1} S_1+p_n S_0=0 ;$$

para $r=n+1$, $r=n+2$, etc., vem do mesmo modo

$$S_{n+1}+p_1 S_n+\cdots+p_{n-1} S_2+p_n S_1=0 ,$$
$$S_{n+2}+p_1 S_{n+1}+\cdots+p_{n-1} S_3+p_n S_2=0,$$

e assim por deante. A primeira das tres ultimas egualdades está ainda comprehendida no typo das fórmulas de Newton, notando que é $S_0=n$.

Para determinar a somma das potencias negativas das raizes, suppondo que todas são differentes de zero, o meio mais simples é mudar na proposta $x$ em $\frac{1}{x}$ e procurar depois pelas fórmulas precedentes as sommas das potencias positivas das raizes da transformada.

**132.** Procuremos agora a expressão de uma *funcção múltipla*. Temos por definição

$$S_\alpha=a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha+\cdots+k^\alpha+l^\alpha ,$$
$$S_\beta=a^\beta+b^\beta+c^\beta+\cdots+k^\beta+l^\beta ;$$

e o producto d'estas duas sommas conterá termos de duas especies: 1.° a somma das potencias $\alpha+\beta$ de todas as raizes; 2.° a somma de todos os productos que se formam combinando a potencia $\alpha$ de uma raiz qualquer com a potencia $\beta$ de outra raiz. Segundo as notações adoptadas, teremos pois

$$S_\alpha \,.\, S_\beta = S_{\alpha+\beta} + [a^\alpha\, b^\beta] \,.$$

Ora $S_\alpha$, $S_\beta$, $S_{\alpha+\beta}$ podem determinar-se em funcção dos coefficientes da proposta; e o mesmo succederá com a funcção dupla

$$[a^\alpha\, b^\beta] = S_\alpha\, S_\beta - S_{\alpha+\beta} \,. \tag{45}$$

Deve modificar-se a fórmula precedente quando fôr $\alpha=\beta$. Neste caso, ao termo $a^\alpha\, b^\beta$ corresponde outro $a^\beta\, b^\alpha$ que lhe é egual; e como succederá o mesmo com os termos restantes, tomados dois a dois, será

$$\left[a^\alpha\, b^\alpha\right] = \frac{1}{2}\left[S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right] .$$

Para achar a *funcção tripla*, multipliquemos a expressão precedente do producto $S_\alpha\, S_\beta$ por $S_\gamma$. O termo $S_{\alpha+\beta}$ dá para o producto termos com uma das duas fórmas

$$a^{\alpha+\beta+\gamma}, \quad a^{\alpha+\beta}\, b^\gamma \,;$$

o termo $[a^\alpha\, b^\beta]$, ou

$$a^\alpha\, b^\beta + a^\alpha\, c^\beta + \cdots + a^\alpha\, l^\beta + b^\alpha\, a^\beta + \cdots + b^\alpha\, l^\beta + \cdots + k^\alpha\, l^\beta \,,$$

dá para o producto termos com uma das tres formas

$$a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}, \quad a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}, \quad a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}.$$

Temos, pois,

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_{\alpha+\beta+\gamma} + [a^{\alpha+\beta} b^{\gamma}] + [a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}] + [a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}] + [a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}];$$

mas a fórmula (45) dá

$$[a^{\alpha+\beta} b^{\gamma}] = S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$[a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}] = S_{\alpha+\gamma} S^{\beta} - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$[a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}] = S_{\beta+\gamma} S^{\alpha} - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$

e substituindo estes valores na equação precedente tira-se d'ella a expressão da funcção tripla

$$[a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}] = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}.S_\beta - S_{\beta+\gamma}.S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Esta fórmula terá de ser modificada se forem eguaes dois dos expoentes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ou todos tres.

1.° $\alpha = \beta$. Os dois primeiros termos do 2.° membro tornam-se em

$$\left[S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right] S_\gamma = 2\left[a^{\alpha} b^{\alpha}\right] S_\gamma;$$

e os restantes são

$$-2\,[S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma}] = -2\,[a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}].$$

Por onde, supprimindo o factor 2, se chega á relação

$$[a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\gamma}] = [a^{\alpha} b^{\alpha}] S_\gamma - [a^{\alpha+\gamma} b^{\alpha}].$$

2.° $\alpha=\beta=\gamma$. Ha na funcção tantos termos eguaes a $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ quantas são as permutações possiveis das letras $a$, $b$, $c$, isto é, 6; logo, para ter sómente a somma dos termos differentes é preciso dividir as fórmulas geraes por 6.

**133.** Appliquemos os principios expostos á indagação da equação ao quadrado das differenças.

Supponhamos que á equação $f(x)=0$, cujas raizes são $a, b, c, \ldots$, corresponde a equação ao quadrado das differenças

$$Fz=z^m+Pz^{m-1}+Qz^{m-2}+\cdots+U=0,$$

cujos coefficientes pretendemos determinar.

Para qualquer das raizes temos

$$(x-a)^l=x^l-lax^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}a^2x^{l-2}\ldots\pm a^l;$$

sommando o segundo membro d'esta egualdade com os segundos membros das egualdades similhantes que se formariam com as outras raizes da proposta, o resultado será

$$nx^l-lS_1x^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2x^{l-2}-\frac{l(l-1)(l-2)}{3!}S_3x^{l-3}+\cdots\pm S_l.$$

Mudando successivamente $x$ em $a, b, c, \ldots$ virão as sommas totaes respectivas

$$(a-b)^l+(a-c)^l+\cdots=na^l-lS_1a^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2a^{l-2}+\cdots\pm S_l,$$

$$(b-a)^l+(b-c)^l+\cdots=nb^l-lS_1b^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2b^{l-2}+\cdots\pm S_l,$$

etc.

Sommemos estas últimas equações. A somma dos primeiros membros torna-se na somma das potencias $l$ das differenças de todas as raizes, subtrahidas duas a duas; a somma dos segundos torna-se em

$$nS_l - lS_1 S_{l-1} + \frac{l(l-1)}{2} S_2 S_{l-2} \ldots \pm nS_l \, .$$

Se $l$ for impar nada se póde deduzir d'esta fórmula, porque no primeiro membro as differenças são eguaes duas a duas com signaes contrários, e as suas potencias impares destroem-se reciprocamente. No segundo membro os termos equidistantes dos extremos teem os mesmos coefficientes, os mesmos índices de S e signaes contrários. Assim aquella expressão reduz-se a $0=0$.

Porém se $l$ for par, as potencias das differenças são eguaes duas a duas, com os mesmos signaes; o mesmo succederá no segundo membro aos termos equidistantes dos extremos, ficando isolado o termo medio. Podemos pois dividir toda a equação por 2, depois de reduzida; os termos simplificam-se, e só o do meio no segundo membro terá o factor $\frac{1}{2}$.

Assim, suppondo $l=2i$ e designando por $2i$, $A'$, $A''$,... os coefficientes do binomio para este expoente, teremos, representando por $\Sigma_i$ a somma das potencias $i$ dos quadrados das differenças,

$$\Sigma_i = nS_{2i} - 2iS_1 S_{2i-1} + A'S_2 S_{2i-2} - A''S_3 S_{2i-3}$$
$$+ \cdots \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{i!} (S_i)^2 \, .$$

Os coefficientes são os numeros da linha $2i$ do triangulo de Pascal, devendo parar-se no termo do meio e tomar-lhe metade.

*

D'onde se conclue

$$\Sigma_1 = nS_2 - S_1^2$$
$$\Sigma_2 = nS_4 - 4S_1 S_3 + 3S_2^2$$
$$\Sigma_3 = nS_6 - 6S_1 S_5 + 15S_2 S_4 - 10S_3^2$$
etc.

Posto isto, achada a serie dos S, da equação precedente tiramos, para $i=1$, os valores de $(a-b)^2+(a-c^2)$.. ; e assim obteremos a somma das primeiras potencias das raizes de F(z), ou $-P$ (*n.° 82*). Finalmente as equações (44) dão os coefficientes da equação ao quadrado das differenças

$$P + \Sigma_1 = 0\ ,$$
$$2Q + P\Sigma_1 + \Sigma_2 = 0\ ,$$
$$3R + Q\Sigma_1 + P\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0\ ,$$
etc.

O grau da equação será $m = \frac{1}{2}\, n\,(n-1)$, numero das combinações que se podem fazer com as $n$ raizes da proposta, tomadas duas a duas. O numero dos coefficientes será $m$; e portanto é tambem $m$ o índice do último $\Sigma$ e $2m$ o do último S.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^3 + qx + r = 0\ ;$$

as funcções S são

$[3]$, $[0]$, $[-2q]$, $[-3r]$, $[2q^2]$, $[5qr]$, $[-2q^3+3r^2]$, e do mesmo modo teremos para os $\Sigma$

$$[-6q], \quad [18q^2], \quad [-66q^3-81r^2].$$

Logo será

$$P=6q, \quad Q=9q^2, \quad R=27r^2+4q^3,$$

e

$$z^3+6qz^2+9q^2z+27r^2+4q^3=0$$

é a equação aos quadrados das differenças das raizes da proposta.

# CAPÍTULO XI.

## Eliminação.

**134.** A fórma mais geral da equação algébrica e inteira do grau $n$ a duas variaveis $x$ e $y$, ordenada segundo as potencias decrescentes de $x$, é

$$f(x,y)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

sendo $p_k$ funcção só de $y$ e de grau $k$.

Em geral, a determinação de todas as soluções $x=\alpha$ com $y=\beta$ de um systema de duas equações, $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, faz-se depender de outra equação que só contém uma das incógnitas e que se chama *equação final*. Esta equação obtem-se por processos de *eliminação* da outra incógnita, dos quaes vamos expôr os principaes.

Em alguns casos a eliminação pode fazer-se por processos particulares. Sejam, por exemplo, as equações

$$x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + px + q = 0 ;$$

subtrahindo uma da outra, da equação resultante $(P-p)x+Q-q=0$ tira-se o valor de $x$, e substituindo este valor numa das propostas resulta immediatamente a equação final $(Q-q)^2 + q(P-p)^2 = p(Q-q)(P-p)$.

**135.** Supponhamos que $x=\alpha$ e $y=\beta$ é uma solução do systema

$$f(x,y) = 0, \quad F(x,y) = 0 ;$$

substituindo $x$ por $\alpha$, as equações

$$f(\alpha,y) = 0, \quad F(\alpha,y) = 0$$

serão satisfeitas pela raiz $y=\beta$ e terão por conseguinte um divisor commum. Assim, a equação final do systema corresponderá á condição de existencia de um divisor commum entre $f(x,y)$ e $F(x,y)$.

Ordenem-se estes polynomios segundo as potencias decrescentes de uma das variaveis $x$ Operando sobre elles por meio de divisões successivas, como na indagação do seu maior divisor commum, ha de chegar-se a um resto R independente de $x$; e $R=0$ será a equação final procurada.

Pode acontecer que R seja um numero. Neste caso a equação $R=0$ é impossivel, e as propostas são incompativeis.

Tambem pode ser R identicamente nullo. Então o divisor correspondente D é divisor commum das equações dadas, que terão a forma

$$f(x,y) \equiv A \times D = 0 \ , \quad F(x,y) \equiv B \times D = 0 \ ;$$

e as raizes da equação $D = 0$ resolvem o problema, além d'aquellas que são dadas pelo systema $A = 0$ com $B = 0$.

Em D pode haver algum factor X que seja só funcção de $x$, ou algum factor Y que seja só funcção de $y$. Em geral será

$$D \equiv X \times Y \times \varphi(x,y) \ ,$$

e a equação $D = 0$ parte-se nas tres

$$X = 0 \ , \quad Y = 0 \ , \quad \varphi(x,y) = 0 \ .$$

As duas primeiras determinam certos valores de uma das incógnitas, deixando a outra arbitrária; pela última determinam-se os valores de uma das incógnitas correspondentes aos valores dados arbitrariamente á outra.

Pondo de parte as soluções indeterminadas, devidas á equação $D = 0$, só tratamos da eliminação entre as equações $A = 0$ e $B = 0$ cujos 1.os membros são os quocientes da divisão das propostas por D.

No processo do maior divisor commum se funda o primeiro méthodo de eliminação que vamos expôr. Mas convém demonstrar primeiro uma proposição, a que teremos de recorrer no desenvolvimento d'este objecto.

**136.** *Lemma.* — *Sejam* A *e* B *dois polynomios inteiros em* x *e* y, *ordenados segundo as potencias de* x, *e supponhamos que em cada um d'elles os coefficientes das differentes potencias de* x *não admittem divisor commum; se fôr* c *funcção inteira de* y *sómente e* Q *funcção, tambem inteira, de ambas as variaveis ou de uma só, e se, por outra parte, fôr* $BQ = cA$, *será o factor* Q *divisivel por* c.

Seja $y-\alpha$ um dos factores lineares de $c$. Por hypóthese, B não é divisivel por $y-\alpha$, aliás os coefficientes dos termos de B teriam este divisor commum; portanto, dividindo B por $y-\alpha$ e representando por L e K o quociente e o resto, na identidade

$$B \equiv (y-\alpha)L+K$$

será K independente de $y$ e differente de zero. Substituindo em $cA=BQ$, vem

$$cA \equiv (y-\alpha)LQ+KQ\ ,$$

e KQ será divisivel por $y-\alpha$, porque o 1.° membro d'esta identidade tambem o é.

Ora dividindo Q por $y-\alpha$, virá

$$Q \equiv (y-\alpha)L'+K'\ ,$$

com $K'$ independente de $y$, e teremos

$$KQ \equiv (y-\alpha)KL'+KK'\ :$$

portanto $KK'$ será, como KQ, divisivel por $y-\alpha$, se não fôr $KK'=0$. O primeiro caso não se verifica, porque K e $K'$ são independentes de $y$; mas é tambem K differente de 0, e portanto será finalmente $K'=0$ e Q divisivel por $y-\alpha$.

Do mesmo modo se veria que Q é divisivel por cada um dos factores lineares de $c$; por conseguinte será tambem Q divisivel por $c$, como queriamos demonstrar.

**137.** *Méthodo de Labatie.* — Supponhamos os polynomios A e B ordenados segundo as potencias de $x$ e que, relativamente a esta incógnita, o grau de B não excede o de A. Designando por Q e R o quociente e o resto da divisão de A por B, teremos

$$A = BQ + R\ .$$

Se em Q não ha coefficientes fraccionarios, com denominadores que contenham $y$ e possam annullar-se para valores particulares d'esta incógnita, a identidade precedente mostra que os systemas $A=0$ com $B=0$ e $B=0$ com $R=0$ teem as mesmas soluções; o que podemos exprimir pela relação

$$\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} B=0 \\ R=0 \end{matrix}\right\}.$$

Ora, não póde estabelecer-se esta equivalencia, senão quando Q é funcção inteira de $y$. Mas evita-se o apparecimento de fracções no quociente, multiplicando o dividendo por um factor que dependerá do coefficiente do 1.º termo do divisor *(n.º 81)*; representaremos este factor por $c$.

Além d'isto o primeiro resto será ainda, em geral, funcção de $x$ e $y$, e passa para divisor na segunda divisão. Nesta operação o dividendo tem de multiplicar-se, como anteriormente, por um factor $c_1$, que depende do coefficiente do 1.º termo de R, a fim de evitar o apparecimento de coefficientes fraccionarios. Convém pois simplificar os coefficientes de R, dividindo-os pelo seu maior divisor commum $r$, que é funcção só de $y$; e assim por deante.

Supponhamos que o resto da terceira divisão já é independente de $x$, o que não prejudica a generalidade dos resultados; pelo que se acaba de ver, o quadro das operações effectuadas será

$$\begin{aligned} cA &= BQ + r.R\ , \\ c_1B &= RQ_1 + r_1.R_1\ , \\ c_2R &= R_1Q_2 + r_2\ , \end{aligned} \qquad (i)$$

sendo $r_2$ funcção de $y$ sómente.

Da primeira d'estas identidades resulta a equivalencia dos systemas

$$\left.\begin{matrix} cA=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} B=0 \\ r.R=0 \end{matrix}\right. .$$

que se dividem nos quatro

$$\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} c=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} B=0 \\ R=0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} B=0 \\ r=0 \end{matrix}\right. ;$$

e designaremos estes systemas respectivamente por **1**, **2**, **3** e **4**.

Quando o systema proposto **1** se substitue por **3**, introduzem-se as soluções extranhas do systema **2** e supprimem-se as que pertencem a **4**. Ora, se $c$ e $r$ tiverem um divisor commum $d$, podemos supprimil-o porque este factor é introduzido na multiplicação por $c$, mas desapparece na divisão por $r$; em outros termos, as raizes da equação $d=0$ pertencem a $c=0$ e a $r=0$, e reduzem-se num e noutro membro da equivalencia anterior. Dividindo por $d$, a primeira identidade (*i*) torna-se em

$$\frac{c}{d}A \equiv \frac{Q}{d}B + \frac{r}{d}R ; \qquad (ii)$$

e o factor que multiplica B é inteiro porque, sendo inteiros $\frac{c}{d}$ e $\frac{r}{d}$, QB será divisivel por $d$ e pelo lemma *(n.º 136)* $d$ dividirá Q.

Pela identidade (*ii*) o systema primitivo fica substituido pelos dois

$$\left.\begin{matrix} B=0 \\ \frac{r}{d}=0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} B=0 \\ R=0 \end{matrix}\right. ; \qquad (iii)$$

e no segundo d'estes systemas ainda podem comprehender-se raizes extranhas, que tenham provindo da multiplicação de A pelo factor $\frac{c}{d}$.

Passando para a segunda identidade $(i)$, veriamos do mesmo modo que o factor $c_1$ pode introduzir raizes extranhas; suppri-mem-se estas, e as que ainda possa haver no último systema $(iii)$, pelo processo seguinte.

Multipliquem-se ambos os membros de $(ii)$ por $c_1$, e depois substitua-se $c_1 B$ pela segunda identidade $(i)$; teremos

$$\frac{cc_1}{d} A = \frac{c_1 r + QQ_1}{d} R + \frac{Q}{d} r_1 R_1 .$$

O factor que multiplica R é inteiro *(n.° 136)*, porque $d$ divide $cc_1$ e Q, e não divide R; representando aquelle factor por M e $\frac{Q}{d}$ por N, a identidade precedente torna-se em

$$\frac{cc_1}{d} A = MR + Nr_1 R_1 .$$

Multiplique-se a segunda identidade $(i)$ por $\frac{c}{d}$, e represen-tem-se por $M'$ e $N'$ os multiplicadores inteiros de R e $r_1 R_1$; teremos

$$\frac{cc_1}{d} B = M'R + N'r_1 R_1 .$$

As duas últimas identidades mostram a equivalencia dos systemas

$$\left.\begin{matrix} R = 0 \\ r_1 R_1 = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{cc_1}{d} A = 0 \\ \frac{cc_1}{d} B = 0 \end{matrix}\right\},$$

onde são extranhas ao problema as soluções da equação

$$\frac{cc_1}{d}=0 .$$

Mas se o 1.° membro d'esta equação tiver um divisor commum com $r_1$, que representaremos por $d_1$, podemos supprimil-o como anteriormente, e aquellas identidades tornam-se em

$$\frac{cc_1}{dd_1}A=\frac{M}{d_1}R+N\frac{r_1}{d_1}R_1 ,$$

$$\frac{cc_1}{dd_1}B=\frac{M'}{d_1}R+N'\frac{r_1}{d_1}R_1 .$$

Nestas expressões $\frac{M}{d_1}$ e $\frac{M'}{d_1}$ são inteiros, e podiamos continuar com o mesmo raciocinio nas operações seguintes. Ora a equação final será o producto de todas as funcções de $y$ que, egualadas a zero, traduzem condições de existencia de um maior divisor commum entre A e B, sem representarem outras condições extranhas a esta. Designando por $d_2$ o maior divisor commum de $r_2$ e $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$, a equação final é pois

$$\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=0 ,$$

porque a condição necessaria e sufficiente para se verificar esta equação é que um dos respectivos factores seja zero.

**138.** *Methodo de Euler.* — Sejam as equações

$$f_1(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0 ,$$
$$f_2(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 ,$$

e admittamos que ellas teem a raiz commum $x = r$. Se esta raiz fôr única, os quocientes

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} ,$$
$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} ,$$

da divisão dos dois polynomios $f_1$ e $f_2$ por $x - r$ não terão divisor commum; de modo que a fracção

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1}}{\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}}$$

não pode ser indeterminada nem é susceptivel de forma mais simples. Desembaraçando de denominadores resulta a egualdade

$$f_1(x) . (\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1})$$
$$- f_2(x) . (\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots \alpha_{m-1}) \equiv 0 ,$$

conhecida pelo nome de *identidade de Euler*.

O primeiro membro d'esta egualdade é do grau $m + n - 1$ e, em geral, tem $m + n$ termos, cujos coefficientes, pela condição de identidade, devem ser zero: o que leva ao estabelecimento de $m + n$ equações lineares entre as $m + n$ quantidades $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{m-1}$, $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{n-1}$, de que esses coefficientes são funcções.

Os coefficientes $\alpha$ não podem ser todos nullos, nem todos os $\beta$; logo aquellas $m + n$ equações, que são homogeneas, deverão ter soluções differentes do zero. É pois necessario que o seu eliminante $\Delta$ seja egual a zero, sem que os seus primeiros menores sejam todos nullos. O eliminante $\Delta$ é funcção dos coefficientes das propostas; a equação $\Delta = 0$ que exprime a existencia da raiz commum, é a *resultante* do systema e dá as razões de $m+n-1$ d'aquellas quantidades para a restante, de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \beta_{n-1}$ para $\alpha_0$ por exemplo.

Supponhamos agora que $s > 1$ é o numero de *todas* as raizes communs das equações dadas. Dividindo cada uma d'estas equações pelos factores binomios correspondentes áquellas raizes, os quocientes são respectivamente dos graus $m-s$ e $n-s$, não podem ser simultaneamente nullos, nem admittem já raiz commum. O primeiro d'estes polynomios tem $m-s+1$ termos e o segundo $n-s+1$; os dois comprehendem ao todo $m+n-2s+2$ coefficientes, que dependem dos coefficientes das propostas. A identidade de Euler toma então a forma

$$f_1(x)\,(\beta_{s-1}x^{n-s} + \cdots + \beta_{n-1})$$
$$- f_2(x)\,.\,(\alpha_{s-1}x^{m-s} + \cdots + \alpha_{m-1}) = 0\ ;$$

dividindo-a por um dos coefficientes, $\alpha_{s-1}$ por exemplo, esta egualdade envolve as $m+n-2s+1$ fracções

$$\frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{s-1}},\quad \frac{\beta_s}{\alpha_{s-1}},\quad \cdots,\quad \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_{s-1}},$$

que devem ter valores determinados.

Por outra parte, egualando a zero os coefficientes das diversas potencias de $x$ na identidade precedente, de grau $m+n-s$, resultam $m+n-s+1$ equações; se entre ellas puzermos de parte $m+n-2s+1$ e por meio d'estas acharmos os valores d'aquellas fracções, as $s$ equações restantes serão satisfeitas por estes valores e assim teremos $s$ relações entre os coefficientes do systema, as quaes traduzem as condições necessarias e sufficientes para que as equações d'este systema tenham $s$ raizes communs. Finalmente, a equação de grau $s$

$$\frac{f_1(x)}{\alpha_{s-1}x^{m-s}+\cdots+\alpha_{m-1}}=0$$

dará estas raizes.

Como applicação do méthodo, resolvamos as equações

$$3y^2+4xy+3x^2-9y-15x=0\ ,$$
$$y^2-2xy+\ x^2+2y-10x=0\ .$$

Ordenando segundo a incognita $x$, vem

$$3x^2+(4y-15)\,x+3y^2-9y=0\ ,$$
$$x^2-(2y+10)\,x+\ y^2+2y=0\ ;$$

e a identidade fundamental é

$$[3x^2+(4y-15)x+3y^2-9y]\,(\beta_0x+\beta_1)$$
$$-[x^2-(2y+10)x+y^2+2y]\,(\alpha_0x+\alpha_1)=0\ .$$

Ordenando ainda pelas potencias de $x$, e egualando a zero os coefficientes de cada termo, temos as equações:

$$\begin{aligned}
&3\beta_0 && -\alpha_0 && =0\ ,\\
&(4y-15)\beta_0 + 3\beta_1+(10+2y)\alpha_0 && -\alpha_1 && =0\ ,\\
&(3y^2-9y)\beta_0+(4y-15)\beta_1-(y^2+2y)\alpha_0+(10+2y)\alpha_1 && && =0\ ,\\
&(3y^2-9y)\beta_1 && -(y^2+2y)\alpha_1 && =0\ .
\end{aligned}$$

A resultante do systema proposto é o determinante d'estas equações egualado a zero, ou

$$\begin{vmatrix} 3 & & 1 & \\ 4y-15 & 3 & -(10+2y) & 1 \\ 3y^2-9y & 4y-15 & y^2+2y) & -(10+2y) \\ & 3y^2-9y & & y^2+2y \end{vmatrix} = 0 ,$$

onde, por brevidade, não escrevemos os elementos zero. Para desenvolver este determinante, troquemos a 2.ª e 3.ª columna, d'onde resulta

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & & \\ 4y-15 & -(10+2y) & 3 & 1 \\ 3y^2-9y & y^2+2y & 4y-15 & -(10+2y) \\ & & 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix} = 0 .$$

Desenvolvendo segundo os menores de 2.ª ordem contidos nas duas primeiras columnas, vem

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4y-15 & -(10+2y) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4y-15 & -(10+2y) \\ 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix}^2 = 0 ;$$

nos outros termos um dos factores é zero, por ter uma linha de zeros. Desenvolvendo, e supprimindo o factor numérico, acha-se a resultante do systema

$$y(y^3+2y^2-9y-28)=0 ,$$

de grau $2\times 2$; para $y=0$, a primeira das equações propostas daria $x=0$, $x=5$.

**139.** *Méthodo dialytico.* (Sylvester).—Considerando o mesmo systema $f_1(x)=0$ e $f_2(x)=0$ (*n.° 138*), multipliquemos $f_1(x)$ pelas potencias $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ e $f_2(x)$ por $x^0, x^1, \ldots, x^{m-1}$. Se as equações propostas teem a raiz commum $r$, esta raiz satisfará a todas as equações do systema seguinte, chamadas *equações de Sylvester :*

$$f_1=0\,,\quad xf_1=0\,,\quad x^2 f_1=0\,,\quad \ldots\,,\quad x^{n-1} f_1=0\,,$$
$$f_2=0\,,\quad xf_2=0\,,\quad x^2 f_2=0\,,\quad \ldots\,,\quad x^{m-1} f_2=0\,;$$

e tomando para incógnitas as $m+n-1$ primeiras potencias de $x$, recahimos no caso de $m+n$ equações lineares com $m+n-1$ incógnitas. Para que estas equações tenham uma solução commum, o determinante de todos os coefficientes dos primeiros membros deve ser zero, como se viu no n.° 56; a solução commum será uma só, quando em um grupo de $m+n-1$ equações do systema o determinante dos coefficientes das incógnitas fôr differente de zero.

Sejam por exemplo

$$f_1 \equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0\,,$$
$$f_2 \equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0\,.$$

As equações de Sylvester, ordenadamente dispostas, são:

$$a_5x^2 + a_4x^3 + a_3x^4 + a_2x^5 + a_1x^6 + a_0x^7 = 0\,,$$
$$a_5x + a_4x^2 + a_3x^3 + a_2x^4 + a_1x^5 + a_0x^6 = 0\,,$$
$$a_5 + a_4x + a_3x^2 + a_2x^3 + a_1x^4 + a_0x^5 = 0\,,$$
$$b_3 + b_2x + b_1x^2 + b_0x^3 = 0\,,$$
$$b_3x + b_2x^2 + b_1x^3 + b_0x^4 = 0\,,$$
$$b_3x^2 + b_2x^3 + b_1x^4 + b_0x^5 = 0\,,$$
$$b_3x^3 + b_2x^4 + b_1x^5 + b_0x^6 = 0\,,$$
$$b_3x^4 + b_2x^5 + b_1x^6 + b_0x^7 = 0\,.$$

Na segunda d'estas equações deve subentender-se que os termos em $x^0$ e $x^7$ teem por coefficiente zero; o mesmo se dirá das outras, com relação ás potencias de $x$ que faltam em cada uma, desde $x^0$ até $x^7$.

Não escrevendo os coefficientes zero, a resultante das equações precedentes é

$$R = \begin{vmatrix} & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

e R chama-se o *eliminante de Sylvester*. A resultante $R=0$ exprime a condição *necessaria* para que as equações dadas tenham uma raiz commum; esta condição é *sufficiente*. Com effeito fazendo nas equações *de Sylvester* $m=5$ e $n=3$, multiplicando-as respectivamente pelos primeiros menores $A_1, A_2 \ldots A_8$ de R relativos aos elementos de qualquer columna, da primeira por exemplo, e suppondo que nem todos estes factores são nullos, resulta, sommando os productos,

$$\begin{gathered}(A_1x^2+A_2x+A_3)\,f_1 \\ +(A_4+A_5x+A_6x^2+A_7x^3+A_8x^4)\,f_2=0\ .\end{gathered}$$

Esta expressão é identica; porquanto, pondo por $f_1$ e $f_2$ as suas expressões, effectuando as multiplicações e ordenando, o coefficiente de cada potencia de $x$ é a somma dos productos d'aquelles menores pelos elementos de uma columna de R; e pelas duas propriedades dos menores essas sommas são nullas, visto que é $R=0$. Posto isto, se naquella identidade um dos menores $A_1, A_2, A_3$ fôr differente de zero, tambem um dos restantes o será, e reciprocamente: aliás, ou $f_1=0$ ou $f_2=0$ seria uma identidade. Portanto nenhum dos quatro factores da expressão precedente é identicamente nullo e $f_2$, que é do terceiro grau, divide $(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) f_1$; isto é, $f_2$ tem com $f_1$ um factor commum que será, pelo menos, do primeiro grau.

Se as equações propostas teem outra raiz commum $r'$, esta raiz convirá ao systema

$$\frac{f_1}{x-r}=f_3=0\,,\quad \frac{f_2}{x-r}=f_4=0\,,$$

sendo os quocientes $f_3$ e $f_4$ polynomios do 4.° e 2.° grau que podemos representar por

$$f_3 \equiv c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$
$$f_4 \equiv d_0 x^2 + d_1 x + d_2\,,$$

Os novos coefficientes $c$ e $d$ estão ligados com os antigos $a$ e $b$ pelas relações

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1-rc_0,\ a_2=c_2-rc_1,\ a_3=c_3-rc_2$$
$$a_4=c_4-rc_3,\ a_5=-rc_4$$
$$b_0=d_0, b_1=d_1-rd_0, b_2=d_2-rd_1, b_3=-rd_2$$

formadas segundo o principio do n.° 65; notando que é nullo o resto de cada divisão.

Posto isto, a resultante de Sylvester para as equações $f_3=0$ e

$f_1 = 0$ é

$$R_1 = \begin{vmatrix} & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \\ d_2 & d_1 & d_0 & & & \\ & d_2 & d_1 & d_0 & & \\ & & d_2 & d_1 & d_0 & \\ & & & d_2 & d_1 & d_0 \end{vmatrix} = 0\,;$$

subtrahindo respectivamente as columnas 2, 3, 4, 5 e 6, multiplicadas por $r$, das columnas 1, 2, 3, 4 e 5, e attendendo ás relações precedentes, resulta

$$R_1 = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Comparando $R_1$ com o eliminante R de $f_1$ e $f_2$, reconhece-se que o quadro precedente se obtém apagando as duas columnas extremas de R; e $R_1$ chama-se o *primeiro menor principal* de R.

O primeiro menor principal de $R_1$ seria

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & & \\ b_2 & b_1 & b_0 & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}\,;$$

e discorrendo como precedentemente, chegariamos á seguinte proposição: *As condições necessarias e sufficientes para que* $\mathfrak{f}_1 = 0$ *e* $\mathfrak{f}_2 = 0$ *tenham uma só raiz commum, são* $R = 0$, $R_1 \lessgtr 0$; *para que tenham duas, são* $R = 0$, $R_1 = 0$, $R^2 \lessgtr 0$; *para que tenham tres, são* $R = 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 \lessgtr 0$; *etc.*

Supponhamos que se verifica o primeiro caso, $R = 0$ e $R_1 \gtrless 0$. Sabe-se *(n.° 57)* que a unidade e os valores das incógnitas são proporcionaes aos menores de R relativos aos elementos de uma linha, da primeira por exemplo. Assim, podemos escrever

$$\frac{1}{A_1} = \frac{-x}{B_1},$$

sendo

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_3 & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_3 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Da relação precedente tira-se

$$A_1 x + B_1 = 0\ ;$$

pondo por $A_1$ e $B_1$ as suas expressões, supprimindo o factor commum $b_0$, effectuando a multiplicação de $A_1$ por $x$ (*n.º 50, II*) e sommando os dois determinantes $A_1 x$ e $B_1$ (*VI*), vem

$$A_1 x + B_1 = \begin{vmatrix} a_5 x & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 + a_4 x & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_3 + b_2 x & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 x & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Juntando á 1.ª columna d'este determinante as seguintes, respectivamente multiplicadas por $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^5$ e $x^6$, teremos finalmente a equação

$$\begin{vmatrix} x f_1 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ f_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ f_2 & b_1 & b_0 & & & \\ x f_2 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ x^2 f_2 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ x^3 f_2 & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

que dará a raiz $r$ commum ás duas equações do systema proposto

Com effeito, esta egualdade não é identica, porque resulta de $\frac{A_1}{b_0}x+\frac{B_1}{b_0}=0$, onde o coefficiente de $x$ é precisamente o primeiro menor principal do eliminante R e supposemos este menor differente de zero; além d'isto, a equação precedente é satisfeita pela raiz $r$, porque todos os elementos da primeira columna do determinante se annullam para $x=r$.

**140.** *Méthodo de Cauchy.* — Supponhamos que são dadas duas equações do mesmo grau

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0\ ,$$
$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n=0\ ;$$

transportando $n-i+1$ termos para o segundo membro de cada uma, as propostas seriam

$$a_0x^n+\cdots+a_{i-1}x^{n-i+1}=-(a_ix^{n-i}+\cdots+a_n)\ ,$$
$$b_0x^n+\cdots+b_{i-1}x^{n-i+1}=-(b_ix^{n-i}+\cdots+b_n)\ .$$

Dando a $i$ todos os valores desde 1 até $n$, obteem-se outros tantos systemas como este último, e cada um d'elles conduz a uma equação da fórma

$$(a_0x^n+\cdots+a_{i-1}x^{n-i+1})(b_ix^{n-i}+\cdots+b_n)$$
$$=(b_0x^n+\cdots+b_{i-1}x^{n-i+1})(a_ix^{n-i}+\cdots+a_n)\ ;$$

ou, supprimindo o factor commum $x^{n-i+1}$, transpondo, reduzindo e ordenando,

$$(a_0 b_i - a_i b_0) x^{n-1}$$
$$+ [(a_0 b_{i+1} - a_{i+1} b_0) + (a_1 b_i - a_i b_1)] x^{n-2} + \cdots = 0 \, .$$

D'este modo se obteem $n$ equações, chamadas *de Cauchy*, e todas ellas serão satisfeitas pela raiz commum das propostas; considerando neste systema $x, x^2, \cdots x^{n-1}$ como outras tantas incógnitas recahimos no caso de $n$ equações lineares com $n-1$ incógnitas, cujo eliminante é o determinante de todos os coefficientes.

Tomando as $n-1$ primeiras equações e representando por $\Delta$ o determinante dos coefficientes das differentes potencias das incógnitas e por $\Delta_1$ o valor de $\Delta$ quando os coefficientes da primeira potencia de $x$ se mudam nos termos independentes das equações respectivas, a raiz commum será dada por

$$\Delta x + \Delta_1 = 0 \, .$$

Se as equações fossem de graus differentes, escreveriamos os termos que faltam na equação de grau inferior, dando zero por coefficiente a cada um.

Pelo que se vê, este méthodo tem vantagem sobre o dialytico para duas equações do mesmo grau $n$; porque então o eliminante de Sylvester é um determinante de grau $2n$, emquanto que o de Cauchy é só de grau $n$.

Quando na successão dos valores $1, 2, 3 \ldots$, dados a $i$, algum dos determinantes de 2.ª ordem, que se encontram nas equações de Cauchy, envolver um índice superior ao grau das equações dadas, esse termo não se aproveita.

Sejam dadas, por exemplo, as equações

$$x^2 - (2y+5)x + y^2 + 5y + 6 = 0 \, , \quad x^2 - 4yx + 4y^2 - 1 = 0 \, .$$

Neste caso é $n = 2$, e aquellas equações para $i = 1$ e $i = 2$ tornam-se em

$$(a_0 b_1) x + [(a_0 b_2) + (a_1 b_1)] = (a_0 b_1) x + (a_0 b_2) = 0 \text{ ,}$$
$$(a_0 b_2) x + [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] = (a_0 b_2) x + (a_1 b_2) = 0 \text{ ,}$$

pois que é o determinante $(a_1\ b_1) = 0$.

Ora

$$(a_0 b_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(2y+5) & -4y \end{vmatrix} = -2y + 5 \text{ ,}$$

e do mesmo modo teriamos os outros coefficientes; feitos os cálculos, achariamos as equações

$$(-2y+5)x + (3y^2 - 5y - 7) = 0 \text{ ,}$$
$$(3y^2 - 5y - 7)x + (-4y^3 + 26y + 5) = 0 \text{ ,}$$

cuja resultante é

$$\begin{vmatrix} -2y+5 & 3y^2 - 5y - 7 \\ 3y^2 - 5y - 7 & -4y^3 + 26y + 5 \end{vmatrix}$$

$$= -y^4 + 10y^3 - 35y^2 + 50y - 24 = 0 \text{ .}$$

A primeira equação de Cauchy daria depois os valores de $x$ conjugados com cada um dos valores de $y$ dados por esta resultante.

**141.** *Funcções symétricas.* — A equação $f_1(x,y) = 0$, do grau $n$ em $x$, daria $n$ raizes $x_1, x_2, \cdots x_n$ expressas em $y$, se a soubessemos resolver. Por conseguinte ao systema $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ podem substituir-se os seguintes

$$\left.\begin{array}{r} x-x_1=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} x-x_2=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}, \ldots, \quad \left.\begin{array}{r} x-x_n=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}:$$

e se em cada um d'estes pusessemos na segunda equação o valor de $x$ dado pela primeira, teriamos a equação final correspondente.

A equação final do systema proposto será o producto das equações finaes d'estes systemas particulares, ou

$$f_2(x_1)\times f_2(x_2)\times\cdots\times f_2(x_n)=0\ ,$$

pois que esta equação é satisfeita quando se annulla um dos factores do seu 1.º membro, e só neste caso.

Ora $x_1, x_2, \ldots x_n$ são funcções desconhecidas de $y$. Mas o 1.º membro da equação precedente é funcção racional e symétrica d'estas raizes, e por isso pode exprimir-se em funcção racional dos coefficientes de $f_1(x)$, depois de dividida esta equação pelo coefficiente do 1.º termo. Esta divisão não offerece dúvida, porque aquelle coefficiente não contém as incógnitas.

**142.** *Eliminante.* — Consideremos novamente as equações do *n.º 138.*

$$f_1(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ ,$$
$$f_2(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=0\ .$$

O seu eliminante é a funcção dos coefficientes que, egualada a zero, traduz a condição necessaria e sufficiente para que estas equações tenham uma raiz commum.

Representemos por $x_1, x_2, \ldots x_n$ as raizes da primeira equação e por $t_1, t_2, \ldots t_m$ as da segunda; será

$$f_1(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

$$f_2(x) = b_0(x-t_1)(x-t_2)\ldots(x-t_m).$$

Substituindo as raizes da segunda equação em $f_1$ e multiplicando os resultados, substituindo depois as raizes da primeira equação em $f_2$ e multiplicando tambem os resultados, façamos

$$R_1 = f_1(t_1) \times f_1(t_2) \ldots f_1(t_m) = a_0^m (t_1 - x_1)(t_1 - x_2) \ldots (t_m - x_n)$$

$$R_2 = f_2(x_1) \times f_2(x_2) \ldots f_2(x_n) = b_0^n (x_1 - t_1)(x_1 - t_2) \ldots (x_n - t_m).$$

Se uma raiz da equação $f_2 = 0$ convém a $f_1 = 0$, um pelo menos dos factores de $R_1$ é zero e portanto será tambem $R_1 = 0$; e reciprocamente. O mesmo diriamos de $R_2$; de modo que qualquer das equações $R_1 = 0$ ou $R_2 = 0$ é a resultante das propostas, expressa em funcção das raizes. Assim: *o eliminante é o producto dos resultados que se obteem substituindo em uma das equações todas as raizes da outra*, ou é *o producto de todas as differenças entre as raizes das duas equações*. Não é necessario attender aos coefficientes $a_0$ ou $b_0$, que suppomos differentes de zero.

Sendo homogeneas as duas equações $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, será

$$f_1(x, y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2$$
$$+ \cdots + a_{n-2} x^2 y^{n-2} + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0,$$
$$f_2(x, y) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2$$
$$+ \cdots + b_{m-2} x^2 y^{m-2} + b_{m-1} x y^{m-1} + b_m y^m = 0,$$

Representemos as raizes da primeira por $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \ldots$ e as da segunda por $(\alpha_1\ \beta_1)$, $(\alpha_2\ \beta_2)\ldots$; o eliminante das duas equações será, pela definição anterior,

$$\begin{aligned}R &= f_1(\alpha_1, \beta_1) \cdot f_1(\alpha_2, \beta_2) \ldots f_1(\alpha_m, \beta_m)\\ &= f_2(x_1, y_1) \cdot f_2(x_2, y_2) \ldots f_2(x_n, y_n),\end{aligned}$$

A primeira d'estas expressões mostra que R é uma funcção homogenea de grau $m$ dos coefficientes de $f_1$, porque cada um dos factores é funcção linear homogenea d'estes coefficientes e os valores $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$ só dependem dos coefficientes de $f_2$. Do mesmo modo se vê que R é funcção homogenea de grau $n$ dos coefficientes de $f_2$.

Por outra parte, mudando $y$ em $ky$, as duas equações homogeneas transformam-se em

$$\begin{aligned}f_1(x, ky) &= a_0 x^n + a_1 k x^{n-1} y + a_2 k^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n k^n y^n = 0,\\ f_2(x, ky) &= b_0 x^m + b_1 k x^{m-1} y + b_2 k^2 x^{m-2} y^2 + \cdots + b_m k^m y^m = 0,\end{aligned}$$

com as raizes $k$ vezes maiores do que as das propostas *(n.° 85)* e portanto representadas respectivamente por

$$\begin{aligned}&(kx_1, y_1), (kx_2, y_2) \ldots (kx_n, y_n),\\ &(k\alpha_1, \beta_1), (k\alpha_2, \beta_2) \ldots (k\alpha_m, \beta_m).\end{aligned}$$

Por onde se vê que a resultante das equações transformadas será

$$\begin{aligned}R' &= f_1(k\alpha_1, k\beta_1) \cdot f_1(k\alpha_2, k\beta_2) \ldots f_1(k\alpha_m, k\beta_m)\\ &= k^{mn} \cdot f_1(\alpha_1\ \beta_1) \cdot f_1(\alpha_2\ \beta_2) \ldots f_1(\alpha_m, \beta_m) = k^{mn}\,R.\end{aligned}$$

Ora naquellas equações o factor $k$ entra em cada termo com expoente egual ao índice do coefficiente respectivo, $a$ ou $b$. Portanto em cada termo de R′ o expoente de $k$ será egual á somma dos índices dos $a$ e $b$, que houver nesse termo. Mas esse expoente é $mn$, como se viu; logo, representando por $i$ a somma dos índices dos factores $a$ e por $i'$ a somma dos índices dos factores $b$, será sempre

$$i+i'=mn:$$

o numero $i+i'$ chama-se o *peso* da resultante.

Assim pois: *o eliminante de duas equações de graus* n *e* m *é uma funcção homogenea dos coefficientes das mesmas equações, a qual é de grau* m *em ordem aos da primeira e de grau* n *em ordem aos da segunda; a somma dos indices dos coefficientes em cada termo é constante, e egual ao producto dos graus das duas equações.*

**143.** Consideremos duas equações do mesmo grau $n$ e duas expressões lineares d'estas equações: a resultante, como vamos vêr, é a mesma nos dois systemas, abstrahindo de um factor que só depende dos coefficientes da transformação linear.

Sejam as propostas $f_1=0$ e $f_2=0$, e as relações lineares $pf_1+qf_2=0$ e $p'f_1+q'f_2=0$; seja R o eliminante do primeiro systema, e R′ o do segundo. Sabemos que é

$$R=f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot\cdot\cdot f_1(t_n);$$

e o eliminante do primeiro systema não se altera quando a uma das funcções se junta o producto da outra por um factor constante. Com effeito, se $t_1$ é raiz da equação $f_2=0$, o primeiro factor do eliminante de

$$f_1+rf_2=0,\quad f_2=0$$

é $f_1(t_1)$, visto que $f_2(t_1)$ é identicamente nullo; o mesmo diriamos dos outros factores. Se uma das funcções fôr multiplicada por um factor $r$, o eliminante vem multiplicado por $r^n$, como resultaria da expressão precedente de R.

Com estes principios podemos eliminar uma das funcções, por exemplo $f_2$, entre os dois grupos do segundo systema considerado, de modo que tal funcção desappareça de um d'esses grupos. Para isso, multiplicamos o primeiro grupo por $q'$, factor de $f_2$ no segundo, e pelo que fica dito $q'^n\,R'$ será o eliminante de

$$q'(pf_1+qf_2)=0\,,\quad p'f_1+q'f_2=0\,;$$

á primeira d'estas equações podemos juntar a segunda multiplicada por $-q$, e aquelle systema torna-se em

$$(q'p-qp')\,f_1=0\,,\quad p'f_1+q'f_2=0\,.$$

A presença do factor $q'p-qp'$ mostra que o eliminante d'estas equações é

$$q'^n\,R'=(q'p-qp')^n\,R''\,,$$

sendo $R''$ o eliminante do systema

$$f_1=0,\quad p'f_1+q'f_2=0\,.$$

Mas $R''=q'^nR$, por causa do factor de $f_2$; logo

$$q'^n\,R'=(q'p-qp')^n\,q'^n\,R\,,$$

ou

$$R'=(q'p-qp')^n\,R\,,$$

como queriamos demonstrar.

**144.** *Discriminante.* — As derivadas parciaes da funcção homogenea

$$f(x, y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

em ordem a $x$ e a $y$ são

$$f'_x = na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y$$
$$+ (n-2) a_2 x^{n-3} y^2 + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} ,$$
$$f'_y = a_1 x^{n-1} + 2a_2 x^{n-2} y + \cdots$$
$$+ (n-1) a_{n-1} xy^{n-2} + na_n y^{n-1} ;$$

multiplicando a primeira por $x$ e a segunda por $y$, e sommando os productos, resulta

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y) . \tag{46}$$

*Discriminante* da funcção $f(x, y)$ é o eliminante das equações derivadas

$$f'_x(x, y) = 0 , \quad f'_y(x, y) = 0 .$$

Ambas estas equações, de grau $n-1$, conteem os coefficientes da proposta; o grau do discriminante em ordem a estes coefficientes, será *(n.º 142)*

$$n - 1 + (n-1) = 2(n-1) ,$$

que é o numero das equações de Sylvester neste caso.

Assim, para a equação do 2.º grau

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = 0 ,$$

as equações derivadas são, dividindo-as por 2,

$$a_0 x + a_1 y = 0 \ , \quad a_1 x + a_2 y = 0 \ ,$$

e o discriminante da proposta é

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_2 - (a_1)^2 \ ,$$

do 2.º grau relativamente aos coefficientes $a$.

Em geral convirá multiplicar os coefficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ respectivamente pelos coefficientes numericos do desenvolvimento da potencia $n$ do binomio; e assim teremos a equação homogenea de grau $n$

$$f(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n = 0 \ .$$

As derivadas de primeira ordem de $f(x, y)$, divididas por $n$ e egualadas a zero, dão as equações

$$a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} = 0 \ ,$$
$$a_1 x^{n-1} + (n-1) a_2 x^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} y^n = 0 \ .$$

O discriminante $\delta$ de $f(x, y)$ é, por definição, o eliminante d'estas equações cujos primeiros membros representaremos por A e B. Assim, será *(n.º 142)*

$$\delta = B_1 . B_2 \ldots B_{n-1} \ ,$$

designando por $B_1, B_2 \ldots B_{n-1}$ os valores de B quando as incógnitas se substituem pelas raizes $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \ldots (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ da equação $A = 0$.

Por outra parte é (46)

$$f(x, y) = Ax + By .$$

O eliminante R de $f(x, y)$ e $f'_x(x, y)$ obtém-se substituindo no segundo membro d'esta relação as raizes $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, etc., e multiplicando os resultados; mas para cada uma d'estas raizes é identicamente $A = 0$: logo será

$$\begin{aligned} R &= B_1 \beta_1 . B_2 \beta_2 \ldots B_{n-1} \beta_{n-1} \\ &= \delta \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} . \end{aligned}$$

Ora da equação homogenea $A = 0$ resulta

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}} = \pm \frac{a_{n-1}}{a_0} ,$$

ou

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} = \pm a_{n-1} , \quad \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} = a_0 ;$$

e a expressão precedente torna-se em

$$R = \delta a_0 .$$

Podemos exprimir o discriminante em funcção das raizes da proposta, formando o eliminante R pela substituição d'estas raizes em $f'_x$. Representando-as por $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, será

$$f(x, y) = (x y_1 - y x_1)(x y_2 - y x_2) \ldots (x y_n - y x_n) ,$$

e teremos, como anteriormente,

$$a_0 = y_1 y_2 \ldots y_n, \quad \pm a_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Derivando $f(x, y)$ em ordem a $x$, acha-se

$$\begin{aligned} f'_x = & \; y_1 (x y_2 - y x_2) \ldots (x y_n - y x_n) \\ & + y_2 (x y_1 - y x_1) \ldots (x y_n - y x_n) + \text{etc.}; \end{aligned}$$

e a substituição de uma das raizes de $f(x, y) = 0$, de $(x_2, y_2)$ por exemplo, annulla todos os termos do segundo membro d'esta derivada, com excepção de

$$y_2 (x_2 y_1 - y_2 x_1) \ldots (x_2 y_n - y_2 x_n).$$

O producto dos resultados, que se obteem pela substituição successiva de todas aquellas raizes, será pois

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = & \; y_1 (x_1 y_2 - y_1 x_2) \ldots (x_1 y_n - y_1 x_n) \\ & \times y_2 (x_2 y_1 - y_2 x_1) \ldots (x_2 y_n - y_2 x_n) \\ & \times \text{etc.} \\ = & \; y_1 y_2 \ldots y_n (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2 \\ = & \pm a_0 (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2; \end{aligned}$$

donde finalmente

$$\delta = \pm (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2$$

Substituindo os $y$ pela unidade, vem

$$\delta = \pm (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

a proposta é então

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 ,$$

e o seu discriminante é *o producto dos quadrados das differenças das raizes.* Se houver raizes eguaes, é $\delta = 0$.

**145.** *Theorema de Bezout.*—A equação final obtida pelo processo do n.° 141 é de grau $mn$, sendo $m$ e $n$ os graus das equações dadas.

O mesmo resultaria do que se disse no n.° 142. Suppondo que os coefficientes das equações consideradas neste n.° são funcções de uma nova incógnita $y$ e que o grau de cada uma d'estas funcções é o índice respectivo, pela eliminação de $x$ chegaremos a uma equação do grau $mn$ em $y$, porque $mn$ é o pezo da resultante.

Se as equações dadas forem completas e se todos os termos tiverem coefficientes quaesquer e independentes uns dos outros, o grau da equação final será $mn$.

Quando o grau d'esta equação é inferior a $mn$, as raizes que faltam são infinitas.

## CAPÍTULO XII.

### Theorema de Dalembert.

**146.** Podemos agora dar uma nova demonstração do princípio fundamental da theoria das equações.

O enunciado do theorema é o seguinte: *Toda a equação algébrica, racional e inteira, de coefficientes reaes ou imaginarios, tem pelo menos uma raiz, real ou imaginaria.*

Seja a proposta $f(x) = 0$; podemos sempre reduzi-la á forma

$$P + Qi = 0 ,$$

sendo P e Q polynomios racionaes de coefficientes reaes. Ora a equação

$$(P+Qi)\,(P-Qi)=P^2+Q^2=0$$

tem os coefficientes reaes, e se fôr satisfeita por uma raiz da forma $a+bi$, a proposta admittirá tambem uma raiz. Com effeito, fazendo $x=a+bi$ se o primeiro membro d'aquella equação se reduz a zero, um dos seus factores é zero. Ou este factor é $P+Qi$, e a proposição está demonstrada; ou é $P-Qi$, e então $a-bi$ reduzirá $P+Qi$ a zero. Basta pois demonstrar o theorema de Dalembert para o caso das equações de coefficientes reaes.

**147.** Supponhamos que a equação

$$f(x)\equiv x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$$

é de grau par e coefficientes reaes, com o coefficiente 1 no 1.° termo; mudando $x$ em $y+z$, vem

$$f(y+z)=f(y)+\frac{z^2}{2}f''(y)+\frac{z^4}{4!}f^{\text{iv}}(y)+\cdots+z^m$$

$$+z\left[f'(y)+\frac{z^2}{3!}f'''(y)+\cdots+\frac{z^{m-2}}{(m-1)!}f^{m-1}(y)\right].$$

Fazendo $z^2=t$ e $m=2k$, procuremos o termo com a mais alta potencia de $y$ na resultante dos dois polynomios

$$f(y)+\frac{t}{2}f''(y)+\frac{t^2}{4!}f^{\text{iv}}(y)+\cdots+t^k,$$

$$f'(y)+\frac{t}{3!}f'''(y)+\frac{t^2}{5!}f^{\text{v}}(y)+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(2k-1)!}f^{2k-1}(y).$$

Bastará considerar sómente nos coefficientes de $t^0, t^1, t^2, \ldots$ a mais alta potencia de $y$ que se encontra em cada um d'elles, o que se reduz a substituir nestas expressões $f(y)$ pelo seu 1.º termo $y^m$; teremos assim os polynomios

$$y^m + m_2 t y^{m-2} + m_4 t^2 y^{m-4} + \cdots t^k,$$

$$m y^{m-1} + m_3 t y^{m-3} + m_5 t^2 y^{m-5} + \cdots + m t^{k-1},$$

em que $m_2, m_3, \ldots$ são os coefficientes numéricos da fórmula do binomio, do 3.º termo por deante. O eliminante R d'estes polynomios é *(n.º 139)*

$$R = \begin{vmatrix} . & . & . & . & m_2 y^2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ & y^m & m_2 y^{m-2} & . & . & . \\ y^m & m_2 y^{m-2} & m_4 y^{m-4} & . & . & . \\ m y^{m-1} & m_3 y^{m-3} & m_5 y^{m-5} & . & . & . \\ & m y^{m-1} & m_3 y^{m-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & m y \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \left(\frac{m}{2}-1\right) \textit{linhas} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \frac{m}{2} \textit{ linhas.} \end{array}$$

Multipliquemos respectivamente as $\frac{m}{2} - 1$ primeiras linhas de R por as successivas potencias impares $2k-1$ de $y$, a partir da primeira $y$. Como $k$ designa a ordem natural d'aquelle numero impar, a ultima d'estas potencias será $2\left(\frac{m}{2}-1\right) - 1 = m - 3$.

Multipliquemos depois as $\frac{m}{2}$ linhas restantes, a partir da ultima, por as successivas potencias pares de $y$, desde $y^0$. Como a ordem de cada numero par significativo $2k$ é indicada por $k$, o de ordem $\frac{m}{2}-1$ será $2\left(\frac{m}{2}-1\right)=m-2$. Esta é a potencia de $y$ porque virá a multiplicar-se a linha $\frac{m}{2}$ de R.

Assim o determinante R foi multiplicado successivamente pelas potencias $1, 2, 3, \ldots m-2$ de $y$, o que equivale a multiplica-lo por uma potencia d'esta variavel designada por

$$1+2+3+\cdots+(m-2)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Dividamos por outra parte as $m-1$ columnas de R pelas potencias impares successivas de $y$, até á primeira; a mais alta d'estas potencias, pela qual se dividirá a primeira columna, é o numero impar $2k-1$ que occupa na ordem natural o logar $m-1$, isto é, o numero impar $2(m-1)-1=2m-3$. Esta nova operação equivale a dividir o determinante por uma potencia de $y$ representada por

$$1+3+5+\cdots+(2m-3)=\frac{2m-2}{2}(m-1)=(m-1)^2.$$

Representando por R' o resultado de todas as operações effectuadas, reconhece-se que é

$$R=R'y^{\frac{m}{2}(m-1)},$$

de modo que, em geral, o grau de R é $\frac{m}{2}(m-1)$.

Ora, sendo $m=2k$, R' é tambem o eliminante dos polynomios.

$$\theta_1=1+m_2w^2+m_4w^4+\cdots+w^m,$$
$$\theta_2=m+m_3w^3+m_5w^5+\cdots+mw^{m-2};$$

por outra parte $\theta_1$ e $\theta_2$ são primos entre si, pois que um divisor commum a estes polynomios seria tambem divisor commum de

$$\theta_1 + w\theta_2 = (1+w)^m, \quad \theta_1 - w\theta_2 = (1-w)^m$$

e portanto de $1+w$ e $1-w$, o que não pode ter logar. Logo R′ é differente de zero, e R será *irreductivelmente* de grau $\frac{m}{2}(m-1)$ em $y$.

**148.** Mostrou-se (*n.º* 72) que a equação de grau impar e de coefficientes reaes tem sempre, pelo menos, uma raiz real; de modo que para esta classe de equações está demonstrado o theorema de Dalembert. Consideremos pois as equações de grau par, como a do n.º anterior, e supponhamos que esse grau é ***simplesmente*** multiplo de 2; ou que é $m = 2k$, com $k$ impar.

Posto isto, fazendo $z^2 = t$, a transformada da proposta em $y+z$ póde tomar a forma

$$f_1(y,t) + z f_2(y,t) = 0\ ;$$

e os valores de $y$ e $t$ que satisfizerem conjunctamente ás equações

$$f_1(y,t) = 0, \quad f_2(y,t) = 0\ ,$$

darão as raizes da proposta.

Ora viu-se no n.º anterior que a resultante d'estas equações, de coefficientes reaes, é de grau $\frac{m}{2}(m-1)$ em $y$, isto é, de grau impar, visto que $m$ é simplesmente par. Logo, aquella resultante tem uma raiz real $y_0$; e as duas equações

$$f_1(y_0, t) = 0\ , \quad f_2(y_0, t) = 0$$

admittem um factor commum, ou uma d'ellas é uma identidade.

Examinemos estes dois casos.

1.° Se uma das equações consideradas é uma identidade, não pode ser a primeira porque $f_1$ contém o termo $t^{\frac{m}{2}}$, irreductivel com qualquer outro e cujo coefficiente é a unidade, como suppozemos no 1.° termo de $f(x)$. Será então a segunda; mas neste caso a transformada reduz-se ao primeiro termo

$$f_1(y_0, t) = 0 ;$$

e esta última equação, cujo grau $\frac{m}{2} = k$ é impar, tem uma raiz $t_0$, pelo menos. Portanto será $z_0 = \pm \sqrt{t_0}$; e então $x_0 = y_0 \pm \sqrt{t_0}$ é uma raiz da proposta.

2.° Se aquellas equações teem um factor commum, que designaremos por $\varphi\,(t, y_0)$, teremos

$$f(y_0 + z) = f_1\,(y_0, t) + z f_2\,(y_0, t) = \varphi\,(y_0, t) \times \psi\,(y_0, t)\,,$$

ou antes

$$f(x) = \varphi\,[y_0, (x - y_0)^2] \times \psi\,[y_0, (x - y_0)^2] = \varphi\,(x) \times \psi\,(x)\,;$$

e *a equação primitiva, de grau* m, *fica decomposta em duas de graus inferiores a* m.

Se $m'$ e $m''$ forem os graus de $\varphi\,(x)$ e $\psi\,(x)$, será $m' + m'' = m$. Ora $m'$ e $m''$ são da mesma paridade, visto que $m$ é par; se ambos são impares, cada uma das equações $\varphi\,(x) = 0$ e $\psi\,(x) = 0$ tem uma raiz, e portanto tambem a proposta; se ambos são pares, um d'elles é simplesmente par, porque, se ambos contivessem uma potencia de 2 superior á primeira, o mesmo succederia a $m$, contra a hypóthese. Podemos pois applicar os mesmos raciocinios a uma das duas equações $\varphi\,(x) = 0$, $\psi\,(x) = 0$; e continuando pelo mesmo processo, chegariamos a uma equação do primeiro grau, se não tivessemos encontrado, antes d'isto, uma equação de grau impar.

Logo em todos os casos a proposta tem uma raiz, se o seu grau fôr simplesmente par.

**149.** Supponhamos agora que a mais alta potencia de 2 que se contém no grau $m$ é $2^r$, ou que é $m = 2^r(2k+1)$. Então $\frac{m}{2}$ é de paridade $(r-1)$, bem como $\frac{m}{2}(m-1)$, por ser $\frac{m}{2} = 2^{r-1}(2k+1)$ e $k$ um inteiro.

Admittamos que o theorema está demonstrado para as equações cujo grau é de paridade inferior a $r$; vamos demonstrar que tambem é verdadeiro para o grau de paridade $r$. A proposição ficará assim estabelecida com toda a generalidade.

Seja como precedentemente

$$f(x) = f_1(y, t) + zf_2(y, t) = 0 .$$

A resultante em $y$ das equações $f_1(y, t) = 0$ e $f_2(y, t) = 0$ é do grau $\frac{m(m-1)}{2}$, cuja paridade é $r-1$, e por isso admitte, conforme a hypóthese, uma raiz real ou imaginária $y_0$; e as equações $f_1(y_0, t)$ e $f_2(y_0, t)$ teem uma raiz commum.

1.° Se $f_2(y_0, t) = 0$ é uma identidade, a equação $f_1(y_0, t) = 0$, cujo grau $\frac{m}{2}$ é de paridade $r-1$, admitte um divisor $t - t_0 = z^2 - t_0 = (x - y_0)^2 - t_0$. Portanto neste caso a proposta tem as raizes $x = y_0 \pm \sqrt{t_0}$

2.° Se $f_2(y_0, t) = 0$ não é uma identidade, via-se como no n.° anterior que $f(x)$ é o producto de dois polynomios inteiros

$$f(x) = \varphi(x) \times \psi(x) = 0 .$$

Considerando só o caso de serem pares os graus $m'$ e $m''$ dos dois factores, ou

$$m' = 2^{r'}(2k' + 1) , \quad m'' = 2^{r''}(k'' + 1) ,$$

não serão conjunctamente $r'$ e $r''$ maiores que $r$; porque então a paridade de $m = m' + m''$ seria superior a $r$, contra a hypóthese. Se fôr

$$r' = r \ , \quad r'' = r + s \ ,$$

teremos

$$2^r (2k' + 1) + 2^r . 2^s (2k'' + 1) = 2^r (2k + 1) \ ,$$

donde

$$2k + 1 = 2k' + 1 + 2^s (2k'' + 1)$$

e $k' < k$; tambem pode ser $r' < r$. Logo o grau $m'$ de um dos factores pode ser, quando muito da mesma paridade que $m$ e será então $m' < m$; ou de paridade inferior á de $m$. Neste último caso esse factor, $\varphi(x)$ por exemplo, tem uma raiz, pela hypóthese. No primeiro caso, operaremos com $\varphi(x)$ do mesmo modo que operámos com $f(x)$, obtendo assim uma sequencia, evidentemente limitada, de polynomios de graus decrescentes; chegaremos pois necessariamente a um divisor do primeiro grau de $f(x)$.

Esta bella demonstração foi dada pelo professor Walecki e publicada em 1883.

# III

# Resolução das equações.

# RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

## CAPÍTULO I.

### Numeros negativos.

**150.** A arithmética considera únicamente os numeros *formados pela addição successiva da unidade e de partes da unidade.*

Se $a$ e $b$ são duas grandezas d'esta espécie, *ha sempre* outra grandeza $c$ da mesma espécie, e uma só, tal que seja

$$a+b=c\ ;$$

isto é, a *addição* é uma operação *sempre possivel,* que conduz a um resultado determinado e único. Os seus princípios caracteristicos são

$$a+b=b+a \tag{I}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c\ , \tag{II}$$

$$a+0=a\ ; \tag{III}$$

o primeiro chama-se *commutativo* e o segundo *associativo.*

Esta é a operação fundamental. *Subtracção* é a operação *inversa* da addição: subtrahir um numero $b$ de outro numero $a$ é achar um terceiro numero $c$ que sommado com $b$ reproduza $a$. Tal numero chama-se *resto* ou *differença*, e escreve-se

$$a-b=c\,;$$

mas no campo da arithmética, o resto só existe quando é $a$ maior que $b$ ou $a$ egual a $b$. Portanto esta operação é possivel em uns casos, e não o é em outros.

Para conseguir que a subtracção possa considerar-se sempre possivel, introduz-se no cálculo, *por convenção*, um novo numero que se chama *negativo*, como aos outros se dá o nome de *positivos:* esta primeira generalisação assignala a passagem da arithmética para a álgebra.

Representando os numeros por letras, aos negativos antepõe-se o signal — que neste caso não exprime própriamente uma operação e que poderia trocar-se por outro signal gráphico, como um *índice* por exemplo. Os novos numeros são definidos pela relação

$$a+(-a)=0\,; \tag{47}$$

a sua introducção no cálculo envolve a necessidade de generalisar as definições das operações do modo que vamos indicar, tendo sempre em vista a conservação das propriedades fundamentaes de cada operação, para que as novas definições coincidam com as antigas quando se applicarem aos numeros para que estas foram estabelecidas.

Os numeros $a$ e $-a$ chamam-se *oppostos* ou *contrários*. O numero positivo $a$, que se pode representar por

$$|a|\,,$$

chama-se o *valor absoluto* dos dois: é o seu módulo *(n.º 59)*.

**151.** *Addição.*—Vejamos o que deve entender-se por somma de numeros positivos e negativos. Combinando as leis (I), (II) e (III) com a definição (47) dos novos numeros, resulta primeiro

$$a+(-a)=0\ ,$$
$$b+(-b)=0\ ,$$
$$c+(-c)=0\ ,$$
$$\text{etc.}$$

sommando estas egualdades, temos

$$[a+(-a)]+[b+(-b)]+[c+(-c)]+\cdots$$
$$=(\text{II})\,[a+b+c+\cdots]+[(-a)+(-b)+(-c)+\cdots]=0\ :$$

donde (47) resulta a expressão

$$(-a)+(-b)+(-c)+\cdots=-(a+b+\cdots)\ ,$$

que dá o conceito da somma de numeros negativos.

Assim se vê tambem que a somma de numeros positivos e negativos se reduz á somma de um numero positivo e de um numero negativo

$$a+(-b)\ ,$$

que vamos interpretar.

Se é $b>a$, ou $b=a+|a'|$, teremos pela relação antecedente

$$-b=(-a)+(-|a'|)\ ,$$

e portanto, segundo (47),

$$\begin{aligned} a+(-b) &= a+[(-a)+(-|a'|)] \\ &= \text{(II)}\,[a+(-a)]+(-|a'|) \\ &= 0+(-|a'|) \\ &= \text{(III)}\,-|a'|\,. \end{aligned}$$

Se é $a=b$, será (47)

$$a+(-b)=0\,.$$

Se é $a>b$ ou $a=b+|a'|$, teremos

$$\begin{aligned} a+(-b) &= (b+|a'|)+(-b) \\ &= \text{(II)}\,b+|a'|+(-b) \\ &= \text{(I)}\,b+(-b)+|a'| \\ &= \text{(III)}\,|a'|\,. \end{aligned}$$

Assim a somma dos numeros positivos e negativos; a que se dá conjunctamente o nome de *racionaes* ou *commensuraveis*, tem uma expressão determinada e única, e é regida pelas mesmas regras da somma dos numeros positivos.

**152.** *Subtracção.* — É a operação inversa da addição; ora, quaesquer que sejam os numeros positivos $a$ e $b$, é

$$b+[a+(-b)]=a\,;$$

portanto a differença $a-b$ é sempre expressa pelo numero

$$a+(-b)\,.$$

Podemos designar pela palavra *numero* tanto um numero positivo como um numero negativo, e qualquer d'estas quantidades pode ser representada por uma letra. Por *convenção* $+n$ representa uma quantidade do mesmo valor absoluto e da mesma espécie que $n$, e $-n$ uma quantidade do mesmo valor absoluto que $n$ e de espécie opposta a $n$. Representando pelos índices $\sigma$ e $\sigma'$ qualquer dos signaes $+$ e $-$, esta convenção traduz-se pela egualdade

$$(n_\sigma)_{\sigma'} = (n_{\sigma'})_\sigma ,$$

que dá logar aos seguintes casos:

$$+(+n) = -(-n) = +n ,$$
$$+(-n) = -(+n) = -n .$$

Nisto consiste a *regra dos signaes*.

Para brevidade da escripta consideram-se equivalentes as expressões

$$\pm a \pm b \pm c \ldots , \quad (\pm a) + (\pm b) + (\pm c) + \cdots ;$$

mas só a segunda é rigorosa.

**153.** *Multiplicação.* — Todo o numero positivo se pode considerar formado pela addição successiva de uma parte alíquota $\frac{1}{b}$ da unidade; e assim a expressão mais geral do numero racional é

$$\left(\frac{a}{b}\right)_\sigma ,$$

com $a$ e $b$ inteiros e positivos, e o índice equivalente ao signal $+$ ou $-$. Por outra parte, qualquer numero d'esta forma admitte uma parte alíquota

$$\left(\frac{a}{nb}\right)_\sigma,$$

pois que a somma de $n$ parcellas como esta reproduz esse numero, como se viu precedentemente.

Posto isto, para obter o producto do multiplicando $p$ pelo multiplicador $q$, sendo

$$p=\left(\frac{a}{b}\right)_\sigma, \quad q=\left(\frac{m}{n}\right)_{\sigma'}$$

e qualquer dos índices equivalente ao signal $+$ ou $-$, notemos que o segundo factor se forma

$a$) tomando a parte alíquota $\frac{1}{n}$ da unidade,

$b$) sommando $m$ d'estas partes;

$c$) affectando o resultado com o índice $\sigma'$.

Portanto, para obter o producto será necessário:

$a$) formar a parte alíquota $\left(\frac{a}{nb}\right)_\sigma$ de $p$;

$b$) obter a somma $\left(\frac{ma}{nb}\right)_\sigma$ de $m$ d'estas partes;

$c$) applicar ao resultado o índice $\sigma'$;

assim aquelle producto será

$$pq=\left(\left(\frac{ma}{nb}\right)_\sigma\right)_{\sigma'}.$$

O producto do multiplicando $q$ pelo multiplicador $p$ seria do mesmo modo

$$qp = \left(\left(\frac{am}{bn}\right)_{\sigma'}\right)_{\sigma} ;$$

attendendo á regra dos signaes e ao principio

$$am = ma \ , \quad bn = nb$$

da multiplicação dos numeros positivos, vê-se que é

$$pq = qp \ . \tag{I}$$

Logo:

*O producto de dois numeros racionaes não depende da ordem por que se faz a multiplicação; tem por valor absoluto o producto dos valores absolutos dos factores, e por signal o producto dos signaes dos mesmos factores.*

Por *producto dos signaes* entende-se a regra do n.º 152; da última parte do enunciado precedente resulta que é

$$p \times 0 = 0 \ , \quad p \times 1 = p \ ; \tag{II}$$

evidentemente é tambem

$$(pq)\,r = (pr)\,q \ . \tag{III}$$

Supposemos os factores monomios. Se forem polynomios,

$$p = a + b + c + \cdots \ , \quad q = a' + b' + c' + \cdots$$

notaremos que o multiplicador $q$ se forma da unidade tomando

*

as partes $a'$, $b'$, $c'$ ... e sommando-as; operando do mesmo modo sobre o multiplicando $p$, vem o producto

$$pq = a'(a+b+c+\cdots)+b'(a+b+c+\cdots)+\cdots .$$

Invertendo no segundo membro a ordem dos factores, acha-se finalmente o quarto princípio da multiplicação que pode enunciar-se simplesmente pela forma seguinte:

$$(p+q)r = pr + qr , \tag{IV}$$

e se chama *distributivo*.

Aos quatro princípios (I), (II), (III) e (IV) que regem a multiplicação dos numeros positivos, temos pois de juntar para todos os commensuraveis a regra dos signaes

$$\left.\begin{aligned}(+p)\times(+q)=(-p)\times(-q)=+pq ,\\ (+p)\times(-q)=(-p)\times(+q)=-pq ,\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

que resulta de vir o producto affectado com os índices $\sigma$ e $\sigma'$ dos dois factores.

**154.** *Divisão.* — Nesta operação, inversa da multiplicação, procura-se o numero $r$, *quociente*, que multiplicado pelo *divisor* $q$ produz o *dividendo* $p$; o que se representa por

$$\frac{p}{q} = r , \quad \text{ou} \quad p = qr .$$

Se fôr $q=0$ e $p$ differente de zero, não ha numero finito $r$ que convenha á questão; se fôr $p=q=0$, todos os numeros lhe conveem. Não considerando estes casos de excepção, se fôr

$$p=\left(\frac{a}{b}\right)_{\sigma}, \quad q=\left(\frac{m}{n}\right)_{\sigma'},$$

o numero procurado é

$$r=\left(\left(\frac{an}{bm}\right)_{\sigma}\right)_{\sigma'},$$

porque, effectuando o producto de $r$ por $q$ se reproduz o dividendo $p$.

E não pode haver mais de uma solução; porquanto de

$$qr=p\,, \quad qr'=p\,,$$

tirava-se

$$q(r-r')=0\,,$$

donde resultaria $r=r'$.

**155.** *Potenciação.* — É definida pelo principio

$$a^m \times a^n = a^{m+n}\,,$$

que subsiste para $m$ e $n$ positivos ou negativos, mas inteiros.

**156.** *Transformação das egualdades e desegualdades.* — O cálculo numérico funda-se nas leis das operações e nas leis fundamentaes de transformação das egualdades e desegualdades;

estas últimas são para os numeros positivos

$$a=b \therefore b=a \qquad \text{(I)}$$

$$a=b\,,\quad b=c \therefore a=c \qquad \text{(II)}$$

$$a=b\,,\quad c=d \therefore a+c=b+d\,,\quad ac=bd\,,\quad \text{etc.} \qquad \text{(III)}$$

$$a>b\,,\quad b>c \therefore a>c \qquad \text{(IV)}$$

$$a>b\,,\quad c>d \therefore a+c>b+d\,,\quad a-d>b-c\,. \qquad \text{(V)}$$

A (II) resulta de (I), e as tres primeiras applicam-se evidentemente aos numeros negativos. A quarta resulta de

$$a=b+\delta\,,\quad b=c+\delta' \therefore a=c+\delta'+\delta\,,\quad a>c\,,$$

só com a condição de serem positivos $\delta$ e $\delta'$; a mesma lei terá logar para os numeros negativos com tanto que por $a>b$ se entenda sempre que a differença $a-b$ é um numero positivo. Sobre a (V) fariamos observação semelhante.

Fica assim definida a noção algébrica de desegualdade, que subentenderemos em tudo que se seguir. Neste sentido se diz que os numeros positivos são maiores e os negativos menores do que zero; que o numero negativo é tanto mais pequeno quanto maior é o seu valor absoluto, e sempre menor que qualquer numero positivo; finalmente que para $m$ positivo e $a>b$ é

$$ma>mb\,,\quad -ma<-mb\,,$$

de modo que devemos mudar o sentido da desegualdade quando a multiplicamos por um factor negativo.

## CAPÍTULO II.

### Numeros irracionaes.

**157.** A determinação arithmética da raiz $\sqrt[r]{a}$ de um numero positivo $a$ nem sempre é possivel; mas nas operações elementares ha meios para formar numeros crescentes

$$u_1\,,\quad u_2\,,\quad \ldots\quad u_n\,,\quad \ldots$$

definidos pela condição de $(u_n)^r$ se approximar indefinidamente de $a$ quando se progride na série, ou quando o indice $n$ augmenta; e numeros decrescentes

$$v_1\,,\quad v_2\,,\quad \ldots\quad v_n\,,\quad \ldots$$

taes que $(v_n)^r$, crescendo $n$, se approxima tambem indefinidamente do mesmo numero $a$. Finalmente este numero é superior a qualquer dos da primeira série, e inferior a todos os da segunda. Diz-se então que $\sqrt[r]{a}$ separa o campo dos numeros $u_1$, $u_2, \ldots, u_n, \ldots, v_n, \ldots, v_2, v_1$ em duas classes: a primeira, composta dos numeros $u$, é representada abreviadamente por U e chama-se *inferior;* a segunda, composta dos numeros $v$, é representada por V e chama-se *superior*. Pela definição d'estas classes se vê que é sempre possivel escolher um termo $u_n$ da primeira e outro $v_n$ da segunda por forma que seja

$$v_n - u_n < \delta\,, \qquad (i)$$

sendo $\delta$ qualquer quantidade positiva assignavel.

Consideremos, inversamente, duas series, como U e V, a primeira composta de numeros crescentes e a segunda de numeros decrescentes, formados segundo uma lei qualquer e taes que para $n$ superior a um certo limite tenha logar a desegualdade $(i)$, por muito pequeno que seja o numero positivo $\delta$. Na classe U não haverá um termo máximo $u_s$ nem na classe V um minimo $v_t$, aliás seria

$$v_t - u_s \leqq v_n - u_n \, ,$$

qualquer que fôsse $n$: o que é contra a hypóthese. Posto isto, dois casos podem dar-se.

Se houver um numero racional $a$ que, para qualquer valor de $n$, verifique as desegualdades

$$u_n < a < v_n \, , \qquad (ii)$$

cada uma das differenças positivas $a - u_n$, $v_n - a$ é menor que $v_n - u_n$ e conseguintemente tende para zero á medida que $n$ augmenta. O numero $a$ determina a separação das classes U e V; e é unico porque, se houvesse outro $b$ nas mesmas condições, seria, por exemplo,

$$u_n < a < b < v_n$$

para qualquer valor de $n$: donde

$$v_n - u_n > b - a \, .$$

contra a hypóthese.

Se não houver numero racional que convenha ás desegualdades $(ii)$, diremos que U e V definem um numero de nova espécie, que chamamos *irracional* ou *incommensuravel* e que separa os numeros da classe U dos numeros da classe V.

Observemos que alguns termos de U ou V podem ser eguaes, o que não influe nos resultados precedentes; mas não pode ser indefinidamente $u_s = u_{s+1} = u_{s+2} = \ldots$ e ao mesmo tempo $v_t = v_{t+1} = v_{t+2} = \ldots$, porque esta hypóthese é incompativel com a condição $(i)$; nem separadamente $u_s = u_{s+1} = \ldots$, ou $v_t = v_{t+1} = \ldots$, pelo mesmo motivo.

Representando por $\alpha$ o numero incommensuravel definido pelas classes U e V, adoptaremos a notação

$$\alpha = (U, V) ,$$

escrevendo sempre em primeiro logar a classe inferior; e diremos que é

$$u_n < \alpha < v_n ,$$

isto é, que a relação $(ii)$ subsiste quando se muda $a$ em $\alpha$, notando que escrevemos *por convenção* aquellas desegualdades e que portanto não podemos applicar-lhes *à priori* as regras do cálculo das desegualdades entre numeros racionaes.

A notação

$$(U, V)$$

pode tambem representar uma grandeza commensuravel qualquer; os numeros racionaes e irracionaes chamam-se conjunctamente *reaes*.

Estabelecidos os principios precedentes, occupemo-nos das operações com os numeros incommensuraveis, começando por definir as noções de egualdade e desegualdade.

**158.** *Egualdade e desegualdade.* — Dado o numero racional $a$ e o irracional $\alpha = (U, V)$, se $a$ pertence a uma das classes U e V, vimos o que deva entender-se por $a$ menor ou maior que $\alpha$. Se o numero $a$ se não encontra entre os termos de U ou de V, haverá na classe U algum termo $u_n > a$, ou na classe V algum termo $v_n < a$; porque d'outro modo seria sempre

$$u_n < a < v_n ,$$

e portanto $(ii)$

$$(U,V)=a:$$

de modo que $\alpha$ seria racional, contra a hypóthese. Se para qualquer valor de $n$ fôr $a<u_n$, diremos que é $a<\alpha$; se fôr $a>v_n$, diremos que é $a>\alpha$. Fica assim definido o que se entende por numeros racionaes *menores* ou *maiores* que o irracional $\alpha$.

Dizemos que dois numeros irracionaes $\alpha$ e $\alpha'$ são eguaes quando qualquer numero racional menor que $\alpha$ é tambem menor que $\alpha'$, e qualquer numero racional maior que $\alpha$ é tambem maior que $\alpha'$. Sejam

$$\alpha=(U,V)\ ,\quad \alpha'=(U',V')\ ;$$

por definição, para que seja $\alpha=\alpha'$ é necessario que qualquer termo de U, sempre menor que $\alpha$, seja tambem menor que $\alpha'$; e qualquer termo de U′, pela mesma razão, seja menor que $\alpha$. Logo será

$$u_h<v'_s\ ,\quad u'_k<v_t\ . \qquad (iii)$$

Se houver um numero $n'$ tal que a qualquer valor de $n>n$ corresponda

$$v_n<u'_n\ ,$$

diremos que $\alpha$ é menor que $\alpha'$ ou $\alpha'$ maior que $\alpha$, e escreveremos indifferentemente

$$\alpha<\alpha'\ ,\quad \alpha'>\alpha\ .$$

Se fôr, para $n>n'$,

$$u_n>v'_n\ ,$$

diremos que $\alpha$ é maior que $\alpha'$, e escreveremos

$$\alpha>\alpha'\ ,\quad \alpha'<\alpha\ .$$

No primeiro caso $u'_n$ é maior que *todos* os numeros da classe V e no segundo $u_n$ é maior que todos os numeros da classe V'.

Da noção de egualdade resulta que o numero irracional

$$\alpha = (U, V)$$

não se altera: 1.° juntando ou tirando a qualquer das classes U e V termos em numero finito; 2.° supprimindo em U todos os termos menores que um termo dado $u_n$, ou na classe V todos os maiores que um certo $v_n$; 3.° inserindo ou supprimindo quaesquer elementos quantos se quizer, em alguma das classes, comtanto que em U fique sempre um *maior* e em V um *menor* do que os accrescentados ou supprimidos. É evidente.

D'aqui resultam os seguintes corollarios: 1.° Se a classe U contém elementos positivos e negativos, podemos supprimir os negativos; a classe V, neste caso, só terá elementos positivos. 2.° Se a classe V tem elementos positivos e negativos, podemos supprimir os primeiros; a classe U, neste caso, só terá elementos negativos. Poderemos obter por esta fórma que nas duas classes só haja elementos positivos ou negativos; diremos que o numero irracional é no primeiro caso *positivo* e no segundo *negativo*.

Poderá, porém, acontecer que a classe U só tenha termos negativos e a classe V só termos positivos. Neste caso será $(U, V) = 0$; e reciprocamente, só o numero zero póde ser definido por duas classes U e V em taes condições. É tambem $(0, V) = 0$, $(-U, 0) = 0$.

**159.** *Addição.* — Supponhamos que são dadas as parcellas

$$\alpha = (U, V)\,, \quad \alpha' = (U', V')\,,$$

cuja somma se quer obter.

Representando por $U + U'$ as sommas de cada termo de U com todos os termos de U', dispostas em ordem crescente de grandeza, e por $V + V'$ as sommas dos termos de V e V' dispostas em ordem decrescente, de

$$u_h < v_s\,, \quad u'_k < v'_t$$

resulta

$$u_h + u'_k < v_s + v'_t\ ;$$

isto é, qualquer elemento de $U + U'$ é menor que qualquer elemento de $V + V'$. Por outra parte, de

$$(v_s + v'_t) - (u_h + u'_k) = (v_s - u_h) + (v'_t - u'_k)$$

conclue-se que o primeiro membro se pode tornar menor que qualquer numero positivo tão pequeno quanto se quizer; logo as duas classes $U + U'$, $V + V'$ definem um numero, racional ou irracional. Se $\alpha$ e $\alpha'$ fôrem commensuraveis este numero será $\alpha + \alpha'$ e

$$(U, V) + (U', V') = (U + U', V + V')\ ;$$

d'aqui se toma *convencionalmente* esta expressão para definir a somma de dois numeros quaesquer. Para maior numero de parcellas seria

$$\begin{aligned}(U, V) + (U', V') &+ (U'', V'') + \cdots \\ &= (U + U' + U'' + \cdots, V + V' + V'' + \cdots).\end{aligned}$$

Vê-se que por esta definição a $\alpha = \alpha'$ corresponde $\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma$, como nos numeros racionaes. Com effeito, fazendo $\gamma = (W, Z)$, temos, conforme a notação adoptada, $w_m < z_n$, sendo $w_m$ e $z_n$ respectivamente um termo qualquer das classes W e Z. Tambem por ser $\alpha = \alpha'$ é *(iii)* $u_h < v'_s$ e $u'_k < v_t$; logo é

$$u_h + w_m < v'_s + z_n\,, \quad u'_k + w_m < v_t + z_n$$

e, pela definição de somma e pela noção de egualdade,

$$\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma .$$

A definição de somma applicada a dois numeros, um commensuravel e outro incommensuravel, conduz á relação

$$a + (U, V) = (a + U, a + V) ;$$

d'esta egualdade resulta

$$0 + (U, V) = (U, V) .$$

De ser $u_h + u'_k = u'_k + u_h$ e $v_s + v'_t = v'_t + v_s$ conclue-se que é

$$(U, V) + (U', V') = (U', V') + (U, V) ;$$

por onde se verifica o princípio commutativo na addição dos incommensuraveis. Similhantemente verificariamos a applicação do princípio associativo á somma dos numeros d'esta espécie.

**160**. *Subtracção.* — Esta operação depende da determinação de um numero $(-\alpha)$ tal que seja

$$\alpha + (-\alpha) = 0 ,$$

como vimos no n.º 151.

Ora, se fôr $\alpha = (U, V)$, a expressão $(-V, -U)$, composta com as mesmas duas classes com signaes trocados e invertidas, representa um numero; com effeito a $u_h < v_k$ corresponde $-v_k < -u_h$, e a differença $-u_h - (-v_s) = v_s - u_h$ pode tornar-se menor que qualquer grandeza assignavel.

Posto isto, a definição da somma mostra que

$$(U+V)+(-V,-U)=(U-V,V-U)=0\ ,$$

porque $U-V$ só contém termos negativos e $V-U$ só contém termos positivos. Está pois achado o numero $-\alpha$, e temos

$$-\alpha=-(U,V)=(-V,-U)\ .$$

D'esta relação se conclue que a regra da composição dos signaes (*n.° 162*) subsiste a mesma para todos os numeros reaes. Assim, por exemplo,

$$-[-(U,V]=+(U,V)\ ;$$

$$-(U,V)=(-V,-U)\ ,$$

donde

$$-[-(U,V)]=-(-V,-U)=(U,V)\ .$$

D'aqui resulta quaesquer que sejam os numeros reaes $\alpha$ e $\alpha'$ definidos cada um por duas classes, que é sempre

$$\alpha'+[\alpha+(-\alpha')]=\alpha,$$

e $\alpha+(-\alpha')$ representa a differença $\alpha-\alpha'$. Se fôr

$$\alpha=(U,V)\ ,\quad \alpha'=(U',V')\ ,$$

teremos assim

$$\alpha-\alpha'=(U,V)+(-V',-U')=(U-V',V-U')\ .$$

Se fôr $\alpha > \alpha'$, a classe $V - U'$ só tem termos positivos e poderemos fazer com que a classe $U - V'$ tenha tambem só termos d'esta espécie; o numero $\alpha - \alpha'$ é positivo. Se fôr $\alpha < \alpha'$, a classe $U - V'$ só tem termos negativos e poderemos considerar na outra classe termos tambem só d'esta especie; o numero $\alpha - \alpha'$ é negativo. Finalmente se fôr $\alpha = \alpha'$ a classe $U - V'$ só tem termos negativos ou nullos e $V - U'$ termos nullos ou positivos; donde $\alpha - \alpha' = 0$.

D'estes principios resulta o seguinte theorema fundamental: *Se a differença entre dois numeros $\alpha$ e $\alpha'$ fôr menor, em valor absoluto, do que qualquer numero positivo differente de zero, será $\alpha = \alpha'$.*

Com effeito, seja $\alpha - \alpha' = \beta$ e $\beta$, que podemos suppôr positivo, menor do que qualquer numero racional $\delta$, por mais pequeno que este numero seja. Representemos $\beta$ pela egualdade

$$\beta = (W, Z),$$

como é sempre possivel; será

$$\delta - \beta = (\delta - Z, \delta - W).$$

Mas, por hypóthese, esta differença será positiva; e portanto nas duas classes $\delta - Z$ e $\delta - W$ haverá termos positivos. Sejam dois d'elles

$$\delta - z_k, \quad \delta - w_l,$$

isto é,

$$z_k < \delta, \quad w_l < \delta.$$

Estas duas desegualdades, onde $\delta$ é um numero que se póde tornar tão pequeno quanto se quizer, mostram que os termos das classes W e Z se podem approximar indefinidamente de zero, e portanto é

$$\beta = 0 \quad \therefore \alpha = \alpha',$$

como se queria demonstrar.

**161.** *Multiplicação.* — Para definir esta operação quando os factores $\alpha$ e $\alpha'$ são representados por duas classes

$$\alpha=(U, V), \quad \alpha'=(U', V'),$$

consideraremos as classes, em cada factor, compostas com elementos do mesmo signal, como vimos que é permittido.

Posto isto, e considerando por agora só o caso de serem positivos os dois factores $\alpha$ e $\alpha'$, vamos ver que as classes $U \times U'$, $V \times V'$, formadas respectivamente pela multiplicação dos elementos de U pelos de U′ e dos elementos de V pelos de V′, definem um numero. Com effeito, sendo

$$u_h < v_k, \quad u'_s < v'_t$$

teremos, visto que todos estes numeros são positivos,

$$u_h \times u'_s < v_k \times v'_t .$$

Por outra parte, de

$$v_k v'_t - u_h u'_s = (v'_t - u'_s) v_k + (v_k - u_h) u'_s ,$$

resulta

$$v_k v'_t - u_h u'_s < (v'_t - u'_s) v_k + (v_k - u_h) v'_t ;$$

e o 2.° membro d'esta desegualdade decresce indefinidamente, porque decrescem as differenças $v'_t - u'_s$ e $v_k - u_h$, assim como os factores que as multiplicam.

O numero $(UU', VV')$ *é por definição*, o producto dos dois factores $\alpha$ e $\alpha'$, ou

$$(U, V) \times (U', V') = (UU', VV') ,$$

quando $\alpha$ e $\alpha'$ são positivos. Os outros casos, que podem dar-se com os signaes dos factores, resolvem-se facilmente; assim, por exemplo, se as classes U e V forem compostas de termos negativos

$$u_n = -w_n \,, \quad v_n = -z_n \,,$$

teremos

$$u_n u'_n = -u'_n w_n \,, \quad v_n v'_n = -v'_n z_n \,,$$

e as classes UU′, VV′ definirão o numero $-(U' W, V' Z)$: escreveremos, pois,

$$(U, V) \times (U', V') = -(W, Z) \times (U', V') \,.$$

Assim tambem se vê que fica generalisado o principio (I) do n.° 153, pois que de $UU' = U'U$ e $VV' = V'V$ resulta $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha$. O mesmo acontece com o principio (II) evidentemente; e com o principio (III), porque a definição precedente pode generalisar-se para qualquer numero de factores. O mesmo diremos do principio (IV), porque sendo

$$\alpha + \alpha' = (U + U', V + V') \,,$$

pela definição de multiplicação teremos

$$\begin{aligned}(\alpha + \alpha')\alpha'' &= [(U + U')U'', (V + V')V''] \\ &= [UU'' + U'U'', VV'' + V'V''] \\ &= [UU'', VV''] + [U'U'', V'V''] \\ &= (U, V)(U'', V'') + (U', V')(U'', V'') \\ &= \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' \,.\end{aligned}$$

Finalmente a regra (V) dos signaes fica egualmente justificada.

**162.** *Divisão.* — É o problema inverso da multiplicação; dados os numeros $\alpha$ e $\alpha'$, procura-se outro $q$, tal que seja

$$\alpha = \alpha' \times q \,.$$

Se $\alpha'$ é differente de zero, ha sempre um numero $q$, e um só, para o qual se verifica a relação precedente; esse numero representa-se por $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

Supponhamos que $\alpha$ e $\alpha'$ são positivos, o que é sufficiente como se viu no caso anterior, e seja

$$\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V}), \quad \alpha' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}') \,;$$

representemos em geral por $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ a classe dos numeros que se formam dividindo qualquer termo da classe A por qualquer termo da classe B. Vamos ver que as classes $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}'}$, $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}'}$ definem um numero.

Sendo positivos os termos $u_h$, $v_k$, $u'_s$, $v'_t$ das classes U, V, U′, V′, das deseguadades

$$u_h < v_k \,, \quad u'_s < v'_t$$

deduz-se que é

$$\frac{u_h}{v'_t} < \frac{v_k}{u'_s} \,:$$

por onde se vê que qualquer termo da classe $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}'}$ é menor do que qualquer termo da classe $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}'}$. Por outra parte, a differença

$$\frac{v_k}{u'_s} - \frac{u_h}{v'_t} = \frac{v_k v'_t - u_h u'_s}{u'_s v'_t} < \frac{v_k v'_t - u_h u'_s}{(u'_s)^2}$$

decresce indefinidamente; porque decresce o numerador, segundo se viu no caso anterior, e augmenta o denominador.

Posto isto, para demonstrar que o quociente procurado é

$$q=\left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right)$$

vamos ver primeiro que

$$\left(\frac{U'}{V'}, \frac{V'}{U'}\right)=1 .$$

Ora o 1.° membro d'esta expressão define um numero, visto que a demonstração precedente é geral e tem ainda logar quando U e V se tornam em $U'$ $V'$; além d'isso, sendo os termos da classe $U'$ menores que os da classe $V'$, os termos de $\frac{U'}{V'}$ serão sempre menores que 1 e os de $\frac{V'}{U'}$ maiores que 1 ; isto é,

$$\left(\frac{u'}{v'}\right)<1<\left(\frac{v'}{u'}\right),$$

o que demonstra a egualdade precedente *(n.° 157)*.

D'aqui resulta que será

$$\left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right)\times(U', V')=\left(\frac{UU'}{V'}, \frac{VV'}{U'}\right)$$

$$=(U, V)\times\left(\frac{U'}{V'}, \frac{V'}{U'}\right)$$

$$=(U, V) ,$$

ou $q=\left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right)$, como se queria demonstrar.

Que não ha outra solução prova-se como no n.° 154.

**163**. *Potenciação (expoente inteiro e positivo)*. — Consideremos a base positiva, por que a operação com os numeros negativos só teria a particularidade da applicação da regra dos signaes.

Seja pois o numero

$$\alpha=(\mathrm{U}, \mathrm{V}) ;$$

a potencia $n$ de $\alpha$ pode ser definida por duas classes, compostas respectivamente com as potencias $n$ dos termos de U e V. Comecemos pelo quadrado; segundo a definição de producto, as duas classes que representam o numero $\alpha^2=\alpha\times\alpha$ formam-se multiplicando entre si todos os termos da classe U e todos os da classe V; assim, teriamos as duas classes

$$\begin{array}{l} u_1^2\,,\, u_1\, u_2\,,\, u_2^2\,,\, u_1\, u_3, \cdots \\ v_1^2\,,\, v_1\, v_2\,,\, v_2^2\,,\, v_1\, v_3, \cdots \end{array} ;$$

supprimindo os productos, viriam as novas series

$$\begin{array}{l} u_1^2\,,\, u_2^2\,,\cdots\, u_n^2\,,\cdots \\ v_1^2\,,\, v_2^2\,,\cdots\, v_n^2\,,\cdots \end{array}$$

O primeiro d'estes systemas define o numero $\alpha^2$, e o ultimo define um numero $x$; para que seja $x=\alpha^2$ é necessario que qualquer termo da primeira classe de $\alpha^2$ seja menor do que qualquer termo da segunda classe de $x$, e qualquer da primeira classe de $x$ menor do que qualquer da segunda de $\alpha^2$; ora, por serem os numeros positivos

$$u_h < v_k\ , \quad u_s < v\ ,$$

será

$$u_h^2 < v_k^2\ , \quad u_h\, u_s < v_k^2\ ,$$

quaesquer que sejam os indices $h$, $k$ e $s$; do mesmo modo de

$$u_h < v_k \ , \quad u_h < v_l$$

resulta

$$u_h^2 < v_k v_l \ .$$

É por tanto $x = \alpha^2$, o que se pode traduzir na relação

$$\alpha^2 = (U^2, V^2) \ ,$$

representando por $U^2$ e $V^2$ duas successões de numeros compostas, respectivamente, com os quadrados dos termos das series U e V.

Do quadrado passariamos para o cubo

$$\alpha^3 = (U^2, V^2) \times (U, V) = (U^3, V^3) \ ;$$

e em geral será

$$\alpha^n = (U^n, V^n) \ .$$

Por conseguinte teremos tambem

$$\begin{aligned} \alpha^m \times \alpha^n &= (U^m, V^m) \times (U^n, V^n) \\ &= (U^m \times U^n, V^m \times V^n) = (U^{m+n}, V^{m+n}) \\ &= \alpha^{m+n} \ , \end{aligned}$$

como para os numeros racionaes, sendo os expoentes inteiros e positivos.

**164.** *Radiciação.* — É o problema inverso do precedente; procura-se o numero *positivo* $\alpha$ que elevado ao expoente *inteiro* e *positivo* $r$ produz um numero positivo dado $a$, de modo que seja $\alpha^r = a$.

Formando a classe U com todos os numeros racionaes positivos cuja potencia de grau $r$ é menor que $a$ e a classe V com todos aquelles cuja potencia de grau $r$ é maior que $a$, estas duas classes definem um numero, como já se disse. Vamos agora mostrar que $(U, V)^r = a$, isto é,

$$\alpha = (U, V) ,$$

e que nenhum outro valor de $\alpha$ convém ao problema.

Sabemos que

$$(U, V)^r = (U^r, V^r) ;$$

e como é cada termo de $U^r$ menor e cada termo de $V^r$ maior que $a$, de

$$(u_n)^r < a < (v_n)^r$$

qualquer que seja $n$, resulta a primeira parte da proposição. Supponhamos que era possivel outra solução $\alpha = (U', V')$, ou

$$a = (U^r, V^r), \; a = (U'^r, V'^r) ;$$

cada termo $(u'_s)^r$ de $U'^r$ será menor que $a$ e portanto a base $u'_s$ encontra-se entre os termos de U. Do mesmo modo $(v'_t)^r > a$ diz-nos que o termo $v'_t$ de $V'$ se encontram em V; por onde se vê que é

$$u'_s < v_k \quad u_h < v'_t ,$$

e que portanto os numeros (U, V) e (U′, V′) são eguaes.

**165.** *Potenciação (expoente qualquer).*—Sendo $a$ um numero commensuravel, do principio definido pela egualdade

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

sendo $m$ e $n$ inteiros e positivos, resulta a interpretação dos symbolos

$$a^0, \quad a^{-n}, \quad a^{\frac{m}{n}}$$

que assim ficam tambem regidos por aquella mesma lei.

Do mesmo modo, verificado o mesmo principio para o numero incommensuravel $\alpha$ e expoentes $m$ e $n$ positivos e inteiros, vê-se o que devemos entender por os mesmos symbolos applicados a esta base $\alpha$. Assim de $\alpha^m \times \alpha^n = \alpha^{m+n}$ resulta

$$\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q};$$

generalisando esta expressão para o caso de ser $p-q=r$ ou $q-p=r$, resulta

$$\alpha^{-r} = \frac{1}{\alpha^r};$$

e se fôr $p=q$, acha-se do mesmo modo

$$\alpha^0 = 1.$$

Considerando só bases positivas na interpretação do expoente fraccionario, notemos que

$$(\alpha^n)^p = \alpha^{np}, \quad \sqrt[p]{\alpha^{np}} = \alpha^{\frac{np}{p}};$$

generalisando esta expressão, temos

$$\alpha^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{\alpha^m} \, .$$

No que fica dito consideramos sómente o expoente racional; antes de examinar o caso do expoente incommensuravel demonstraremos os dois lemmas seguintes:

1.° *As potencias inteiras e positivas de um numero* m *crescem ou decrescem indefinidamente, augmentando o expoente, conforme é* m $>$ *ou* $< 1$.

Seja $m > 1$; ou $m = 1 + \delta$, com $\delta$ positivo. Considerando as potencias crescentes

$$1 \, , \quad 1 + \delta \, , \quad (1+\delta)^2 \, , \quad \cdots \quad (1+\delta)^n \, , \quad (1+\delta)^{n+1} \, ,$$

a differença de dois termos consecutivos d'esta serie é

$$(1+\delta)^{n+1} - (1+\delta)^n = (1+\delta)^n \times \delta > \delta \, :$$

d'onde se conclue que a differença entre o termo de ordem $n$ e o primeiro é maior que $n\delta$, ou

$$(1+\delta)^n > 1 + n\delta \, .$$

D'esta expressão resulta, fazendo $1 + n\delta > A$, que, para todos os valores do expoente que verifiquem a desegualdade

$$n > \left( \frac{A-1}{\delta} = \frac{A-1}{m-1} \right) ,$$

é $m^n > A$, por maior que seja o numero dado A.

Se fôr $m < 1$, faremos ,

$$m = \frac{1}{m'}\,, \quad m^n = \frac{1}{m'^n}\,,$$

com $m' > 1$: de $m'^n > 1$ resulta $m^n < 1$; de $m'^{n+h} > m'^n$ resulta $m^{n+h} < m^n$; de $m'^n > A$, $m^n < \frac{1}{A}$, por muito grande que seja A ou muito pequeno o numero $\frac{1}{A}$.

2.° *É sempre possivel determinar para o expoente positivo* n *um valor tão pequeno que a differença* $a^{n-1}$ *seja menor que a menor quantidade assignavel.*

Se fôr $a > 1$, fazendo

$$(1+\delta)^n > a\,,$$

como é possivel por menor que seja o numero positivo $\delta$, temos

$$1+\delta > a^{\frac{1}{n}}\,, \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \delta\,.$$

Se fôr $a < 1$, de

$$(1-\delta)^n < a$$

resulta

$$1-\delta < a^{\frac{1}{n}}\,, \quad 1 - a^{\frac{1}{n}} < \delta\,,$$

por mais pequeno que seja $\delta$. Em ambos os casos a potencia $a^{\frac{1}{n}}$ converge para a unidade quando $n$ cresce indefinidamente.

Posto isto, vejamos o que deve entender-se pela potencia $a^n$, quando o expoente é irracional. Seja $\alpha = (U, V)$ e $u$, $v$ dois termos quaesquer das classes U e V, respectivamente; as duas classes formadas com termos taes como $a^u$, $a^v$ definem um numero. Com effeito, se $a > 1$, $a^u < a^v$, por ser $u < v$, quaesquer que sejam $u$ e $v$; se $a < 1$, é $a^u > a^v$. Demais a differença $a^v - a^u$ ou $a^u - a^v$ pode tornar-se menor que a menor grandeza assignavel; os expoentes $u$ e $v$, por serem termos das series U e V, podem approximar-se indefinidamente um do outro. Mas, conforme fôr $a \gtrless 1$, assim teremos uma das expressões

$$a^v - a^u = a^u (a^{v-u} - 1) \,, \quad a^u - a^v = a^u (1 - a^{v-u}) \;;$$

e como $a^{v-u}$ converge indefinidamente para 1, á medida que o expoente $v - u$ diminue, qualquer d'estas differenças converge indefinidamente para zero. Fica assim provado que as duas classes

$$a^{u_1} \,, \quad a^{u_2} \,, \ldots$$

$$a^{v_1} \,, \quad a^{v_2} \,, \ldots$$

definem um numero; no caso de ser $\alpha$ racional, este numero é $a^\alpha$, e por isso damos ainda ao mesmo numero esta significação quando $\alpha$ é irracional. Se fôr $a > 1$, escreveremos

$$a^\alpha = (a^{u_1}, a^{u_2}, \ldots ; a^{v_1}, a^{v_2}, \ldots) \;;$$

se fôr $a < 1$, faremos

$$a^\alpha = (a^{v_1}, a^{v_2}, \ldots ; a^{u_1}, a^{u_2}, \ldots) \,.$$

Consideremos só as bases maiores que a unidade, porque facilmente se concluiria de modo análogo para potencias de bases menores que 1; e sejam estas bases

$$\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V}), \; \alpha' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}') \;;$$

por definição de potencia temos

$$a^{\alpha}=(a^{u_1},\ a^{u_2},\ \ldots\ ;\ a^{v_1},\ a^{v_2},\ \ldots)\ ,$$
$$a^{\alpha'}=(a^{u'_1},\ a^{u'_2},\ \ldots\ ;\ a^{v'_1},\ a^{v'_1},\ \ldots)\ ,$$

e pela regra de multiplicação

$$a^{\alpha}\times a^{\alpha'}=(a^{u_1}\times a^{u'_1},\ a^{u_1}\times a^{u'_2}\ \ldots\ ;\ \ldots)$$
$$=(a^{u_1+u'_1},\ a^{u_1+u'_2}\ \ldots\ ;\ \ldots)\ ,$$

visto que os expoentes $u$ e $v$ são racionaes. Mas

$$\alpha+\alpha'=(\mathrm{U}+\mathrm{U}',\ \mathrm{V}+\mathrm{V}')$$
$$=(u_1+u'_1,\ u_1+u'_2,\ \ldots\ ;\ \ldots)\ ;$$

e portanto

$$a^{\alpha+\alpha'}=(a^{u_1+u'_1},\ a^{u_1+u'_2},\ \ldots\ ;\ \ldots)\ ;$$

e, comparando com o desenvolvimento precedente, resulta

$$a^{\alpha}\times a^{\alpha'}=a^{\alpha+\alpha'}\ .$$

D'aqui

$$(a^{\alpha})^2=a^{\alpha}\times a^{\alpha}=a^{2\alpha}\ ;$$

e em geral

$$(a^{\alpha})^m=a^{m\alpha}\ .$$

Esta fórmula subsiste quando o expoente $m$ é fraccionario, porque

$$\left(a^{\frac{m}{n}\alpha}\right)^n=a^{m\alpha}=(a^{\alpha})^m\ .$$

donde, extrahindo a raiz $m$ a ambos os membros, se tira

$$(a^\alpha)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}\alpha},$$

mesmo quando o expoente fraccionario seja negativo.

A fórmula ainda tem logar quando $m$ é irracional. Porquanto, se é $m=\alpha'$ e $\alpha'$ o numero irracional acima considerado, será por definição

$$\begin{aligned}(a^\alpha)^{\alpha'} &= [(a^\alpha)^{u'_1}, (a^\alpha)^{u'_2} \ldots ; \ldots] \\ &= (a^{\alpha u'_1}, a^{\alpha u'_2} \ldots ; \ldots),\end{aligned}$$

por serem racionaes os termos $u'_1$, $u'_2$, ...; mas é

$$\alpha\alpha' = (\alpha u'_1, \alpha u'_2, \ldots ; \ldots):$$

logo será tambem

$$(a^\alpha)^{\alpha'} = a^{\alpha\alpha'}.$$

**166.** *Transformação das egualdades e desegualdades.*—Se os numeros irracionaes $\alpha$ e $\alpha'$ forem definidos por classes, será, como se viu, $\alpha=\alpha'$ quando as classes de $\alpha$ forem identicas ás de $\alpha'$; mas neste caso as classes de $\alpha'$ são indenticas ás de $\alpha$ porque umas e outras se compõem de elementos racionaes, logo será $\alpha'=\alpha$, que é o princípio (I) do n.° 156. Do mesmo modo se verificariam os princípios (II) e (III).

Para as desegualdades temos por definição que, se fôr $\alpha>\alpha'$, haverá na classe inferior de $\alpha$ um elemento $u_n$ maior que um $v'_n$ da classe superior de $\alpha'$; podemos pois achar dois numeros racionaes $a$ e $b$ que, para valores de $n$ superiores a um certo numero $n'$, convenham ás desegualdades

$$u_n > a > b > v'_n,$$

donde

$$u_n - v'_n > a - b\ ;$$

por outra parte, a differença entre dois elementos das duas classes de um terceiro numero $k$ é tal que para todos os valores de $n > n'$

$$t_n - w_n < a - b\ ,$$

donde

$$u_n - v'_n > t_n - w_n\ ,\quad u_n + w_n > v'_n + t_n$$

ou $\alpha + k > \alpha' + k$. Portanto de $\alpha > \alpha'$ tira-se

$$\alpha - \alpha' > 0\ ,\quad \alpha' - \alpha < 0\ ,\quad -\alpha < -\alpha'\ ,\quad -\alpha' > -\alpha\ ,$$

como no n.º citado.

Do mesmo modo, se forem dadas as desegualdades $\alpha > \alpha'$, $k > k'$, teremos, com a mesma notação, $u_n > v'_n$, $w_n > t'_n$, donde, por serem racionaes estes numeros,

$$u_n + w_n > v'_n + t'_n\ ,$$

ou $\alpha + k > \alpha' + k'$, que é o principio (V) do mesmo n.º 156. Analogamente se discorreria para o producto de desegualdades, etc.

## CAPÍTULO III.

### Raizes commensuraveis.

**167.** A resolução *algébrica* das equações tem por objecto traduzir os valores das raizes em *fórmulas*, compostas com o grau e os coefficientes da proposta. Assim, as raizes da equação do 2.° grau $ax^2+2bx+c=0$ são dadas pela expressão

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

A resolução *numérica* consiste na determinação de processos apropriados para obter em cada caso, exactamente ou por approximações successivas, o valor numérico das raizes de uma equação, cujo grau e cujos coefficientes são tambem dados numericamente.

Em geral, é impossivel a resolução algébrica das equações de grau superior ao 4.° A resolução numérica, de que nos vamos occupar primeiro, é sempre realisavel.

As raizes podem ser reaes ou imaginarias, e as reaes dividem-se ainda em commensuraveis e incommensuraveis.

As raizes commensuraveis podem tambem dividir-se em positivas ou negativas, e inteiras ou fraccionarias; a todas estas espécies convém o mesmo processo de cálculo. Com effeito as raizes negativas da proposta $f(x)=0$ são as raizes positivas da transformada em $-x$; e as suas raizes fraccionarias são as raizes inteiras de outra transformada, como vae ver-se.

Reduzindo o primeiro coefficiente á unidade e conservando inteiros os dos outros termos *(n.° 85)*, a equação

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots=0$$

não tem raizes fraccionarias. Com effeito, qualquer fracção irreductivel $\frac{a}{b}$, substituida por $x$, daria

$$\frac{a^n}{b^n}=-p_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}-p_2\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}-\cdots,$$

ou, multiplicando por $b^{n-1}$,

$$\frac{a^n}{b}=-p_1a^{n-1}-p_2ba^{n-2}-\cdots;$$

e esta identidade não poderá subsistir, sendo inteiros os numeros $a$, $b$ e os coefficientes $p$, porque o 1.º membro é uma fracção irreductivel.

Dada pois a equação

$$f(x)=p_0 x_n+p_1 x^{n-1}+p_2 x^{n-2}+\cdots+p_n=0\ ,$$

que pode ter raizes fraccionarias, resolveremos a sua transformada em

$$y=p_0 x\ ,$$

cujas raizes commensuraveis são todas inteiras. Se estas raizes forem

$$y=b_1\ ,\quad b_2\ ,\quad \ldots\quad b_r\ ,$$

onde $r$ não pode ser maior do que $n$, as da proposta serão

$$a_1=\frac{b_1}{p_0}\ ,\quad a_2=\frac{b_2}{p_0}\ ,\quad \ldots\quad a_r=\frac{b_r}{p_0}\ ,$$

inteiras ou fraccionarias conforme os numeradores forem ou não divisiveis por $p_0$.

Entretanto os coefficientes d'aquella transformada serão, na maioria dos casos, muito grandes, tornando o cálculo excessivamente laborioso; por isso convirá começar pela indagação directa das raizes inteiras da proposta, pelo processo que ensinaremos no n.º seguinte.

Abaixa-se depois o grau da equação, dividindo-a pelos factores binomios correspondentes ás raizes achadas; e como algumas d'ellas podem ser múltiplas, repetem-se as mesmas operações em quanto fôr possivel fazê-lo.

Tendo reduzido d'este modo o grau da equação em tantas unidades quantas são as suas raizes inteiras, simples e múltiplas, á equação resultante se applicará aquella transformação, a fim de se de determinarem as raizes fraccionarias da proposta.

**168.** *Raizes inteiras.* — Dada a equação $f(x)=0$, viu-se *(n.º 65)* que, dividindo o 1.º membro por $x-a$, os coefficientes do quociente e o resto são expressos pelas relações

$$q_0=p_0\,,\quad q_1=aq_0+p_1\,,\quad q_2=aq_1+p_2\,,$$
$$\cdots q_{n-1}=aq_{n-2}+p_{n-1}\,,\quad R=aq_{n-1}+p_n\,.$$

Se os coefficientes $p_0, p_1 \ldots p_n$ e o numero $a$ forem todos inteiros, os coefficientes $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ serão inteiros; se além d'isto $a$ fôr raiz da equação, será $R=0$. Nestes princípios se funda o *méthodo dos divisores*, tambem chamado *méthodo de Newton*, que vamos expôr.

Para $R=0$ as egualdades precedentes dão

$$-q_{n-1}=\frac{p_n}{a}\,,\quad -q_{n-2}=\frac{p_{n-1}-q_{n-1}}{a}\,,\quad \cdots$$

$$-q_1=\frac{p_2-q_2}{a}\,,\quad -q_0=-p_0=\frac{p_1-q_1}{a}\,;$$

e, sendo $a$ raiz inteira da equação, todos estes quocientes serão tambem numeros inteiros. Portanto $a$ divide o ultimo termo da proposta, a somma do quociente d'esta divisão com o coefficiente da 1.ª potencia da incógnita, a somma do quociente d'esta nova divisão com o coefficiente da 2.ª potencia da incógnita e, em geral, a somma de cada um dos coefficientes da equação com o quociente da divisão precedente. O último d'estes quocientes é o coefficiente do primeiro termo de $f(x)$, com o signal trocado.

Reciprocamente, se todas estas condições forem satisfeitas, procurando o quociente da divisão do 1.º membro da proposta por $x-a$ chega-se ao resto zero; e portanto o inteiro $a$ é raiz da equação dada.

Do que fica dito resulta que, para achar as raizes inteiras de uma equação, começaremos por formar todos os divisores do seu último termo; e sujeitaremos depois cada um d'estes numeros ás provas precedentes, rejeitando aquelles que conduzirem a algum quociente fraccionario ou a um quociente final differente de $-p_0$.

Advertiremos que:

1.° O processo exposto é applicavel tanto ás raizes inteiras positivas como ás negativas, sem ser necessario obter a transformada em $-x$. O coefficiente $p_0$ é sempre positivo; os restantes podem ser positivos, negativos ou nullos, e a raiz $a$ póde ser positiva ou negativa; todos estes numeros devem ser tomados com o respectivo valor numérico e signal, na prova das raizes.

2.° Os divisores do último termo podem ser em grande numero; só experimentaremos os que ficarem comprehendidos entre os limites das raizes positivas e negativas, que se determinarão previamente.

3.° Os divisores $\pm 1$ só podém vir a ser excluidos na última prova, pois que satisfazem a todas as outras. Por isso é preferivel, em vez de applicar o méthodo a estes dois numeros, ensaia-los directamente.

4.° Se $a$ fôr raiz da equação $f(x)=0$, a divisão de $f(x)$ por $x-a$ faz-se sem resto e o quociente $\varphi(x)$ é um polynomio de coefficientes inteiros; donde resulta que, se $\alpha$ fôr um numero inteiro, tambem o será $\varphi(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-a}$. O divisor $a$ do ultimo termo de $f(x)$, que não satisfizer a esta condição, não é raiz da proposta; o que poderá servir para excluir alguns d'estes divisores. O numero $\alpha=\pm 1$ é muito proprio para este objecto, por se aproveitarem os numeros $f(+1)$ e $f(-1)$ que já foram obtidos (3.°).

5.° Se estes dois numeros forem respectivamente divisiveis por $1-a$ e por $-1-a$, ou antes por $a-1$ e $a+1$, como $a$, por hypóthese, divide o último termo $f(0)$ de $f(x)$, as quantidades

$$f(+1)\,,\quad f(0)\,,\quad f(-1)$$

serão respectivamente divisiveis pelos tres numeros $a-1$, $a$, $a+1$. Ora um d'estes numeros admitte o divisor 3, como succede sempre com tres inteiros consecutivos quaesquer; portanto, se a equação tiver alguma raiz inteira, uma d'aquellas tres quantidades será divisivel por 3. A reciproca pode não ser verdadeira.

6.º Na prova de cada divisor os quocientes successivos são, como se viu, os coefficientes, com signal contrário e em ordem inversa, do quociente da divisão de $f(x)$ pelo binomio linear correspondente áquella raiz.

Seja dada, por exemplo, a equação

$$f(x)=3x^5-2x^4+9x^2-12x+4=0\ ;$$

facilmente se acharia,

$$f(+1)=2\ ,\quad f(0)=4\ ,\quad f(-1)=20\ ,$$

por onde se vê que a proposta não tem raizes inteiras. A transformada em $y=3x$ é *(n.º 85)*

$$F(y)=y^5-2y^4+81y^2-324y+324=0\ ,$$

que poderá ter alguma raiz inteira por ser $F(0)=324$ múltiplo de 3. Não pode ter a raiz 1 nem $-1$, por serem

$$F(1)=80\ ,\quad F(-1)=726\ .$$

Na determinação dos limites das raizes da equação $F(y)=0$, usaremos do méthodo de Bret para as positivas e do de Lagrange para as negativas. Acham-se assim os numeros

$$5\ ,\quad -10\ .$$

Entre os quinze divisores do ultimo termo $324=2^2\times3^4$, estam comprehendidos naquelles limites os seguintes

$$2\ ,\quad 3\ ,\quad 4\ ,\quad -2\ ,\quad -3\ ,\quad -4\ ,\quad -6\ ,\quad -9\ ;$$

mas $4-1$, $-2-1$, $-6-1$ não são divisores de $F(1)$, e $3+1$, $-9+1$ não o são de $F(-1)$: d'onde se conclue que só devemos experimentar os numeros 2, $-3$, $-4$. Dá-se ao cálculo a seguinte disposição

$$
\begin{array}{rcccc}
a = & 2 & -3 & -4 \\
\hline
-q_{n-1} = \dfrac{324}{a} = & 162, & -108, & -81 \\
-q_{n-2} = \dfrac{p_{n-1} - q_{n-1}}{a} = & -81, & +144 & » \\
-q_{n-3} = & 0, & -75 & \\
-q_{n-4} = & 0, & +25 & \\
-q_{n-5} = & -1 & » &
\end{array}
$$

Sobre um traço horizontal alinham-se os numeros que devemos ensaiar; por baixo de cada um e em columna vertical toma-se nota dos quocientes que se obteem dividindo successivamente por esse numero o termo conhecido, a somma d'este primeiro quociente com o coefficiente da segunda potencia da incógnita, etc. Quando alguma d'estas divisões não dá quociente inteiro, põe-se no logar d'este o signal », e abandona-se o divisor correspondente que não é raiz da equação. Se todas as divisões derem quocientes inteiros, o último ou é o coefficiente do primeiro termo da proposta, com signal contrário, ou é um numero differente; no primeiro caso o divisor correspondente é raiz, no segundo não.

No quadro precedente vê-se que o numero 2 satisfaz a todas as condições e é portanto raiz da equação. Com $-3$ o último quociente não é inteiro; $-4$ foi excluido na segunda prova. A resolução da transformada mostra que a proposta só tem a raiz commensuravel $x = \dfrac{2}{3}$.

O quociente da divisão de $F(y)=0$ por $y-2$ é *(n.º 65)*

$$y^4 + 81y - 162 = 0\,;$$

e mudando novamente $y$ em $3x$, a equação

$$x^4+3x-2=0$$

dará as outras raizes da proposta. D'estas, duas são reaes e de signaes contrários, por ser negativo (*n.° 105, 2.°*): o último termo da equação; duas são imaginarias, como indica a falta de dois termos consecutivos (*n.° 111*).

**169.** Se a proposta admittir raizes eguaes, observaremos em primeiro logar que o numero das raizes commensuraveis differentes, que suppomos determinadas pela operação precedente, será inferior ao grau da equação. Dada esta hypóthese, dividiremos o primeiro membro da proposta pelo producto dos factores binomios correspondentes áquellas raizes, e verificaremos depois quaes d'essas mesmas raizes conveem á equação quociente. Procede-se depois com esta equação como se procedeu com a proposta, e assim successivamente.

Seja dada, por exemplo, a equação

$$f(x)=x^6-x^5-15x^4+25x^3+50x^2-132x+72=0\ .$$

Os limites das raizes (*méth. de Lagrange*) são

$$+8\ ,\quad -8\ ;$$

e os divisores do último termo, comprehendidos entre estes limites, são

$$2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ -4\ ,\ -6\ .$$

Ora, sendo $f(+1)=0$ e $f(-1)=216$, a proposta tem a raiz **1**; e como 216 não é divisivel por $4+1$, $6+1$, $-6+1$, só verificaremos os divisores 2, 3, $-2$, $-3$, $-4$. Assim, temos as operações

| 2 | 3 | − 2 | − 3 | − 4 |
|---|---|---|---|---|
| 36 , | 24 , | −36 , | −24 , | −18 |
| −48 , | −36 , | +84 , | +52 | » |
| + 1 | » | −67 , | −34 | |
| +13 | | +21 , | + 3 | |
| − 1 | | − 3 . | + 4 | |
| − 1 | | + 2 | − 1 . | |

Os divisores 2 e −3 satisfazem a todas as provas das raizes; o divisor −2 dá quocientes inteiros em todas as operações, mas o último d'elles não é o coefficiente do primeiro termo da equação, com signal contrário. Logo a proposta tem as raizes 1, 2 e −3; dividindo-a por

$$(x-1)(x-2)(x+3),$$

acha-se a equação quociente

$$x^3-x^2-8x+12=0,$$

que não tem já a raiz 1. Experimentemos as outras duas, e comecemos pela raiz 2, com o processo do n.º 64 que é preferivel neste caso:

| 1 | −1 | −8 | +12 |
|---|---|---|---|
| 1 | +1 | −6 | 0 |

O resto zero mostra que 2 ainda é raiz; a nova equação quociente é

$$x^2+x-6=0,$$

cujas raizes são

$$x=2\,,\quad x=-3\,.$$

Assim concluimos que a proposta se decompõe em factores binomios pela seguinte forma

$$(x-1)(x+3)^2(x-2)^3\,;$$

e tem a raiz simples $+1$, a raiz dupla $-3$ e a raiz tripla $+2$.

A equação é completa e tem todas as raizes reaes. D'estas, serão quatro positivas porque $f(x)$ tem quatro variações: uma é a unidade e tres são eguaes a 2. As duas restantes, correspondentes ás duas permanencias, são negativas e eguaes a $-3$.

**170.** O processo exposto neste capitulo póde servir, salvas as difficuldades do cálculo, para achar os *factores commensuraveis* do segundo grau de uma equação dada.

Representando um d'estes factores por $x^2+px+q$, a identidade

$$f(x)=(x^2+px+q)(p_0x^{n-2}+r_1x^{n-3}+r_2x^{n-4}+\cdots)$$

dará logar a $n$ equações de condição que se obteem egualando de um e outro lado os coefficientes das mesmas potencias de $x$. Eliminando os coefficientes $r_1$, $r_2$, etc. entre estas equações, ficam duas em $p$ e $q$; e depois uma só em $p$ ou $q$, a qual deverá ser do grau $\frac{n(n-1)}{2}$, por ser este o numero de divisores do 2.° grau da proposta *(n.° 83)*.

Se a proposta tiver factores commensuraveis do 2.° grau, a última equação terá uma raiz racional, pelo menos; e pondo esse valor do coefficiente, $p$ ou $q$, na penúltima equação, poderemos conhecer o valor do outro coefficiente do trinomio respectivo.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^4+3x-2=0\,.$$

A identidade

$$x^4+3x-2=(x^2+px+q)(x^2+r_1x+r_2)$$

conduz ás seguintes equações de condição:

$$r_1+p=0\,,\quad r_2+pr_1+q=0\,,\quad pr_2+qr_1=3\,,\quad qr_2=-2\,.$$

As duas primeiras dão

$$r_1=-p\,,\quad r_2=p^2-q;$$

substituindo nas duas últimas, vem

$$p^3-2pq=3\,,\quad qp^2-q^2=-2\,.$$

Da primeira d'estas equações tira-se

$$q=\frac{p^3-3}{2p}\,;$$

e substituindo na segunda vem finalmente

$$p^6+8p^2-9=0\,.$$

Esta equação, de grau $6=\frac{4(4-1)}{2}$, tem a raiz 1; e, por envolver só potencias pares de $p$, tem tambem a raiz $-1$. Para $p=1$, a expressão $q=\frac{p^3-3}{2p}$ dá $q=-1$; para $p=-1$, vem $q=2$. Assim aquella equação do 4.° grau é o producto dos dois factores correspondentes do 2.º grau, ou

$$x^4+3x-2=(x^2+x-1)(x^2-x+2)\ ;$$

e as suas quatro raizes são

$$x=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\ ,\quad x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-7})\ :$$

duas reaes e duas imaginarias, como mostraria a regra de Descartes.

## Exercícios.

**66.** Dada a equação

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0\ ,$$

achar as raizes commensuraveis $2\ ,\ -2\ ,\ -4$.

**67.** Dada a equação

$$2x^3-12x^2+13x-15=0\ ,$$

achar a raiz 5.

**68.** Dada a equação

$$4x^4-11x^2+7x-6=0\ ,$$

achar as raizes $\frac{3}{2}$ e $-2$.

**69.** Dada a equação

$$x^6+3x^5-36x^4-45x^3+93x^2+132x+140=0\ ,$$

achar as raizes

$$2\,,\ 5\,,\ -2\,,\ -7\,,\ -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})\,.$$

**70.** Resolver a equação

$$2x^5 + 3x^4 - 31x^3 + 3x^2 - 43x + 210 = 0\,;$$

limites, $+7$, $-8$; raizes, $2$, $3$, $-5$, $-\frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{-47}$.

**71.** Resolver a equação

$$x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 104x^3 + 45x^2 + 108x - 108 = 0\,;$$

raizes: $-1$ (simples), $2$ (dupla), $3$ (tripla).

**72.** Achar os factores trinomios commensuraveis da equação

$$x^4 - 3x^2 - 12x + 5 = 0\,;$$

solução: $(x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 1)$.

# CAPÍTULO IV.

## Raizes incommensuraveis. Separação.

**171.** O problema das raizes incommensuraveis envolve duas questões distinctas: a *separação*, e o *cálculo numerico*. Diz-se que as raizes estão separadas quando são conhecidos numeros taes, que dois d'elles consecutivos comprehendem uma raiz da proposta, e só uma: esses numeros dão o *logar* das raizes. Para que a separação fique completa é necessario, no caso de haver raizes eguaes, determinar o grau de multiplicidade de cada uma.

Na resolução d'este problema supporemos a equação de coefficientes reaes. Se tivesse coefficientes imaginarios, ella reduzia-se á forma

$$f_1(x) + i f_2(x) = 0 ,$$

e a sua resolução viria a depender das duas $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, de coefficientes reaes.

O cálculo das raizes commensuraveis está feito. Por isso consideraremos a equação desembaraçada das raizes d'esta espécie, tanto eguaes como deseguaes; isto é, supporemos o seu grau abaixado, por meio da divisão pelos factores binomios correspondentes áquellas raizes.

Posto isto, designemos por

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$$

numeros comprehendidos entre os limites das raizes da proposta $f(x) = 0$, e dispostos em ordem crescente de grandeza; substituamos successivamente $x$ por cada um d'estes numeros em $f(x)$. Se dois resultados consecutivos, como $f(\gamma)$ e $f(\delta)$, tiverem o mesmo signal, entre $\gamma$ e $\delta$ estará comprehendido um numero par de raizes reaes ou nenhuma; se aquelles resultados tiverem signaes contrarios, entre $\gamma$ e $\delta$ haverá uma ou um numero impar de raizes (*n.º 104*). Podemos subdividir em muitos outros cada um d'estes intervallos, pela substituição de numeros intermédios aos considerados.

Chegaremos assim a determinar um certo numero $i$ de intervallos, em que $f(x)$ muda de signal; mas o problema só ficará resolvido quando por outra parte soubermos que o numero das raizes reaes da proposta é $i$: por exemplo, quando fôr $i = n$, e $n$ o grau de $f(x)$. Fóra d'este caso não podemos saber se as raizes estão separadas, ou se foram insufficientes as tentativas de separação; o que annulla, quasi, o valor do méthodo, que aliás seria conveniente pela sua simplicidade.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^4 - 5x - 1 = 0 ;$$

a falta de dois termos consecutivos mostra que, pelo menos, duas raizes são imaginarias (*n.º 111*). Os numeros $v=1$ e $v'=1$ de variações na proposta e na transformada em $-x$ mostram que ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa. Substituindo $x$ pelos numeros inteiros comprehendidos entre os limites $-3$ e $4$, acha-se que a primeira d'essas raizes fica entre $2$ e $3$ e a segunda entre $-1$ e $-2$.

**172.** *Méthodo de Lagrange.*—O defeito do méthodo elementar das substituições consiste (*n.º 171*) na falta de um criterio por onde se conheça que em cada intervallo não ha raizes quando não ha mudança de signal, ou ha uma só no caso contrário.

Ora, se $a_1$ e $a_2 > a_1$ forem duas raizes comprehendidas entre os numeros $\alpha$ e $\beta > \alpha$, será $\beta - \alpha > a_2 - a_1$; e portanto, se a differença $\beta - \alpha$ fôr menor que a menor differença $a_2 - a_1$ de duas raizes quaesquer da proposta, entre $\alpha$ e $\beta$ não poderá existir mais de uma d'estas raizes.

Para determinar um numero inferior áquella menor differença $a_2 - a_1$, Lagrange empregava a equação aos quadrados das differenças das raizes da proposta. Sendo $h$ o limite inferior das raizes positivas d'aquella equação, correspondentes ás raizes reaes da equação dada $f(x) = 0$, e designando por $l_1$ e $l_2$ os limites inferior e superior d'estas últimas, os termos da progressão

$$l_1, l_1 + \sqrt{h}, \; l_1 + 2\sqrt{h}, \text{ etc.}$$

satisfazem á condição de que se trata. Substituindo cada um d'elles em $f(x)$ e conservando unicamente os que produzem mudança de signal, teremos effectuado a separação requerida.

Este méthodo é perfeito, mas exige cálculos muito laboriosos. Cauchy mostrou que se póde dispensar a formação da equação aos quadrados das differenças, e separar as raizes pela substituição unicamente de numeros inteiros, operando do modo seguinte.

Designemos por $a_1, a_2, \ldots a_n$ todas as raizes da proposta

$f(x)=0$, e por $\rho$ o limite superior dos módulos respectivos; será (n.° 61)

$$\text{mod. } a_1 < \rho, \text{ mod. } a_2 < \rho, \text{ mod. } (a_2 - a_1) < 2\rho$$

$$\text{mod. } (a_2 - a_1)^2 < 4\rho^2$$

O grau da equação aos quadrados das differenças é $\frac{n(n-1)}{2}$; e o último termo da mesma equação, abstrahindo do signal, é o producto

$$K = (a_1 - a_2)^2 . (a_1 - a_3)^2 . . . (a_{n-1} - a_n)^2 ,$$

ou o discriminante de $f(x)=0$ (n.° 144). Por conseguinte, se $a_1$ e $a_2$ são duas raizes para as quaes $(a_2 - a_1)^2$ é uma quantidade positiva, será

$$\text{mod. } K < (a_2 - a_1)^2 \times (4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1};$$

donde se deduz

$$(a_2 - a_1)^2 > \frac{\text{mod. } K}{(4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Basta pois fazer $h$ egual ao 2.° membro d'esta desegualdade.

Se a proposta não tem raizes eguaes, é K differente de zero; esta quantidade é o quadrado do determinante de Vandermonde (n.° 49); e, se os coefficientes de $f(x)$ forem inteiros e o do 1.° termo é a unidade, as funcções symétricas $S_\alpha$ não teem denominadores (n.° 131). Podemos, pois, suppôr $K=1$ naquella desegualdade, e fazer

$$h = \frac{1}{(4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Se as raizes da proposta forem todas reaes, a equação aos quadrados das differenças respectivas só tem raizes positivas.

A differença $\sqrt{h}$ será em geral, inferior á unidade; mas mudando $x$ em $y\sqrt{h}$ e designando por $b_1$ e $b_2$ as raizes da transformada $F(y)=0$ correspondentes ás raizes $a_1$ e $a_2$ da proposta, será

$$|b_1-b_2|=\frac{|a_1-a_2|}{\sqrt{h}}>1,$$

por ser $\sqrt{h}<|a_1-a_2|$. Na separação das raizes da transformada bastará então empregar numeros da ordem natural.

Como applicação directa do méthodo de Lagrange, consideremos a equação $x^3-7x+7=0$. O seu discriminante é *(n.º 144)*

$$K=\begin{vmatrix} & 1 & 0 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & -7 & 7 & \\ 3 & 0 & -7 & & \\ & 3 & 0 & -7 & \\ & & 3 & 0 & -7 \end{vmatrix},$$

ou, sommando a 1.ª linha com a última,

$$K=\begin{vmatrix} & 1 & 0 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & -7 & 7 & \\ 3 & 0 & -7 & & \\ & 3 & 0 & -7 & \\ & 1 & 3 & -7 & \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo este determinante pela última columna, onde todos os elementos são nullos menos o primeiro, e pondo em evidencia o factor 7 da penúlima columna, acha-se

$$K = 49 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & \\ & 3 & 0 & -1 \\ & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 49 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & \\ 1 & 3 & -7 & \\ 1 & 1 & -4 & \end{vmatrix},$$

onde o segundo determinante resulta do primeiro pela somma da 1.ª linha com a 3.ª e com a 4.ª Desenvolvendo do mesmo modo pela última columna, e depois pela 1.ª linha, vem

$$K = -49 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -49(14-15) = 49 .$$

Por outra parte o limite superior dos modulos *(n.º 96)* é o menor numero que torna positiva a expressão $\rho^3 - 7\rho - 7$, ou $\frac{7}{2}$, d'onde $2\rho = 7$ e

$$h = \frac{49}{7^4} = \frac{1}{7^2}, \ \sqrt{h} = \frac{1}{7}.$$

A transformada seria, pois,

$$y^3 - 343y + 2401 = 0 ,$$

onde as raizes ficam separadas pela serie natural dos numeros comprehendidos entre os limites.

**173.** Os theoremas de Rolle e de Sturm conduzem a outros processos de separação. O primeiro já foi indicado (*n.º 113*), e sobre elle não são necessarios maiores desenvolvimentos. É perfeito, quando são commensuraveis todas as raizes reaes da equação derivada.

O processo de Sturm nada deixa a desejar sob o ponto de vista especulativo; mas é, como o de Lagrange, extremamente laborioso. No exemplo

$$x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1=0\ ,$$

que se encontra no tratado de Serret, as funcções são, além da proposta,

$$\begin{gathered}6x^5+5x^4-4x^3-3x^2+2x-1\ ,\\ 17x^4+14x^3-27x^2+32x-35\ ,\\ -792x^3+2052x^2-2058x+127\ ,\\ \text{etc.}\ ;\end{gathered}$$

e a última, embora neste caso não seja necessaria, seria um numero de quarenta e quatro algarismos.

Formadas as funcções de Sturm, a substituição de $x$ por dois numeros $\alpha$ e $\beta>\alpha$ dá duas linhas de resultados com os respectivos signaes; no intervallo de $\alpha$ a $\beta$ haverá tantas raizes reaes quantas são as perdas de variações na segunda linha, comparada com a primeira. Não se fazem tentativas inuteis; abandona-se o intervallo que não dá perda de variações; naquelle em que se perde só uma variação as raizes estão separadas; nos outros empregam-se substituições intermédias, até completar a separação, que ha de infallivelmente conseguir-se.

Em geral, empregam-se nestas substituições numeros em progressão decimal, para facilitar os cálculos.

**174.** *Methodo de Fourier.* — Dada a equação $f(x)=0$ de grau $n$, e tendo formado as *funcções de Fourier*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots f^m(x), \ldots f^n(x),$$

viu-se *(n.º 112)* que os resultados da substituição de $x$ nestas funcções por $-\infty$, ou pelo limite $-l$ das raizes negativas da proposta, apresentam $n$ variações de signal; os resultados da substituição por $+\infty$, ou pelo limite $l$ das raizes positivas, só dão permanencias. Vejamos como aquellas $n$ variações vão desapparecendo, quando $x$ cresce por valores contínuos.

É claro que nenhuma alteração pode dar-se na successão dos signaes, senão quando alguma das funcções passa por zero *(n.º 104)*: o que dá logar aos casos seguintes.

1.º *Caso: passa por zero unicamente a primeira funcção* $f(x)$. Seja $a$ o valor de $x$ que annulla $f(x)$ e $h$ um numero positivo tão pequeno que entre $a-h$ e $a+h$ não haja numero algum, senão o mesmo $a$, que annulle alguma das funcções consideradas: o que exprimiremos representando esses dois limites respectivamente por $<a$ e $>a$, como faz Fourier. Vimos *(n.º 112)* que $f(x)$ e $f'(x)$ teem signaes contrarios para $x<a$ e o mesmo signal para $x>a$, o que dá uma d'estas disposições:

$$\begin{array}{lccccccc} & & f(x), & f'(x) & & & f(x), & f'(x) \\ \multirow{3}{*}{$x$} & (<a) & + & -\cdots & & & - & +\cdots \\ & (a) & 0 & -\cdots, & & \text{ou} & 0 & +\cdots \\ & (>a) & - & -\cdots & & & + & +\cdots \end{array}$$

Em ambos os casos a última linha tem menos *uma* variação do que a primeira.

2.° *Caso: passa por zero unicamente a funcção intermédia* $f^m(x)$. Conservando a notação precedente, $f^m(x)$ e a sua derivada $f^{m+1}(x)$ teem signaes contrários para $x<a$ e o mesmo signal para $x>a$; $f^{m-1}(a)$ pode ter qualquer signal, e as tres funcções apresentarão alguma das disposições seguintes:

$$
\begin{array}{ll|cccccc}
 & & & f^{m-1}(x), & f^m(x), & f^{m+1}(x) & \\
 & (<a) & \cdots & + & - & + & \cdots \\
x & (a) & \cdots & + & 0 & + & \cdots \\
 & (>a) & \cdots & + & + & + & \cdots \\
 & (<a) & \cdots & - & - & + & \cdots \\
x & (a) & \cdots & - & 0 & + & \cdots \\
 & (>a) & \cdots & - & + & + & \cdots
\end{array}
$$

ou alguma das duas combinações que se obtem trocando todos os signaes precedentes. Logo, quando se annulla uma só funcção intermédia, desapparecem *duas* variações ou *nenhuma*. No primeiro caso a proposta tem duas raizes imaginárias, além das que podem ser indicadas em outros logares; visto como, por mais que se apertem os limites, se perdem sempre duas variações, que não reapparecem mais, e $f(x)$ não passa por zero. No segundo caso uma variação da linha superior apparece na linha inferior transportada para o logar immediato, á esquerda.

3.° *Caso: passam por zero* p *funcções successivas.* Não podem ser as primeiras por que a proposta, por hypóthese, não tem raizes eguaes; são pois intermédias, porque a última $f^n(x)$ é um numero positivo. Sejam

$$f^m(a)=0\ ,\quad f^{m+1}(a)=0\ldots.f^{m+p-1}(a)=0\ ;$$

isto é, supponhamos que $x=a$ annulla $f^m(x)$ e as suas $p-1$

derivadas consecutivas; a equação $f^m(x)=0$ tem $p$ raizes eguaes a $a$, e o seu primeiro membro muda ou não de signal, na passagem por $x=a$, conforme $p$ fôr impar ou par *(n.º 104)*; as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^{m+p}(x)$ conservam o mesmo signal desde $x<a$ até $x>a$.

Se $p$ é par, ou $p=2k$, as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ apresentam a mesma combinação de signaes na linha $<a$ e na linha $>a$; o numero de variações perdidas nas funcções

$$f^{m-1}(x),\quad f^m(x),\ldots f^{m+p-1}(x),\quad f^{m+p}(x)$$

é *(n.º 112)* $p=2k$.

Se $p$ fôr impar, ou $p=2k'+1$, as duas funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ darão uma variação na linha superior e uma permanencia na inferior, ou vice-versa; o numero de variações perdidas é no primeiro caso $p+1=2k'+2$, e no segundo $p-1=2k'$.

4.º *Caso: passam por zero varios grupos de funcções.* Sommam-se as variações perdidas em cada grupo.

Todos estes resultados melhor se comprehenderão nos exemplos seguintes.

Exemplo 1.º

| | | |
|---|---|---|
| $(<a)$ | $--+-+-+-+$ | 7 *var.* |
| $(a)$ | $--\ 0\ 0\ 0\ 0+-+$ | |
| $(>a)$ | $--+++++-+$ | 3 *var.* |

A linha média é dada e o último signal é sempre $+$. Para formar a linha superior repetimos os dois primeiros e os tres últimos signaes; sobre o último zero pomos o signal contrário ao que lhe fica á direita; sobre o penultimo zero o signal contrário ao antecedente, e continuamos a alternar assim os signaes sobre os zeros restantes. Para formar a linha inferior repetimos novamente os dois primeiros e os tres últimos signaes; por baixo dos zeros pomos sempre o signal que está á direita do último. Neste exemplo as funcções perdem 4 variações na passagem de $x$ por $a$, e a equação tem pelo menos 4 raizes imaginárias.

Exemplo 2.°

| | | |
|---|---|---|
| $(<a)$ | $+ - + - + - + +$ | 6 *var.* |
| $(a)$ | $+ - 0\ 0\ 0 - + +$ | |
| $(>a)$ | $+ - - - - - + +$ | 2 *var.* |

Na linha média ha um numero impar de zeros, 3, entre signaes eguaes; perdem-se portanto $3+1$ variações, e a proposta tem pelo menos 4 raizes imaginárias.

Exemplo 3.°

| | | |
|---|---|---|
| $(<a)$ | $+ - + - + + - + - - - + - +$ | 10 *var.* |
| $(a)$ | $0 - 0\ 0 + 0\ 0\ 0 - - 0 + 0 +$ | |
| $(>a)$ | $- - + + + - - - - - + + + +$ | 3 *var.* |

Na linha média o primeiro zero corresponde á primeira funcção, onde se perde 1 variação; ha depois um grupo de dois zeros, onde se perdem 2 variações; segue-se um grupo de tres zeros entre signaes contrarios, onde se perdem $3-1$ variações; depois um zero onde não se perde nenhuma; finalmente outro zero onde se perdem 2: ao todo, 7 variações perdidas. A equação tem a raiz real $a$ e pelo menos 6 imaginarias; como na linha inferior se encontram 3 variações, haverá ainda pelo menos mais uma raiz real.

**175.** Pela discussão precedente vê-se que o numero de variações perdidas, quando passam por zero funcções intermédias, é sempre *par*. Quando a proposta passa por zero as variações desapparecem *uma a uma*.

entre $\alpha$ e $\beta$; a equação $f''(x)=0$ não tem raiz alguma entre estes limites. O signal de $f''(\alpha)$ será opposto *(n.º 112)* ao de $f'(\alpha)$, egual ao de $f'(\beta)$ e não muda no intervallo; o signal de $f(\alpha)$ será o de $f''(\alpha)$, para que na primeira linha haja duas variações nos tres primeiros signaes, e o mesmo de $f(\beta)$ para que nesta parte da segunda linha haja só permanencias. Teremos assim uma das disposições seguintes

$$\begin{array}{cccc} & f(x), & f'(x), & f''(x) \\ (\alpha) & + & - & + \\ (\beta) & + & + & + \end{array}\Bigg\}, \qquad \begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f''(x) \\ - & + & - \\ - & - & - \end{array}\Bigg\}.$$

Consideremos a primeira.

A proposta ha de ter duas raizes ou nenhuma entre os limites $\alpha$ e $\beta$. Se fosse conhecido o valor *exacto* da raiz $\gamma$ da equação $f'(x)=0$, a ambiguidade desappareceria *(n.º 113)*: se $f(\alpha)$ e $f(\gamma)$ tivessem signaes contrários, as duas raizes seriam reaes e ficariam separadas nos intervallos $(\alpha\gamma)$ e $(\gamma\beta)$; se $f(\alpha)$, $f(\gamma)$ e $f(\beta)$ tivessem o mesmo signal, as duas raizes faltariam no intervallo $(\alpha\beta)$. Se o valor de $\gamma$ só fôr conhecido por approximação, aquella indicação não será segura, porque cada uma das raizes pode ser mais próxima de $\gamma$ do que essa approximação, qualquer que ella seja; procederemos então do modo seguinte.

Se as duas raizes indicadas são reaes, representando-as por $x_1$ e $x_2>x_1$, a disposição por ordem crescente de grandeza d'estes numeros, dos limites $\alpha$, $\beta$ e da raiz $\gamma$ será *(n.º 113)*

$$\alpha, \ x_1, \ \gamma, \ x_2, \ \beta.$$

Considerando, como dissemos, o primeiro grupo de signaes, $f(x)$ será positiva e decrescente desde $x=\alpha$ até $x=x_1$; mínima para $x=\gamma$; negativa desde $x=x_1$ até $x=x_2$; novamente positiva, mas agora crescente, desde $x=x_2$ até $x=\beta$ *(n.º 106)*.

Façamos $x_1 - \alpha = h$; será *(n.º 114)*

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha + \theta h) = 0 ,$$

donde

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)}, \quad x_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)},$$

sendo $\theta$ positivo e $<1$. Ora é $\alpha + \theta h < \gamma$ e portanto $f'(\alpha + \theta h) < 0$; por outra parte, é $f(\alpha) > 0$ e $f'(\alpha + \theta h) > f'(\alpha)$, por ser a funcção $f'$ crescente no intervallo: logo é

$$x_1 > \alpha + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} .$$

Façamos, do mesmo modo, $\beta - x_2 = k$; teremos

$$f(\beta - k) = f(\beta) - kf'(\beta - \theta' k) = 0 ,$$

donde

$$k = \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)}, \quad x_2 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)},$$

sendo $\theta'$ positivo e $<1$. Ora é $\beta - \theta' k > \gamma$ e portanto $f'(\beta - \theta' k) > 0$. Por outra parte, é $f(\beta) > 0$ e $f'(\beta - \theta' k) < f'(\beta)$: logo

$$x_2 < \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} .$$

Mas é tambem $x_1 < x_2$: por onde finalmente teremos

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} < \beta - \alpha .$$

Tomando estes dois quocientes em valor absoluto, se um d'elles ou a sua somma fôr egual ou maior que a differença $\beta-\alpha$ dos limites, concluiremos que neste intervallo faltam as duas raizes presumidas; se essa somma fôr menor que $\beta-\alpha$, estreitaremos o intervallo d'estes limites, que assim se mostra serem muito desviados. Substitue-se pois um numero $\alpha'$ intermédio a $\alpha$ e $\beta$, e determina-se pelo signal de $f'(\alpha')$ em qual dos dois novos intervallos $(\alpha\alpha')$ e $(\alpha'\beta)$ se encontra a raiz $\gamma$ da equação $f'(x)=0$. Nesse intervallo, $(\alpha'\beta)$ por exemplo, verificam-se todas as condições que supposemos no intervallo primitivo; submettemo-lo ás mesmas provas, e abandonamos o outro intervallo $(\alpha\alpha')$. D'este modo é claro que os novos limites se approximam de $\gamma$; ao fim de poucas tentativas teremos separado as raizes, se são reaes, ou formado dois coefficientes

$$\frac{f(\alpha')}{-f'(\alpha')}, \quad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

taes que, approximando-se successivamente de

$$\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right|=+\infty,$$

um d'elles ou a sua somma egualará, ou excederá, a differença $\beta-\alpha'$.

Com a segunda disposição dos signaes obteriamos os mesmos resultados, como facilmente se reconhecerá reproduzindo a discussão precedente.

II. Tendo examinado o caso de serem os tres primeiros índices

$$2,\quad 1,\quad 0,$$

vejamos agora como se procede nos outros casos em que é $\Delta=2$, e ainda quando é $\Delta>2$.

Percorrendo a linha dos índices da direita para a esquerda, o primeiro índice 1, correspondente a uma funcção $f^m(x)$, terá á esquerda o índice 2. Por quanto o índice 1 só pode ser precedido: por 1, o que é contra a hypóthese; por 0 e neste caso, como é $\Delta \overline{\gtrless} 2$, haveria para a esquerda outra vez o índice 1, egualmente contra a hypóthese; ou por 2.

Se aquelle índice 1 não for seguido por zero, estreitaremos o intervallo, como acima se disse *(n.º 175)*, de modo que a equação $f^{m+1}(x)=0$ não tenha raiz alguma entre os novos limites $\alpha'$ e $\beta'$. Esta operação leva-nos a considerar tres novos intervallos: 1.º $(\alpha\alpha')$ onde a equação $f^m(x)=0$ não pode ter raiz alguma, porque a única raiz que ella tem entre $\alpha$ e $\beta$ encontra-se entre $\alpha'$ e $\beta'$; portanto no intervallo $(\alpha\alpha')$ o índice relativo a $f^m(x)$ é zero e, se no mesmo intervallo se encontra para a esquerda um índice egual a 1, esse índice corresponde a uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$. 2.º $(\beta\beta')$, onde chegamos ás mesmas conclusões. 3.º $(\alpha'\beta')$, onde se pode encontrar para a esquerda outro índice 1, relativo a uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$, ou não.

Por esta forma conseguimos recuar o primeiro índice egual á unidade para o logar de uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$, excepto no intervallo $(\alpha'\beta')$ quando nelle tem logar a disposição seguinte dos índices

$$\begin{array}{ccc} f^{m-1}(x) & f^m(x) & f^{m+1}(x) \\ 2 & 1 & 0 \end{array},$$

que é o caso (I) applicado á equação $f^{m-1}(x)=0$; esta equação pode ter então duas raizes réaes ou nenhuma entre $\alpha'$ e $\beta'$, o que se reconhecerá pela regra dada. No primeiro caso separaremos as raizes; uma ficará comprehendida entre $\alpha'$ e um certo numero $s$ e a outra entre $s$ e $\beta'$, e a cada um d'estes intervallos corresponderá uma linha de índices em que o primeiro egual a 1 estará á esquerda de $f^m(x)$ e pelo menos corresponderá a $f^{m-1}(x)$.

Se a equação $f^{m-1}(x)=0$ não tiver raizes reaes entre $\alpha'$ e $\beta'$, o mesmo acontecerá ás equações $f^{m-2}(x)=0$, $f^{m-3}(x)=0$,

... $f'(x) = 0$, $f(x) = 0$. Com effeito, as duas raizes indicadas faltam (I) porque a raiz real da equação $f^m(x) = 0$, substituida em $f^{m-1}(x)$ e $f^{m+1}(x)$ dá resultados do mesmo signal; isto é, a linha dos signaes perde duas variações na passagem de $x$ por aquelle valor e a cada uma d'aquellas equações faltam duas raizes no intervallo considerado *(n.º 174, 2.º)*. Portanto o índice de cada uma das funcções $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{m-1}(x)$ tem uma parte egual a **2**, que se pode supprimir porque cada índice só representa um limite superior do numero de raizes reaes que a equação correspondente pode ter no intervallo; depois de supprimida esta parte, o índice de $f^{m-1}(x)$ será zero, de modo que o primeiro índice 1 se encontrará para a esquerda d'esta funcção.

Pode tambem acontecer que a equação $f^{m-1}(x) = 0$ tenha duas raizes eguaes entre $\alpha'$ e $\beta'$. A conclusão é a mesma que no caso das raizes imaginárias; agora seriam as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ que passariam conjunctamente por zero, que é o caso *(n.º 174, 3.º)* de $p$ par e egual a **2**.

**177.** Seja, por exemplo, a equação

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 - 95x^2 - 46x - 101 = 0\ ,$$

tratada por Fourier na sua obra *Analyse des équations*. As funcções são

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 \\
f'(x) &= 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46 \\
f''(x) &= 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190 \\
f'''(x) &= 60x^2 - 72x - 144 \\
f^{\mathrm{iv}}(x) &= 120x - 72 \\
f^{\mathrm{v}}(x) &= 120\ ,
\end{aligned}$$

onde substituiremos $x$ por numeros com que se opere facilmente.

Empregando os numeros 0, — 1, — 10, vê-se que as funcções, para este último limite, dão só variações: logo, — 10 é o limite das raizes negativas. Experimentando os numeros 1 e 10, este último só dá permanencias: e portanto 10 é o limite das raizes positivas.

Assim temos

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | $f^{iv}(x)$ | $f^{v}(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-10)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | 5 *var.* |
| $(-1)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | 4 *var.* |
| $(0)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | 3 *var.* |
| $(1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | 3 *var.* |
| $(10)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 *var.* |

No intervallo entre $-10$ e $-1$ ha uma raiz real; outra entre $-1$ e 0; entre 1 e 10 estam indicadas tres, que podem ser todas reaes, ou uma real e duas imaginárias.

Os índices entre (1) e (10) são

$$3\,,\ 2\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,;$$

o primeiro egual a 1 corresponde a $f'''(x)$, é seguido por zero e precedido por 2. Applicando a regra do n.° anterior ás funcções correspondentes

$$f''(x)\,,\quad f'''(x)\,,\quad f^{iv}(x)\,,$$

achamos $f''(1)=30$, $f'''(1)=156$, $f''(10)=15150$, $f'''(10)=5136$, em valores absolutos; e porque é

$$\frac{30}{156}+\frac{15150}{5136}<10-1\,,$$

concluímos que aquelles limites são muito desviados. Antes de substituir numeros intermédios, examinaremos se $f''(x)$ e $f'''(x)$ teem algum divisor commum; verificamos que não.

Substituindo então nas funcções numeros comprehendidos entre 1 e 10, teremos

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | $f^{\text{iv}}(x)$ | $f^{\text{v}}(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | 3 *var.* |
| (2) | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | 3 *var.* |
| (3) | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | 1 *var.* |
| (10) | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 *var.* |

Entre 1 e 2 não ha raizes; devemos pois procurar as tres raizes entre 2 e 10. Comparando estes dois limites, encontram-se os índices

$$3\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,.$$

O primeiro egual a 1 é precedido por 2, como deve ser; mas não é seguido por 0, e devemos portanto dividir immediatamente o intervallo. Para isso substitue-se o numero 3, que dá duas novas linhas de índices; e entre 3 e 10 os índices são

$$1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,$$

por onde sê que neste intervallo ha uma raiz da proposta. Entre 2 e 3 os índices são

$$2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,;$$

o primeiro egual a 1 é seguido por 0, e devemos applicar a este intervallo a regra do n.° anterior. Ora é

$$f(2)=21\,,\quad f'(2)=30\,,\quad f(3)=32\,,\quad f'(3)=43\,,$$

abstrahindo dos signaes; e sendo

$$\frac{21}{30}+\frac{32}{43}>3-2\,,$$

concluímos que são imaginárias as duas raizes indicadas entre 2 e 3. A separação está feita.

### Exercícios.

**73.** $x^4-4x^3-3x+23=0$: limites 0 e 10; na passagem por zero perdem-se duas variações (regra do signal duplo); na passagem por $x=1$ não se perde nenhuma; uma raiz entre 2 e 3, outra entre 3 e 10.

**74.** $x^5+x^4+x^2-25x-36=0$: limites $-10$ e 10; separam-se as raizes com os numeros $-2$, $-1$, 0, 1.

**75.** $x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=0$: limites $-10$ e 10; separam-se as raizes com os numeros $-1$, 0, 1.

**76.** $x^5-10x^3+6x+1=0$: limites $-10$ e 10. Separar as raizes.

## CAPÍTULO V.

## Cálculo das raizes incommensuraveis.

**178.** Seja a proposta $f(x)=0$, desembaraçada de raizes commensuraveis e sem raizes eguaes; supponhamos que são conhecidos dois numeros $\alpha$ e $\beta>\alpha$, entre os quaes está comprehendida uma raiz irracional $x_1$ d'aquella equação, e representemos por $\gamma$ um numero $>\alpha$ e $<\beta$. Fazendo $x=\gamma$ em $f(x)$, pelo signal do resultado saberemos se a raiz procurada $x_1$ fica entre $\alpha$ e $\gamma$ ou entre $\gamma$ e $\beta$; e o novo intervallo virá substituir o primeiro nas indagações subsequentes. Proseguindo da mesma maneira, iremos estreitando os limites, isto é, obtendo numeros cada vez mais próximos do valor da raiz.

Este processo, muito laborioso, torna-se impraticavel depois das primeiras approximações e não se emprega senão para determinar os primeiros algarismos de dizima. Continua-se depois o cálculo por méthodos mais expeditos, que vamos expôr.

**179.** *Méthodo de Newton.* — Supponhamos que pelo processo de substituições reconhecemos que a raiz $x_1$ fica entre dois limites $\alpha$ e $\beta > \alpha$, cuja differença é uma pequena fracção; seja $\gamma$ um numero $> \alpha$ e $< \beta$ e façamos $x_1 = \gamma + h$. A quantidade $h$ será dada pela equação $f(\gamma + h) = 0$, ou

$$f(\gamma) + hf'(\gamma) + \frac{h^2}{2} f''(\gamma) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(\gamma) = 0 .$$

Ora, por hypóthese, $h$ é menor que a pequena fracção $\beta - \alpha$, e portanto $h^2$, $h^3$, ... $h^n$ são quantidades muito pequenas em comparação de $h$; o mesmo poderá dizer-se dos termos que teem estas quantidades por factores, visto que na equação precedente os denominadores são numeros maiores que 1. Suppondo pois que podemos desprezar estes termos, isto é, contentando-nos em primeira approximação com os algarismos em que elles não influem, teremos, para determinar $h$, a equação $f(\gamma) + hf'(\gamma) = 0$, donde

$$h = -\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} .$$

Teremos assim um valor approximado de $x_1$, que designaremos por

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} ;$$

com este valor obteriamos, pelo mesmo processo, uma segunda approximação,

$$\gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} = \gamma_2 ,$$

e assim por deante.

Estes resultados nem sempre representam uma approximação progressiva, e o méthodo tem de ser cautelosamente empregado. Evidentemente as últimas expressões presumem que $f'(\gamma)$, $f'(\gamma_1)$, etc., são differentes de zero; e estando os numeros $\gamma$, $\gamma_1$, etc., comprehendidos entre $\alpha$ e $\beta$, só podemos assegurar que aquella condição se verifica, quando neste intervallo não se encontra raiz alguma da equação $f'(x)=0$. Por este motivo devemos previamente estreitar os limites, até chegar a dois taes que entre elles não haja raiz alguma d'aquella equação; e neste caso existirá no intervallo considerado uma só raiz da proposta, segundo o theorema de Rolle.

Applicando este méthodo á equação

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 ,$$

facilmente se verifica que ella tem uma raiz entre 2 e 2,5; fazendo $x = 2,2$, vê-se que a raiz fica entre 2 e 2,2, não podendo differir de 2,1 em mais de 0,1. Façamos então $\gamma = 2,1$; teremos

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2.0946 ,$$

e a raiz procurada fica entre 2 e $\gamma_1$. Na segunda approximação teriamos

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} = \gamma_1 - 0,00004852 = 2,09455148 .$$

A primeira approximação deu $\gamma_1 = 2,0946$; sabemos que a raiz fica entre 2 e 2,0946, sem sabermos de qual d'estes limites ella se approxima mais. Só a segunda approximação nos mostra que o último algarismo do segundo limite está errado por excesso.

**180.** O méthodo newtoniano é incompleto. Não pode applicar-se indifferentemente a qualquer dos dois limites, nem determina o grau de approximação de cada resultado. Estas duas questões foram consideradas por Fourier que as resolveu do modo seguinte:

I. Pelo que fica dito no n.º antecedente, devemos começar pela separação das raizes e estreitar cada intervallo até que entre os respectivos limites não haja raiz alguma da equação $f'(x) = 0$.

Depois estreitaremos ainda os limites, se fôr necessário, até que a equação $f''(x) = 0$ não tenha entre elles raiz alguma. É possivel realizar esta condição pelo processo indicado para as raizes da equação $f'(x) = 0$, excepto quando a proposta e $f'(x) = 0$ tiverem uma raiz commum no intervallo considerado; mas neste caso haverá um divisor $\varphi(x)$ commum a $f(x)$ e $f''(x)$, e em vez da equação dada resolveremos as duas mais simples

$$\varphi(x) = 0, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0:$$

por onde se vê que podemos sempre suppôr que os tres primeiros indices de Fourier, em cada intervallo, são

$$1, \ 0, \ 0.$$

Nestas circumstancias procederemos á approximação sem incertezas, como vamos ver. Para fixar idêas, supponhamos que $\alpha$ e $\beta > \alpha$ são os limites da raiz procurada $x_1$, e que os primeiros signaes das duas linhas ($\alpha$) e ($\beta$) são

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| ($\alpha$) | $+$ | $-$ | $+$ |
| | 1 | 0 | 0 |
| ($\beta$) | $-$ | $-$ | $+$. |

Pondo $x_1 = \alpha + h$, viria

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha + \theta h) = 0 \ ,$$

donde

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)} \ , \quad x_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)} \ ,$$

com $\theta$ positivo e $< 1$. Ora $f(\alpha)$ e $f'(\alpha)$ teem signaes contrarios, e portanto é $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha+\theta h)} < 0$, visto que $f'(x)$ não muda de signal em todo o intervallo; mas $f''(x)$ é positiva, e portanto $f'(x)$ é crescente, desde $x = \alpha$ até $x = \beta$: logo será

$$-f'(\alpha + \theta h) < -f'(\alpha)$$

e teremos simultaneamente

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} > \alpha, \quad \alpha_1 < x_1 \ .$$

Assim o novo limite $\alpha_1$ é mais próximo de $x_1$ do que $\alpha$, e no mesmo sentido; por onde viriam agora as duas linhas de signaes

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| $(\alpha_1)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| | 1 | 0 | 0 |
| $(\beta)$ | $-$ | $-$ | $+$ |

exactamente com a disposição anterior. Applicando o mesmo raciocinio aos limites $\alpha_1$ e $\beta$, teriamos na segunda approximação

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{f(\alpha_1)}{-f'(\alpha_1)} > \alpha_1, \quad \alpha_2 < x_1 .$$

Empregando indefinidamente o mesmo processo obteriamos uma successão de numeros

$$\alpha, \alpha_1\ \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots$$

crescentes e menores do que a raiz procurada.

Se, porém, tivessemos feito $x_1 = \beta - k$, donde

$$f(\beta) - kf'(\beta - \theta' k) = 0, \quad k = \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)} ,$$

não poderiamos affirmar que

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} ,$$

fosse mais proximo de $x_1$ do què $\beta$ e no mesmo sentido. Com effeito, é $\beta_1 < \beta$ porque $f(\beta)$ e $f'(\beta)$ teem o mesmo signal; mas, por ser $f''(x)$ positivo, é $f'(x)$ crescente em todo o intervallo, e portanto

$$|f'(\beta)| < |f'(\beta - \theta' k|:$$

logo é $\beta_1 < x_1$, e o novo limite é em sentido contrario do antigo; podendo até ser $\beta_1 < \alpha$.

Porém, se na expressão de $k$ substituirmos o denominador por $f'(\alpha)$, notando que, por ser $f'(x)$ negativa e crescente, é

$$f'(\alpha)| > |f'(\beta - \theta' k)|,$$

teremos

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\alpha)} < \beta, \quad \beta_1 > x_1;$$

com o limite $\beta_1$ teremos, pois, as duas linhas de signaes

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| $(\alpha_1)$ | + | − | + |
| | 1 | 0 | 0 |
| $(\beta_1)$ | − | − | + |

exactamente com a disposição anterior. Applicando o mesmo raciocinio aos novos limites, teriamos

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{f(\beta_1)}{f'(\alpha_1)} < \beta_1, \quad \beta_2 > x_1;$$

e empregando indefinidamente o mesmo processo formariamos

*

uma successão de numeros

$$\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots\ \beta_m,\ \beta_{m+1},\ldots$$

decrescentes e maiores do que a raiz procurada. Finalmente as duas series ($\alpha$) e ($\beta$) definem o numero incommensuravel que é raiz da proposta.

Repetindo a mesma discussão nos casos correspondentes ás outras tres disposições possiveis dos signaes, a saber:

$$\left.\begin{matrix}+--\cdots\\---\cdots\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-+-\cdots\\++-\cdots\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}-++\cdots\\+++\cdots\end{matrix}\right\},$$

concluiriamos que a regra de Newton se deve applicar áquelle dos dois limites que, substituido por $x$ em $f(x)$ e $f''(x)$, dá resultados do mesmo signal. A esse numero chamou Fourier *limite exterior*, nome extrahido da representação geométrica do problema; designando-o sempre por $a$, e o *interior* por $b$, os numeros

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},\quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

serão dois novos limites, mais próximos do que os primeiros. Nesta notação $b$ pode ser $>$ ou $< a$.

Pelo mesmo processo calculariamos outros dois limites $a''$ e $b''$; se $a$ era o limite exterior da primeira approximação, o limite exterior na segunda será

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

como já dissémos.

II. Seria laborioso calcular os dois limites $a'$ e $b'$; vamos ver que basta calcular um d'elles, o de Newton, por exemplo.

1.° Subtrahindo membro a membro as expressões de $a'$ e $b'$, fazendo $b-a=d$, $b'-a'=d'$, vem (n.° 114)

$$d'=d-\frac{f(a+d)-f(a)}{f'(a)}=-d^2\frac{f''(a+\theta d)}{2f'(a)}.$$

Como $f''(a+\theta d)$ tem o mesmo signal que $f(a)$, porque $a$ é limite exterior (I), aquella funcção terá signal contrário ao de $f'(a)$ se é $a<b$, e então é tambem $d>0$ e $d'>0$; inversamente, se fôr $a>b$. Para fixar idéas, nesta discussão consideraremos o caso $a<b$, e portanto $a'<b'$, etc. (I); os resultados seriam os mesmos na outra hypóthese, como facilmente se reconhecerá.

2.° Comecemos por estreitar o intervallo primitivo de modo que $f''(x)$ seja crescente ou decrescente entre os limites considerados, como já fizemos para $f'(x)$; então os quatro primeiros índices serão

$$1,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Considerando só valores absolutos, representemos por $f''(B)$ o maior dos dois numeros $f''(a)$ e $f''(b)$ e por $f'(\alpha)$ o menor dos dois $f'(a)$ e $f'(b)$; será

$$\left|\frac{f''(B)}{2f'(\alpha)}\right|>\left|\frac{f''(a+\theta d)}{2f'(a)}\right|$$

e, em vez dos limites antecedentes (1.°), poderemos tomar estes

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$b'=a'+d^2\left|\frac{f''(B)}{2f'(\alpha)}\right|,$$

sendo $x'<b'$ (1.°).

3.º Para determinar com exactidão o algarismo do quociente, até onde havemos de levar a divisão de $f(a)$ por $f'(a)$, tomemos a unidade decimal immediatamente superior ao valor absoluto do quociente $\frac{f''(B)}{2f'(\alpha)}$, de modo que, se este quociente for 0,023.., essa unidade decimal será 0,1; em geral, seja a sua expressão $\frac{1}{10^k}$, podendo $k$ ser positivo, negativo ou nullo. Seja tambem, segundo a notação adoptada, $d=\frac{1}{10^n}$, donde $d^2=\frac{1}{10^{2n}}$; a differença dos limites $a'$ e $b'$ será menor que

$$\frac{1}{10^{2n+k}}.$$

Por outra parte, sendo por hypóthese $a<b$ e portanto tambem $a<x_1$, é claro que nos afastaremos do valor de $x_1$ tomando o quociente procurado por defeito; ao contrário, tomando esse quociente por excesso mas com erro inferior a uma unidade da ordem decimal $2n+k$, accrescentamos ao valor exacto de $a'$ uma quantidade que não póde ser maior que $\frac{1}{10^{2n+k}}$ e teremos um novo limite que, por maioria de razão, se afasta da raiz numa quantidade menor que uma unidade decimal d'aquella ordem.

Calcularemos portanto o quociente da divisão de $f(a)$ por $f'(a)$ até o algarismo de ordem $2n+k$ inclusivamente, e juntando uma unidade a este algarismo teremos o novo limite.

4.º O signal do resultado da substituição de $x$ em $f(x)$ pelo numero assim obtido indicará se este numero é maior ou menor que a raiz. No primeiro caso tiramos uma unidade ao seu último algarismo para termos o limite inferior $a''$ e aquelle mesmo numero será o limite superior $b''$; no segundo caso elle será o limite inferior $a''$, e juntando uma unidade ao seu último algarismo teremos o limite superior $b''$. Em qualquer das hypotheses será

$$b''-a''=\frac{1}{10^{2n+k}};$$

applicando o mesmo méthodo a estes novos limites, acharemos outros dois cuja differença será

$$b''' - a''' = \frac{1}{10^{4n+3k}},$$

e assim por deante.

Para se obter por este processo a convergencia regular e rápida das approximações successivas, é necessario que seja $2n + k > n$ ou $n > -k$, isto é, $n \overline{\gtrless} 1 - k$; se esta condição não se verificar, estreitaremos mais os limites.

Pode acontecer que o valor de $k$, que suppozemos constante, augmente em alguma das operações; mas neste caso só ha a notar que a approximação se tornará então mais rapida.

**181**. *Exemplo.* — Appliquemos estes princípios á equação do n.° 179; as funcções de Fourier são:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$
$$f''(x) = 6x,$$
$$f'''(x) = 6.$$

Com os numeros da progressão décupla temos

| | $f(x)$, | $f'(x)$, | $f''(x)$, | $f'''(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-1)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $(<0)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(0)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(>0$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(10)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Ha duas raizes indicadas entre $-1$ e $0$, e uma entre $1$ e $10$; aquellas são imaginárias, por ser

$$|f(-1)|=4,\ |f'(-1)|=1,\ |f(0)|=5,\ |f'(0)|=2,$$

e $\frac{4}{1}+\frac{5}{2}$ maior que a differença $1$ dos limites. Quanto á raiz real, para obter dois limites que a comprehendam e cuja differença seja uma unidade da ordem do seu último algarismo, substituiremos nas funcções precedentes numeros da ordem natural que darão

| | $f(x)$, | $f'(x)$, | $f''(x)$, | $f'''(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2... | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3... | $+$ | $+$ | $+$ | $+$. |

Aquella raiz fica, pois, entre $2$ e $3$; e a linha dos índices mostra que podemos desde já proceder á approximação. Mas, dividindo o maior valor de $f''(x)$ pelo menor de $2f'(x)$, achamos $\frac{18}{20}=0,9$ e a unidade de ordem immediatamente superior ao primeiro algarismo d'este numero é $1=\frac{1}{10^0}$; donde resulta $k=0$. Por outra parte, a differença $1$ dos limites dá $n=0$; isto é, a condição $n \overline{\gtrless} 1-k$ não é satisfeita e devemos estreitar mais o intervallo.

Fazendo então $x=2$ e $x=2,1$, temos

| | $f(x)$, | $f'(x)$, | $f''(x)$, | $f'''(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2... | $-$ | $+$ | $+$ | $+$. |
| 2,1... | $+$ | $+$ | $+$ | $+$; |

logo a raiz fica entre 2,0 e 2,1. A differença dos novos limites é $\frac{1}{10}$, donde $n=1$; o maior dos valores de $f''(x)$ dividido pelo menor dos valores de $2f'(x)$ é $\frac{12,6}{20}=0,63$; a unidade immediatamente superior ao primeiro algarismo do quociente é 1 e portanto $k=0$: logo será $n=1-k$, o que indica que podemos proceder á approximação sem estreitar mais os limites.

Ora, o limite exterior é o maior 2,1 e a primeira approximação dá

$$2,1-\frac{f(2,1)}{f'(2,1)}=2,1-\frac{0,061}{11,23};$$

devemos levar a divisão até o algarismo decimal da ordem $2n+k$, isto é, até centesimas, e augmentar o último algarismo com uma unidade. Mas é

$$\frac{0,061}{11,23}=0,00\ldots;$$

e portanto o numero a subtrahir de 2,1 é 0,01, o que dá o *primeiro valor approximado* 2,09 com erro inferior a $\frac{1}{10^2}$.

Não sabemos, porém, qual é o sentido d'este erro; substituindo $x$ por 2,09 em $f(x)$, acha-se $-0,050671$ e o signal d'este resultado mostra que a raiz fica entre os novos limites 2,09 e 2,10. A differença $\frac{1}{10^2}$ d'estes dois numeros dá $n=2$ e a approximação seguinte deve ir até á quarta casa de dizima.

Continuaremos pois a divisão de 0,061 por 11,23 até esta ordem, o que dará 0,0054; e teremos para *segundo valor approximado*

$$2,10-0,0055=2,0945,$$

com erro inferior a $\frac{1}{10^4}$. Mas $f(2{,}0945) = -0{,}000574591375$; o signal d'este resultado mostra que a raiz é $> 2{,}0945$, e fica entre os novos limites 2,0945 e 2,0946, dos quaes o segundo é exterior.

Na approximação seguinte teriamos

$$2{,}0946 - \frac{f(2{,}0946)}{f'(2{,}0945)},$$

devendo levar a divisão até o oitavo algarismo da dizima, por ser $n = 4$. Continuando assim, Fourier em mais duas approximações acha o valor da raiz com 32 algarismos exactos de dizima.

Por este exemplo se vê que as operações mais trabalhosas são duas: as substituições de $x$ por numeros compostos de muitos algarismos, e as divisões. Fourier simplificou uma e outra; a primeira, aproveitando em cada approximação os calculos da approximação anterior, por um processo fundado na fórmula de Taylor; a segunda, considerando em cada divisão parcial sómente os algarismos do divisor indispensaveis para dar com exactidão o algarismo correspondente do quociente.

**182.** *Méthodo de Horner.* — Supponhamos que são conhecidos dois limites, sufficientemente proximos, que comprehendem uma raiz da proposta $f(x) = 0$; sejam $\alpha$ e $\alpha + u$ estes limites, sendo $u$ uma unidade da ordem de $\alpha$.

Transformemos a equação pela relação $y = x - \alpha$; a transformada $f_1(y) = 0$ terá uma raiz entre 0 e $u$. Para a determinar approximadamente, supprimimos os termos com as potencias de $y$ superiores á primeira; fica assim a equação incompleta

$$ky + l = 0,$$

que dará para $y$ um valor comprehendido entre $\alpha'$ e $\alpha' + \frac{u}{10}$, sendo $\alpha'$ de ordem decimal immediata a $\alpha$.

Transformando novamente a equação $f_1(y)=0$ pela relação $z=y-\alpha'$, a equação $f_2(z)=0$ terá uma raiz entre $0$ e $\frac{u}{10}$; determina-se approximadamente esta raiz, resolvendo a equação que se obtém egualando a somma dos dois últimos termos de $f_2(z)$ a zero.

Continuando estas operações, levaremos a approximação até onde fôr necessario. Como cada algarismo é dado por uma equação incompleta, póde acontecer que o valor assim obtido esteja errado por excesso ou por defeito.

O primeiro caso será indicado pela mudança de signal do termo conhecido da transformada seguinte. Com effeito, supponhamos $\alpha'$ errado por excesso; o valor de $y$ estará entre $0$ e $\alpha'$ e não entre $\alpha$ e $\alpha'+\frac{u}{10}$; de modo que $f_1(0)$ e $f_1(\alpha')$ terão signaes contrarios. Ora $f_1(0)$ é o termo conhecido de $f_1(y)=0$; $f_1(\alpha')$ é o termo conhecido de $f_2(z)=f_1(z+\alpha')=0$: o que justifica a proposição enunciada.

Se $\alpha'$ fôr errado por defeito, a approximação seguinte o indicará, dando um numero maior de 9 unidades da classe immediata. Se tivermos achado para $\alpha'$ 0,4 em vez de 0,5, a transformada seguinte, que ha de dar o algarismo das centesimas, determinará um numero maior que 9.

Appliquemos o méthodo á mesma equação

$$x^3-2x-5=0\ .$$

A proposta tem uma raiz entre 2 e 3; a transformada em $x-2$ resulta *(n.° 86)* do seguinte quadro dos coefficientes:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -5 \\ \hline 2\,.. & 1 & 2 & 2 & -1 \\ & 1 & 4 & 10 & \\ & 1 & 6 & & \end{array}$$

e é

$$x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0 ,$$

com uma raiz comprehendida entre 0 e 1. Os dois últimos termos dão

$$10x - 1 = 0 , \quad x = 0,1 ,$$

o que indicará uma raiz da transformada, comprehendida entre 0,1 e 1.

Formemos a nova transformada em $x - 0,1$ :

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 6 & 10 & -1 \\ \hline 0,1 \ldots & 1 & 6,1 & 10,61 & 0,061 \; ; \end{array}$$

por onde se vê, sem continuar a operação, que o valor precedente está errado por excesso, visto que o termo conhecido **0,061** da transformada tem signal contrário ao do termo conhecido — **1** da equação precedente. Vejamos então se aquella raiz estará entre 0,09 e 0,1 ; a transformada será

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 6 & 10 & -1 \\ \hline 0,09 \ldots & 1 & 6,09 & 10,5481 & -0,050671 \\ & 1 & 6,18 & 11,1043 & \\ & 1 & 6,27 & & \end{array}$$

$$x^3 + 6,27x^2 + 11,1043x - 0,050671 = 0 .$$

Os dois últimos termos dão

$$x=\frac{50671}{11104300}=0,004\ldots;$$

e a nova transformada em $x-0,004$ será

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6,27 | 11,1043 | $-0,050671$ |
| 0,004... | 1 | 6,274 | 11,129396 | $-0,006153416$ |
| | 1 | 6,278 | 11,154508 | |
| | 1 | 6,282 | | |

$$x^3+6,282x^2+11,154508x-0,006153416=0 .$$

Os dois últimos termos dão

$$x=\frac{6153416}{11154508000}=0,0005..$$

e a transformada em $x-0,0005$ será

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 6,282 | 11,154508 | $-0,006153416$ |
| 0,0005... | 1 | 6,282 | 11,157649 | $-0,000574591$ |
| | 1 | 6,282 | 11,160790 | |
| | 1 | 6,282 | | |

$$x^3+6,282x^2+11,16079x-0,000574591=0 ,$$

donde $x=\frac{0,000574591}{11,16079}=0,0000514$. Reunindo finalmente os resultados obtidos, acha-se para valor da raiz real da proposta o numero 2,0945514, com 7 decimaes exactas.

**183.** *Méthodo de Lagrange.* — Lagrange obtém as raizes positivas das equações em forma de fracção contínua, pelo seguinte processo.

1.° Supponhamos que a proposta $f(x)=0$ tem uma só raiz entre dois inteiros consecutivos $a$ e $a+1$; façamos

$$x=a+\frac{1}{x_1}.$$

A equação transformada terá só uma raiz maior que 1, e a substituição de numeros inteiros mostrará que essa raiz fica entre $a_1$ e $a_1+1$, ou

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2}:$$

e assim por deante.

2.° Se houver mais de uma raiz entre $a$ e $a+1$, supponhamos que chegamos a determinar um intervallo tal, que entre os limites $\frac{h}{m}$ e $\frac{h+1}{m}$ haja uma só raiz da proposta. Faremos $y=mx$, e a transformada

$$f(y)=0$$

terá uma só raiz entre os inteiros $k$ e $k+1$, que determinaremos como no primeiro caso (*Résolution des Équations numériques*).

**184.** *Méthodo das partes proporcionaes.* — Supponhamos que a raiz $a_1$ da proposta $f(x)=0$ está separada entre os limites $\alpha$ e

$\beta > \alpha$; fazendo $x_1 = \alpha + h$ e $x_1 = \beta - k$, teremos

$$f(\alpha) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \ldots$$

$$f(\beta) = f(x_1) + kf'(x_1) + \frac{k^2}{2} f''(x_1) + \ldots$$

Suppondo $h$ e $k$ quantidades tão pequenas, que não seja necessario conservar no cálculo a 2.ª potencia d'estes numeros, nem as suas potencias superiores á 2.ª, teremos, por ser $f(x_1) = 0$,

$$f(\alpha) = -hf'(x_1) \ , \quad f(\beta) = kf'(x_1) \ ,$$

donde

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = -\frac{h}{k} = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} \ .$$

Esta expressão será tanto mais exacta, quanto mais próximos forem os limites; d'ella se tira

$$x_1 = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)} \ .$$

Representando por $b$ este valor approximado de $x_1$, tomamos agora para intervallo $(\alpha b)$, ou $(b\beta)$, e applicamos-lhe novamente a mesma fórmula.

Por exemplo, seja a equação

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0 \ ,$$

e procuremos a raiz comprehendida entre 4 e 5. Temos

$$\begin{aligned} \alpha=4\ , &\quad f(\alpha)=-\ 4 \\ \beta=5\ , &\quad f(\beta)=\ \ 19 \end{aligned} \qquad x=4+\frac{4}{23}=4{,}2$$

approximadamente. Depois

$$\begin{aligned} \alpha=4\ \ \ , &\quad f(\alpha)=-4 \\ \beta=4{,}2\ , &\quad f(\beta)=-0{,}872 \end{aligned} \qquad x=4+\frac{0{,}8}{3{,}128}=4{,}25\ ;$$

em terceiro logar

$$\begin{aligned} \alpha=4{,}2\ \ \ , &\quad f(\alpha)=-0{,}872 \\ \beta=4{,}25\ , &\quad f(\beta)=\ \ 0{,}015625 \end{aligned} \qquad x=4{,}2+\frac{0{,}05\times 0{,}872}{0{,}887625}\ ,$$

ou $x=4{,}2491$ ; finalmente

$$\begin{aligned} \alpha=4{,}2491\ , &\quad f(\alpha)=-0{,}00073667\ , \\ \beta=4{,}25\ \ \ \ \ , &\quad f(\beta)=\ \ 0{,}015625\ \ \ \ , \end{aligned}$$

e

$$x=4{,}2491+\frac{0{,}0009\times 0{,}00073667}{0{,}01636167}$$

$$=4{,}24914050\ .$$

E assim por deante.

## CAPÍTULO VI.

### Raizes imaginárias.

**185.** Dada a equação $f(z)=0$, de coefficientes reaes ou imaginários, a determinação das suas raizes imaginárias faz-se depender do cálculo das raizes reaes de outras equações de coefficientes reaes. Com effeito, se fizermos $z=x+iy$, sendo $x$ e $y$ variaveis reaes, a proposta torna-se em

$$f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)=0\ ,$$

onde $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ são funcções de coefficientes reaes. O módulo de $f(x+iy)$, ou a raiz quadrada de

$$[f_1(x,y)]^2+[f_2(x,y)]^2\ ,$$

não poderá ser zero sem que seja

$$f_1(x,y)=0\ ,\quad f_2(x,y)=0\ ;$$

portanto se $a+bi$ fôr uma raiz da proposta, estas equações terão a solução commum $x=a$, $y=b$: e reciprocamente.

Se $x$ e $y$ forem coordenadas rectangulares, as equações $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ representam duas curvas; $a$ e $b$ são as coordenadas de um ponto commum á ambas ellas. A resolução da proposta equivale á determinação de todos estes pontos communs, que por este motivo se chamam *pontos raizes;* cada um d'elles define o imaginário correspondente $a+bi$.

**186.** *Lemma.* — Façamos, por brevidade,

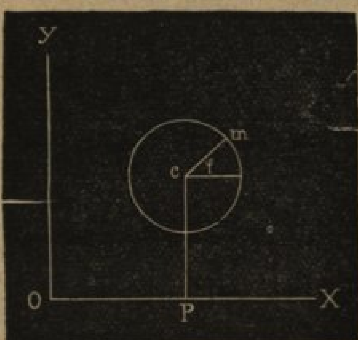
$$f_1(x,y)=\mathrm{P}\ ,\quad f_2(x,y)=\mathrm{Q}$$

e portanto

$$f(z)=\mathrm{P}+i\mathrm{Q}=0\ ;$$

seja $z_0=a+bi$ uma raiz d'esta equação e $c$ o ponto raiz correspondente.

Descrevamos do ponto $c$ como centro, e com o raio $r$, uma circumferencia que não passe por nenhum ponto raiz da proposta; designemos por $x$ e $y$ as coordenadas de um ponto $m$ d'esta circumferencia. As coordenadas d'este ponto, relativamente a eixos tirados por $c$ parallelamente ao systema dado, seriam $r\cos\varphi$ e $r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, sendo $\varphi$ o angulo do raio $cm$ com o eixo dos $x$; as coordenadas do mesmo ponto relativamente aos eixos propostos serão




$$x=a+r\cos\varphi\ ,\quad y=b+r\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ,$$

donde

$$\begin{aligned}z=x+iy&=(a+bi)+r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\&=z_0+r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\ .\end{aligned}$$

Suppondo, em geral, que o ponto raiz $c$ é de ordem $p$ de multiplicidade, e desenvolvendo pela fórmula de Taylor, teremos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f[z_0 + r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)] \\
&= r^p(\cos p\varphi + i \operatorname{sen} p\varphi)\frac{f^p(z_0)}{p!} \\
&+ r^{p+1}[\cos(p+1)\varphi + i \operatorname{sen}(p+1)\varphi]\frac{f^{p+1}(z_0)}{(p+1)!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Pondo, em geral,

$$\frac{f^k(z_0)}{k!} = r_k(\cos\alpha_k + i \operatorname{sen}\alpha_k),$$

para todos os valores de $k$ desde $p$ até $n$, teremos pela fórmula de Moivre,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= r_p r^p[\cos(p\varphi + \alpha_p) + i \operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p)] \\
&+ r_{p+1} r^{p+1}\{\cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + i \operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}]\} \\
&+ \text{etc.} \\
&= P + iQ.
\end{aligned}
$$

Assim, teremos

$$
\begin{aligned}
P &= r_p r^p \cos(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r^{p+1}\cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \text{etc.}, \\
Q &= r_p r^p \operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r^{p+1}\operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \text{etc.}, \\
\frac{P}{Q} &= \frac{r_p\cos(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r\cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \cdots}{r_p\operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r\operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \cdots};
\end{aligned}
$$

e suppondo $r$ tão pequeno, que o numerador e o denominador tenham o signal dos seus primeiros termos, o signal do quociente será o mesmo de

$$\cot(p\varphi + \alpha_p) \,.$$

Posto isto, o angulo $\varphi$ varia desde 0 até $2\pi$, quando o ponto $m$ descreve a circumferencia; portanto o angulo $p\varphi + \alpha_p$ varia desde $\alpha_p$ até $2p\pi + \alpha_p$, e este intervallo comprehende $p$ circumferencias. Ora é sabido que num intervallo de 4 angulos rectos a cotangente se annulla duas vezes passando de positiva a negativa, e duas vezes se torna infinita passando de negativa a positiva; portanto em todo aquelle intervallo a cotangente passa $2p$ vezes de positiva a negativa, annullando-se. Notemos que em cada ponto $m$ o valor de $\frac{P}{Q}$ é determinado, visto que, por hypothese, a circumferencia não passa por nenhum ponto raiz: o que equivale a suppor o seu raio menor que a distancia do ponto $c$ a qualquer outro ponto raiz da proposta.

Logo: *quando a variavel z descreve uma circumferencia ou um contorno fechado, sufficientemente pequeno em volta de um ponto raiz do grau* p *de multiplicidade, o quociente* $\frac{P}{Q}$ *annulla-se* 2p *vezes passando de positivo a negativo.*

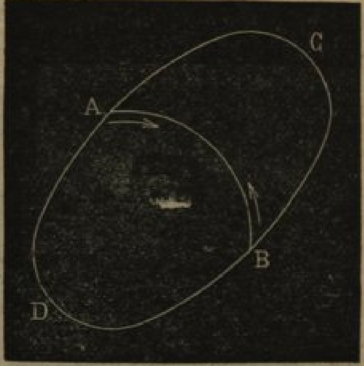
**187.** *Theorema de Cauchy.* — Tracemos no plano um contorno fechado, que não passe por nenhum ponto raiz da equação

$$f(z) = P + iQ = 0 \,;$$

o theorema de Cauchy enuncia-se nos seguintes termos:

*Percorrendo este contorno sempre no mesmo sentido, representando por* k *o numero de vezes que em uma revolução inteira o quociente* $\frac{P}{Q}$ *se annulla, passando de positivo a negativo, e por* k′ *o numero de vezes que elle se annulla, passando de negativo a positivo, a differença* $\delta = k - k'$ *é egual ao dobro do numero de* *raizes eguaes ou deseguaes comprehendidas no interior do mesmo contorno.*

Em dois contornos taes como ACBA e ABDA podemos supprimir a parte commum AB e tomar o valor de $\delta$ só para o contorno exterior.

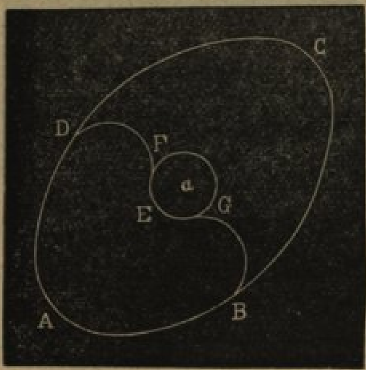



Com effeito, se o primeiro contorno for percorrido de A para C, aquella parte commum é descripta no sentido de B para A, emquanto que no outro contorno o mesmo arco é descripto no sentido opposto. Se o quociente $\frac{P}{Q}$ passa um certo numero de vezes de positivo para negativo quando se procede de B para A, passa egual numero de vezes de negativo para positivo quando se procede inversamente de A para B, e esta parte não virá a influir na differença $\delta$. O mesmo succederá com as partes communs de maior numero de contornos, adjacentes dois a dois.

Posto isto, dois casos temos a considerar, conforme o contorno considerado não contém pontos raizes ou vice-versa.

*1.° caso.* Seja o contorno ACBD. Não pode ser simultaneamente $P=0$ e $Q=0$, visto que este contorno não passa por nenhum ponto raiz; mas pode haver pontos em que uma das funcções P ou Q se annulle isoladamente. Dividamos aquella área em partes taes, que cada uma não contenha no seu interior ou no seu contorno ponto algum em que seja $P=0$ ou ponto algum em que seja $Q=0$. No contorno parcial, onde nunca é $P=0$, o quociente $\frac{P}{Q}$ não passa por zero e é $\delta=0$. Naquelle em que nunca é $Q=0$, o denominador não muda de signal e a fracção só poderá mudar de signal passando por zero; mas depois de ter percorrido todo o contorno, a fracção $\frac{P}{Q}$ torna ao seu primeiro valor, em grandeza e signal. É portanto evidente que, se ella passou $n$ vezes de positiva a negativa, passou o mesmo numero de vezes de negativa a positiva e será ainda $\delta=0$.

*2.° caso.* Supponhamos que o contorno contém uma raiz do grau $p$ de multiplicidade; seja ABCD a área dada e $a$ o ponto raiz. D'este ponto como centro descreva-se uma circumferencia EFG de raio tão pequeno quanto se quizer. e tracemos os arcos DF e BG; teremos assim tres contornos, ABED, EFDCBGE e a circumferencia GFE. No primeiro e no segundo é $\delta=0$, pelo primeiro caso; no último é, pelo lemma, $k=2p$, $k'=0$, $\delta=2p$. Assim o excesso $\delta$ nos tres contornos é $2p$, e terá o mesmo valor para o contorno externo ABCD, que resulta da reunião dos tres precedentes.




Se na área fechada pelo contorno se contivessem mais pontos raizes, dividiriamos esse espaço em outros, com uma só raiz em cada um. O theorema seria applicavel a cada um dos contornos parciaes, e portanto tambem ao total.

**188**. *Separação das raizes imaginárias.*—Consideremos, para mais simplicidade, um contorno rectangular fechado por duas rectas parallellas ao eixo dos $y$

$$AB \; \ldots \; (x=x_0)\,, \quad CD \; \ldots \; (x=x_1)\,,$$

e outras duas parallelas ao eixo dos $x$

$$AD \; \ldots \; (y=y_0)\,, \quad BC \; \ldots \; (y=y_1)\,;$$

seja $z=x+iy$, $f(z)=P+iQ=0$, $P=f_1(x,y)$, $Q=f_2(x,y)$.

Para os lados BC e AD é $y$ constante e $x$ varia de $x_0$ a $x_1$; se ordenarmos P segundo as potencias decrescentes de $y$, aquella funcção terá o signal do seu primeiro termo para valores de $y$ sufficientemente grandes. Logo para $y_0=-\infty$ e $y_1=+\infty$ o excesso $\delta$ relativo áquelles lados BC e AD será zero e só temos a calcular o excesso para os outros dois lados.

Para AB é

$$\frac{P}{Q}=\frac{f_1(x_0, y)}{f_2(x_0, y)},$$

onde se fará variar $y$ desde $-\infty$ até $+\infty$; seja $\delta'$ o excesso correspondente. Para CD é

$$\frac{P}{Q}=\frac{f_1(x_1, y)}{f_2(x_1, y)},$$

variando $y$ de $+\infty$ a $-\infty$ visto que o contorno é percorrido na direcção ABCD; o excesso para CD é egual e de signal contrário ao do mesmo lado percorrido em sentido opposto, e portanto, se este é $\delta_0$, o excesso total será $\delta'-\delta_0=2\mu$. Assim $\mu$ é o numero de raizes contidas no contorno; se for $\mu=1$, a raiz está separada e a sua parte real fica comprehendida entre $x_0$ e $x_1$; se for $\mu<1$, tiraremos parallelas intermédias a AB e CD. até obtermos a separação das raizes que não tiverem a mesma parte real.

Transportando as parallelas AB e CD ao infinito, determinariamos semelhantemente os limites que comprehendem o coefficiente de $i$ em cada raiz.

# CAPÍTULO VII.

## Resolução algébrica das equações do 3.º grau.

**189.** Nos capítulos precedentes occupámo-nos da resolução numérica das equações; procuremos agora as fórmulas da resolução algébrica, a qual, não é possivel, em geral, além do 4.º grau.

Toda a equação do 3.º grau a uma incógnita póde reduzir-se (*n.º 87, 2.º*) á fórma

$$x^3+px+q=0 .$$

Pondo $x=y+z$, obtém-se a equação transformada

$$(3yz+p)(y+z)+y^3+z^3+q=0 ;$$

e como $x$ se pode decompor na somma de dois numeros por infinitas maneiras, podemos ainda fazer

$$yz=-\frac{p}{3} \qquad (i)$$

o que reduzirá a equação precedente a

$$y^3+z^3=-q .$$

Elevando ao cubo os dois membros de $(i)$, esta egualdade e a precedente mostram que $y^3$ e $z^3$ são as raizes $t'$ e $t''$ da equação do 2.º grau

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0,$$

á qual se dá o nome de *reduzida* ou *resolvente*. Os valores de $y$ e $z$ serão dados finalmente pelas equações binomias

$$y^3-t'=0, \quad z^3-t''=0,$$

as quaes dependem ambas da equação única $u^3-1=0$, ou das tres raizes cúbicas da unidade, que designamos por $1$, $\alpha$, $\alpha^2$.

Ora as raizes da reduzida são

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};$$

donde, extrahindo a raiz cúbica a cada uma e sommando os resultados, se deduz a *fórmula de Cardan*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \quad (48)$$

Para attender á multiplicidade de valores d'estes dois radicaes cúbicos, designemos por $a$ e $b$ os valores de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$ correspondentes ao valor 1 da raiz cúbica da unidade; teremos, em geral,

$$\sqrt[3]{t'}=a, \quad \alpha a, \quad \alpha^2 a,$$

$$\sqrt[3]{t''}=b, \quad \alpha b, \quad \alpha^2 b.$$

Sommando cada valor de $\sqrt[3]{t'}$ com todos os de $\sqrt[3]{t''}$, obteem se nove valores; e assim parece que se encontram nove raizes para a proposta do 3.° grau. Esta circumstancia provém de havermos triplicado o numero de raizes, elevando ao cubo ambos os membros da equação $(i)$; e esta mesma equação servirá para verificar quaes d'aquellas raizes conveem ou não ao problema, aproveitando-se unicamente aquelles valores de $y$ e $z$ cujo producto seja egual a $-\frac{p}{3}$.

Suppondo reaes os coefficientes da equação dada, os valores reaes $a$ e $b$ de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$ satisfazem a condição indicada, bem como $\alpha a$ e $\alpha^2 b$, ou $\alpha^2 a$ e $\alpha b$, visto ser $\alpha^3 = 1$. Teremos assim as tres raizes

$$x_1 = a + b\ , \quad x_2 = a\alpha + b\alpha^2\ , \quad x_3 = a\alpha^2 + b\alpha\ . \qquad (ii)$$

As outras combinações dos valores de $y$ e $z$ dão as raizes

$$x'_1 = a + b\alpha\ , \quad x'_2 = a\alpha + b\ , \quad x'_3 = a\alpha^2 + b\alpha^2$$

da equação

$$x^3 + p\alpha x + q = 0\ ;$$

ou as raizes

$$x''_1 = a + b\alpha^2\ , \quad x''_2 = a\alpha^2 + b\ , \quad x''_3 = a\alpha + b\alpha$$

da equação

$$x^3 + p\alpha^2 x + q = 0\ .$$

Este méthodo é geral; no n.° seguinte se considerará particularmente o caso de serem reaes os coefficientes $p$ e $q$.

**190**. As raizes da reduzida serão reaes, eguaes ou imaginárias, conforme a quantidade $R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ fôr positiva, zero ou negativa.

*1.º caso:* $R > 0$. Tomemos por $a$ e $b$, como anteriormente, os valores arithméticos de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$; fazendo $a + b = s$, $a - b = d$, e notando que é

$$\alpha = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}), \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}),$$

as fórmulas $(ii)$ darão a raiz real $x_1 = s$ e as duas imaginárias

$$-\frac{1}{2}(s \pm d\sqrt{-3}). \tag{49}$$

*2.º caso:* $R = 0$. Será $t' = t''$, $a = b$, $s = 2a$, $d = 0$; a proposta tem todas as raizes reaes, sendo uma $2\sqrt[3]{t'}$ e as outras duas eguaes com o valor commum $-a = -\sqrt[3]{t'}$.

*3.º caso:* $R < 0$. As fórmulas $(ii)$ deixam suppôr que todas as raizes serão imaginárias, o que não pode ter logar *(n.º 105, 1.º)*; pelo contrário, deve presumir-se que esta circumstancia corresponderá ao caso de serem reaes e deseguaes as tres raizes da proposta, único que falta reconhecer. Não podem ser todas reaes e eguaes sem que seja $p = 0$ e $q = 0$, porque a segunda derivada da proposta, egualada a zero, tem a raiz única $x = 0$.

Ora as raizes da reduzida são conjugadas; os valores $y = \sqrt[3]{t'}$, $z = \sqrt[3]{t''}$ são imaginários, mas o seu producto $yz = -\frac{1}{3}p$ é real: portanto $y$ e $z$ devem ser tambem conjugados. Se tomármos para $y$ os valores

$$a_1 + b_1\sqrt{-1}, \quad (a_1 + b_1\sqrt{-1})\alpha, \quad (a_1 + b_1\sqrt{-1})\alpha^2,$$

os de z serão da fórma

$$a_1 - b_1\sqrt{-1}\ ,\quad (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha,\quad (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha^2\ ,$$

onde $b_1$ é differente de zero. D'aqui resulta

$$x_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} + a_1 - b_1\sqrt{-1} = 2a_1\ ,$$

$$x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{-1})\,\alpha + (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha^2 = -a_1 - b_1\sqrt{3}\ ,$$

$$x_3 = (a_1 + b_1\sqrt{-1})\alpha^2 + (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha = -a_1 + b_1\sqrt{3}\ ,$$

por ser

$$\alpha + \alpha^2 = -1\ ,\quad \alpha^2 - \alpha = \sqrt{-3}\ .$$

As raizes são pois reaes e deseguaes; mas a fórmula de Cardan não é propria para as calcular, por vir complicada com imaginários. Esta difficuldade está ainda sem solução, e por isso se chamou a este caso *irreductivel.*

**191.** *Caso irreductivel.*—Para calcular as raizes, convém neste caso recorrer a uma transformação trigonométrica.

Por hypóthese, é agora

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\ ,$$

e portanto $p < 0$; fazendo

$$-\frac{q}{2} = k\cos\varphi\ ,\quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -k^2\operatorname{sen}^2\varphi\ ,$$

será

$$k=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\,, \quad \cos\varphi=-\frac{q}{2k}\,.$$

Com estes valores a fórmula de Cardan torna-se em

$$x=\sqrt[3]{k(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)}+\sqrt[3]{k(\cos\varphi-i\,\mathrm{sen}\,\varphi)}\;;$$

ou, desenvolvendo o radical *(n.° 63, 2.°)*

$$x=2\sqrt[3]{k}.\cos\frac{\varphi+2n\pi}{3}\,.$$

Fazendo $n=0$, 1, 2, veem as raizes

$$x_1=2\sqrt[3]{k}\cos\frac{\varphi}{3}\,,$$

$$x_2=2\sqrt[3]{k}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right),$$

$$x_3=2\sqrt[3]{k}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right).$$

Estes valores são reaes e calculaveis por logarithmos.

**192.** Quando se conhece a raiz $x_1$, podemos obter muito facilmente as outras duas, traduzindo a fórmula (49) em funcção da raiz conhecida e dos coefficientes da proposta.

Com effeito, é $s=x_1$ e por definição $d=y-z$. Ora, sendo

$$\frac{y^3-z^3}{y-z}=\frac{y^3+z^3}{y+z}+2yz\,,$$

$$y^3-z^3=\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\,,\quad y^3+z^3=-q\,,\quad yz=-\frac{p}{3}\,,$$

teremos

$$\frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{y-z}=\frac{-3q-2px_1}{3x_1}\,,$$

donde se tira

$$y-z=-\frac{3x_1\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2px_1+3q}=d\,.$$

Portanto as tres raizes serão $x_1=s$ e

$$-\frac{1}{2}x_1\left(1\pm\frac{3\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2px_1+3q}\sqrt{-3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x_1\left(1\pm\frac{\sqrt{27q^2+4p^3}}{2px_1+3q}\sqrt{-1}\right)\,;$$

e como a equação do 3.° grau tem sempre uma raiz real, depois d'ella determinada a fórmula precedente dará as outras duas, quer ellas sejam reaes quer sejam imaginárias.

## Exercícios.

**77.** $x^3+6x-7=0$. Raizes: $x=1$, $x=-\frac{1}{2}(1\pm 3\sqrt{-3})$.

**78.** $y^3-3y^2+12y-4=0$. Raizes : $y=0{,}362165$, $y=1{,}318918$
$\pm 1{,}761176\sqrt{-3}$.

**79.** $x^3-3x-18=0$. Raizes : $x=3$, $x=-\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-15})$.

**80.** $x^3-27x+54=0$. Raizes : $x=-6$, $x=3$, $x=3$.

**81.** $x^3-3x+1=0$. Raizes: $2\cos 40^\circ$, $-2\cos 20^\circ$, $2\cos 80^\circ$.

# CAPÍTULO VIII.

## Resolução algébrica das equações do 4.° grau.

**193.** Para resolver a equação do 4.° grau ha um méthodo muito simples, chamado de Descartes, que se funda, como os méthodos de Ley e Clebsh, na transformação do 1.° membro em um producto de dois factores trinomios do 2.° grau. Francoeur propoz um processo análogo ao que Hudde deu para as equações do 3.° grau, exposto no capítulo precedente; o méthodo de Francoeur consiste no seguinte.

Demos á proposta a forma

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ;$$

fazendo $x=y+z$, vem

$$y^4+(6z^2+p)\,y^2+(z^4+pz^2+qz+r)$$
$$+4zy^3+(4z^3+2pz+q)\,y=0\ .$$

Pela condição

$$y^2 = -z^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4z} \qquad (i)$$

annullam-se os dois ultimos termos da transformada; e eliminando $y^2$, esta equação torna-se em

$$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0 .$$

Nesta última equação só ha potencias pares da incógnita; de modo que, pondo $z^2 = \frac{1}{4}t$, ella póde tornar-se em

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0 ,$$

que é do 3.º grau e se chama neste caso a *reduzida*. Representando uma das suas raizes por $t'$, teremos $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{t'}$; e este valor posto em $(i)$ e em $x = y + z$ dará

$$x = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{t'} , \quad y^2 = \frac{1}{4}\left(-t' - 2p \pm \frac{2q}{\sqrt{t'}}\right) .$$

Finalmente eliminando $y$ e attendendo á correspondencia dos signaes, temos as fórmulas

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-t' - 2p - \frac{2q}{\sqrt{t'}}}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{t'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-t' - 2p + \frac{2q}{\sqrt{t'}}} .$$

Se em vez da raiz $t'$ da reduzida nos tivessemos servido de qualquer das outras duas $t''$ ou $t'''$, obteriamos os mesmos valores para $x$. Com effeito, de

$$t'+t''+t'''=-2p\,,\quad t'\,t''\,t'''=q^2$$

tira-se

$$-t'-2p=t''+t'''\,,\quad \frac{q}{\sqrt{t'}}=\pm\sqrt{t''\,t'''}\,.$$

As raizes $t'$, $t''$, $t'''$ são independentes do signal de $q$, porque na reduzida só entra o quadrado d'este coefficiente; na última das expressões precedentes usaremos do radical com o signal $+$ ou $-$, conforme $q$ for positivo ou negativo. Assim, para $q$ positivo, as fórmulas anteriores tornam-se em

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{t'}\pm\sqrt{\frac{1}{4}t''+\frac{1}{4}t'''-\frac{1}{2}\sqrt{t''\,t'''}}\,,$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{t'}\pm\sqrt{\frac{1}{4}t''+\frac{1}{4}t'''+\frac{1}{2}\sqrt{t''\,t'''}}$$

ou antes

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})\,,$$

$$x=\frac{1}{2}(-\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''})\,.$$

Para $q$ negativo será do mesmo modo

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''})\,,$$

$$x=\frac{1}{2}(-\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})\,.$$

Em qualquer dos casos as fórmulas são symétricas em $t'$, $t''$ e $t'''$, e dão os mesmos quatro valores quando uma d'estas quantidades se muda na outra e reciprocamente. Se os coefficientes da proposta forem reaes, a reduzida tem uma raiz real positiva; para commodidade dos cálculos, será esta raiz que poremos por $t'$ nas fórmulas precedentes.

**194.** Supponhamos reaes os coefficientes $p$, $q$, $r$. Se a reduzida tiver tres raizes reaes, o seu producto $t' t'' t''' = q^2$ é positivo; portanto estas raizes hão de ser todas positivas, ou uma positiva e duas negativas. As fórmulas mostram que as raizes da proposta são todas reaes no primeiro caso e imaginárias no segundo. Neste último caso pode ainda ser que as duas raizes negativas da reduzida sejam eguaes, ou $t'' = t'''$; então numa das fórmulas os imaginários destroem-se dois a dois, e a proposta terá duas raizes reaes e eguaes e duas imaginárias.

Logo: *Quando a reduzida se encontra no caso irreductivel a proposta tem quatro raizes reaes, ou quatro imaginárias, ou duas eguaes e duas imaginárias.*

Se a reduzida tiver só uma raiz real $t'$, essa raiz é positiva por ser negativo o último termo d'aquella equação; e $\sqrt{t'}$ é real. Designando $t''$ e $t'''$ por $m \pm n\sqrt{-1}$, será

$$(\sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''})^2 = 2m \pm 2\sqrt{m^2 + n^2},$$

por onde se vê que aquelle quadrado tem dois valores, um positivo e outro negativo. Extrahindo a raiz quadrada, $\sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''}$ tem, por um lado, um valor real da forma $\sqrt{a}$, e por outro lado um valor imaginário da forma $\sqrt{-b}$.

Logo: *Se a reduzida tiver sómente uma raiz real, esta será positiva e a proposta terá duas raizes reaes e duas imaginárias.*

## CAPÍTULO IX.

### Impossibilidade da resolução algébrica além do 4.º grau.

**195.** Como já dissemos, resolver *algébricamente* a equação $f(x)=0$ é formar uma *funcção algébrica* dos coefficientes de $f(x)$, que substituida por $x$ satisfaça immediatamente áquella equação. Dadas as variaveis independentes

$$x_1\,,\quad x_2\,,\quad \ldots\,,\quad x_n$$

e uma funcção d'ellas que representamos por $v$, diz-se que esta funcção é *algébrica* quando podemos exprimir $v$ em $x_1$, $x_2$, ... por meio das operações seguintes, repetidas um numero finito de vezes: 1.º addição (ou subtracção); 2.º multiplicação (ou elevação a potencias); 3.º divisão; 4.º extracção de raizes. Nesta última consideraremos só os radicaes de índice primo, de que os outros veem sempre a depender.

A funcção $v$, formada por meio das duas primeiras operações sómente, chama-se *racional e inteira* ou simplesmente *inteira*. A sua forma mais geral reduz-se sempre a uma somma de termos como

$$kx_1^r x_2^s \ldots,$$

sendo $k$ uma constante e $r$, $s$, ... numeros inteiros e positivos.

Se na formação de $v$ intervier tambem a divisão, a funcção

*

é sómente racional e o seu typo é

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

sendo $\varphi$ e $\psi$ funcções inteiras.

Finalmente a funcção algébrica, em geral, envolve tambem extracção de raizes. Se representarmos por $v_1$, $v_2$, ... funcções racionaes de $x_1$, $x_2$, ..., por $r$, $s$, ... numeros primos, e por $f$ uma funcção racional de $x_1$, $x_2$, ... e de $\sqrt[r]{v_1}$, $\sqrt[s]{v_2}$, ... a funcção algébrica

$$w = f(x_1, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots)$$

diz-se *de 1.ª ordem*. Do mesmo modo, se $v'_1$, $v'_2$ ... são funcções de primeira ordem e $r'$, $s'$, ... numeros primos, a funcção

$$w_1 = f(x_1, x_2, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots \sqrt[r']{v'_1}, \sqrt[s']{v'_2}, \ldots)$$

diz-se *de 2.ª ordem*. Em geral, representando por $v_1$, $v_2$, ... funcções algébricas de ordem $p-1$; por $r$, $s$, ... numeros primos; por $t_1$, $t_2$, ... funcções da mesma ordem que $v_1$ ou de ordem menos elevada; e por $f$ uma funcção racional,

$$W = f(t_1, t_2, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots)$$

é *de ordem* p. Suppomos os radicaes $\sqrt[r]{v_1}$, $\sqrt[s]{v_2}$ ... reduzidos ao menor numero $q$; e assim diremos que a funcção W, de ordem $p$, é tambem de *grau* $q$.

**196.** Estabelecidas as definições do n.º anterior, seja

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

uma equação inteira de grau $n$; representemos por $x_1, x_2, \ldots x_n$ as suas raizes e supponhamos que ellas podem ser expressas por uma funcção algébrica dos coefficientes de $f(x)$,

$$x = \varphi\left(p_1, p_2, \ldots, \sqrt[r]{v_1}, \ldots\right). \qquad (i)$$

Se substituirmos nesta fórmula

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad p_2 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots), \quad \text{etc.}$$

a funcção $\varphi$ fica dependente só das raizes; e como ella deve reproduzir identicamente $x_1, x_2, \ldots$, os radicaes que entram em $\varphi$ devem extrahir-se exactamente. Por exemplo, substituindo $p$ por $-(x_1 + x_2)$ e $q$ por $x_1 x_2$ na fórmula que dá as raizes da equação $x^2 + px + q = 0$, viria

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - x_1 x_2}$$

ou ainda

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4}}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 \pm (x_1 - x_2)}{2}.$$

Portanto os radicaes de $\varphi$ serão funcções racionaes das raizes; mas não symétricas, aliás deixariam de ser radicaes e seriam funcções racionaes dos coefficientes. Supponhamos que o primeiro radical que se encontra em $\varphi$ é $\sqrt[r]{v_1}$, sendo $v_1$ funcção racional dos coefficientes, isto é, funcção symétrica das raizes; representemos esse radical por $y$, d'onde

$$y^r = v_1.$$

Como $y$ não é funcção symétrica das raizes, o seu valor mudará com a troca de duas d'ellas pelo menos; e esses valores serão dados pela equação precedente, onde o 2.° membro é invariavel para qualquer d'estas permutações. Designemos por

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$$

um valor de $y$; outro qualquer, como $\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots x_n)$ que resulta da permutação das raizes $x_1$ e $x_2$, obtém-se multiplicando o primeiro por uma raiz primitiva $\alpha$ da equação

$$z^r - 1 = 0 ;$$

e teremos

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots) = \alpha\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots) .$$

Ora esta relação identica subsiste quando se permutam as raizes $x_1$ e $x_2$; logo

$$\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots) = \alpha\pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) ,$$

ou, multiplicando membro a membro e simplificando,

$$\alpha^2 = 1 , \quad \alpha = -1 .$$

D'esta expressão resulta $r = 2$; logo, *o primeiro radical da fórmula será um radical quadrado.* A funcção $y$ tem dois valores eguaes e de signaes contrários, e não é symétrica: mas é inalteravel para qualquer numero par de permutações de duas raizes, e portanto para qualquer permutação circular d'um numero impar de raizes.

Este primeiro radical pode combinar-se depois com coefficientes da equação, ou com radicaes da mesma espécie, ou com outro radical de indice mais elevado. Nos dois primeiros casos teriamos funcções da mesma natureza de $y$ e chegariamos aos mesmos resultados; se a fórmula se limitasse a estas duas combinações, quando nella substituissemos os coefficientes pelas raizes teriamos para cada uma d'estas uma identidade

$$x_1 = \psi(x_1, x_2, x_3 \ldots) . \qquad (ii)$$

Se a proposta fôr do 2.º grau, isto é, se houver duas raizes $x_1$ e $x_2$, esta relação é possivel porque

$$x_1 = \psi(x_1, x_2) , \quad x_2 = \psi(x_2, x_1)$$

teem valores differentes. Se houver mais de duas raizes, tres pelo menos, a identidade não pode ter logar, porque o 2.º membro de $(ii)$ não se altera por uma permutação circular de tres raizes e o primeiro muda necessariamente de valor; logo neste caso haverá em $(i)$ outro radical. Supponhamos que esse radical é $z = \sqrt[s]{v_2}$.

A funcção $v_2$ não é já symétrica, mas é invariavel para permutações circulares d'um numero impar de raizes, como acabamos de ver. A funcção $z$ não é invariavel para estas permutações, mas o seu valor será dado sempre pela equação

$$z^s = v_2 ;$$

se um d'esses valores fôr

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots) ,$$

outro, proveniente d'uma permutação circular de tres raizes

$$\pi(x_2, x_3, x_1, \ldots \ldots) ,$$

obtem-se multiplicando o primeiro por uma raiz primitiva $\alpha$ da equação

$$t^s - 1 = 0 ,$$

e será

$$\pi(x_2, x_3, x_1, \ldots) = \alpha \pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) .$$

Nesta relação identica podemos permutar as raizes de qualquer maneira e assim teremos successivamente

$$\pi(x_3, x_1, x_2, \ldots) = \alpha \pi(x_2, x_3, x_1, \ldots) ,$$
$$\pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \alpha \pi(x_3, x_1, x_2, \ldots) ;$$

multiplicando as tres últimas egualdades membro a membro e simplificando, vem

$$\alpha^3 = 1 ,$$

d'onde $s = 3$. Logo, *o segundo radical de (i) será um radical cúbico.*

Os tres valores differentes de $z$ serão $z$, $\alpha z$, $\alpha^2 z$; se houver mais de quatro raizes, isto é, se a proposta fôr de grau superior ao 4.°, poderemos effectuar permutações circulares de cinco letras na identidade $z^3 = v_2$ e a funcção $v_2$ conserva o mesmo valor. Quanto a $z$, só poderá succeder uma de duas cousas: ou se conserva invariavel, ou toma successivamente aquelles tres valores $z$, $\alpha z$, $\alpha^2 z$.

Neste último caso poderiamos escrever a identidade

$$\pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_6, \ldots) = \alpha \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$$

e depois successivamente

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \alpha \pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_6, \ldots) ,$$
$$\pi(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, x_6, \ldots) = \alpha \pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) ,$$

fazendo sempre permutações circulares das cinco primeiras letras; á quinta obteriamos no primeiro membro os indices na ordem natural. Multiplicando-as todas membro a membro e simplificando, acharemos

$$\alpha^5 = 1\ ;$$

mas, como é tambem $\alpha^3 = 1$, seria $\alpha = 1$, que é a única raiz commum a estas equações: o que não pode ter logar.

No primeiro caso $z$, invariavel para permutações circulares de 5 raizes, seria tambem invariavel para permutações circulares de 3. Com effeito, consideremos um valor de $z$,

$$z = \pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots)\ ;$$

como $z$ é invariavel para permutações de cinco letras, podemos substituir respectivamente

$$x_3, x_2, x_5, x_1, x_4$$

por

$$x_2, x_5, x_1, x_4, x_3\ ,$$

e achamos

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \pi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, \ldots)\ ;$$

mas é tambem

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)\ :$$

logo teriamos

$$\pi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, \ldots) = \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)\ ,$$

isto é, $\pi$ invariavel para permutações circulares de tres raizes, contra a hypóthese. Portanto a fórmula de resolução com radicaes só é possivel para equações de grau inferior ao 5.°.

Na resolução algébrica das equações do 3.° e do 4.° grau tivemos occasião de verificar o apparecimento dos dois radicaes, quadrado e cúbico, na ordem que deixamos apontada.

# IV

# Restos de Sturm. Formas.

# RESTOS DE STURM. FORMAS.

## CAPÍTULO I.

### Restos de Sturm.

**197.** Os restos de Sturm são definidos *(n.º 115)* pela relação

$$R_{p-1} = R_p \cdot Q_{p+1} - R_{p+1} ;$$

e considerando-os, desde o primeiro, as egualdades

$$f(x) = Q_1 f'(x) - R_1, \quad f'(x) = Q_2 R_1 - R_2, \quad R_1 = Q_3 R_2 - R_3, \text{ etc.}$$

dariam successivamente

$$R_1 = Q_1 f'(x) - f(x), \quad R_2 = (Q_1 Q_2 - 1) f'(x) - Q_2 f(x),$$
$$R_3 = Q_3 (Q_1 Q_2 - 1) f'(x) - Q_2 Q_3 f(x) - Q_1 f'(x) + f(x)$$
$$= (Q_1 Q_2 Q_3 - Q_1 - Q_3) f'(x) - (Q_2 Q_3 - 1) f(x),$$

etc.

Em geral, teremos para qualquer resto

$$R_p = Af'(x) - Bf(x), \tag{i}$$

sendo A e B funcções inteiras de $x$, de graus $p$ e $p-1$, porque os quocientes Q são do 1.° grau.

Esta propriedade pode servir para calcular os restos de Sturm. Com effeito, para $p=1$, por exemplo, faremos

$$R_1 = (ax+b)f'(x) - f(x),$$

com os coefficientes desconhecidos $a$ e $b$. Como $R_1$ é de grau $n-2$ e o 2.° membro d'esta desegualdade é de grau $n$, os coefficientes de $x^n$ e $x^{n-1}$ devem ser nullos; e teremos assim duas equações para determinar $a$ e $b$.

Em geral calcularemos qualquer resto $R_p$ por meio da identidade $(i)$, empregando o seguinte processo. Os polynomios A e B, teem respectivamente $p+1$ e $p$ termos, com egual numero de coefficientes desconhecidos. Por outra parte, o 1.° membro de $(i)$ é do grau $n-p+1$ e o 2.° membro do grau $n+p-1$; por onde se vê que devemos egualar a zero os coefficientes das potencias $n-p$, $n-p+1, \ldots n+p-1$ de $x$ em $Af'(x) - Bf(x)$. Teremos assim $2p$ equações de condição, lineares e homogéneas, entre as $2p+1$ constantes arbitrárias que entram em A e B; e como podemos sempre dividir por uma d'ellas, resultam $2p$ arbitrarias, que ficarão inteiramente determinadas por aquellas equações. Pondo os valores assim obtidos nos outros termos do segundo membro de $(i)$, acharemos um valor único para $R_p$.

Seja, por exemplo, a equação

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0,$$

donde se tira

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5;$$

teriamos a primeira identidade

$$R_1 = (ax + b)(5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5)$$
$$- (x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1) .$$

Como o 1.º membro d'esta expressão é do 3.º grau e o 2.º membro é do 5.º, faremos as reducções e egualaremos depois a zero os coefficientes de $x^5$ e $x^4$. Acham-se as equações

$$5a - 1 = 0 , \quad -8a + 5b + 2 = 0 ,$$

donde se tira $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{25}$. Pondo estes valores nos outros termos do 2.º membro d'aquella identidade, teriamos

$$R_1 = (3a - 8b - 1)\, x^3 + (3b - 6a + 3)\, x^2$$
$$+ (5a - 6b - 5)\, x + 5b + 1$$
$$= \frac{6}{25} x^3 + \frac{39}{25} x^2 - \frac{88}{25} x + \frac{15}{25},$$

ou, desembaraçando de denominadores,

$$R_1 = 6x^3 + 39x^2 - 88x + 15 ,$$

como daria directamente a divisão de $f(x)$ por $f'(x)$, depois de se mudar o signal do resto.

Continuando, faremos

$$R_2 = (ax^2 + bx + c)\ (5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5)$$
$$- (dx + e)\ (x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1) ;$$

e como o 1.° membro é do 2.° grau e o 2.° membro é do 6.°, egualaremos a zero os coefficientes de $x^6, x^5, x^4$ e $x^3$, depois de feitas as reducções. É evidente que as quatro equações de condição são lineares e homogéneas relativamente ás cinco constantes $a$, $b, c, d, e$; dividindo por uma d'ellas, por $d$ por exemplo, ou, o que vale o mesmo, fazendo $d=1$, teremos

$$5a-1=0, \quad -8a+5b-e+2=0\,,$$
$$3a-8b+5c+2e-1=0\,,$$
$$-6a+3b-8c-e+3=0\,:$$

donde se tira

$$a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{17}{10},\ c=\frac{3}{5},\ d=1,\ e=-\frac{81}{10}\,.$$

Os outros termos dão

$$R_2=(5a-6b+3c+3e-5)\,x^2+(5b-6c-5e+1)x$$
$$+(5c+e)=-163x^2+294x-51\,,$$

depois de desembaraçar de denominadores. O cálculo directo daria

$$-12225x^2+22050x-3825\,;$$

e dividindo por 75, recáe-se na expressão achada para $R_2$.

**198.** Entre os polynomios A e B existe uma relação importante. Demos a A e B índices correspondentes aos restos R; das identidades

$$Q_1 f'(x)-f(x)=A_1 f'(x)-B_1 f(x)$$
$$(Q_1 Q_2-1)\,f'(x)-Q_2 f(x)=A_2 f'(x)-B_2 f(x)$$

tira-se

$$A_1 = Q_1, \quad B_1 = 1, \quad A_2 = Q_1 Q_2 - 1, \quad B_2 = Q_2,$$

e portanto

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 1 .$$

Vamos ver que esta relação é geral e

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = 1 ,$$

para qualquer valor de $p$.

Com effeito, segundo a notação adoptada, é

$$\begin{aligned} R_{p+1} &= A_{p+1} f'(x) - B_{p+1} f(x) = R_p \,.\, Q_{p+1} - R_{p-1} \\ &= Q_{p+1}[A_p f'(x) - B_p f(x)] - [A_{p-1} f'(x) - B_{p-1} f(x)] . \end{aligned}$$

Egualando os coefficientes de $f(x)$ e os de $f'(x)$, da identidade precedente resulta

$$A_{p+1} = Q_{p+1} A_p - A_{p-1}, \quad B_{p+1} = Q_{p+1} B_p - B_{p-1} ;$$

multiplicando estas egualdades respectivamente por $B_p$ e $A_p$ e subtrahindo, vem

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} .$$

Estas differenças são, pois, constantes e independentes de $p$; mas é $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 1$, logo será tambem

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = 1 . \tag{50}$$

Pelo que fica dito, qualquer funcção inteira que possa reduzir-se á fórma $A f'(x) - B f(x)$, sendo os polynomios A e B convenientemente escolhidos, não poderá distinguir-se de um resto de Sturm senão por um factor constante.

**199.** *Restos de Sturm em funcção das raizes.* Supponhamos que na proposta $f(x)=0$, de grau $n$, o coefficiente do 1.° termo é a unidade e $a_1, a_2, \ldots a_n$ são as raizes; as expressões

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_n),\\
f'(x) &= \Sigma(x-a_2)\,(x-a_3)\ldots(x-a_n),\\
T_2 &= \Sigma(a_1-a_2)^2(x-a_3)\ldots(x-a_n),\\
T_3 &= \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2(x-a_4)\ldots(x-a_n),\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
T_n &= (a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\ldots(a_{n-1}-a_n)^2
\end{aligned}
$$

chamam-se *funcções de Sylvester*. As duas primeiras são a proposta e a sua derivada; a somma $T_2$ compõe-se dos termos que se obteem, substituindo cada grupo de dois factores lineares pelo quadrado da differença das raizes correspondentes; a somma $T_3$ compõe-se dos termos que se formam, substituindo cada grupo de tres factores lineares pelo producto dos quadrados das differenças distinctas das raizes correspondentes, tomadas duas a duas; finalmente $T_n$ é o producto dos quadrados das differenças das raizes.

Todas estas funcções podem reduzir-se á fórma

$$A' f'(x) - B' f(x), \qquad (ii)$$

como os restos de Sturm. Com effeito, seja, por exemplo,

$$T_3 = \Sigma(a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\,(a_2-a_3)^2\,(x-a_4)\ldots(x-a_n);$$

fazendo $x=a_1$, a expressão $(ii)$ reduz-se a

$$A'(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n),$$

porque é $f(a_1)=0$ e $f'(a_1)$ reduz-se ao termo que não tem $x-a_1$ por factor. Por outra parte, $T_3$ torna-se em

$$\Sigma\,(a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\,(a_2-a_3)^2\,(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_3)\,,\quad (4)$$

que é a mesma expressão precedente, fazendo

$$A'=\Sigma\,(a_2-a_3)^2\,(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\,;$$

teremos assim, pondo novamente $x$ em vez de $a_1$,

$$A'=\Sigma\,(a_2-a_3)^2\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,,$$

ou antes

$$A'=\Sigma\,(a_1-a_2)^2\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,,$$

visto que o $\Sigma$ se estende a todas as combinações possiveis das raizes da proposta, duas a duas.

Com esta expressão, $A'f(x)$ tomará o mesmo valor que $T_3$ para $x=a_1, a_2 \ldots a_n$; fazendo $B'=ax+b$ e pondo

$$T_3=A'f'(x)-(ax+b)\,f(x)\,.$$

esta egualdade será tambem satisfeita com $x=a_1, a_2, \ldots a_n$, attendendo a que $f(x)$ se annulla para todos estes valores. Se além d'isto fizermos successivamente $x$ egual a dois valores determinados quaesquer, $x_1$ e $x_2$, teremos duas relações para determinar $a$ e $b$; mas então aquella equação, de grau $n+1$, é satisfeita por $n+2$ valores da incógnita, e é uma identidade *(n.º 77)*. Logo, $T_3$ pode tomar a fórma $A'f'(x)-B'f(x)$.

Pelo mesmo processo se mostraria que qualquer funcção $T_p$ pode tomar aquella forma, pondo por $A'$ uma somma de termos compostos de $p-1$ factores lineares multiplicados pelos quadrados das differenças das raizes correspondentes. e por $B'$ um polynomio de grau $p-2$.

*

D'este modo as funcções de Sylvester não podem distinguir-se dos restos de Sturm senão por algum factor constante; façamos

$$T_2 = k_2 R_1, \quad T_3 = k_3 R_2, \quad T_4 = k_4 R_3, \quad \text{etc.}$$

Considerando em primeiro logar a identidade

$$T_2 = A'_2 f'(x) - B'_2 f(x) = k_2 [Q_1 f'(x) - f(x)],$$

será

$$A'_2 = \Sigma(x - a_1) \text{ e } B'_2 = \text{const.}$$

Ora $T_2$ é de grau $n-2$; o termo mais elevado de $A'_2 f'(x)$ é $nx \times nx^{n-1} = n^2 x^n$ e o de $f(x)$ é $x^n$. Para que estes termos se reduzam, deverá ser $B'_2 = n^2$; por outra parte, aquella identidade mostra que é $B'_2 = k_2$, logo será $k_2 = n^2$.

Para determinar os factores da fórma $k_p$, notemos que os polynomios A e B dos restos de Sturm satisfazem á relação (50); multiplicando-a por $k_p k_{p+1}$, vem

$$k_p A_p \times k_{p+1} B_{p+1} - k_{p+1} A_{p+1} \times k_p B_p = k_p k_{p+1},$$

isto é

$$A'_p B'_{p+1} - A'_{p+1} B'_p = k_p k_{p+1}.$$

Mas, por outra parte, temos

$$T_p = A'_p f'(x) - B'_p f(x), \quad T_{p+1} = A'_{p+1} f'(x) - B'_{p+1} f(x):$$

donde resulta

$$A'_{p+1}T_p - A'_pT_{p+1} = (A'_pB'_{p+1} - B'_pA'_{p+1})f(x) = k_pk_{p+1}f(x) .$$

O 2.° membro d'esta identidade é do grau $n$ em $x$; no 1.° membro a parte $A'_pT_{p+1}$ é de grau $p-1+n-p-1 = n-2$, e a outra parte $A'_{p+1}T_p$ é de grau $p+n-p=n$. Façamos

$$t_2 = \Sigma(a_1-a_2)^2 ,$$
$$t_3 = \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2 ,$$
$$t_4 = \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_1-a_4)^2(a_2-a_3)^2(a_2-a_4)^2(a_3-a_4)^2 ,$$

etc.;

o coefficiente da mais alta potencia de $x$ em $A'_{p+1}$ e em $T_p$, segundo a forma que suppomos a estas funcções, é $t_p$; e pela identidade precedente será

$$t_p^2 = k_p k_{p+1} .$$

Pondo nesta relação $p=2, 3, 4, ..$ vem

$$t_2^2 = k_2k_3 , \quad t_3^2 = k_3k_4 , \quad t_4^2 = k_4k_5 , \quad \text{etc.} ;$$

mas é $k_2 = n^2$, logo

$$k_3 = \frac{t_2^2}{n^2} , \quad k_4 = \frac{n^2 t_3^2}{t_2^2} , \quad k_5 = \frac{t_2^2 t_4^2}{n^2 t_3^2} , \quad \text{etc.}$$

Portanto as funcções de Sylvester são os restos de Sturm multiplicados por constantes positivas, que não influem nos signaes; os coefficientes dos seus primeiros termos são

$$1, n, t_2, t_3, \ldots t_n ,$$

e se nelles houver $v$ variações, a proposta $f(x)=0$ terá $2v$ raizes imaginárias.

**200.** Os menores do determinante symétrico de ordem $n$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

teem as mesmas propriedades fundamentaes que as funcções de Sturm; e as raizes da equação $\Delta=0$ são todas reaes, como vamos ver.

1.° No desenvolvimento do determinante $\Delta$ emprega-se com vantagem a fórmula *(n.° 34)*

$$\Delta = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma B_{pt}\, a_{ip}\, a_{it} .$$

Façamos $i=n$ e designemos por B o menor relativo ao último elemento $a_{nn}$; será

$$\Delta = B a_{nn} - \Sigma B_{pt}\, a_{np}\, a_{nt} ,$$

dando a $p$ e a $t$ todos os valores $1, 2, 3, \ldots n-1$ e combinando successivamente cada valor de $p$ com todos os valores de $t$.

Posto isto, para valores eguaes de $p$ e $t$, como $p=t=\mu$ por exemplo, o $\Sigma$ da expressão precedente dá um termo

$$B_{\mu\mu} a_{n\mu}^2 .$$

Para $p=\mu$ e $t=\sigma$, e depois para $p=\sigma$ e $t=\mu$, o sommatorio dá os termos

$$B_{\mu\sigma} a_{n\mu} a_{n\sigma} , \quad B_{\sigma\mu} a_{n\sigma} a_{n\mu} ;$$

ou, por ser $B_{\mu\sigma}=B_{\sigma\mu}$ e sommando,

$$2B_{\mu\sigma} a_{n\mu} a_{n\sigma} .$$

Podemos, portanto, fazer

$$\Delta = Ba_{nn} - \Sigma B_{\mu\mu} a_{n\mu}^2 - 2\Sigma B_{\mu\sigma} a_{n\mu} a_{n\sigma} ,$$

Para usar d'esta fórmula convém calcular separadamente o menor $B$ de $\Delta$ e os menores $B_{\mu\mu}$ e $B_{\mu\sigma}$ de $B$: em $\mu\sigma$ estam comprehendidas todas as combinações distinctas que se podem fazer com os numeros $1, 2, .. n-1$, tomados 2 a 2.

Se na última fórmula fôr $B=0$, o 2.º membro reduz-se a dois termos; e, além d'isso, o determinante symétrico é expresso por um quadrado, como veremos no exemplo seguinte.

Seja o determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

que desenvolveremos pelos elementos da última linha e da última columna, attendendo á relação $a_{is} = a_{si}$. Supponhamos que é

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 ;$$

virá

$$\Delta_4 = -B_{11} x_1^2 - B_{22} x_2^2 - B_{33} x_3^2$$
$$-2B_{12} x_1 x_2 - 2B_{13} x_1 x_3 - 2B_{23} x_2 x_3 .$$

Ora *(n.° 48, cor.)*, é

$$\frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \frac{B_{13}}{B_{23}} ,$$
$$\frac{B_{11}}{B_{31}} = \frac{B_{12}}{B_{32}} = \frac{B_{13}}{B_{33}} ,$$
$$\frac{B_{21}}{B_{31}} = \frac{B_{22}}{B_{32}} = \frac{B_{23}}{B_{33}} ;$$

donde, por ser $B_{is} = B_{si}$, resulta primeiro que $B_{11}$, $B_{22}$, $B_{33}$ teem o mesmo signal, e depois que

$$B_{12} = \sqrt{B_{11} B_{22}} , \quad B_{13} = \sqrt{B_{11} B_{33}} , \quad B_{23} = \sqrt{B_{22} B_{33}} .$$

Por esta forma se vê que a expressão de $\Delta_4$ se torna em

$$\Delta_4 = -(x_1 \sqrt{B_{11}} + x_2 \sqrt{B_{22}} + x_3 \sqrt{B_{33}})^2 ,$$

se os menores $B_{11}$, $B_{22}$, $B_{33}$ forem positivos; e do mesmo modo se veria que aquella expressão é um quadrado positivo quando os mesmos menores são negativos. Aos radicaes que entram nas expressões de $B_{12}$, $B_{13}$ e $B_{23}$ daremos o signal que fôr indicado pelas relações donde foram tirados; por ellas se vê que os signaes ficam determinados logo que são conhecidos os que conveem aos menores relativos aos elementos de uma linha.

Posto isto, representando por $\Delta$ um determinante symétrico qualquer, por $D_1$ o menor que resulta de apagarmos a última linha e a última columna de $\Delta$, por $D_2$ o menor que pela mesma forma se deduz de $D_1$ e assim por deante, acabamos de ver que, sendo $D_1 = 0$, o determinante $\Delta$ e o segundo menor $D_2$ teem signaes contrários. Ora

$$\Delta, D_1, D_2 \ldots D_{n-1}$$

são determinantes de differentes ordens, todos symétricos, e aquella propriedade applica-se a tres d'elles consecutivos; portanto se fôr $D_k = 0$, os menores adjacentes $D_{k-1}$ e $D_{k+1}$ terão signaes contrários.

2.° Voltando agora ao determinante symétrico $\Delta$, vimos (*n.° 37*) que elle se desenvolve em uma funcção inteira de grau $n$. Designemos por $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, ... $\Delta_{n-1}$ aquelle determinante e os seus menores de differentes classes que se obteem quando apagamos as ultimas filas horizontaes e verticaes. Completemos com uma constante positiva $\Delta_n$ o grupo d'aquellas funcções, que são respectivamente de graus $n$, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1.

Pisto isto, se em

$$\Delta\ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_{n-1}, \Delta_n$$

fizermos variar $x$ segundo a lei de continuidade, desde $-\infty$ até $+\infty$, quando $x$ passar por um valor que annulle uma funcção intermédia $\Delta_h$ as funcções adjacentes $\Delta_{h-1}$ e $\Delta_{h+1}$ terão signaes differentes, como succede com os restos de Sturm; as consequencias são tambem as mesmas. Só se perdem variações quando $x$ passa por um valor raiz da equação $\Delta=0$; mas o primeiro termo de cada uma d'aquellas funcções é positivo e o seu grau alternadamente par e impar: logo, ellas dão $n$ variações para $x=-\infty$ e só permanencias par $x=+\infty$, e por conseguinte a equação $\Delta=0$ tem $n$ raizes reaes. Do mesmo modo a equação $\Delta_1=0$ tem $n-1$ raizes reaes, a equação $\Delta_2=0$ tem $n-2$, etc.

## CAPÍTULO II.

### Formas algébricas.

**201.** Chama-se *forma* qualquer funcção *homogénea* de duas ou mais variaveis, considerada em si mesmo, isto é, abstrahindo da equação que se obteria egualando essa funcção a zero. A forma pode ser *binária, ternária, quaternária*, etc., conforme depende de duas variaveis ou de tres, quatro, etc.; tambem se diz *quadrática, cúbica, quártica*, etc., segundo é do 2.º grau ou do 3.º, 4.º, etc.

Os termos de uma forma binária de ordem $n$ são os mesmos do desenvolvimento

$$(x_1+x_2)^n=x_1^n+nx_1^{n-1}x_2+\frac{n(-1)}{1.2}x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+x_2^n$$

com coefficientes quaesquer; convém, para symetria dos cálculos, conservar-lhes os coefficientes numéricos do desenvolvimento da potencia $n$ do binomio. Assim

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 ,$$

$$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 ,$$

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_3^3 + a_4 x_2^4$$

são os typos das formas binárias quadrática, cúbica e quártica. Em geral, o numero de termos da forma binária de ordem $n$ é $n+1$.

Do mesmo modo para a forma ternária desenvolveremos

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n$$

$$= (x_1 + x_2)^n + n(x_1 + x_2)^{n-1} x_3 + \frac{n(n-1)}{2}(x_1 + x_2)^{n-2} x_3^2 + \cdots + x_3^n ,$$

e anteporemos a cada termo um coefficiente arbitrário ; o numero de termos da forma é

$$(n+1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Nas formas quadrática e cúbica é usada com frequencia uma notação, de que se fará idéa pelos seguintes exemplos de formas ternárias :

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 ,$$

$$a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + 3a_{112} x_1^2 x_2 + 3a_{113} x_1^2 x_3 + 3a_{122} x_1 x_2^2$$

$$+ 3a_{133} x_1 x_3^2 + 3a_{223} x_2^2 x_3 + 3a_{233} x_2 x_3^2 + 6a_{123} x_1 x_2 x_3 .$$

A primeira tem 6 termos; e a segunda tem 10, como resulta da fórmula precedente.

Para a forma quaternária teriamos

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^n=(x_1+x_2+x_3)^n+n(x_1+x_2+x_3)^{n-1}x_4$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}(x_1+x_2+x_3)^{n-2}x_4^2+\cdots+x_4^n,$$

com coefficientes quaesquer, além dos numéricos. O numero de termos seria

$$N=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+\cdots+\frac{2.3}{2}+\frac{1.2}{2},$$

ou

$$N+\frac{1}{2}\Big\{(n+1)(n+1+1)+n(n+1)+(n-1)(n-1+1)$$

$$+\cdots+2(2+1)+1(1+1)\Big\};$$

e portanto

$$N=\frac{1}{2}\Big\{[(n+1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2]$$

$$+[(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1]\Big\}.$$

A parte encerrada no primeiro colchete é *(n.° 41)*

$$(n+1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2.3},$$

a outra parte é

$$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

logo será

$$N=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Em geral, o numero de termos de uma forma de $p$ variaveis e de grau $n$ é

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p-1}.$$

**202.** *Transformações lineares.*—Transformar linearmente uma forma é achar outra forma do mesmo grau, cujas variaveis sejam em numero egual ás primitivas e estejam ligadas com ellas por meio de relações lineares homogéneas. Chama-se *módulo* o determinante das constantes d'estas relações lineares, o qual representaremos por $r$. Assim, para uma forma ternária a transformação linear pode ser definida por expressões como

$$x_1=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3,$$
$$x_2=\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\beta_3 X_3,$$
$$x_3=\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+\gamma_3 X_3;$$

o módulo d'esta transformação é

$$r=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

As variaveis consideram-se como independentes, e suppõe-se sempre o módulo $r$ differente de zero.

Seja a forma

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 ,$$

e as relações de transformação

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ,$$
$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 ;$$

a transformada será

$$A_0 X_1^2 + 2A_1 X_1 X_2 + A_2 X_2^2 ,$$

cujos coefficientes são dados pelas egualdades

$$A_0 = a_0 \alpha_1^2 + 2a_1 \alpha_1 \beta_1 + a_2 \beta_1^2 ,$$
$$A_1 = a_0 \alpha_1 \alpha_2 + a_1 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + a_2 \beta_1 \beta_2 ,$$
$$A_2 = a_0 \alpha_2^2 + 2a_1 \alpha_2 \beta_2 + a_2 \beta_2^2 .$$

Em geral, os coefficientes da transformada são funcções lineares homogéneas dos coefficientes da forma primitiva, do grau $n$ quanto ás constantes da transformação; as duas formas são do mesmo grau.

A theoria das formas occupa-se especialmente das funcções que não são alteradas por uma transformação linear; essa propriedade poderá convir a uma funcção dos coefficientes sómente, ou a uma funcção dos coefficientes e das variaveis, como adeante veremos.

**203.** *Systemas de formas lineares.* — Consideremos o systema de $p$ formas lineares com $p$ variaveis,

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1p} x_p , \\
f_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2p} x_p , \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
f_p &= a_{p1} x_1 + a_{\ p} x_2 + \cdots + a_{pp} x_p
\end{aligned}
\qquad (i)
$$

e o determinante

$$
\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdot\cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdot\cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} \cdot\cdot & a_{pp} \end{vmatrix} .
$$

Estas formas são independentes quando não ha alguma relação entre os coefficientes. Sabemos *(n.° 52)* que existe entre ellas uma relação identica, e uma só, quando $\delta$ é egual a zero sem que o sejam todos os seus primeiros menores. Entre aquellas funcções ha duas relações identicas, quando $\delta$ e todos os seus primeiros menores são eguaes a zero, sem que o sejam todos os menores de 2.ª classe; e assim por deante.

Em geral: *se o determinante $\delta$ de um systema de* p *formas com* p *variaveis fôr egual a zero e forem tambem eguaes a zero todos os seus menores até os de classe* i — 2 *inclusivamente, sem que o sejam todos os de classe* i, *haverá entre as formas dadas* i *relações lineares, identicas e distinctas.*

Neste caso as primeiras $i$ funcções exprimem-se por meio das últimas $p - i$, e só estas são independentes.

Supponhamos $\delta$ differente de zero e appliquemos ao systema (*i*) a transformação

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p\ , \\ x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_p = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p\ , \end{array} \qquad (ii)$$

cujo módulo é

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \end{vmatrix}\ .$$

As novas formas serão

$$\begin{array}{l} F_1 = b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \cdots + b_{1p} X_p\ , \\ F_2 = b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \cdots + b_{2p} X_p\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_p = b_{p1} X_1 + b_{p2} X_2 + \cdots + b_{pp} X_p\ , \end{array} \qquad (iii)$$

com os coefficientes

$$\begin{array}{l} b_{11} = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + \cdots + a_{1p}\lambda_1\ , \\ b_{12} = a_{21}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{1p}\lambda_2\ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{pp} = a_{p1}\alpha_p + a_{p2}\beta_p + \cdots + a_{pp}\lambda_p\ . \end{array}$$

Se representarmos por $\delta_1$ o determinante do systema (*iii*), vê-se por estas expressões que é $\delta_1 = r\delta$, segundo o principio da multiplicação de determinantes da mesma ordem; e portanto, *o determinante de um systema de formas lineares transformadas é egual ao producto do determinante do primitivo systema multiplicado pelo módulo da transformação.*

Os determinantes $\delta_1$ e $\delta$ são conjunctamente eguaes a zero ou differentes de zero. Se houver uma relação entre as formas dadas, haverá uma relação semelhante entre as transformadas. A funcção $\delta$ dos coefficientes, depois da transformação, apparece multiplicada por um factor que depende unicamente das constantes da substituição; se o módulo fôr $r = 1$, será $\delta_1 = \delta$.

**204.** *Transformação orthogonal.*—A transformação (*ii*) toma o nome de orthogonal quando entre as novas variaveis e as primitivas existe a relação

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_p^2 ,$$

que dá logar ás consequencias seguintes:

1.° Substituindo $x_1, x_2, \ldots x_p$ pelas suas expressões (*ii*) e egualando em um e outro membro os coefficientes dos termos semelhantes, acham-se as relações

$$\begin{gathered}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \cdots + \lambda_1^2 = 1 , \\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \cdots + \lambda_2^2 = 1 , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \cdots + \lambda_p^2 = 1 , \\
\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \cdots + \lambda_1 \lambda_2 = 0 , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{p-1} \alpha_p + \beta_{p-1} \beta_p + \cdots + \lambda_{p-1} \lambda_p = 0 ;
\end{gathered}$$

cujo numero é

$$p+\frac{p(p-1)}{1.2}=\frac{p(p+1)}{1.2},$$

visto que os productos $X_1 X_2$, $X_1 X_3$, etc. são as combinações das $p$ variaveis duas a duas.

2.ª Das relações precedentes resulta para o quadrado do módulo de uma transformação orthogonal *(n.° 45)* o valor $r^2=1$.

3.ª Multiplicando (*ii*) respectivamente por $\alpha_1$, $\beta_1, \ldots \lambda_1$ e sommando os resultados, procedendo do mesmo modo com os multiplicadores $\alpha_2$, $\beta_2, \ldots \lambda_2$, com $\alpha_3$, $\beta_3, \ldots \lambda_3$, etc., obteem-se as expressões

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \lambda_1 x_p ,\\
X &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \lambda_2 x_p ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_p &= \alpha_p x_1 + \beta_p x_2 + \cdots + \lambda_p x_p ,
\end{aligned}$$

d'onde se deduziriam relações análogas ás primeiras.

4.ª Nas fórmulas de uma transformação orthogonal o numero das constantes arbitrárias reduz-se a

$$p^2-\frac{p(p+1)}{2}=\frac{p(p-1)}{2}.$$

Para $p=3$ as constantes arbitrárias serão 3.

**205.** *Forma quadrática de* p *variaveis.*—A expressão geral d'esta forma é

$$
\begin{aligned}
f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \cdots + 2a_{1p} x_1 x_p \\
+ a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + \cdots\cdots + 2a_{2p} x_2 x_p \\
+ a_{33} x_3^2 + \cdots\cdots\cdots + 2a_{3p} x_3 x_p \quad (iv) \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ a_{pp} x_p^2 .
\end{aligned}
$$

As derivadas parciaes de $f$, divididas por 2, são as formas lineares ($i$) com a condição $a_{is} = a_{si}$; e o seu determinante $\delta$ é (*n.° 144*) o discriminante de $f$.

Appliquemos á funcção quadrática a transformação ($ii$), empregando o seguinte artificio. Se em (46)

$$f = x_1 f_1 + x^2 f_2 + \cdots + x_p f_p \; ;$$

substituirmos $x_1, x_2, \ldots x_p$ pelas expressões ($ii$) e $f_1, f_2, \ldots f_p$ pelas ($iii$), teremos a transformada

$$
\begin{aligned}
F = (b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \cdots + b_{1p} X_p)(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p) \\
+ (b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \cdots + b_{2p} X_p)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p) \\
+ \text{etc.} \\
+ (b_{p1} X_1 + b_{p2} X_2 + \cdots + b_{pp} X_p)(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p) \; ;
\end{aligned}
$$

ou, effectuando as operações,

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
F = b_{11}\,\alpha_1 & X_1^2 + b_{11}\,\alpha_2 & X_1 X_2 + \cdots + b_{11}\,\alpha_p & X_1 X_p \\
\quad + b_{21}\,\beta_1 & \qquad + b_{21}\,\beta_2 & \qquad\qquad + b_{21}\,\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad\qquad + \cdots & \\
\quad + b_{p1}\,\lambda_1 & \qquad + b_{p1}\,\lambda_2 & \qquad\qquad + b_{p1}\,\lambda_p & \\
\quad + b_{12}\,\alpha_1 & X_1 X_2 + b_{12}\,\alpha_2 & X_2^2 + \cdots \quad + b_{12}\,\alpha_p & X_1 X_p \\
\quad + b_{22}\,\beta_1 & \qquad + b_{22}\,\beta_2 & \qquad\qquad + b_{22}\,\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad\qquad + \cdots & \\
\quad + b_{p2}\,\lambda_1 & \qquad + b_{p2}\,\lambda_2 & \qquad\qquad + b_{p2}\,\lambda_2 & \\
\multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\quad + b_{1p}\,\alpha_1 & X_1 X_p + b_{1p}\,\alpha_2 & X_2 X_p + \cdots + b_{1p}\,\alpha_p & X_p^2 : \\
\quad + b_{2p}\,\beta_1 & \qquad + b^2{}_p\,\beta_2 & \qquad\qquad + b_{2p}\,\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad\qquad + \cdots & \\
\quad + b_{pp}\,\lambda_1 & \qquad + b_{pp}\,\lambda_p & \qquad\qquad + b_{pp}\,\lambda_p &
\end{array}
$$

onde está bem evidente a lei que seguem os termos do desenvolvimento.

Posto isto, representemos respectivamente por $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1p}$ os coefficientes que na primeira linha, na segunda e na ultima se encontram na primeira columna; por $c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2p}$ os que se encontram nas mesmas linhas e na segunda columna; finalmente e em geral por $c_{p1}, c_{p2} \ldots c_{pp}$ os que estam nas mesmas linhas e na última columna; será a transformada

$$
\begin{aligned}
F = & (c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \cdots + c_{1p} X_p) X_1 \\
& + (c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \cdots + c_{2p} X_p) X_2 \\
& + \text{etc.} \\
& + (c_{p1} X_1 + c_{p2} X_2 + \cdots + c_{pp} X_p) X_p \,.
\end{aligned}
$$

Ora $c_{is} = c_{si}$; de modo que os coefficientes de $X_1, X_2, \ldots X_p$ são respectivamente a metade das derivadas de F em ordem a estas variaveis. Por onde se vê que o discriminante $\Delta$ da transformada é o determinante d'estes coefficientes, e como precedentemente

$$\Delta = r\delta_1 = r^2\delta .$$

Logo: *se transformarmos linearmente uma funcção quadrática homogénea, o discriminante da transformada é egual ao da forma primitiva multiplicado pelo quadrado do módulo.*

Se a transformação fôr orthogonal, será $r=1$ e portanto $\Delta=\delta$.

**206.** *Funcção adjunta* (GAUSS).—Se fizermos a transformação precedente tomando as novas variaveis

$$X_1 = f_1, \quad X_2 = f_2, \ldots X_p = f_p , \tag{10}$$

o determinante do systema é o discriminante $\delta$. Suppondo-o differente de zero, a eliminação nestas equações dará *(n.º 53)*, depois de substituirmos as derivadas de $f$ pelas suas expressões,

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= A_{11} X_1 + A_{21} X_2 + \cdots + A_{p1} X_p , \\
\delta x_2 &= A_{12} X_1 + A_{22} X_2 + \cdots + A_{p2} X_p , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta x_p &= A_{1p} X_1 + A_{2p} X_2 + \cdots + A_{pp} X_p ;
\end{aligned}$$

e nestas equações os primeiros menores de $\delta$, que representámos pelos A, satisfazem á relação $A_{is} = A_{si}$, porque $\delta$ é symétrico. Attendendo a esta circumstancia, se multiplicarmos as mesmas equações respectivamente por $X_1$, $X_2$, .. e sommarmos, teremos

$$\begin{aligned}\partial f = A_{11} X_1^2 + 2A_{12} X_1 X_2 + \cdots + 2A_{1p} X_1 X_p \\ + A_{22} X_2^2 + \cdots\cdots + 2A_{2p} X_1 X_p \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + A_{pp} X_p^2.\end{aligned}$$

O discriminante da funcção quadrática $\partial f$, de $p$ variaveis, é o determinante formado com os primeiros menores A, isto é, o determinante adjunto de $\partial$, ou $\Delta' = \partial^{p-1}$ *(n.° 47)*; por isso a funcção $\partial f$ se chama *funcção adjunta* de $f$.

**207.** *Uma forma quadrática pode em geral reduzir-se á somma de quadrados de formas lineares, em numero egual ao das variaveis.*

Para o demonstrar, notemos que dois casos podem dar-se na forma $f$: ou algum dos coefficientes dos quadrados é differente de zero, ou faltam todos estes termos.

*1.° caso.* Supponhamos o primeiro coefficiente $a_{11}$ differente de zero. Podemos fazer

$$\begin{aligned}f &= a_{11} x_1^2 + 2(a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1p} x_p) x_1 + \varphi_1 \\ &= a_{11} x_1^2 + 2\varphi x_1 + \varphi_1 = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x_1 + \varphi)^2 + \varphi_1 - \frac{\varphi^2}{a_{11}},\end{aligned}$$

onde $\varphi$ é uma funcção linear e $\varphi_1$ uma forma quadrática; nem $\varphi$ nem $\varphi_1$ encerram a variavel $x_1$. Fazendo

$$a_{11} x_1 + \varphi = X_1,$$

$X_1$ é uma forma linear e temos

$$f = \frac{1}{a_{11}} X_1^2 + \varphi_1 - \frac{\varphi^2}{a_{11}};$$

assim apparece no 2.° membro o primeiro quadrado de uma forma linear, e a parte restante é uma forma quadratica de $p-1$ variaveis. A esta parte de $f$ applicaremos um raciocinio semelhante; e procedendo successivamente do mesmo modo chegaremos, á solução procurada. Note-se que á forma $X_1$ não falta nenhuma das variaveis $x_1, x_2, \ldots x_p$; a $X_2$ falta a primeira, a $X_3$ as duas primeiras, e assim por deante, ou:

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{11} x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots, \\
X_2 &= \;\; 0x_1 + a'_{22} x_2 + \cdots, \\
X_3 &= \;\; 0x_1 + \;\; 0x_2 + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

representando por $x_1$ a variavel com que fizemos a primeira operação, $x_2$ a variavel com que fizemos a segunda operação, etc. O determinante dos coefficientes tem todos os elementos, do mesmo lado da primeira diagonal, eguaes a zero; e reduz-se ao termo principal, que é differente de zero porque $a_{11}$, $a'_{22} \ldots$ são differentes de zero. Portanto as fórmas $X_1, X_2, \ldots$ são independentes entre si.

2.° *Caso*. Supponhamos que faltam em $f$ todos os quadrados das variaveis; a funcção, que pode ser a primitiva ou alguma d'aquellas a que fomos conduzidos pelas operações precedentes, só tem termos com productos de duas variaveis. Admittindo que o coefficiente de $x_1 x_2$ é differente de zero, temos agora

$$f = a x_1 x_2 + x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \varphi_3$$

onde são $\varphi_1$ e $\varphi_2$ formas lineares e $\varphi_3$ uma forma quadratica, da mesma natureza de $f$: tanto em $\varphi_1$ como em $\varphi_2$ e $\varphi_3$ faltam as variaveis $x_1$ e $x_2$. Podemos dar a $f$ a disposição

$$f=\frac{1}{a}(ax_1+\varphi_2)(ax_2+\varphi_1)+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a};$$

mas segundo a relação geral

$$(m+n)(p+q)=\frac{1}{4}(m+n+p+q)^2-\frac{1}{4}(m+n-p-q)^2,$$

da expressão precedente deduz-se

$$\begin{aligned} f&=\frac{1}{4a}(ax_1+ax_2+\varphi_1+\varphi_2)^2-\frac{1}{4a}(ax_1-ax_2+\varphi_2-\varphi_1)^2\\ &\quad+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a}\\ &=\frac{1}{4a}X_1^2-\frac{1}{4a}X_2^2+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a}, \end{aligned}$$

fazendo

$$X_1=ax_1+ax_2+\varphi_1+\varphi_2,\quad X_2=ax_1-ax_2+\varphi_2-\varphi_1,$$

que são formas lineares. Temos assim no 2.º membro dois quadrados e uma funcção quadratica de $p-2$ variaveis, á qual applicaremos o mesmo processo. Formando as linhas dos coefficientes das duas formas lineares $X_1$ e $X_2$, vem

$$\begin{array}{lll} a & a & \ldots, \\ a & -a & \ldots, \end{array}$$

ou compondo-as por subtracção

$$\begin{matrix} a & a & \dots, \\ 0 & -2a & \dots; \end{matrix}$$

e o determinante das funcções X se reduzirá, como no primeiro caso, ao termo principal, differente de zero; estas funcções são independentes.

Temos pois demonstrado que uma forma quadrática de $p$ variaveis é egual a uma somma de quadrados de formas lineares independentes. Dos raciocínios precedentes resulta tambem que o numero d'esses quadrados será $p$ ou menor que $p$; e portanto será

$$f = k_1 X_1^2 + k_2 X_2^2 + \cdots + k_p X_p^2 .$$

Se egualassemos os coefficientes dos quadrados e dos productos que se encontram nos dois membros d'esta identidade, obteriamos

$$p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$$

equações; e como nas $p$ formas lineares $X_1, X_2, \dots X_p$ de $p$ variacões ha $p^2$ coefficientes, d'estes ficariam por determinar

$$p^2 - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

que poderiamos escolher arbitrariamente. O problema proposto tem pois muitas soluções.

**208.** Reduzida a forma $f$ á somma precedente, consideremos esta expressão como uma forma de $p$ variaveis $X_1, X_2, \ldots X_p$; o seu discriminante reduz-se a

$$\Delta = k_1 k_2 \ldots k_p .$$

Substituindo agora $X_1$, $X_2$, pelas suas expressões, voltaremos á forma primitiva, que assim pode considerar-se a transformada d'aquella; o módulo $r$ da transformação é o determinante das funcções X, differente de zero, como vimos. Por outra parte, o discriminante da transformada é o discriminante da forma primitiva, multiplicado pelo quadrado do módulo; logo é

$$\delta = r^2 k_1 k_2 \ldots k_p .$$

Se o 2.º membro fôr differente de zero, tambem o 1.º o será; reciprocamente, se $\delta$ fôr differente de zero, nenhum dos coefficientes $k$ se annulla; se fôr $\delta = 0$, um pelo menos d'estes coefficientes será zero.

Logo: *a condição necessária e sufficiente para que uma forma quadrática se converta em uma somma de tantos quadrados, quantas são as suas variaveis, é que o seu discriminante seja differente de zero.*

**209.** Seja a forma quadrática ternária real

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$$

e a transformação ($ii$), em que é $p = 3$; se esta transformação fôr orthogonal, teremos as fórmulas inversas ($iv$). Determinemos as nove constantes de modo que a funcção proposta se reduza, sendo possivel, a

$$f = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + s_3 X_3^2 ,$$

com as constantes reaes $s_1$, $s_2$ e $s_3$; d'aqui teremos, pelas fórmulas do n.º 204, 3.º

$$\begin{aligned}f &= s_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3)X_1 \\ &+ s_2(\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3)X_2 + s_3(\alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3)X_3 .\end{aligned}$$

Ora pelas fórmulas (*ii*) e pela definição da funcção $f$ temos tambem

$$\begin{aligned}f &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)x_2 \\ &+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)x_3 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) \\ &+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3) .\end{aligned}$$

Temos assim duas expressões de $f$ que devem ser identicas; egualando os coefficientes de $x_1 X_1$, $x_2 X_1$ e $x_3 X_1$, vem

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1 + a_{21}\beta_1 + a_{31}\gamma_1 &= s_1\alpha_1 , \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{32}\gamma_1 &= s_1\beta_1 , \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 &= s_1\gamma_1 ,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(a_{11} - s_1)\alpha_1 + a_{21}\beta_1 + a_{31}\gamma_1 &= 0 , \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - s_1)\beta_1 + a_{32}\gamma_1 &= 0 , \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1 + (a_{33} - s_1)\gamma_1 &= 0 .\end{aligned}$$

Os outros productos dariam mais seis equações de condição, que só differiriam d'estas pela mudança de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e $s_1$ para as tres primeiras em $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e $s_2$, e para as tres ultimas em $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ e $s_3$. A eliminação dos coefficientes $\alpha, \beta, \gamma$ em cada um d'estes tres grupos produz sempre uma equação como

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-s & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

com $s_1$ em vez de $s$ no primeiro, $s_2$ em vez de $s$ no segundo e $s_3$ em vez de $s$ no terceiro; logo estes tres coefficientes serão as raizes da equação precedente do 3.º grau. Estas raizes são reaes, como se viu no capitulo anterior; depois de as termos determinado, as condições de identidade darão, com as tres primeiras relações do n.º 204, 1.º, os valores das constantes de uma transformação orthogonal real que reduz a funcção proposta á somma de tres quadrados.

Para uma funcção de $p$ variaveis a solução do problema dependeria da equação

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22}-s & \dots & a_{p2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{pp}-s \end{vmatrix} = 0,$$

com $p$ raizes reaes; logo a reducção é sempre possivel. Nesta última equação o termo independente da incógnita é o discriminante $\delta$; quando fôr $\delta \lessgtr 0$, nenhuma raiz é zero e a forma reduzida contém $p$ quadrados; se fôr $\delta = 0$, ha uma raiz zero e a reduzida tem $p-1$ quadrados. Neste caso, como o coefficiente da primeira potencia de $s$ é a somma dos primeiros menores de $\delta$ relativos aos elementos da primeira diagonal, se estes menores forem todos eguaes a zero haverá duas raizes zero, e a reduzida conterá $p-2$ quadrados; e assim por deante.

Se os menores relativos aos elementos da primeira diagonal forem eguaes a zero, tambem o serão os outros menores de $\delta$, porque cada um d'estes é a raiz quadrada do producto de dois dos primeiros, visto que $\delta$ é symétrico. D'esta relação resulta tambem que, sendo $\delta = 0$, a funcção adjunta é um quadrado.

**210.** *Lei de inércia* (Hermite).— Esta lei pode enunciar-se nos termos seguintes: *em uma forma quadrática real, reduzida á somma de quadrados independentes, é invariavel o numero de quadrados positivos e o numero de quadrados negativos, qualquer que seja o modo como se fez a reducção.*

Supponhamos que em $f$ (n.º 207) ha $k$ coefficientes positivos; qualquer dos seus termos com o signal em evidencia será

$$\pm k_r X_r^2 = \pm (X_r \sqrt{k_r})^2 = \pm Y_r^2,$$

e podemos escrever

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_h^2 - Y_{h+1}^2 - \cdots - Y_p^2.$$

Se por qualquer outro modo de reducção chegarmos á expressão

$$f = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_l^2 - Z_{l+1}^2 - \cdots - Z_p^2,$$

será $h = l$. Com effeito, se fosse $h < l$, consideremos as $h + p - l$ equações lineares

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0, \ldots Y_k = 0\ ,$$
$$Z_{l+1} = 0,\ Z_{l+2} = 0, \ldots Z_p = 0\ ;$$

o seu numero não pode ser maior que $p - 1$, e portanto é sempre possivel determinar as $p$ variaveis que nellas entram de modo que satisfaçam aquelle systema e a

$$Y_{h+t} = c \gtrless 0 ,$$

sendo $Y_{h+t}$ uma das funcções

$$Y_{h+1},\ Y_{h+2}, \ldots Y_p ,$$

qual se quizer. Teremos pois

$$\begin{aligned} f = & - Y^2_{h+1} - Y^2_{h+2} - \cdots - Y^2_{h+t} - \cdots - Y^2_p \\ = & \ Z^2_1 + Z^2_2 + \cdots + Z^2_l ; \end{aligned}$$

mas esta identidade é impossivel, visto que todos os termos do 1.º membro são negativos e um pelo menos differente de zero: logo não pode ser $h < l$.

Do mesmo modo se mostraria que não pode ser $h > l$; e portanto será $h = l$, como se queria demonstrar.

No n.º anterior vimos que qualquer forma quadrática se reduz por uma transformação orthogonal á expressão

$$s_1 X^2_1 + s_2 X^2_2 + \cdots s_p X^2_p$$

de coefficientes reaes; diz-se que a forma é *positiva* quando todas as raizes da equação em $s$ são positivas, *negativa* quando estas raizes são todas negativas, *indifferente* quando umas são positivas e outras negativas.

**211.** *Invariante.* — Vimos que, transformando linearmente uma funcção quadrática homogénea, o discriminante da transformada é egual ao da forma primitiva multiplicado pelo quadrado do módulo; por este motivo se diz que o discriminante d'aquella forma é *invariante*. Em geral, dá-se este nome áquella *funcção dos coefficientes de uma forma que, depois de uma transformação linear, só differe da primitiva por um factor que é uma potencia do módulo da transformação*. Assim dada a fórma

$$f(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)$$

e a transformada

$$F(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2 \ldots),$$

a funcção $\varphi$ dos coefficientes que convém á relação

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots)$$

é um *invariante*. Demonstra-se que o discriminante de uma forma qualquer é invariante.

Se fôr $h=0$, a funcção $\varphi$ toma o nome de *invariante absoluto*. Se uma forma tiver mais de um invariante, terá um absoluto; com effeito, supponhamos que ella tem dois invariantes $\varphi$ e $\psi$, taes que

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots),$$

$$\psi(A_0, A_1, \ldots) = r^{h'} \psi(a_0, a_1, \ldots);$$

será

$$\frac{[\varphi(A_0, A_1, \ldots)]^{h'}}{[\psi(A_0, A_1, \ldots)]^h} = \frac{[\varphi(a_0, a_1, \ldots)]^{h'}}{[\psi(a_0, a_1, \ldots)]^h}$$

e a funcção que está no segundo membro é um invariante absoluto.

Consideremos a forma binária de ordem $n$

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots a_n x_2^n,$$

e a substituição linear

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ,$$
$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 ;$$

a transformada

$$a_0 (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)^n + \cdots + a_n (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2)^n$$
$$= A_0 X_1^n + n A_1 X_1^{n-1} X_2 + \cdots + A_n X_2^n$$

dá logar a $n+1$ equações entre os coefficientes da forma e as constantes da transformação. Eliminando estas ultimas quantidades resultam $n-3$ equações entre os coefficientes; se alguma d'ellas fôr tal como

$$\varphi (a_0, a_1, \ldots) = \varphi (A_0, A_1, \ldots) ,$$

$\varphi$ será um invariante absoluto. Portanto nas formas binárias não pode haver mais de $n-3$ relações d'esta especie; d'onde resulta que a forma quadrática e a cúbica não admittem invariante absoluto, nem conseguintemente mais de um invariante, que é o seu discriminante.

**212.** *Invariantes simultáneos.*—A funcção dos coefficientes de muitas formas, que goza da propriedade de invariancia, chama-se *invariante simultáneo* d'estas formas. Vimos que o determinante de um systema de formas lineares é invariante simultáneo. Em geral o eliminante de um systema de equações será um invariante simultáneo dos seus primeiros membros. Representando-o por E, a equação $E=0$ exprime que as propostas teem uma solução commum; mas depois da transformação as novas equações tambem terão uma solução commum, e o seu eliminante $E'$ será egual a zero. Logo serão conjunctamente E e $E'$ eguaes a zero; ou $E' = RE$, sendo R independente dos coefficientes das propostas.

Sejam

$$f_1(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots), \quad f_2(b_0, b_1, \ldots x_1, x_2 \ldots)$$

duas formas do mesmo grau, e $\varphi$ um invariante da primeira; se representarmos por $\varphi'_0, \varphi'_1, \ldots$ as derivadas de $\varphi$ em ordem a $a_0, a_1, \ldots$, aquella expressão

$$b_0 \varphi'_0 + b_1 \varphi'_1 + \cdots$$

será um invariante simultáneo de $f_1$ e $f_2$, como vae ver-se.

Consideremos a funcção $f_1 + cf_2$, em que $c$ é uma constante arbitrária. Passa-se de $f_1$ para $f_1 + cf_2$ mudando respéctivamente $a_0, a_1, \ldots$ em $a_0 + cb_0, a_1 + cb_1, \ldots$; se $\varphi(a_0, a_1, \ldots)$ é um invariante de $f_1$, $\varphi(a_0 + cb_0, a_1 + cb_1, \ldots)$ será um invariante de $f_1 + cf_2$, qualquer que seja $c$. Desenvolvendo esta última funcção, os coefficientes das differentes potencias de $c$ gosarão da propriedade de invariancia; e particularmente o primeiro, que é precisamente aquella expressão.

Sejam, por exemplo, as formas qúadráticas

$$f_1 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad f_2 = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2 .$$

O discriminante $a_0 a_2 - a_1$ é, como vimos, um invariante de $f_1$; applicando o theorema que acabamos de demonstrar, será

$$a_1 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1$$

um invariante simultáneo de $f_1$ e $f_2$.

**213.** *Covariantes.* — Dá-se este nome á *funcção invariante dos coefficientes e das variaveis d'uma forma.*

Sejam a funcção $f$ e a transformada F

$$f(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)\ , \quad F(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2, \ldots)\ ;$$

um covariante $\varphi$ é definido, em geral, pela egualdade

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)\ .$$

Ha um principio fundamental que leva á determinação d'uma classe importante de covariantes; consideremos uma forma binária, porque facilmente se generalisarão os resultados que obtivermos.

Seja a forma $f(x_1, x_2)$ e a transformação linear

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2\ ,$$
$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2\ ;$$

e supponhamos que o resultado da substituição é expresso pela equação

$$f(x_1, x_2) = F(X_1, X_2)\ .$$

Sejam tambem as variaveis $y_1$, $y_2$, $Y_1$, $Y_2$ ligadas pelas mesmas relações,

$$y_1 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2\ ,$$
$$y_2 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2\ ,$$

que se chamam *congredientes* com as primeiras; será

$$x_1 + \lambda y_1 = \alpha_1 (X_1 + \lambda Y_1) + \alpha_2 (X_2 + \lambda Y_2)\ ,$$
$$x_2 + \lambda y_2 = \beta_1 (X_1 + \lambda Y_1) + \beta_2 (X_2 + \lambda Y_2)\ ,$$

com $\lambda$ arbitrário. Assim, pois, as novas variaveis $x_1+\lambda y_1$, e $x_2+\lambda y_2$ estão ligadas com $X_1+\lambda Y_1$ e $X_2+\lambda Y_2$ pelas fórmulas que relacionam as variaveis $x_1$ e $x_2$ com $X_1$ e $X_2$, e portanto será tambem

$$f(x_1+\lambda y_1,\, x_2+\lambda y_2)=F(X_1+\lambda Y_1,\, X_2+\lambda Y_2)\,.$$

Effectuando o desenvolvimento, serão eguaes os coefficientes das mesmas potencias de $\lambda$, ou

$$y_1 f'_{x_1}+y_2 f'_{x_2}=Y_1 F'_{X_1}+Y_2 F'_{X_2}$$

$$y_1^2 f''_{x_1^2}+2y_1 y_2 f''_{x_1 x_2}+y_2^2 f''_{x_2^2} \tag{v}$$

$$=Y_1^2 F''_{X_1^2}+2Y_1 Y_2 F''_{X_1 X_2}+Y_2^2 F''_{X_2^2}$$

etc.

Assim fica demonstrado que as operações definidas por estas relações gosam da propriedade de invariancia; qualquer d'ellas conduz a uma funcção $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$ com as quatro variaveis congredientes. Se considerarmos $x_1$ e $x_2$ como constantes, P será uma funcção homogénea das variaveis $y_1$ e $y_2$; uma funcção invariante $\varphi$ dos coefficientes de P conserva a propriedade da invariancia com quaesquer valores de $x_1$ e $x_2$, e $\varphi$ será um covariante da forma $f$, visto que se compõe com as variaveis e os coefficientes d'esta forma.

Seja, por exemplo, a forma binária cúbica

$$f=a_0 x_1^3+3a_1 x_1^2 x_2+3a_2 x_1 x_2^2+a_3 x_2^3\;;$$

as segundas derivadas de $f$ são

$$6\,(a_0 x_1+a_1 x_2)\;,\quad 6\,(a_1 x_1+a_2 x_2)\;,\quad 6\,(a_2 x_1+a_3 x_2)\;,$$

e portanto, supprimindo o factor numérico, a segunda das expressões precedentes será

$$y_1^2(a_0 x_1 + a_1 x_2) + 2y_1 y_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2) + y_2^2 (a_2 x_1 + a_3 x_2) \text{ ,}$$

forma quadrática em $y_1$ e $y_2$. O discriminante d'esta forma é

$$\begin{aligned}&(a_0 x_1 + a_1 x_2)(a_2 x_1 + a_3 x_2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2\\ &= (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2 \text{ ;}\end{aligned}$$

e como o discriminante é invariante, esta expressão é um covariante de $f$.

Seja tambem a forma ternária $f(x_1, x_2, x_3)$ de ordem $n$ e appliquemos-lhe as operações indicadas pela expressão

$$y_1^2 f''_{x_1^2} + y_2^2 f''_{x_2^2} + y_3^2 f''_{x_3^2} + 2y_1 y_2 f''_{x_1 x_2} + 2y_1 y_3 f''_{x_1 x_2} + 2y_2 y_3 f''_{x_2 x_3}$$

Esta forma é quadrática em relação a $y_1$, $y_2$, $y_3$, e o seu discriminante é o determinante das equações

$$\begin{aligned}y_1 f''_{x_1^2} + y_2 f''_{x_1 x_2} + y_3 f''_{x_1 x_3} &= 0\\ y_1 f''_{x_2 x_1} + y_2 f''_{x_2^2} + y_3 f''_{x_2 x_3} &= 0\\ y_1 f''_{x_3 x_1} + y_2 f''_{x_3 x_2} + y_3 f''_{x_3^2} &= 0\end{aligned}$$

e como é invariante, resulta que o determinante das segundas derivadas

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} & f''_{x_1 x_3} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2^2} & f''_{x_2 x_3} \\ f''_{x_3 x_1} & f''_{x_3 x_2} & f''_{x_3^2} \end{vmatrix}$$

é um covariante da forma $f$. O mesmo teria logar para qualquer numero de variaveis; este covariante chama-se o *Hessiano de f*.

Outra expressão notavel se deduz do mesmo principio. Sejam tres formas $f_3$, $f_2$, $f_3$ a tres variaveis; as expressões correspondentes á primeira fórmula ($v$) são

$$
\begin{gathered}
y_1 f'_{1_{x_1}} + y_2 f'_{1_{x_2}} + y_3 f'_{1_{x_3}}, \\
y_1 f'_{2_{x_1}} + y_2 f'_{2_{x_2}} + y_3 f'_{2_{x_3}}, \\
y_1 f'_{3_{x_1}} + y_2 f'_{3_{x_2}} + y_3 f'_{3_{x_3}},
\end{gathered}
$$

do primeiro grau em $y_1$, $y_2$ e $y_3$. O seu determinante

$$
J = \begin{vmatrix} f'_{1_{x_1}} & f'_{1_{x_2}} & f'_{1_{x_3}} \\ f'_{2_{x_1}} & f'_{2_{x_2}} & f'_{2_{x_3}} \\ f'_{3_{x_1}} & f'_{3_{x_2}} & f'_{3_{x_3}} \end{vmatrix}
$$

será um covariante simultáneo das tres formas. O mesmo tem logar para o determinante composto com as primeiras derivadas de $n$ formas, ao qual se dá o nome de *Jacobiano* d'estas formas.

# INDICE

## PRIMEIRA PARTE.

### Determinantes.


| | | Pag. |
|---|---|---|
| CAPITULO | I. — Primeiras noções | 3 |
| » | II. — Propriedades dos determinantes | 14 |
| » | III. — Propriedades dos menores | 19 |
| » | IV. — Desenvolvimento do determinante pelos seus menores | 25 |
| » | V. — Addição das linhas | 41 |
| » | VI. — Producto de determinantes da mesma ordem | 53 |
| » | VII. — Determinantes adjunto e de Vandermonde | 62 |
| » | VIII. — Equações lineares | 72 |


## SEGUNDA PARTE.

### Theoria das equações.


| | | |
|---|---|---|
| CAPITULO | I. — Numeros complexos | 87 |
| » | II. — Funcções inteiras | 97 |
| » | III. — Composição das equações | 109 |
| » | IV. — Transformação das equações | 118 |
| » | V. — Limites das raizes | 122 |
| » | VI. — Raizes eguaes | 129 |
| » | VII. — Raizes comprehendidas entre dois numeros. Máximos e minimos | 136 |
| » | VIII. — Theoremas de Descartes, Budan e Sturm | 141 |
| » | IX. — Equações reciprocas. Equações binomias | 156 |
| » | X. — Funcções symétricas das raizes | 172 |
| » | XI — Eliminação | 181 |
| » | XII. — Theorema de Dalembert | 211 |

## TERCEIRA PARTE.

### Resolução das equações.


| | | | Pag. |
|---|---|---|---|
| CAPITULO | I. | — Numeros negativos | 221 |
| » | II. | — Numeros irracionaes | 231 |
| » | III. | — Raizes commensuraveis | 253 |
| » | IV. | — Raizes incommensuraveis. Separação | 265 |
| » | V. | — Cálculo das raizes incommensuraveis | 285 |
| » | VI. | — Raizes imaginárias | 305 |
| » | VII. | — Resolução algébrica das equações do 3.° grau | 312 |
| » | VIII. | — Resolução algébrica das equações do 4.° grau | 319 |
| » | IX. | — Impossibilidade da resolução algébrica além do 4.° grau | 323 |


## QUARTA PARTE.

### Restos de Sturm. Formas.


| | | | |
|---|---|---|---|
| CAPITULO | I. | — Restos de Sturm | 333 |
| » | II. | — Formas algébricas | 346 |

# ERRATA.

| Pag. | Lin. | Onde está: | Lêia-se: |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | $P \equiv a_{\alpha\alpha'} b_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}$ | $P \equiv a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}$ |
| 12 | 16 | *hemysimétrico* | *hemisymétrico* |
| 14 | 17 | $0\ z_2\ y_2$ | $0\ z^2\ y^2$ |
| » | 18 | $0\ x_2$ | $0\ x^2$ |
| 16 | 23 | mesmo factor | mesmo factor *(n.º 13)*. |
| » | 27 | contido em $n$ *(n.º 3)*. | contido em $n$. |
| 33 | 15 | e as columnas ou as linhas | e as columnas, ou as linhas, |
| 34 | 24 | $d_3\ e_3\ 0\ 0$ | $d_3\ e_3 * *$ |
| 79 | 8 | Viu-se no n.º 54. que | Viu-se no n.º 54 que |
| 93 | 12 | as rectas $M_2M$ e OM | as rectas OM e $M_2M$ |
| » | 17 | OU, ou $OM = \rho_1 \rho_2$ | OU ou $OM = \rho_1 \rho_2$ |
| 94 | 14 | 4.º *Extracção de raizes.* | 2.º *Extra ção de raizes.* |
| 99 | 7 | do numero anterior. | do n.º anterior |
| 101 | 26 | $+\frac{h^2}{2!} f''_x (x, y)$ | $+\frac{h^2}{2!} f''_{x_2} (x, y)$ |
| 113 | 21 | $f(x) \equiv (x-a_1)_r\ (x-a_2)_s \ldots (x-a_k)^v$ | $f(x) \equiv p_0 (x-a_1)^r . (x-a_2)^s \ldots (x-a_k)^v$ |
| 114 | 20 | o grau $mn$ de $\varphi(x)$ | o grau $n-m$ de $\varphi(x)$ |
| 116 | 32 | $\ldots x \ldots$ | $\ldots\ldots$ |
| 123 | 26 | por (30) | por (31) |
| 125 | 7 | $\sqrt[r+]{P}_{r+s}$ | $\sqrt[r+s]{P}_{r+s}$ |
| 126 | 3 | $x^m = (x-1)\ (x^{m-1} +$ | $x^m = (x-1)\ (x^{m-1} +$ |
| » | 21 | O méthodo de Newton, dá | O méthodo de Newton dá |
| 127 | 5 | *(n.º 39)* | (39) |
| » | 23 | $(x-5)^4\ (x-3)^2\ (x-1) = 0$ | $(x-5)^4 . (x-3)^2 . (x-1) = 0$ |
| 148 | 3 | *ha só uma da raiz* | *ha só uma raiz* |
| » | 16 | $\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$ | $\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}$ |
| 151 | 15 | $K = f''(x + \theta_1) h$ | $K = f''(x + \theta_1 h)$ |
| 173 | 1 | $s = t =$ | $r = s =$ |
| 177 | 7 | $S_{\alpha+\lambda}\ S^{\beta}$ | $S_{\alpha+\lambda} . S_{\beta}$ |
| » | 8 | $S_{\beta+\lambda}\ S^{\alpha}$ | $S_{\beta+\lambda} . S_{\alpha}$ |
| 234 | 17 | valor de $n > n$ | valor de $n > n'$ |
| 237 | 16 | como vimos no n.º 151. | como vimos no n.º 150. |
| 238 | 7 | *(n º 162)* | *(n.º 152)* |
| » | 13 | D'aqui resulta | D'aqui resulta, |
| 247 | 16 | $\alpha 0 = 1$ | $\alpha^0 = 1$ |
| 249 | 7 | a *differença* $a^{n-1}$ | *a differença* $a^n - 1$ |
| 260 | 4 | por ser negativo *(n.º 105, 2.º)*: | por ser negativo (n.º *105, 2.º*) |
| 268 | 15 | $(4\rho^2)^{\frac{(n\ n-1)}{2}-1}$ | $(4\rho^2)^{\frac{n\ (n-1)}{2}-1}$ |

S. RODRIGUES

LIÇÕES
DE ALGEBRA

Est. B/S.R.
Tab. 5
N.º 15