LIÇÕES DE ALGEBRA

Ao seu velho amigo e venerando collega o Dr. Luiz da Costa e Almeida, illustre decano da faculdade de mathematica

LIÇÕES DE ALGEBRA

POR

J. D. SOUTO RODRIGUES

Director do Real Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra,
Sócio correspondente da A. R. das Sciencias de Lisboa
e honorário do Instituto de Coimbra.

Terceira edição
Inteiramente refundida

PORTO
Livraria — MAGALHÃES & MONIZ — Editores
11 — Largo dos Loyos — 14

1902

COIMBRA — IMPRENSA DA UNIVERSIDADE — 1902

I

Determinantes.

DETERMINANTES.

CAPÍTULO I.

Primeiras noções.

1. O numero de permutações de n *elementos* é expresso pelo producto $1.2.3\ldots n$, que se designa por alguma das notações $\underline{|n}$ ou $n!$. Os elementos podem ser representados por letras ou por numeros.

A troca de dois elementos α, β chama-se *transposição*, e representa-se pela notação (α, β). Todas as permutações de n elementos dados podem deduzir-se de uma d'ellas, escolhida arbitrariamente e chamada *principal*, por meio de transposições successivas. Assim, por exemplo, passa-se da permutação $P = 2134$ para $P' = 3412$ trocando o primeiro elemento de P por aquelle que occupa o primeiro logar em P', o que produz a permutação $P_1 = 3124$, trocando depois o segundo elemento de P_1 com aquelle que tem o segundo logar em P', o que produz $P_2 = 3421$, e finalmente transpondo os dois ultimos elementos de P_2. As transposições effectuadas são $(2,3)$, $(1,4)$, $(2,1)$.

*

Geralmente toma-se para principal a permutação cujos elementos se succedem na ordem alphabética ou numeral; por exemplo, *abcd* ou 1234. Nas permutações derivadas da principal dá-se uma *inversão* cada vez que se trocam dois elementos; e o numero das inversões de cada uma conta-se, sommando os numeros de inversões que cada elemento produz com todos os que lhe ficam á direita. Em 3412 ha quatro inversões, duas que provêem de 3 com 1 e 2, outras duas de 4 com estes mesmos elementos.

Dizem-se de *primeira classe*, ou *pares*, as permutações que teem um numero par de inversões; de *segunda classe*, ou *impares*, aquellas que teem um numero impar. A somma e a differença dos numeros de inversões em duas permutações da mesma classe são numeros pares, e reciprocamente.

2. *Theorema de Bezout: uma permutação muda de classe por uma transposição.*

Se P_1 e P_2 são duas permutações que só differem na ordem de dois elementos α e β, dois casos podem dar-se.

1.° Se estes elementos forem contíguos, a transposição (α, β) produz ou desfaz *uma* inversão, e qualquer dos numeros $v \pm 1$ é de paridade differente de v.

2.° Se entre α e β houver k elementos, passa-se da disposição $\alpha \ldots \beta$ para $\beta \ldots \alpha$, ou reciprocamente, permutando primeiro β com cada um d'aquelles k elementos e com α, e permutando depois α com os mesmos elementos intermédios. Teremos assim effectuado $2k+1$ transposições de elementos contíguos; e como cada uma d'ellas produz mudança de classe, P_1 e P_2 são de classes differentes.

Cor. O numero das permutações pares de n elementos é egual ao das impares, pois que a cada permutação P_1, com os elementos α, β numa certa ordem, corresponde outra P_2 com estes elementos invertidos.

3. Invertendo todos os elementos d'uma permutação, obtém-se a permutação *inversa* da primeira.

A permutação inversa da principal contém o máximo numero d'inversões, por que cada um dos seus elementos produz inversões com todos os que lhe ficam á direita. Assim o primeiro elemento dá logar a $n-1$ inversões, o segundo a $n-2$, etc., e o numero total d'ellas será

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}. \qquad (1)$$

Este numero é par quando n tem alguma das formas $4i$ ou $4i+1$, sendo i inteiro, e impar no caso de ser $n=4i+2$ ou $n=4i+3$: o que se exprime dizendo que a permutação inversa da principal de ordem n é par ou impar, conforme o maior numero par contido em n é *duplamente* ou *simplesmente* par.

4. Trocando successivamente o primeiro elemento d'uma permutação de ordem n com cada um dos seguintes, obtém-se a permutação *circular* da primeira. As duas são da mesma classe quando n é impar, e reciprocamente, visto que se passa d'uma para outra por $n-1$ transposições.

Assim, por exemplo, 4321 é a permutação circular de 1432; a segunda é impar e a primeira é par.

5. Supponhamos expressos por numeros os n elementos de uma permutação P; os primeiros i, que designamos por $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_i$ na ordem natural, formam uma permutação parcial p. Um d'estes elementos, como α_h, produz inversões com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots (\alpha_h-1)$; mas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h-1}$ pertencem a p, e por conseguinte o numero das inversões que α_h faz com os $n-i$ elementos da segunda parte de P será

$$\alpha_h-1-(h-1)=\alpha_h-h.$$

Dando a h todos o valores desde 1 até i, sommando e fazendo $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i=s_i$, o numero das inversões que os primeiros i elementos de P fazem com os $n-i$ restantes é dado pela expressão

$$t=(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\cdots+(\alpha_i-i)=s_i-\frac{i(i+1)}{2}.$$

Designando por u e u' os numeros d'inversões que ha em p e na permutação p' composta com os ultimos $n-i$ elementos de P, o numero total v das inversões de P será

$$v = u + u' + s_i - \frac{i(i+1)}{2}.$$

O numero t não pode ser zero sem que seja simultaneamente $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \ldots,\ \alpha_i = i$.

6. No producto $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ permutem-se os índices em todas as ordens possiveis, conservando as letras na disposição alphabética; obteremos assim $n!$ productos distinctos, cujos factores differentes são em numero de n^2 e formam o quadro

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n . \end{array} \qquad (2)$$

Os *elementos* d'este quadro acham-se dispostos em n *filas* horizontaes, chamadas *linhas*, e n verticaes ou *columnas*. As linhas distinguem-se pelos índices, e contam-se de cima para baixo; as columnas distinguem-se pelas letras, e contam-se da esquerda para a direita. Chama-se *primeira diagonal* do quadro (2) a que parte da esquerda descendo, ou $a_1 b_2 \ldots l_n$; a outra $a_n b_{n-1} \ldots l_1$ é a *segunda diagonal*.

Será mais conveniente em alguns casos representar os elementos (2) por uma só letra affecta de dois índices, como se vê no quadro seguinte:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} . \end{array} \qquad (3)$$

Nesta notação o numero de ordem das columnas é designado pelo segundo índice, e o que dissermos d'estes índices applica-se ás letras na notação anterior.

7. Um producto de n elementos distinctos do quadro (3) terá a fórma

$$P = a_{\alpha\alpha'} b_{\beta\beta'} \ldots a_{\lambda\lambda'} ,$$

sendo $\alpha\beta\ldots\lambda$ e $\alpha'\beta'\ldots\lambda'$ duas permutações dos índices $1, 2, \ldots n$.

Trocando em P a ordem de dois factores $a_{\delta\delta'}$ e $a_{\theta\theta'}$, faz-se a transposição (δ, θ) nos primeiros índices e (δ', θ') nos segundos; portanto ambas as permutações mudam de classe. Designando por v e v' os numeros d'inversões nestas permutações antes da troca dos dois factores, e por v_1 e v'_1 os numeros d'inversões nas permutações que resultam d'aquella troca, os numeros $v + v'$ e $v_1 + v'_1$ serão da mesma paridade.

8. *Definição.* — Chama se *determinante* dos elementos (3), e representa-se por Δ_n, a somma algébrica de todos os productos distinctos P ($n.^o$ 7), tomados com o signal + ou — conforme são da mesma ou differente classe as duas permutações dos índices dos dois systemas.

Segundo esta definição e as notações precedentes, será

$$\Delta_n = \Sigma (-1)^{v+v'} . a_{\alpha\alpha'} a_{\beta\beta'} \ldots a_{\lambda\lambda'} , \tag{4}$$

representando por Σ a somma de que se trata. O determinante de n^2 elementos diz-se de *ordem* n.

Um elemento $a_{\delta\delta'}$ diz-se *par* quando os índices δ e δ' são da mesma paridade ou $\delta + \delta' = 2i$. Os elementos da primeira diagonal são pares, porque são da forma $a_{\delta\delta}$.

Cor. 1. Pertence ao determinante Δ_n o termo

$$+ a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} ,$$

chamado *principal*. Os factores d'este termo são os elementos da primeira diagonal, que tambem se chamam *principaes*.

Cor. 2. Pertence ao determinante Δ_n o termo

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{n1} a_{n-1,2} \ldots a_{1n}$$

cujos factores são os elementos da segunda diagonal; as permutações dos índices neste termo são a principal e a sua inversa (1).

Cor. 3. Á expressão (4) pode dar-se a fórma

$$\Delta_n \equiv \Sigma (-1)^v \cdot a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\lambda n}, \qquad (5)$$

ou ainda

$$\Delta_n \equiv \Sigma (-1)^{v'} \cdot a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\lambda}, \qquad (6)$$

porque a ordem dos factores não influe no valor numérico nem no signal de cada termo (*n.*° 7). Estas expressões mostram que o desenvolvimento do determinante se pode obter, effectuando sómente as permutações dos índices d'um systema.

Cor. 4. O determinante de ordem n tem $n!$ termos, metade positivos e metade negativos; ou melhor, metade dos termos tomam-se com o respectivo signal, e outra metade com o signal contrário.

Cor. 5. A expressão (5), ou (6), mostra que num termo do determinante entra um elemento de cada linha e de cada columna, mas um só.

9. Exprime-se o determinante nos seus elementos encerrando o quadro (2) ou (3) em dois traços verticaes, como se vê na expressão

$$\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dois exemplos mostrarão como pode sempre obter-se o desenvolvimento d'um determinante.

1.° Seja

$$\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 :$$

o determinante de 2.ª ordem é a differença dos productos cruzados dos seus elementos.

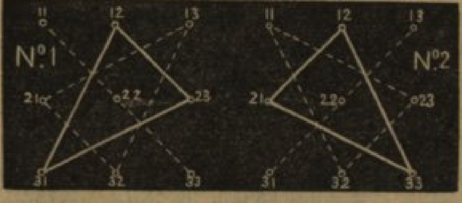
2.° Seja $\Delta_3 \equiv \Sigma \pm a_1 b_2 c_3$. Formam-se as permutações dos índices

$$123, \quad 132, \quad 312, \quad 213, \quad 231, \quad 321 ;$$

e attendendo á regra dos signaes, será

$$\Delta_3 \equiv a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 \ .$$

O determinante de 3.ª ordem desenvolve-se ordinariamente pela *regra de Sarrus*. Tirem se as rectas (12, 23) e (32, 21) parallelas á primeira diagonal (*fig. 1*), e completem-se os trian-



gulos da mesma figura; o producto dos elementos principaes, bem como cada um dos que se obteem multiplicando entre si os elementos que estão nos vértices de cada triangulo, são os termos positivos de Δ_3. Tirem-se do mesmo modo as rectas (21, 12) e (23, 32) parallelas á 2.ª diagonal, e completem-se os triangulos da *fig. 2;* os elementos d'esta diagonal dão um dos termos negativos, e os que estão nos vertices de cada triangulo darão cada um dos outros dois termos d'esta espécie.

A regra de Sarrus pode empregar-se d'outro modo. Á direita da 3.ª columna repetem-se as outras duas; os tres elementos da 1.ª diagonal e os de cada uma das duas linhas parallelas a esta dão os termos positivos; os elementos da 2.ª diagonal e os de cada uma das suas parallelas dão os termos negativos. Por exemplo:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right.,$$

$\Delta = 2\times6\times3+(-1)\times(-3)\times1+1\times4\times2-1\times6\times1-2\times(-3)\times2-(-1)\times4\times3=65$. Podemos tambem repetir as duas primeiras linhas por baixo da terceira, e proceder do mesmo modo.

No desenvolvimento dos determinantes numéricos teriamos de identificar os seus elementos com os do quadro (1) ou (2). A regra de Sarrus dispensa esta preparação nos determinantes de 3.ª ordem.

10. Se num determinante dado os indices não corresponderem aos numeros d'ordem das linhas, ou das columnas, ou das linhas e das columnas, o quadro do determinante preenche-se facilmente, quando é dado o termo principal.

Basta escrever este termo em linha oblíqua descendente da esquerda para a direita, e completar as linhas de modo que se encontre sempre em cada uma o mesmo índice d'um systema e em cada columna o mesmo índice do outro systema.

Um determinante pode representar-se abreviadamente pelo termo principal, pondo

$$\Delta_n = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}\,,$$

ou na notação do quadro (2)

$$\Delta_n = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots l_n .$$

Tambem se tem escripto sómente

$$\Delta_n = \left| a_i^s \right| ;$$

e ainda

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix} .$$

Muitas vezes bastará escrever $\Delta_3 = | a\, b\, c |$, por exemplo.

11. Apagando i linhas e i columnas no quadro d'um determinante de ordem n, os elementos restantes formam um determinante de ordem $n-i$, que se chama *menor* de *classe* i do proposto.

Em Δ_n ha n^2 menores de 1.ª classe, pois que o systema de filas orthogonaes, que se cruzam sobre um elemento dado, é distincto d'aquelle que corresponde a outro qualquer elemento.

Cada um d'estes menores tem $(n-1)^2$ menores de 1.ª classe, que são menores de 2.ª classe de Δ_n: mas não são todos distinctos, porque duas linhas e duas columnas cruzam-se sobre 2^2 elementos. Assim o numero de menores distinctos de 2.ª classe que ha em Δ_n é

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} .$$

Por uma inducção evidente se conclue que o numero de menores distinctos de classe i, que ha em Δ_n, é

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{3^2} \cdots \frac{(n-i+1)^2}{i^2} .$$

Este numero torna-se em n^2 para $i=n-1$; com effeito, cada elemento de Δ_n pode ser considerado como um menor de classe $n-1$ d'este determinante.

12. Chamam-se *conjugados* os elementos symetricamente situados d'um e outro lado da primeira diagonal. No quadro (3) os elementos conjugados teem os indices trocados: $a_{\alpha\beta}$, $a_{\beta\alpha}$. Os elementos principaes são conjugados de si mesmos.

Dois menores da mesma classe dizem-se conjugados quando os elementos d'um são respectivamente conjugados dos elementos do outro.

Determinante de *diagonal vasia* é aquelle em que todos os elementos principaes são eguaes a zero.

O determinante diz-se *symétrico*, quando têm os elementos conjugados eguaes entre si, dois a dois; *contrasymétrico* ou *pseudosymétrico*, quando os elementos conjugados teem, dois a dois, o mesmo valor numérico e signaes contrarios; *hemysimétrico*, quando é conjunctamente contrasymétrico e de diagonal vasia.

Exemplos:

1.° $$S=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \theta \end{vmatrix};$$

desenvolvendo este determinante symétrico pela regra de Sarrus, vém

$$S=\alpha\delta\theta+2\beta\gamma\varepsilon-\beta^2\theta-\gamma^2\delta-\varepsilon^2\alpha.$$

Se fôr $\alpha=\delta=\theta=0$, será $S=2\beta\gamma\varepsilon$.

2.° $$S'=\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & \gamma \\ \beta & \delta & -\varepsilon \\ -\gamma & \varepsilon & \theta \end{vmatrix};$$

desenvolvendo este determinante pela regra de Sarrus, acha-se

$$S' = \alpha\delta\theta + \beta^2\theta + \gamma^2\delta + \varepsilon^2\alpha$$

Se fôr $\alpha = \delta = \theta = 0$, S' é hemisymétrico e egual a zero.

Exercicios

1. Determinar quantas inversões ha em 3 1 5 4 2.

2. Determinar a classe de 3 1 4 2 5, da sua inversa e da circular.

3. Obtêr 5 2 1 4 3 por tantas transposições na ordem natural, quantas são as suas inversões.

4. Verificar as egualdades

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix} = x^5 + y^5, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ z & 0 & x & 0 & 0 \\ y & x & \alpha & \beta & \lambda \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^5$$

sem effectuar os desenvolvimentos.

5. Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

sem recorrer á regra de Sarrus.

6. Effectuar o desenvolvimento de $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$.

7. Preencher o quadro do determinante cujo termo principal é $b_1 d_2 a_3 c_4$.

8. Mostrar que o numero total de inversões nas permutações de n elementos é $\frac{(n-1)}{4} \cdot \underline{\lfloor n}$.

CAPÍTULO II.

Propriedades dos determinantes.

13. Para multiplicar ou dividir um determinante por m multiplicam-se ou dividem se por m todos os elementos de uma fila. Com effeito, cada termo do determinante contém um elemento d'essa fila, e um só, e fica assim multiplicado ou dividido por m.

Cor. 1. Podemos pôr em factor do determinante um factor commum a todos os elementos de uma fila, dividindo estes elementos por aquelle factor.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2z^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{z}{xy} & \frac{y}{xz} \\ 1 & \frac{z}{xy} & 0 & \frac{x}{yz} \\ 1 & \frac{y}{xz} & \frac{x}{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ xyz & z^2 & 0 & x^2 \\ xyz & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z_2 & y_2 \\ 1 & z^2 & 0 & x_2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Cor. 2. Para multiplicar um determinante por -1 basta mudar o signal aos elementos de uma fila, ou de um numero impar de filas.

Cor. 3. Mudar os signaes a todos os elementos do determinante de ordem n é o mesmo que multiplica-lo por $(-1)^n$.

14. Se no determinante Δ permutarmos de qualquer maneira as linhas, ou as columnas, ou as linhas e as columnas, obtem-se um determinante Δ', que será egual a $\pm\Delta$ conforme os termos principaes de Δ e Δ' forem ou não da mesma classe. Com effeito, os termos de Δ e Δ' só podem ser differentes nos signaes. Ora, se os principaes T e T′ são da mesma classe, as permutações da mesma classe que T ou T′ serão positivas em ambos os determinantes e vice-versa; se são de classes differentes, as permutações da mesma classe que T serão positivas em Δ e negativas em Δ', e vice-versa. No primeiro caso é $\Delta = \Delta'$, no segundo é $\Delta = -\Delta'$.

15. Um determinante não se altera quando as linhas se mudam em columnas e inversamente, isto é, quando o quadro gira de 180° sobre a primeira diagonal. Assim será

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

porque os termos principaes são identicos. Os elementos, que occupam as mesmas casas nos dois determinantes, são os mesmos com os índices invertidos.

Cor. O determinante *hemisymétrico* de ordem impar é nullo. A mudança das columnas em linhas não lhe altera o valor, e a mudança posterior dos signaes em todos os elementos faria que elle mudasse de signal (*n.° 13, cor. 3*), passando de Δ para $-\Delta$; porém o determinante volta á fórma primitiva, e portanto será $\Delta = -\Delta$ ou $2\Delta = 0$.

16. Um determinante Δ muda de signal quando se permutam duas filas parallelas. Troquemos a columna i com a k; os elementos principaes de Δ nestas duas columnas serão a_{ii} e a_{kk}, e teremos a disposição seguinte

$$\begin{array}{ccc} \triangle & \qquad & \triangle' \\ a_{ii} \ldots a_{ik} & & a_{ik} \ldots a_{ii} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{ki} \ldots a_{kk} & & a_{kk} \ldots a_{ki} \end{array}$$

Nestes dois quadros os termos principaes dos determinantes $\triangle$ e $\triangle'$ são da fórma

$$\mathrm{A}\, a_{ii}\, \mathrm{B}\, a_{kk}\, \mathrm{C}\ , \quad \mathrm{A}\, a_{ik}\, \mathrm{B}\, a_{ki}\, \mathrm{C}\ ;$$

do primeiro passa-se para o segundo pela transposição dos índices do segundo systema. Logo estes termos são de classe differente e (*n.° 14*) é $\triangle = -\triangle'$; o mesmo se diria da troca de duas linhas, pelo princípio do n.° 15.

Trocando entre si p filas parallelas, o novo determinante $\triangle'$ será egual a $\triangle \times (-1)^p$. Fazer uma permutação circular de p linhas ou de p columnas é o mesmo que fazer $p-1$ trocas de filas parallelas, ou multiplicar o determinante por $(-1)^{p-1}$.

17. Se no determinante $\triangle$ forem eguaes duas filas parallelas, será $\triangle = 0$. Com effeito a troca d'estas duas filas produz mudança de signal; mas os dois determinantes ficam identicos, donde $\triangle = -\triangle$ ou $\triangle = 0$.

Cor. O determinante é nullo quando os elementos de uma fila são eguaes respectivamente aos de outra fila parallela multiplicados pelo mesmo factor.

18. Quando se trocam as duas diagonaes de um determinante de ordem n, o determinante conserva o seu valor absoluto; e muda ou não de signal, conforme é simples ou duplamente par o maior numero par contido em n (*n.° 5*).

A troca das diagonaes effectua-se trocando as duas columnas extremas e simultaneamente todas as que são equidistantes d'ellas; portanto, se $2p$ é o maior numero par contido em n, será necessario fazer p permutações de duas columnas e o novo determinante será egual ao proposto multiplicado por $(-1)^p$, isto é, por $+1$ se p é par ou por -1 se p é impar. Assim,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix}.$$

19. Pela propriedade do n.º 13 podem simplificar-se os determinantes. Seja por exemplo

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix};$$

multiplicando as tres linhas respectivamente por a, b e c, o determinante virá multiplicado por abc e será

$$abc \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix};$$

e dividindo depois a primeira columna por abc, acha-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

É sempre possivel reduzir á unidade todos os elementos d'uma fila. Assim, multiplicando as columnas de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

respectivamente por bc, ca e ab, o determinante virá multiplicado por $a^2b^2c^2$ e será

$$a^2b^2c^2 . \Delta = \begin{vmatrix} abc & bac & cab \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix} ;$$

e dividindo depois a primeira linha por abc, acha-se finalmente

$$\Delta = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix} .$$

Se o determinante fosse de ordem n, o divisor do novo determinante seria $a^{n-2}\, b^{n-2} \ldots l^{n-2}$.

Como na reducção de fracções ao mesmo denominador, se não forem primos entre si os elementos da fila que se quer transformar, basta reduzí-los ao seu menor múltiplo. Seja, por exemplo, o determinante seguinte, em que 16 é o menor múltiplo dos elementos da primeira columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 16 & 1 & 8 & 6 \\ 8 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4.8.2}{1} \begin{vmatrix} 16 & 12 & 20 & 8 \\ 16 & 56 & 24 & 32 \\ 16 & 1 & 8 & 6 \\ 16 & 4 & 10 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 12 & 20 & 8 \\ 1 & 56 & 24 & 32 \\ 1 & 1 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 10 & 14 \end{vmatrix}.$$

O último determinante ainda pode ser simplificado; basta dividir as duas últimas columnas por 2 e multiplicar fora dos travessões por 4, o que dá

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 10 & 4 \\ 1 & 56 & 12 & 16 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Estas proposições teem importancia no cálculo dos determinantes numéricos.

CAPÍTULO III.

Propriedades dos menores.

20. Além do termo principal, ha no desenvolvimento do determinante outros que teem por factor o primeiro elemento a_{11}. Para os determinar, conserve-se fixo este elemento em $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$, permutem-se em todas as ordens possiveis os indices do segundo systema nos outros elementos e dê-se a cada resultado o signal que o termo correspondente tem no determinante proposto; acharemos assim todos os termos pedidos. Por outra parte, o signal de cada um será o que resultar do numero de

*

inversões que se encontrarem nos indices 2, 3, . . n, porque o indice 1, escripto no principio, não influe naquelle numero; por conseguinte, designando por a_{11} A_{11} a parte do desenvolvimento de Δ_n em que entra o elemento a_{11}, o factor A_{11} será o determinante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que é o menor de primeira classe que resulta da suppressão da primeira linha e da primeira columna de Δ_n.

Outro elemento qualquer a_{is}, da linha i e da columna s, entra no desenvolvimento do determinante em diversos termos, que podemos representar todos por a_{is} A_{is}. Para determinar A_{is}, leve-se o elemento considerado ao logar do primeiro a_{11}, por meio de $i-1$ trocas de linhas e $s-1$ trocas de columnas duas a duas. O novo determinante será

$$\Delta' = \begin{pmatrix} s, 1, 2, \ldots s-1, s+1, \ldots n \\ i, 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots n \end{pmatrix};$$

e como no termo principal de Δ' ha $i-1$ inversões nos indices do primeiro systema e $s-1$ nos do segundo, será $\Delta_n = \pm \Delta'$ (*n.° 14*) conforme $i-1$ e $s-1$, ou antes, conforme i e s forem ou não da mesma paridade. Este resultado pode representar-se por meio da relação

$$\Delta_n = (-1)^{i+s} . \Delta' .$$

Por outra parte ao elemento a_{is}, que occupa o primeiro logar de Δ', é applicavel o que dissemos de a_{11} com respeito a Δ_n; portanto os termos que no desenvolvimento de Δ' conteem o elemento a_{is} podem ser todos representados por Ma_{is}, sendo M o primeiro menor que se obtém apagando a primeira linha e a primeira columna de $\triangle'$.

Ora éste menor M é o primeiro menor de $\triangle_n$ relativamente ao elemento a_{is}; e attendendo aos signaes será

$$A_{is}=(-1)^{i+s}\times\begin{pmatrix}12\,..\,s-1\,s+1\,..\,n\\ 12\,..\,i-1\,i+1\,..\,n\end{pmatrix}.$$

O signal é + se o elemento a_{is} é par, — se é impar.

O signal pode tambem determinar-se percorrendo orthogonalmente o determinante, desde o seu primeiro elemento até áquelle que se considera, lendo + no primeiro elemento e mudando de signal na passagem de cada um d'elles para o seguinte.

Assim para determinar o signal do factor de r no determinante

$$\begin{vmatrix} p & a & b & c\\ a & q & -d & e\\ b & -d & r & f\\ c & e & f & s\end{vmatrix},$$

diremos + em p, — em a, + em b, — em $-d$, + em r. Notaremos que é sempre positivo o termo que tem por factor um elemento principal, porque estes elementos são todos pares.

21. Podemos dar outra forma a A_{is}, trazendo o elemento a_{is} ao primeiro logar de

$$\triangle_n=\begin{pmatrix}1,2\,..\,s-1,s,s+1,\,..\,n\\ 1,2\,..\,i-1,i,i+1,\,..\,n\end{pmatrix}$$

por meio de $i-1$ permutações circulares das linhas e $s-1$ das columnas.

Cada uma d'estas permutações equivale a $n-1$ trocas de filas parallelas, e estas últimas operações virão a ser ao todo $(n-1)(i+s-2)$; portanto o novo determinante Δ'' está ligado com Δ_n pela relação

$$\Delta_n = (-1)^{(n-1)(i+s)} \cdot \Delta'' .$$

Por outra parte é

$$\Delta'' = \begin{pmatrix} s, s+1, \ldots n, 1, \ldots s-1 \\ i, i+1, \ldots n, 1, \ldots i-1 \end{pmatrix} ;$$

donde se conclue, como no n.º anterior, que será

$$A_{is} = (-1)^{(n-1)(i+s)} \cdot \begin{pmatrix} s+1, \ldots n, 1, \ldots s-1 \\ i+1, \ldots n, 1, \ldots i-1 \end{pmatrix} .$$

Se n fôr impar, o factor A_{is} tem sempre o signal $+$; se n fôr par, este factor deve tomar-se com o signal $+$ para os elementos pares e com o signal $-$ para os impares.

Assim no determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

o factor do elemento a_{23} será

$$+ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} .$$

Quando é $s = n$, o índice $s+1$ representa simplesmente o numero 1.

22. Seja $\Delta_n^{(p)}$ um menor de classe $n-p$ do determinante Δ_n, e $\Delta_n^{(n-p)}$ o menor que fica do proposto quando nelle se apagam as p linhas e p columnas em que o primeiro se contém; o producto $\Delta_n^{(p)} . \Delta_n^{(n-p)}$, com o mesmo signal ou com signal contrário, fará parte do desinvolvimento de Δ_n. Com effeito, os termos d'este producto encerram todos os índices de Δ_n, sem repetições nem omissões; e dois d'elles são distinctos um do outro pelas permutações de algum dos factores, ou pelas de ambos.

Para determinar o signal que ficou incerto, consideremos positivo um dos factores e procuremos o signal que deve attribuir-se ao outro factor, suppondo em cada um d'elles os elementos do termo principal dispostos na ordem natural. Seja em primeiro logar

$$\Delta_n^{(p)} = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\, a_{pp}\,,$$

isto é, supponhamos que o menor $\Delta_n^{(n-p)}$ resulta da suppressão das primeiras p linhas e das primeiras p columnas do determinante proposto e que é

$$\Delta_n^{(n-p)} = \Sigma \pm a_{p+1,\,p+1}\, a_{p+2,\,p+2} \,.\,.\,.\, a_{nn}\,.$$

O producto dos termos principaes dos dois menores é positivo em Δ_n, porque é o termo principal d'este determinante; logo a parte considerada do desenvolvimento deve ser tomada com o signal $+$.

Se fôr em geral, com os índices dispostos na ordem natural,

$$\Delta_n^{(p)} = \Sigma \pm a_{is}\, a_{i's'} \,.\,.\,.\,,$$

leve-se o elemento a_{is} ao primeiro logar da primeira diagonal por meio de $i-1$ trocas de linhas e $s-1$ trocas de columnas;

leve-se depois o elemento $a_{i's'}$ ao logar do segundo elemento da mesma diagonal por meio de $i'-2$ trocas de linhas e $s'-2$ trocas de columnas, e assim por deante. O novo determinante será $\Delta'=\Delta_n$ ou $\Delta'=-\Delta_n$, conforme a somma $i+s-2+i'+s'-2.2+\ldots$ fôr par ou impar.

Por conseguinte o signal do producto considerado será definido pelo coefficiente

$$(-1)^{i+s+i'+s'+\cdots};$$

ou ainda pelo numero de inversões que o primeiro factor apresenta em relação ao segundo nos indices dos dois systemas.

Os factores $\Delta_n^{(p)}$ e $\Delta_n^{(n-p)}$, formados pelo modo que acabamos de dizer, chamam-se *complementares*. Tambem se lhes dá o nome de *reciprocos*, por serem complementares um do outro.

23. Num determinante symétrico dois elementos conjugados a_{is}, a_{si} são eguaes. Os seus factores complementares A_{is} e A_{si} tambem são eguaes porque, mudando as linhas em columnas e reciprocamente, cada elemento vae occupar o logar do seu conjugado e vice-versa, ficando todas as casas eguaes.

Nos determinantes hemisymétricos os factores complementares de elementos conjugados são numéricamente eguaes; e do mesmo ou differente signal, conforme o grau n do determinante é impar ou par. Mudando as linhas em columnas e reciprocamente, o elemento a_{is} vem para o logar do seu conjugado a_{si}; e mudando os signaes a todos os elementos o novo determinante é $\Delta'=\Delta_n.(-1)^n$, o elemento a_{is} torna-se em $-a_{is}$ e as casas ficam todas com o valor que tinham em Δ_n. Ora o factor complementar de $-a_{is}$ em $(-1)^n.\Delta_n$ é egual ao de a_{si} em Δ^n, portanto o factor complementar de $-a_{is}$ em Δ_n será $(-1)^n A_{si}$; isto é, o factor reciproco de a_{is} será

$$(-1)^{n-1}.A_{si}.$$

24. Em determinantes symétricos os factores complementares de menores conjugados são eguaes. Demonstra-se como a primeira parte do n.° anterior.

Num determinante hemisymétrico de ordem n, sejam δ e δ' dois menores conjugados de ordem p, e α e α' os seus factores complementares. Pela mudança das linhas em columnas e d'estas naquellas, leve-se δ ao logar de δ' e reciprocamente; mudando depois os signaes de todos os elementos, Δ_n torna-se em $(-1)^n \cdot \Delta_n$ e δ em $(-1)^p \cdot \delta$. Ora o factor complementar de $(-1)^p \cdot \delta$ em $(-1)^n \Delta_n$ será o mesmo que o de δ' em Δ_n, ou α'; logo o recíproco de δ em Δ_n será

$$\alpha = (-1)^{n-p} \cdot \alpha' ,$$

e α e α' serão eguaes, do mesmo ou differente signal conforme os graus n e p forem ou não da mesma paridade.

CAPÍTULO IV.

Desenvolvimento do determinante pelos seus menores.

25. Em cada termo d'um determinante entra um só elemento de cada linha e um só de cada columna; assim, convirá effectuar o desenvolvimento, ordenando Δ_n em relação aos elementos de uma fila. Vimos (*n.° 20*) como se determina o factor complementar de cada elemento; assim teremos para a linha i

$$\Delta_n = A_{i1} a_{i1} + A_{i2} a_{i2} + \cdots + A_{in} a_{in} ,$$

e para a columna s

$$\Delta_n = A_{1s} a_{1s} + A_{2s} a_{2s} + \cdots + A_{ns} a_{ns} .$$

Os factores A_{is}, com o signal implícito, são determinantes de ordem $n-1$, que pelo mesmo modo se fariam depender de outros de ordem $n-2$, como estes se resolveriam noutros de ordem $n-3$ e assim por deante.

26. Considerando mais particularmente o determinante da 3.ª ordem, teremos pelo processo do n.º 20

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

A estas relações pode dar-se a forma

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 \\
&= B_1 b_1 + B_2 b_2 + B_3 b_3 = A_2 a_2 + B_2 b_2 + C_2 c_2 \qquad (7) \\
&= C_1 c_1 + C_2 c_2 + C_3 c_3 = A_3 a_3 + B_3 b_3 + C_3 c_3
\end{aligned}$$

sendo

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad (8)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Pelo processo do n.° **21**, todos os termos se tomariam com o signal + porque $3 - 1$ é par; desenvolvendo, por exemplo, em ordem aos elementos da segunda columna teriamos

$$\Delta_3 = b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

que é a segunda das expressões precedentes, attendendo ás permutações de linhas e columnas.

27. Se nos desenvolvimentos do n.° **25** substituirmos os elementos a_{i1}, a_{1s}, etc. pelos de outra fila parallela, o resultado será egual a zero; ou

$$A_{i1}\,a_{k1} + A_{i2}\,a_{k2} + \cdots + A_{in}\,a_{kn} = 0 \ ,$$

$$A_{1s}\,a_{1t} + A_{2s}\,a_{2t} + \cdots + A_{ns}\,a_{nt} = 0 \ ,$$

para todos os valores de k ou de t desde 1 até n, com excepção de $k = i$ e de $t = s$. Com effeito, os primeiros membros d'estas fórmulas são, respectivamente, o desenvolvimento d'um determinante em que são eguaes as linhas de ordem i e k ou as columnas de ordem s e t.

D'este modo obteremos nos determinantes de 3.ª ordem doze relações, que resultam de trocar em cada uma das seis fórmulas (7) os elementos a_1, b_1, etc. pelos das outras duas filas parallelas. Estas relações são:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3=0\ , & A_1c_1+A_2c_2+A_3c_3=0\ ; \\ B_1a_1+B_2a_2+B_3a_3=0\ , & B_1c_1+B_2c_2+B_3c_3=0\ ; \\ C_1a_1+C_2a_2+C_3a_3=0\ , & C_1b_1+C_2b_2+C_3b_3=0\ ; \\ A_1a_2+B_1b_2+C_1c_2=0\ , & A_1a_3+B_1b_3+C_1c_3=0\ ; \\ A_2a_1+B_2b_1+C_2c_1=0\ , & A_2a_3+B_2b_3+C_2c_3=0\ ; \\ A_3a_1+B_3b_1+C_3c_1=0\ , & A_3a_2+B_3b_2+C_3c_2=0\ . \end{array}\right\} \quad (9)$$

28. Se um determinante fôr nullo, haverá a mesma relação linear homogénea entre todos os elementos de cada linha ou columna.

Seja o determinante de 3.ª ordem $\Sigma \pm a_1b_2c_3$. Se elle fôr nullo, teremos por esta hypóthese e pelas fórmulas (7) e (9)

$$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3=\triangle_3=0\ ,$$
$$A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3=0\ ,$$
$$A_1c_1+A_2c_2+A_3c_3=0\ ,$$

ou

$$A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1=\triangle_3=0\ ,$$
$$A_1a_2+B_1b_2+C_1c_2=0\ ,$$
$$A_1a_3+B_1b_3+C_1c_3=0\ .$$

Reciprocamente, se existir a mesma relação linear homogénea entre os elementos de cada linha ou columna, o determinante será egual a zero. Seja

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = 0 ,$$

$$\delta_1 b_1 + \delta_2 b_2 + \delta_3 b_3 = 0 ,$$

$$\delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3 = 0 ;$$

multiplicando estas egualdades respectivamente por A_1, B_1, C_1 e sommando os productos, teremos

$$\delta_1(A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1) + \delta_2 (A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2) + \delta_3 (A_1 a_3 + B_1 b_3 + C_1 c_3) = 0 .$$

Ora os dois ultimos termos são nullos (9); logo, se δ_1 é differente de zero, será

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 = \Delta_3 = 0 .$$

29. Quando todos os elementos d'uma fila são nullos, o determinante é egual a zero; porque, deesenvolvendo-o segundo os elementos d'essa fila, todos os termos do desenvolvimento tem zero por factor.

Quando são nullos todos os elementos d'uma fila com excepção d'um, o grau do determinante abaixa-se d'uma unidade. Assim

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Inversamente, podemos escrever um determinante sob a forma d'outro determinante de grau mais elevado, accrescentando successivamente ao proposto linhas e columnas em numero egual, e taes que em cada um dos systemas accrescentados o elemento commum seja $+1$ ou -1 conforme o numero d'ordem das filas, e que numa d'estas os restantes elementos sejam zeros podendo os da outra ser quaesquer.

Assim

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ * & a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ * & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{vmatrix}$$

Os asteriscos podem ser substituidos por elementos quaesquer, que não influirão no valor do determinante.

30. Quando são nullos todos os elementos situados do mesmo lado da primeira diagonal, o determinante reduz-se ao termo principal:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4 \,.$$

Quando são nullos todos os elementos situados do mesmo lado da segunda diagonal, o determinante d'ordem n reduz-se ao producto dos elementos d'esta diagonal, com o mesmo ou differente signal conforme o maior numero par contido em n é dupla ou simplesmente par.

31. O determinante pode tambem desenvolver-se em menores d'outras classes.

Viu-se (*n.*° 22) que o producto dos dois menores $\Delta_n^{(p)}$ e

$\triangle_n^{(n-p)}$ pertence ao desenvolvimento de $\triangle_n$, comtanto que se lhe dê o signal + ou — conforme no principal de qualquer dos factores as sommas dos índices dos dois systemas sejam da mesma ou differente paridade, e esses principaes se escrevam sem inversões.

Combinemos p a p em todas as ordens possiveis as n linhas que no quadro do determinante cruzam as p columnas de $\triangle_n^{(p)}$ e formemos os correspondentes

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

menores distinctos d'ordem p, que se conteem nas mesmas p columnas; multipliquemos cada um d'estes menores pelo seu complementar, com o signal conveniente. A somma algébrica dos productos será identicamente $\triangle_n$.

Com effeito, os termos, em que se resolvem estes productos, pertencem ao determinante proposto, são distinctos e teem o mesmo signal com que entram em $\triangle_n$; por outra parte o seu numero é

$$p!\,\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\,.(n-p)!=n!$$

sem reducções; e este é tambem o numero de termos do determinante d'ordem n.

Egual raciocinio se applicaria ao desenvolvimento do determinante segundo os menores contidos nas p linhas de $\triangle_n^{(p)}$.

32. A proposição do n.° 31 tem principal applicação no desenvolvimento segundo os menores contidos em duas filas parallelas, porquanto os determinantes de 2.ª ordem se resolvem immediatamente nos seus elementos.

D'este modo teremos, para as duas primeiras columnas,

$$\Delta^n = B_{12}(a_{11}\,a_{22}) + B_{13}(a_{11}\,a_{32}) + \cdots$$
$$+ B_{1n}(a_{11}\,a_{n2}) + \cdots + B_{n-1,\,n}(a_{n-1,\,1}\,a_{n,\,2}) \,,$$

onde se tomará B_{12} com o signal $+$, B_{13} com o signal $-$, etc.; mas os signaes não serão sempre alternados, e o último termo deve tomar-se com o signal $+$.

Em geral é sempre positivo o factor complementar do menor de 2.ª ordem contido em filas consecutivas duas a duas; porque, se este menor fôr

$$\Sigma \pm a_{is}\,a_{i+1,\,s+1} \,,$$

o signal do factor complementar será dado (*n.*° 22) pelo coefficiente

$$(-1)^{i+s+i+1+s+1} = (-1)^{2(i+s+1)} = +1 \,.$$

Esta forma de desenvolvimento é sobretudo util, quando o determinante proposto é de 4.ª ordem, porque assim se resolve immediatamente em determinantes de 2.ª ordem.

Observaremos tambem que os factores complementares dos menores contidos nas duas primeiras e nas duas últimas linhas de duas columnas quaesquer devem ter ambos o mesmo signal. Com effeito, se os numeros d'ordem d'estas duas columnas são s e $s+s'$, os menores de que se trata serão

$$\Sigma \pm a_{1s}\,a_{2,\,s+s'} \,, \quad \Sigma \pm a_{n-1,\,s}\,a_{n,\,s+s'} \,;$$

e a somma dos índices no último é egual á somma dos índices no primeiro accrescentada com o numero par $2(n-2)$.

33. Um determinante Δ_n pode elevar-se directamente á ordem $n+p=m$ pelo seguinte processo.

Forma-se um determinante R de ordem p e egual á unidade, o que pode obter-se de muitos modos; o mais simples será suppôr egual a 1 cada elemento principal d'este determinante e nullos todos os que ficam para o mesmo lado da primeira diagonal, sendo os outros arbitrarios.

Assim, teremos

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ * & 1 & 0 & . & . & 0 \\ * & * & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ * & * & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Colloca-se depois a primeira diagonal de R em seguimento da primeira diagonal do determinante proposto; e finalmente completa-se o quadro, preenchendo as linhas, ou as columnas, d'um dos determinantes com zeros e as columnas ou as linhas, do outro com elementos quaesquer, do modo seguinte:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & . & l_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_2 & b_2 & . & l_2 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & . & l_n & 0 & 0 & . & 0 \\ * & * & . & * & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ * & * & . & * & * & * & . & 1 \end{vmatrix} .$$

Com effeito, este determinante, desenvolvido nos menores de ordem n contidos nas n primeiras columnas, reduz-se ao primeiro termo

$$R \times \Delta_n = \Delta_n ,$$

porque em cada um dos termos restantes entra como factor um determinante com uma linha de zeros.

Cor. 1. Se num determinante de ordem m *forem nullos os elementos communs ás* n *primeiras linhas e ás* m — n *últimas columnas, o proposto reduz-se ao producto d'um determinante de ordem* n *por outro de ordem* m — n.

Cor. 2. Se forem nullos os elementos communs ás n *primeiras linhas e ás últimas* m — n + 1 *columnas d'um determinante de ordem* m, *este determinante será egual a zero.* Porque num dos dois factores do *Cor. 1* haverá uma linha de zeros.

Cor. 3. Se num determinante de ordem $m = 2n$, dividido em quatro de ordem n por uma mediana horizontal e outra vertical, forem nullos todos os elementos communs ás primeiras n linhas e ás últimas n columnas, ou ás primeiras n columnas e ás últimas n linhas, o proposto reduz-se ao producto dos dois determinantes parciaes, adjacentes ao que é composto de zeros.

Cor. 4. O producto de dois determinantes de ordem p e q pode sempre representar-se por um determinante de ordem $p + q$, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & * & * \\ c_2 & d_2 & e_2 & * & * \\ c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Se os determinantes dados fossem ambos de ordem n, o seu producto seria representado por um determinante de ordem $2n$.

34. O determinante pode tambem desenvolver-se segundo os elementos de duas filas orthogonaes.

No desenvolvimento de

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1s} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2s} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & a_{is} & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{ns} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pelos elementos das duas filas que se cruzam em a_{is}, haverá um grupo de termos $A_{is}\, a_{is}$ *(n.º 20)* que teem por factor aquelle elemento. Designamos por A_{is}, com o signal implícito, o primeiro menor do proposto em ordem a a_{is}; nos elementos d'este menor ha todos os índices, menos i nos do primeiro systema e s nos do segundo.

No resto do desenvolvimento pedido, os termos são todos da forma $Ka_{ps} \cdot a_{it}$: sendo a_{ps} qualquer elemento da columna s, menos a_{is}, de modo que p pode ter qualquer valor desde 1 até n, menos i; e a_{it}, qualquer elemento da linha i, menos o mesmo a_{is}, de modo que t pode ser qualquer numero desde 1 até n, menos s.

Ora, em Δ_n os coefficientes de $a_{pt}\, a_{is}$ e $a_{ps}\, a_{it}$ são eguaes e de signal contrário, pela troca dos índices superiores (*Theor. de Bezout*). Mas o producto $a_{pt}\, a_{is}$ só se encontra em $A_{is}\, a_{is}$; logo o coefficiente K é, com signal contrário, egual ao coefficiente de a_{pt} em A_{is}, isto é, ao primeiro menor B_{pt} d'este determinante A_{is} em ordem áquelle elemento a_{pt}. Esse menor B_{pt} é o segundo menor que resulta do proposto pela suppressão das linhas i e p e das columnas s e t.

Dando successivamente a p e a t todos os valores que podem competir a cada um d'estes índices, e representando por Σ a somma algébrica dos resultados, será finalmente

$$\Delta_n = A_{is}\, a_{is} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{ps}\, a_{it}\,.$$

Se as duas filas consideradas se cruzarem na primeira diagonal, em a^{ii}, será

$$\Delta_n = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{pi}\, a_{it} \,.$$

Se o determinante fôr symétrico, A_{ii} tambem o será; e como neste caso é $a_{pi} = a_{ip}$, a fórmula anterior torna-se em

$$\Delta_n = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma\, B_{pt}\, a_{ip}\, a_{it} \,.$$

Mas como é tambem $B_{pt} = B_{tp}$, a expressão $B_{tp}\, a_{ip}\, a_{it}$ não muda de valor quando se trocam p em t e t em p; portanto os termos correspondentes a valores deseguaes d'estes índices são eguaes dois a dois.

Supponhamos, por exemplo, que se quer desenvolver o determinante symétrico

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} ,$$

em ordem aos productos dos elementos da primeira linha pelos da primeira columna. Neste caso é $i = 1$ e $a_{11} = 0$; teremos pois

$$\begin{aligned} \Delta = & - a_{12}\,(a_{12} \,.\, B_{22} + a_{13} \,.\, B_{23} + a_{14} \,.\, B_{24}) \\ & - a_{13}\,(a_{12} \,.\, B_{32} + a_{13} \,.\, B_{33} + a_{14} \,.\, B_{34}) \\ & - a_{14}\,(a_{12} \,.\, B_{42} + a_{13} \,.\, B_{43} + a_{14} \,.\, B_{44}) \;; \end{aligned}$$

mas é $B_{23} = B_{32}$, $B_{24} = B_{42}$ e $B_{34} = B_{43}$: portanto será

$$\begin{aligned} \Delta = & - (a_{12})^2 \,.\, B_{22} - (a_{13})^2 \,.\, B_{33} - (a_{14})^2 \,.\, B_{44} \\ & - 2\, a_{12} \,.\, a_{13} \,.\, B_{23} - 2\, a_{12} \,.\, a_{14} \,.\, B_{24} - 2\, a_{13} \,.\, a_{14} \,.\, B_{34} \,. \end{aligned}$$

Os segundos menores B calculam-se pelo primeiro $A_{11} = (a_{22}\, a_{33}\, a_{44})$, que tem o signal + no desenvolvimento procurado; e assim é

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -(a_{32}\, a_{44} - a_{42}\, a_{34}) \ ,$$

por exemplo. Formando do mesmo modo os restantes B e substituindo os elementos symbólicos pelos valores que lhes correspondem no quadro do determinante dado, achariamos,

$$a_{23} = c_1 \ , \quad B_{23} = a_1 b_1 \ , \quad \text{etc.}$$

Do mesmo modo, para desenvolver

$$\triangle_4 = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44})$$

pelos elementos da segunda linha e terceira columna, faremos na fórmula geral $i = 2$, $s = 3$; daremos primeiro a p o valor 1 com $t = 1, 2, 4$, e depois successivamente o valor 3 e 4 com os mesmos de t. Acharemos assim

$$\begin{aligned} \triangle = A_{23}\, a_{23} - a_{13}\,(B_{11}\, a_{21} + B_{12}\, a_{22} + B_{14}\, a_{24}) \\ - a_{33}\,(B_{31}\, a_{21} + B_{32}\, a_{22} + B_{34}\, a_{24}) \\ - a_{43}\,(B_{41}\, a_{21} + B_{42}\, a_{22} + B_{44}\, a_{24}) \ . \end{aligned}$$

Substituem-se depois os B e A_{23} pelas suas expressões, que são:

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \ ,$$

$$B_{11} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{12} = +\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{14} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

$$B_{31} = +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad B_{34} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

$$B_{41} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad B_{42} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad B_{44} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim se faz depender o calculo do determinante de 4.ª ordem d'um da 3.ª e de nove da 2.ª, contendo o desenvolvimento final $3! + 9 . 2 = 24$ termos, como deve ser.

Este méthodo é sobre tudo vantajoso quando $a_{is} = 0$, porque faz depender o determinante de ordem n sómente de outros de ordem $n-2$; e é principalmente usado para os determinantes symétricos, que já considerámos, e ainda quando o primeiro elemento é zero e os outros da primeira linha são eguaes aos que lhe correspondem na primeira columna.

Exercícios

9. Achar o coefficiente de a_{11} em $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55}$.

10.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (15 - 16) - 2(10 - 12) + 3(8 - 9) = 0.$$

11.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$= 1 + c^2 + a(a - bc) + b(ac + b)$$
$$= 1 + a^2 + b^2 + c^2 .$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 .$$

13. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2.4(3 + 2) - 3(-4) - 2(1 - 12) = -4 .$$

14. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & 6 & a & y \\ 0 & 2 & c & b & x \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 36; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -112 .$$

15. $$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix} .$$

16. Demonstrar a egualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ ou } = 0.$$

17. Achar o mesmo resultado para o determinante cujos elementos são todos zero, com excepção de $a_{p,\,p-1} = 1$, $a_{q,\,q+r} = -1$, fazendo successivamente $p = 2, 3, \ldots n$ e $q = 1, 2, \ldots n - r$.

18. Em $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55}$ achar o factor de $\Sigma \pm a_{23}\, a_{35}$.

19. Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix} = -(a_2 c_3) \begin{vmatrix} b_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix}.$$

20. Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

21. Desenvolver o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & b_6 & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

22. Desenvolver em ordem aos elementos da primeira linha e da primeira columna o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & a & b \\ -y & c & 0 & d \\ -z & e & f & 0 \end{vmatrix} = dfx^2 + bey^2 + acz^2 - xy(bf + de) - xz(ad + cf) - yz(bc + ae).$$

23. Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} = x^3 - x\,(ac + be + df) + ade + bcf\,.$$

24. Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + x^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + (af - be + cd)^2$$

CAPÍTULO V.

Addição das linhas.

35. Desenvolvendo pelos elementos da primeira columna o determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n + \alpha_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix},$$

acha-se (*n.*° *25*) a expressão

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a_1 + \alpha_1)\,A_{11} + (a_2 + \alpha_2)\,A_{21} + \cdots + (a_n + \alpha_n)\,A_{n1} \\ &= (a_1\,A_{11} + a_2\,A_{21} + \cdots + a_n\,A_{n1}) \\ &\quad + (\alpha_1\,A_{11} + \alpha_2\,A_{21} + \cdots + \alpha_n\,A_{n1})\,; \end{aligned}$$

d'onde se conclue que é

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Por conseguinte: 1.° Quando os elementos de uma fila forem binomios, o determinante de ordem n decompõe-se na somma de outros dois; a fila, correspondente áquella de que se trata, é composta em um dos determinantes parciaes pelos primeiros termos, e no outro pelos segundos termos d'aquelles binomios; as restantes $n-1$ filas parallelas são communs a estes dois determinantes e ao proposto.

2.° Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ mudarem de signal, o proposto será a differença dos dois determinantes que estão no segundo membro de (10).

3.° Reciprocamente, a somma ou differença de dois determinantes da mesma ordem, que, só differem em uma columna ou linha, será um determinante da ordem dos propostos, com as mesmas $n-1$ columnas ou linhas communs a ambos e a outra formada pelas sommas ou differenças ordenadas dos elementos differentes.

Pelo principio contido na equação (10) se mostra que os determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & a \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix}$$

são eguaes e de signaes contrarios; com effeito, o segundo é egual a

$$\begin{vmatrix} a & a & b \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{vmatrix},$$

e a somma d'este determinante com o primeiro dos propostos é

$$\begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

36. Se forem binomios os elementos de mais de uma columna, decompõe-se primeiro o determinante proposto em dois, considerando monomios os elementos de todas as columnas menos uma; depois decompõe-se cada um d'estes em outros dois pela mesma maneira, e assim por deante. O numero final de parcellas será 2^m, sendo m o numero de columnas em que se verifica a hypóthese.

Seja, por exemplo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 + \beta_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 + \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + \beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 + \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 + \beta_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

decompondo cada um dos determinantes que estão no 2.º membro, acha-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

37. Os elementos α_1, β_1, etc. são quaesquer, e alguns podem ser zero. Se fôr, por exemplo,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1+x & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix}$$

acha-se primeiro

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2+x & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} b_2+x & c_2 \\ b_3 & c_3+x \end{vmatrix};$$

e proseguindo pelo mesmo estylo teriamos finalmente

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\} + x^2(a_1+b_2+c_3)+x_3 .$$

Applicando esta forma de desenvolvimento ao determinante symétrico

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{A}-s & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}'-\mathrm{S} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}''-s \end{vmatrix},$$

acha-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} - (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)\, s + (A + A' + A'')\, s^2 - s^3 , \qquad (12)$$

fazendo $AA' - B''^2 = \partial_1$, $AA'' - B'^2 = \partial_2$ e $A'A'' - B^2 = \partial_3$.

38. Se em (10) fôr

$$\alpha_1 = pc_1 , \quad \alpha_2 = pc_2 , \quad \ldots \quad \alpha_n = pc_n ,$$

o segundo determinante do 2.º membro será egual a zero *(n.º 17, cor.)*, e teremos

$$\begin{vmatrix} a_1 + pc_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 + pc_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n + pc_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & . \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & . \end{vmatrix} .$$

Semelhantemente, se os elementos da primeira columna forem compostos de mais termos proporcionaes aos elementos de outras columnas, o determinante subsistirá o mesmo. E como esta proposição pode applicar-se a qualquer outra fila, concluiremos que:

1.º Um determinante não se altera quando juntamos ordenadamente aos elementos de uma fila os de outras filas parallelas, respectivamente multiplicados por factores constantes, positivos ou negativos.

Se além das relações precedentes fôr tambem

$$a_1 = kb_1 , \quad a_2 = kb_2 , \quad a_n = kb_n ,$$

os dois determinantes do segundo membro de (10) são eguaes a zero, e portanto o proposto egualmente o será. Logo:

2.º *Quando os elementos de uma linha, ou columna, são eguaes á somma dos productos dos elementos correspondentes de duas ou mais linhas, ou columnas, multiplicados respectivamente por factores constantes, positivos ou negativos, o determinante é egual a zero.*

Applicações: 1.ª O determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

é egual a zero. Com effeito, juntando a segunda columna á terceira, vem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

2.ª Quaesquer que sejam x, y, z, será sempre

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & x & y \\ -\alpha & -\beta & \gamma & z \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & \delta \end{vmatrix} = 2^3\alpha\beta\gamma\delta ;$$

porque, juntando a primeira linha a cada uma das seguintes, vem

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 2\beta & x+\gamma & y+\delta \\ 0 & 0 & 2\gamma & z+\delta \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta \end{vmatrix} = \alpha \,.\, 2\beta \,.\, 2\gamma \,.\, 2\delta \,.$$

Em geral, o determinante de ordem n, em que a primeira linha e a primeira diagonal são identicas e em cada columna o respectivo elemento principal se repete até ao fim com signal trocado, reduz-se ao producto do termo principal por 2^{n-1}.

39. *Theorema.* — Se fôr o determinante $\Delta_4 = (a_1 b_2 c_3 d_4) = 0$, e simultaneamente os menores

$$A_1 = 0 \;,\quad A_3 = 0 \;,\quad A_4 = 0 \;:$$

será tembem $A_2 = 0$, se algum dos elementos da segunda linha fôr differente de zero.

Se fôr a_2 differente de zero, a proposição resulta evidentemente da egualdade

$$\Delta_4 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 = 0 \,.$$

Se fôr $a_2 = 0$, supponhamos que é, por exemplo, b_2 differente de zero. Sommando a 2.ª columna com a 1.ª, teremos (n.º 38, 1.º)

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 + b_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

e desenvolvendo depois pela primeira columna, vem

$$\Delta_4 = (a_1 + b_1) A_1 + (a_2 + b_2) A_2 + (a_3 + b_3) A_3 + (a_4 + b_4) A_4 = 0$$

ou $\Delta_4 = b_2 A_2 = 0$ e portanto $A_2 = 0$. É evidente a generalisação d'este principio.

40. O principio da addição das linhas emprega-se com vantagem no cálculo dos determinantes, abaixando successivamente uma unidade á ordem do proposto; mas convirá primeiro simplificar este determinante, dividindo *(n.º 13)* os elementos de cada linha, ou columna, pelo seu maior divisor commum.

Basta um exemplo, para se ficar conhecendo o processo que deve seguir-se. Seja

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \times \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix},$$

onde o segundo determinante se obtém dividindo por 4 e 5, respectivamente, a 1.ª columna e a 2.ª linha do proposto. Subtrahindo da 1.ª, 3.ª e 4.ª linha a 2.ª multiplicada ordenadamente por 3, 5 e 7, resulta *(n.ºs 25 e 38, 1.º)*

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix};$$

e continuando pela mesma maneira, achariamos $\Delta = -20$.

Como se vê, todos os elementos d'uma columna se reduziram a zero, menos um que é a unidade. Em geral, reduzem-se primeiro á unidade todos os elementos significativos d'uma linha, ou columna *(n.º 19)*, e depois a zero todos os elementos da mesma fila menos um *(n.º 38, 1.º)*.

41. Consideremos ainda o determinante de ordem $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 3 & 3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & n & {}^2C_n & . & . & 0 \\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & . & n+1 \end{vmatrix},$$

em que os elementos da linha de ordem r são os coefficientes, menos o último, da potencia r do binomio, completando-se a mesma linha com zeros. Será portanto *(n.º 30)* $\Delta = (n+1)!$

Multiplicando a última columna por x^n e juntando-lhe as antecedentes respectivamente multiplicadas por $x^0, x^1, x^2, \ldots x^{n-1}$, acha-se *(n.os 13 e 38, 1.º)*

$$x^n \,.\, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & (x+1)-x \\ 1 & 2 & 0 & . & (x+1)^2-x^2 \\ 1 & 3 & 3 & . & (x+1)^3-x^3 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & (x+1)^{n+1}-x^{n+1} \end{vmatrix}$$

e o novo determinante resolve-se pela última columna na differença de dois, que podemos representar por $f(x+1)$ e $f(x)$ porque elles se compõem da mesma maneira com $x+1$ e x.

Teremos pois, segundo o valor de $\triangle$,

$$f(x+1)-f(x)=(n+1)!\,x^n\;;$$

e mudando successivamente x em $x-1$, acha-se

$$\begin{aligned} f(x)-f(x-1) &= (n+1)!\,(x-1)^n\,, \\ f(x-1)-f(x-2) &= (n+1)!\,(x-2)^n\,, \\ \cdot\qquad\quad \cdot & \qquad\quad \cdot \\ f(2)-f(1) &= (n+1)!\times 1^n\,. \end{aligned}$$

Sommando estas egualdades com a precedente, reduzindo, fazendo $1^n+2^n+3^n+\ldots+x^n=S_n$, e notando que segundo a forma de $f(x)$ é $f(1)=0$ e que na última columna de $f(x+1)$ ha o factor commum $x+1$, resulta finalmente

$$S_n=\frac{x+1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & . & 0 & x+1 \\ 1 & 3 & 3 & . & 0 & (x+1)^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & n+1 & {}^2C_{n+1} & . & {}^2C_{n+1} & (x+1)^n \end{vmatrix}.$$

Para $n=1$, vem

$$1+2+\cdots+x=\frac{x+1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}=\frac{x(x+1)}{2}\,,$$

como já era sabido.

Para $n=2$, acha-se do mesmo modo

$$S_2=\frac{x+1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & (x+1)^2 \end{vmatrix}.$$

ou, desenvolvendo pela 1.ª linha,

$$S_2=\frac{x+1}{3!}\left\{(x+1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & x+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\};$$

e desta expressão resulta

$$1^2+2^2+\cdots+x^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Para $n=3$, teriamos tambem, desenvolvendo o determinante pela 1.ª linha,

$$S_3=\frac{(x+1)^2}{4!}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 3 & x+1\\ 4 & 6 & (x+1)^2\end{vmatrix},$$

porque o menor recíproco do último elemento d'aquella linha é

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=0;$$

o último d'estes determinantes forma-se do primeiro, subtrahindo a 1.ª linha da 2.ª e esta da 3.ª.

Desenvolvendo S_3 pela 1.ª linha e continuando o cálculo, achava-se por último

$$S_3=\frac{x^2(x+1)^2}{2^2};$$

donde, comparando com S_1, resulta

$$(1+2+\cdots+x)^2=1^3+2^3+\cdots+x^3.$$

Exercicios.

25. Mostrar que é egual a 1 o determinante *(numeros figurados)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & . & n-1 & n \\ 1 & 3 & 6 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} .$$

26. Mostrar que é zero o determinante cujos elementos são os primeiros n^2 numeros inteiros, dispostos de modo que a somma dos elementos de cada linha ou columna é constante *(quadrado mágico)*. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 & 1 & 13 \\ 10 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 7 & 14 & 2 \\ 5 & 9 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 .$$

27. Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = (a+b-c)(a-b-c) - 2b(a+c-b) .$$

28. Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} ax+b & e \\ cx+d & f \end{vmatrix} = 0$$

29. Desenvolver

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 . \begin{vmatrix} x^2 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 (x^2 - a^2 - b^2 - c^2) .$$

30. Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c) \times (x+b-c-a)(x+c-a-b) \,,$$

que se torna, para $x=0$, em $-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

CAPÍTULO VI.

Producto de determinantes da mesma ordem.

42. O producto de dois determinantes da mesma ordem pode ser expresso por um determinante da ordem de cada um dos factores.

Sejam, com effeito, os determinantes de 3.ª ordem

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \,, \quad Q = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \,;$$

designando o seu producto por $R = P \times Q$, será *(n.º 33, cor. 4)*

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & * & * & * \\ a_2 & b_2 & c_2 & * & * & * \\ a_3 & b_3 & c_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \,.$$

Substitua-se neste quadro ó determinante de 3^2 elementos arbitrarios por

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 ;$$

junte-se respectivamente a cada uma das tres primeiras columnas de R a somma dos productos das tres últimas por a_1, a_2, a_3, por b_1, b_2, b_3 e por c_1, c_2, c_3.

O determinante R conserva o seu valor *(n.º 38, 1.º)* e toma a forma

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_1 & l_1 & m_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} ,$$

sendo

$$k_1 = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 , \quad k_2 = a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 ,$$

$$k_3 = a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 ,$$

l_1, l_2, l_3 estas mesmas expressões com a mudança de a em b, finalmente m_1, m_2, m_3 ainda as mesmas expressões com a mudança de a em c.

Posto isto, pela troca das diagonaes R torna-se *(n.º 18)* em $R' = (-1) . R$. Mas, designando por R_1 o determinante dos 3^2

elementos $k_1, l_1, \ldots m_3$, será tambem *(n.º 33, cor. 4)* $R' = S.R_1 = (-1)^3.R_1$.

Logo é $R = R_1$, ou

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 + a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 + b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 + c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 + a_2\beta_3 + a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3 + b_2\beta_3 + b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3 + c_2\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Este resultado é geral. Se os factores P e Q são de ordem n, é $S = (-1)^n$, o producto R é de ordem $2n$ *(n.º 33, cor. 4)*, e *(n.º 3)* o numero de inversões da 2.ª diagonal de R é $n(2n-1)$. Mas este numero é da mesma paridade de n; e portanto viria ainda $(-1)^n.R = (-1)^n.R_1$, e $R = R_1$.

Logo, *o producto de dois determinantes de ordem* n *é um determinante da mesma ordem, cujos elementos são as sommas dos productos que se obteem multiplicando todos os elementos de cada columna d'um dos factores pelos elementos correspondentes de todas as linhas do outro factor.*

13. Pode verificar-se o resultado (13), decompondo o 2.º membro em determinantes de elementos monomios. Com effeito, fazendo a decomposição pela primeira columna sómente, veem tres determinantes com a primeira columna de elementos monomios e as outras duas de elementos trinomios. Cada um d'estes, decomposto pela segunda columna, daria outros tres, ao todo nove, com elementos trinomios na terceira columna sómente. Cada um d'estes nove daria ainda tres, ao todo vinte e sete, com todos os elementos monomios.

Entre estes vinte e sete determinantes ha seis, como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 & c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 & c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3 & b_2\beta_3 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

que teem por factor commum o determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = Q \, .$$

Os restantes, como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\alpha_1 & c_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_1\alpha_2 & c_2\beta_2 \\ a_1\alpha_3 & b_1\alpha_3 & c_2\beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\alpha_1 & c_1\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & b_1\alpha_2 & c_1\alpha_2 \\ a_1\alpha_3 & b_1\alpha_3 & c_1\alpha_3 \end{vmatrix},$$

são nullos por terem, pelo menos, duas columnas compostas de elementos proporcionaes *(n.º 38, 2.º)*. Assim pode-se escrever

$$R_1 = Q \times T \, ,$$

representando por T um factor que só depende dos elementos do determinante P.

Designando por R' o valor que toma R_1 quando em Q cada um dos elementos principaes é a unidade e cada um dos restantes é zero, a relação precedente torna-se em $R' = T$, visto que T é independente dos elementos de Q e que naquella hypóthese é $Q=1$; simultaneamente é $R'=P$: donde se conclue que será $T=P$, e portanto $R_1=P\times Q$.

44. Do principio do n.° 15 resulta que o producto de dois determinantes do mesmo grau é susceptivel de quatro formas, que se obteem combinando:

1.° Os elementos de cada linha de P com os de todas as linhas de Q;

2.° Os elementos de cada linha de P com os de todas as columnas de Q;

3.° Os elementos de cada columna de P com os de todas as linhas de Q;

4.° Os elementos de cada columna de P com os de todas as columnas de Q.

Se os factores são do segundo grau, estas quatro formas são

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

Do mesmo modo se achariam sem difficuldade as quatro formas do producto de dois determinantes de 3.ª ordem.

45. Para formar o quadrado d'um determinante applica-se a regra precedente á multiplicação de dois determinantes eguaes.

Assim, com a multiplicação por linhas achava-se

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

que é um determinante symétrico de 3.ª ordem. Do mesmo modo se veria que o quadrado d'um determinante de ordem n é um determinante symétrico de ordem n.

Fazendo nas últimas fórmulas do n.º anterior

$$a_1 = \alpha_1, \quad a_2 = \alpha_2, \quad b_1 = \beta_1, \quad b_2 = \beta_2,$$

teremos as tres formas do quadrado do determinante de 2.ª ordem, a saber:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2b_1 & a_1b_1 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + a_2b_2 & a_2b_1 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix} .$$

A última d'aquellas fórmulas dava o mesmo resultado que a primeira.

Desenvolvendo os determinantes na segunda das expressões precedentes, acha-se a relação

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right) \\ &= \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2 + \left(a_1a_2 + b_1b_2\right)^2 . \end{aligned} \tag{15}$$

16. Sendo eguaes a 1 todos os elementos da 1.ª linha ou da 1.ª columna, simplifica-se a notação do determinante, supprimindo essa fila e escrevendo só, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

em vez de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

Desenvolvendo pelos elementos da 1.ª linha, acha-se que este determinante é a somma dos tres

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} ,$$

e por este motivo se chama *múltiplo*. Aquellas parcellas estam ligadas *(n.º 27)* pelas relações

$$a_1(b_1c_2)+b_1(c_1a_2)+c_1(a_1b_2)=0\ ,$$
$$a_2(b_1c_2)+b_2(c_1a_2)+c_2(a_1b_2)=0\ .$$

Applicando a regra da multiplicação a dois determinantes múltiplos da mesma ordem, o resultado é a somma dos productos que resultariam de multiplicar cada termo de um dos factores pelo termo correspondente do outro. Assim, fazendo

$$P=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

o producto será

$$P=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 \end{vmatrix};$$

e desenvolvendo viria

$$\begin{aligned} P=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}& \\ +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.& \end{aligned} \tag{16}$$

Com effeito, decompondo a penúltima expressão de P em determinantes de elementos monomios, uns são como

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_1 \\ a_1\alpha_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix}=0\ ;$$

os outros repartem-se, dois a dois, em grupos da forma

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2 & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_2\alpha_1 \\ b_1\beta_2 & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2) \times (\alpha_1 \beta_2) \,.$$

A regra da multiplicação, applicada a quadros que teem mais linhas do que columnas, produz um determinante egual a zero. Com effeito seria, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

porquanto este resultado representa o producto de dois determinantes, dos quaes um ou ambos teem uma columna de zeros.

Exercícios.

31. Fazendo na penúltima das fórmulas (14)

$$\begin{aligned} a_1 &= a + b\sqrt{-1}\,, & \alpha_1 &= a' + b'\sqrt{-1}\,, \\ a_2 &= c - d\sqrt{-1}\,, & \alpha_2 &= c' + d'\sqrt{-1}\,, \\ b_1 &= -b + b\sqrt{-1}\,, & \beta_1 &= -c' + d'\sqrt{-1}\,, \\ b_2 &= c - d\sqrt{-1}\,, & \beta_2 &= a' + b'\sqrt{-1} \end{aligned}$$

achar a relação

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2)\times(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\
&=(ab'+ba'+cd'+dc')^2+(ac'+bd'-ca'-db')^2\\
&+(aa'-bb'+cc'-dd')^2+(ad'-bc'-cb'+da')^2,
\end{aligned}
$$

na qual se vê que: *o producto de duas sommas de quatro quadrados é tambem a somma de quatro quadrados* (Euler).

32. Achar o desenvolvimento

$$
\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = -(b+c+d-a)(a+c+d-d) \times(a+b+d-c)(a+b+c-d).
$$

33. Formar o producto

$$
\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} Ax+By+C & Ax'+By'+C & Ax''+By''+C \\ A'x+B'y+C' & A'x'+B'y'+C' & A'x''+B'y''+C' \\ A''x+B''y+C'' & A''x'+B''y'+C'' & A''x''+B''y''+C'' \end{vmatrix}.
$$

CAPÍTULO VII.

Determinantes adjunto e de Vandermonde.

47. O determinante, formado com os primeiros menores de outro determinante Δ de ordem n, é tambem de ordem n e chama-se *adjunto* do proposto. Assim Δ e o seu adjunto são dados pelos quadros

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots & L_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots & L_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_n & B_n & \ldots & L_n \end{vmatrix}.$$

Multiplicando estes dois determinantes, acha-se

$$\Delta \times \Delta' =$$

$$\begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + \cdots, & a_1A_2 + b_1B_2 + \cdots, & \cdots & a_1A_n + b_1B_n + \cdots \\ a_2A_1 + b_2B_1 + \cdots, & a_2A_2 + b_2B_2 + \cdots, & \cdots & a_2A_n + b_2B_n + \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nA_1 + b_nB_1 + \cdots, & a_nA_2 + b_nB_2 + \cdots, & \cdots & a_nA_n + b_nB_n + \cdots \end{vmatrix};$$

neste ultimo determinante cada um dos elementos principaes é egual a Δ (*n.° 25*) e todos os mais são eguaes a zero (*n.° 27*); donde se conclue (*n.° 30*) que é $\Delta \times \Delta' = \Delta^n$ e portanto $\Delta' = \Delta^{n-1}$.

48. Ao primeiro menor de Δ', reciproco do elemento A_1, pode dar-se a forma (*n.° 29*)

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots \\ A_3 & B_3 & C_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ A_n & B_n & C_n & \ldots \end{vmatrix};$$

e multiplicando por Δ, vem

$$\Delta \times \mathscr{A}_1 =$$

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_1 A_2 + b_1 B_2 + \cdot, & \cdots & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdots \\ a_2, & a_2 A_2 + b_2 B_2 + \cdots, & \cdots & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdots \\ a_3, & a_3 A_2 + b_3 B_2 + \cdots, & \cdots & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdots \\ . & . & . & . \\ a_n, & a_n A_2 + b_n B_2 + \cdots, & \cdots & a_n A_n + b_n B_n + \cdots \end{vmatrix}.$$

N'este ultimo determinante cada um dos elementos principaes é egual a Δ, com excepção do primeiro a_1; e todos os elementos para o lado superior da primeira diagonal são eguaes a zero: logo é $\Delta \times \mathscr{A}_1 = a_1 \,.\, \Delta^{n-1}$, ou $\mathscr{A}_1 = a_1 \,.\, \Delta^{n-2}$.

O menor complementar de B_1 é do mesmo modo

$$\mathscr{B}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdot\cdot \\ A_3 & B_3 & C_3 & \cdot\cdot \\ . & . & . & \cdot\cdot \\ A_n & B_n & C_n & \cdot\cdot \end{vmatrix},$$

e multiplicando por Δ vem

$$\Delta \times \mathscr{B}_1 =$$

$$\begin{vmatrix} b_1, & a_1 A_2 + b_1 B_2 + \cdots, & . & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdots \\ b_2, & a_2 A_2 + b_2 B_2 + \cdots, & . & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdots \\ b_3, & a_3 A_2 + b_3 B_2 + \cdots, & . & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdot \\ . & . & . & . \\ b_n, & a_n A_2 + b_n B_2 + \cdots, & . & a_n A_n + b_n B_n + \cdot \end{vmatrix}.$$

Cada um dos elementos principaes d'este último determinante é egual a $\triangle$, com excepção do primeiro que é b_1; e todos os elementos para o lado superior da primeira diagonal são eguaes a zero: logo é $\triangle \times \mathscr{B}_1 = -b_1 . \triangle^{n-1}$, ou $\mathscr{B}_1 = -b_1 . \triangle^{n-2}$, com o signal determinado pela posição do elemento B_1. Obtinham-se expressões análogas para cada um dos outros menores de primeira classe do determinante adjunto.

O menor de segunda classe, complementar do menor $(A_1 B_2)$, será do mesmo modo

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & .. \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 & .. \\ . & . & . & . & .. \\ A_n & B_n & C_n & D_n & .. \end{vmatrix};$$

multiplicando K por $\triangle$, acha-se o producto

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & a_1 A_3 + b_1 B_3 + \cdot, & \cdots & a_1 A_n + b_1 B_n + \cdots \\ a_2, & b_2, & a_2 A_3 + b_2 B_3 + \cdots, & \cdots & a_2 A_n + b_2 B_n + \cdots \\ a_3, & b_3, & a_3 A_3 + b_3 B_3 + \cdots, & \cdots & a_3 A_n + b_3 B_n + \cdots \\ . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & a_n A_3 + b_n B_3 + \cdots, & \cdots & a_n A_n + b_n B_n + \cdots \end{vmatrix}.$$

Nas duas primeiras linhas todos os elementos são nullos, com excepção de a_1, b_1, a_2, b_2; portanto o determinante precedente é o producto do menor $(a_1 b_2)$ pelo determinante contido nas últimas $n-2$ linhas e $n-2$ columnas. Este determinante tem cada elemento principal egual a $\triangle$, os que ficam para o lado superior da primeira diagonal nullos, e é portanto egual a $\triangle^{n-2}$; assim, será o producto

$$\triangle \times K = (a_1 \, b_2) \times \triangle^{n-2} \,,$$

e portanto

$$K = (a_1 \, b_2) \, \triangle^{n-3} \,.$$

Outro menor de segunda classe formava-se pela mesma lei, attendendo á regra dos signaes. E em geral: *um menor de classe* $n-p$ *do determinante adjunto é egual ao menor correspondente do determinante primitivo multiplicado pela potencia* $p-1$ *d'este último, com o signal + ou — conforme convier áquelle determinante menor.*

Cor. Se fôr $\triangle = 1$, é tambem o seu adjunto $\triangle' = 1$. Se fôr $\triangle = 0$, $\triangle'$ e os seus menores de qualquer classe são nullos; para os de 2.ª ordem, ou de classe $n-2$, teremos

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \,, \quad A_1C_2 - A_2C_1 = 0 \,, \text{ etc.}$$

$$A_1B_3 - A_3B_1 = 0 \,, \quad A_1C_3 - A_3C_1 = 0 \,, \text{ etc.};$$

donde

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \ldots$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{B_1}{B_3} = \frac{C_1}{C_3} = \ldots$$

A estas relações pode dar-se tambem a forma

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \ldots \,,$$

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2} = \frac{A_3}{C_3} = \ldots \,.$$

Logo: *quando um determinante é egual a zero, os menores de primeira classe relativos aos elementos de duas linhas ou duas columnas são proporcionaes.*

49. No *determinante de Vandermonde* cada columna, ou cada linha, é formada pelas potencias successivas da mesma quantidade, a partir da potencia de grau zero; o de ordem n será

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ a & b & . & l \\ . & . & . & . \\ a^{n-1} & b^{n-1} & . & l^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Quando duas das quantidades $a, b, \ldots l$ são eguaes, é $\Delta = 0$; portanto Δ terá por factor cada uma das differenças distinctas $a-b$, $a-c$, $\ldots$ $k-l$. Ora, se formarmos o producto P d'estas differenças, ou

$$\begin{aligned} P = (a-b)(a-c) & \ldots (a-l) \\ \times (b-c) & \ldots (b-l) \\ & \ldots \\ & \times (k-l), \end{aligned}$$

veremos que Δ é do mesmo grau que P; e portanto este determinante será, em geral, o producto de P por um coefficiente numerico. Por outra parte, o termo principal de Δ entra em P com o coefficiente

$$(-1).(-1)^2 \ldots (-1)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

logo, será $\Delta = \pm P$ conforme seja dupla ou simplesmente par o maior numero par contido em n. D'aqui resulta $\Delta^2 = P^2$; por onde se mostra que o quadrado de Δ é o producto dos quadrados de todas as differenças distinctas das n quantidades dadas.

Formando aquelle quadrado e representando em geral por $S_r = a^r + b^r \ldots + l^r$ a somma das potencias semelhantes dos numeros $a, b, \ldots l$, acha-se

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & . & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & . & S_n \\ . & . & . & . \\ S_{n-1} & S_n & . & S_{2(n-1)} \end{vmatrix}$$

Do mesmo modo se acharia

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ a & b & . & l \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix},$$

formando pelo principio da multiplicação *(n.º 44, 1.º)* o quadrado que está no 1.º membro; mas este quadrado é (16) a somma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \cdots + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & l \end{vmatrix}^2 :$$

logo o menor de 2.ª ordem formado com os primeiros quatro elementos de Δ^2 é

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 + \cdots + (k-l)^2,$$

ou a somma dos quadrados das differenças distinctas das quantidades dadas.

50. *Propriedades dos determinantes.* — As propriedades fundamentaes dos determinantes são, em resumo, as seguintes:

I. Não influe no valor do determinante a conversão das columnas em linhas e das linhas em columnas.

II. Multiplicar uma columna ou linha por um factor m *é multiplicar o determinante por* m*:*

$$|(ma)\,bc| = m\,|abc|\,, \quad |abc| = m\,\left|\left(\frac{a}{m}\right) bc\right|\,.$$

D'aqui resulta $|0\,bc| = 0$, $|(-a)\,bc| = -|abc|$.

III. Pela troca de duas linhas parallelas o determinante muda de signal:

$$|abc| = -|acb| = |cab| = -|cba|\,.$$

IV. Se os elementos de duas linhas parallelas, considerados ordenadamente, são eguaes ou proporcionaes, o determinante é nullo:

$$|abb| = 0\,, \quad |aba| = 0\,, \quad |(ma)\,ba| = 0\,.$$

V. Aos elementos d'uma linha, ou columna, pode-se juntar, sem alterar o valor do determinante, os elementos d'uma ou mais linhas, ou columnas, respectivamente multiplicados por factores constantes:

$$|(a + mb + nc)\,bc| = |abc|\,.$$

VI. Se todos os elementos d'uma linha são polynomios de m *termos, o determinante é a somma de* m *determinantes de elementos monomios:*

$$|(a + a' + a'')\,bc| = |abc| + |a'bc| + a''bc|\,,$$

$$|(a + a')\,(b + b')\,c| = |abc| + |a'bc| + |ab'c| + |a'b'c|\,.$$

VII. O producto de dois determinantes de ordem n *é um determinante da mesma ordem, cujos elementos são as sommas dos productos dos elementos de cada linha do primeiro multiplicados pelos de cada linha do segundo:*

$$|abc| \times |\alpha\beta\gamma| =$$
$$|(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)\ (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2)\ (a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3)|\ .$$

O producto pode ter quatro formas, que resultam da propriedade I.

51. *Propriedades dos menoros* — Continuando a designar por A_{is} o primeiro menor d'um determinante Δ_n, complementar do elemento a_{is} do mesmo determinante, consideremos as expressões

$$a_{i1} A_{t1} + a_{i2} A_{t2} + \cdots + a_{in} A_{tn} = \delta\ ,$$
$$a_{1s} A_{1t} + a_{2s} A_{2t} + \cdots + a_{ns} A_{nt} = \delta'\ ,$$

podendo os inteiros i, s e t ter qualquer valor, desde 1 até n. As propriedades dos primeiros menores são as seguintes:

I. δ *e* δ' *são eguaes ao determinante proposto, quando são respectivamente* $i = t$ *e* $s = t$*;*

II. δ *e* δ' *são eguaes a zero, quando* i *e* s *são differentes de* t.

Exercícios.

34. Deduzir a egualdade

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x + 3a)(x - a)^3\ .$$

e em geral, para a ordem n,

$$\Delta = [x + (n-1)\,a]\,(x-a)^{n-1} \ ;$$

35. A equação

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix} = 0 \,,$$

torna-se primeiro em

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x-a & b-x & 0 & 0 \\ x-a & 0 & c-x & 0 \\ x-a & 0 & 0 & d-x \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

mostrar que ella se reduz finalmente a

$$\begin{aligned} &(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d) - x\,(x-a)\,(x-c)\,(x-d) \\ &\quad - x\,(x-a)\,(x-b)\,(x-d) - x\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c) = 0 \,. \end{aligned}$$

36. Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+x)^3 & (2b+x)^3 & (c+x)^3 \\ (2a+x)^3 & (2b+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Tres raizes são eguaes a zero, e duas são dadas pela equação do 2.º grau

$$(a+b+c)\,x^2 + 3\,(ab+ac+bc)\,x + 6\,abc = 0 \,.$$

CAPÍTULO VIII.

Equações lineares.

52. Lemmas — 1.° Dado um systema de $n+1$ equações do 1.° grau com n incógnitas.

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \cdots + l_1 x_n - p_1 = 0 \, , \\ f_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \cdots + l_2 x_n - p_2 = 0 \, , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n+1} &= a_{n+1} x_1 + b_{n+1} x_2 + \cdots + l_{n+1} x_n - p_{n+1} = 0 \, , \end{aligned} \qquad (i)$$

se entre as funcções f_r houver uma relação linear homogenea

$$f_{n+1} = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \cdots t_n f_n \, , \qquad (ii)$$

o determinante $R_{n+1} = |abc \ldots lp|$ será egual a zero.

Com effeito, de (ii) resulta

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \, , \\ b_{n+1} &= t_1 b_1 + t_2 b_2 + \cdots + t_n b_n \, , \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_{n+1} &= t_1 p_1 + t_2 p_2 + \cdots + t_n p_n \, ; \end{aligned}$$

por onde se vê que a linha $n+1$ de R_{n+1} será a somma das n primeiras linhas d'este mesmo determinante, respectivamente multiplicadas por factores constantes.

2.° Se o systema proposto se compozér de n equações com n incógnitas e se entre os primeiros membros d'estas equações tiver logar a relação

$$f_n = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_{n-1} f_{n-1}\,, \qquad (iii)$$

ainda será, como anteriormente,

$$R_{n+1} = |abc \,.\,.\, lp| = 0\,.$$

Mas agora serão tambem nullos os menores de 1.ª classe de R_{n+1}, correspondentes aos elementos da linha $n+1$ d'este determinante; porquanto em cada um d'estes menores a linha n será a somma das $n-1$ antecedentes, respectivamente multiplicadas por factores constantes. Logo *(n.º 48, cor.)* neste caso serão nullos o determinante R_{n+1} e *todos* os seus menores de 1.ª classe.

Este raciocinio estende-se facilmente ao caso de $n-1$ equações com n incógnitas, e assim por deante.

3.° São verdadeiras as recíprocas das duas proposições precedentes. Supponhamos em primeiro logar que entre os coefficientes de (i) tem logar a relação $R_{n+1} = 0$, sem que sejam conjunctamente nullos todos os menores de 1.ª classe de R_{n+1}; seja $|abc \,.\,.\, kl|$ um d'estes menores differentes de zero.

O desenvolvimento do determinante $|abc \ldots klf|$ na somma de determinantes da mesma ordem segundo os elementos da última columna é *(n.º 50, II e VI)*

$$\begin{aligned} &|abc \,.\,.\, klf| = \\ &|abc \ldots kla|\,x_1 + |abc \ldots klb|\,x_2 + \cdots \\ &\qquad + |abc \ldots kll|\,x_n - |abc \ldots klp|\,; \end{aligned}$$

d'onde, pela hypóthese $|abc \ldots klp| = 0$ e pela propriedade IV, se conclue que será

$$|abc \ldots klf| = 0\,.$$

Mas, por outra parte, o desenvolvimento de $|abc\,.\,.\,klf|$ pela propriedade I dos menores de 1.ª classe é

$$|abc\,.\,.\,klf| =$$
$$(a_2\,b_3\,c_4\ldots k_n\,l_{n+1})\,f_1 - (a_1\,b_3\,c_4\ldots k_n\,l_{n+1})\,f_2 + \cdots$$
$$\pm (a_1\,b_2\,c_3\ldots k_{n-1}\,l_n)\,f_{n+1} = 0\;;$$

e dividindo ambos os membros d'esta egualdade pelo coefficiente de f_{n+1}, que suppomos differente de zero, recahimos na relação (*ii*).

Se todos os menores de 1.ª classe de R_{n+1} forem nullos, sem que o sejam conjunctamente todos os menores de 2.ª classe d'este determinante, supponhamos que $|abc\ldots k|$ é differente de zero. Teremos, como precedentemente,

$$|abc\ldots kf| = |abc\ldots kl|\,x_n - |abc\ldots kp|$$
$$= (a_2\,b_3\ldots k_n)\,f_1 - (a_1\,b_3\ldots k_n)\,f_2 + \cdots$$
$$\pm (a_1\,b_2\ldots k_{n-1})\,f_n = 0\,.$$

Esta última expressão é equivalente a (*iii*), por ser $|abc\ldots k|$ differente de zero.

53. *Resolução de* n *equações lineares a* n *incógnitas.* — Sejam as propostas

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\,x_1 + b_1\,x_2 + \cdots + l_1\,x_n - p_1 = 0\;, \\ f_2 &= a_2\,x_1 + b_2\,x_2 + \cdots + l_2\,x_n - p_2 = 0\;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= a_n\,x_1 + b_n\,x_2 + \cdots + l_n\,x_n - p_n = 0\;; \end{aligned} \qquad (18)$$

e supponhamos que o determinante Δ dos coefficientes das incógnitas é differente de zero. Multiplicando estas equações respectimente pelos primeiros menores $A_1, A_2 \ldots A_n$ de $\triangle$, relativos aos elementos da primeira columna ou aos coefficientes de x_1, e sommando os productos, resulta uma nova equação em que, pelas propriedades dos menores, o coefficiente de x_1 é $\triangle$ e os coefficientes das outras incognitas são nullos; o termo conhecido d'esta equação é

$$\triangle_1 = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \cdots + A_n p_n = |pbc \ldots kl|,$$

isto é, um determinante que resulta de $\triangle$ pela mudança dos a nos p do mesmo índice. Procedendo do mesmo modo com os menores $B_1, B_2 \ldots B_n$, relativos aos elementos da segunda columna de $\triangle$ ou aos coefficientes de x_2, depois com os menores $C_1, C_2 \ldots C_n$, relativos á terceira columna, e assim por deante, até os menores $L_1, L_2 \ldots L_n$, relativos á última columna, obteem-se finalmente as relações

$$\begin{aligned} A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n &= \triangle x_1 - \triangle_1 = 0, \\ B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_n f_n &= \triangle x_2 - \triangle_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_1 f_1 + L_2 f_2 + \cdots + L_n f_n &= \triangle x_n - \triangle_n = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Destas equações, em que as incógnitas estão separadas, tira-se immediatamente

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\triangle_n}{\triangle}. \tag{20}$$

É evidente que os valores das incógnitas que satisfazem ao systema (18) conveem a (19); falta mostrar, como observou Gauss, a proposição recíproca. Ora, multiplicando os primeiros membros de (19) por $a_1, b_1, c_1 \ldots l_1$ e sommando os productos, multiplicando depois por $a_2, b_2, c_2 \ldots l_2$ e sommando, continuando operações análogas até multiplicar por a_n, b_n, c_n ... l_n: aquelle systema fica substituido, conforme as propriedades dos menores, por

$$\Delta f_1 = 0\,,\quad \Delta f_2 = 0\,,\quad \ldots\quad \Delta f_n = 0\,,$$

que é o mesmo systema (18) visto ser Δ differente de zero por hypóthese. Assim, as soluções (20) conveem ao systema (18), e são as únicas que lhe satisfazem.

No caso particular de serem nullos os termos conhecidos de todas as equações propostas menos uma, $f_i = 0$ por exemplo, temos, conforme à notação adoptada,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & . & . & l_1 \\ . & . & . & . & . \\ p_i & b_i & . & . & l_i \\ . & . & . & . & . \\ 0 & b_n & . & . & l_n \end{vmatrix} = A_i p_i\,,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & . & . & l_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_i & p_i & . & . & l_i \\ . & . & . & . & . \\ a_n & 0 & . & . & l_n \end{vmatrix} = B_i p_i\,,$$

etc.; e assim as relações (20) tornam-se neste caso em

$$\frac{x_1}{A_i} = \frac{x_2}{B_i} = \frac{x_3}{C_i} = \cdots = \frac{x_n}{L_i} = \frac{p_i}{\Delta}\,.$$

Logo: *se todas as equações forem homogeneas menos uma, os valores das incógnitas são proporcionaes aos primeiros menores de Δ relativos aos elementos da linha que corresponde á equação não homogenea.*

54. Se fôr $\Delta = 0$, a equação (19) $\Delta x_1 - \Delta_1 = 0$ não poderá verificar-se, para valores finitos de x_1, sem que seja conjunctamente $\Delta_1 = 0$. Mas, sendo $\Delta = 0$, os primeiros menores relativos aos elementos das columnas d'este determinante, são ordenadamente proporcionaes (*n.º 48, cor.*); portanto da relação

$$\Delta_1 = A_1p_1 + A_2p_2 + \cdots + A_np_n = 0$$

conclue-se que será

$$\Delta_2 = B_1p_1 + B_2p_2 + \cdots + B_np_n = 0 \ ,$$

e do mesmo modo $\Delta_3 = 0, \ldots \Delta_n = 0$. Assim, as expressões (20) das incógnitas tomam todas neste caso a forma $\frac{0}{0}$.

Por outra parte $\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_n$ são, em valor absoluto, os menores de 1.ª classe correspondentes aos elementos da linha $n+1$ do determinante R_{n+1} do n.º 52. Se todos estes menores forem nullos e se entre os de 2.ª classe de R_{n+1} reconhecermos que um pelo menos, $|abc\ldots k|$ por exemplo, é differente de zero, concluiremos que entre os polynomios $f_1, f_2, \ldots f_n$ haverá uma relação linear homogenea, como se mostrou na segunda parte do caso 3.º d'aquelle n.º. Logo o systema (18) reduz-se nesta hypóthese a $n-1$ equações distinctas com n incógnitas.

Se todos os primeiros menores de Δ forem nullos, mas um, pelo menos, de segunda classe fôr differente de zero, seja $(a_1b_2\ldots h_{n-2}) \gtrless 0$. Considerando successivamente os systemas formados pelas $n-2$ primeiras equações com cada uma das outras duas, formaremos dois grupos de $n-1$ equações em que o determinante das incógnitas é zero. Se o systema fôr compativel, cada um d'estes grupos conduzirá a uma identidade e as n equações dadas reduzem-se a $n-2$ distinctas com n incógnitas.

Em geral se, além de $\Delta = 0$, forem nullos os seus menores de todas as classes até os de ordem $n-i+1$ inclusivamente, separa-se um grupo de $n-i$ equações em que o determinante de $n-i$ incógnitas não é nullo, e o systema proposto é incompativel ou reduz-se a essas $n-i$ equações com n incógnitas.

55. *Resolução de* n − i *equações a* n *incógnitas.* — Consideremos as primeiras $n-i$ equações (18) e demos-lhe a forma

$$a_1x_1 + b_1x_2 + \cdots + h_1x_m = p_1 - k_1x_{m+1} - \cdots - l_1x_n = r_1\ ,$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + \cdots + h_2x_m = p_2 - k_2x_{m+1} - \cdots - l_2x_n = r_2\ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_mx_1 + b_mx_2 + \cdots + h_mx_m = p_m - k_mx_{m+1} - \cdots - l_mx_n = r_m\ ,$$

fazendo $n-i=m$. Multiplicando pelos primeiros menores do determinante $\Delta'=|ab..h|$, que suppomos differente de zero, e seguindo um processo análogo ao que empregámos no n.° 53, resolvem-se as propostas em ordem ás $m=n-i$ incógnitas cujos coefficientes satisfazem á condição $\Delta' \gtrless 0$; e os valores achados verificam o systema proposto, quaesquer que sejam os valores das incógnitas restantes.

Sejam, por exemplo, as equações

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = e_1\ ,$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = e_2\ ,$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = e_3\ ,$$

e $(a_1b_2c_3) \gtrless 0$, e demos-lhes a fórma

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = e_1 - d_1x_4\ ,$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = e_2 - d_2x_4\ ,$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = e_3 - d_3x_4\ .$$

O processo do n.° 53 é applicavel a estas equações, por ser differente de zero o determinante dos coefficientes das incógnitas

x_1, x_2, x_3; e dará, para qualquer valor de x_4,

$$x_1 = \frac{|(e-dx_4)\,bc|}{|abc|} = \frac{|ebc|}{|abc|} - \frac{|dbc|}{|abc|}\,x_4 \,.$$

$$x_2 = \frac{|a\,(e-dx_4)\,c|}{|abc|} = \frac{|aec|}{|abc|} - \frac{|adc|}{|abc|}\,x_4$$

$$x_3 = \frac{|ab\,(e-dx_4)|}{|abc|} = \frac{|abe|}{|abc|} - \frac{|abd|}{|abc|}\,x_4 \,.$$

Viu-se no n.° 54, que, sendo $\Delta = 0$ com $|abc..k| \gtrless 0$, o systema (18) se reduz a $n-1$ equações com n incógnitas. Supponhamos pois que além das equações dadas ha outra

$$a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4 = e_4 \,,$$

e que é $|abcd| = 0$ com $(a_1b_2c_3) \gtrless 0$; ou as quatro equações são incompativeis, caso que terá logar se fôr $|abce| \gtrless 0$, ou são equivalentes ao systema proposto. Deve notar-se que só x_4 tem *em todos os casos* valor arbitrário, porque os valores de x_1, x_2 ou x_3 não dependem de x_4 quando $|dbc|$, $|adc|$ ou $|abd|$ são eguaes a zero. Esta circumstancia explica-se, observando que o processo do n.° 53 presume que os multiplicadores A, B, .. L são differentes de zero: condição que só temos a certeza de verificar-se, no caso actual, com os multiplicadores que servem para eliminar x_4.

56. *Resolução de* $n+i$ *equações com* n *incógnitas.* — Supponhamos em primeiro logar que é $i=1$ e que são propostas as equações do n.° 52, 1.°. Se fôr

$$a_{n+1}\Delta_1 + b_{n+1}\Delta_2 + \cdots + l_{n+1}\Delta_n - p_{n+1}\Delta = 0 \,, \qquad (iv)$$

as soluções (20), únicas que resolvem as equações (18), satisfazem tambem a última equação dada. No caso contrário o systema proposto não admitte solução alguma, e diz-se então que as equações são incompativeis.

Ora por definição é

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |pbc..kl| = (-1)^{n-1}.|bc..lp|\,,\\
\Delta_2 &= |apc..kl| = (-1)^{n-2}.|ac..lp|\,,\\
&\cdots\cdots\\
\Delta_{n+1} &= |abc..pl| = (-1).|abc..lp|\,,\\
\Delta_n &= |abc..kp|\,,\\
\Delta &= |abc..kl|\,;
\end{aligned}$$

portanto o 1.º membro de (*iv*), com o competente signal, é o determinante R_{n+1} do n.º 53; e a condição de possibilidade do problema é $R_{n+1}=0$, d'onde resulta

$$f_{n+1} = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \cdots + t_n f_n\,.$$

Assim, neste caso, a equação $f_{n+1}=0$ não é distincta das outras equações do systema.

O determinante $R_{n+1} = |abc..klp|$ chama-se ELIMINANTE do systema proposto; a equação

$$R_{n+1} = 0$$

é a RESULTANTE do mesmo systema.

Se forem dadas, em geral, $n+i$ equações com n incógnitas, podemos tirar os valores de todas as incógnitas de n equações; e substituindo depois estes valores nas i equações restantes, obteremos outras tantas relações, que traduzem as condições de compatibilidade do systema. Estas relações podem-se achar, juntando ás n primeiras equações successivamente cada uma das seguintes e egualando a zero o determinante de cada um d'estes i grupos.

57. *Equações homogeneas.* — Supponhamos em (18) $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$; teremos as n equações homogeneas

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \cdots + l_1x_n = 0 \ .$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \cdots + l_2x_n = 0 \ ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \cdots + l_nx_n = 0 \ .$$

Neste caso as equações (19) tornam-se em

$$\Delta x_1 = 0 \ , \quad \Delta x_2 = 0 \ ; \quad \ldots \quad \Delta x_n = 0 \ ,$$

porque todos os determinantes Δ_1, Δ_2 .. Δ_n teem uma linha de zeros. Se fôr $\Delta \lesseqgtr 0$, as relações precedentes mostram que os únicos valores que satisfazem as propostas são $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; se fôr $\Delta = 0$, os valores das incógnitas veem com a forma de indeterminação.

Dividindo as propostas por uma das incógnitas x_n, recahe-se num systema de n equações lineares com as $n-1$ incógnitas

$$y_1 = \frac{x_1}{x_n}, \ y_2 = \frac{x_2}{x_n}, \cdots y_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n} \ .$$

As equações serão compativeis *(n.º 56)*, se fôr $\Delta = 0$; e assim os valores de y_1, y_2, .. y_{n-1} serão determinados, embora o não sejam os dois termos de cada um d'elles. Chama-se ainda a Δ o *eliminante* das equações dadas, e a equação $\Delta = 0$ é a sua *resultante*. Sendo $\Delta = 0$, uma d'aquellas equações é consequencia das outras; e, se algum dos primeiros menores de Δ fôr differente de zero, os valores das $n-1$ incógnitas, x_1, x_2 ... x_{n-1}, exprimem-se em funcção da que resta, x_n. Se forem nullos todos esses menores de 1.ª classe, mas algum de 2.ª fôr differente de zero, demonstra-se como precedentemente que duas das propostas são consequencia das outras $n-2$, e os valores das incógnitas $x_1, x_2 \ldots x_{n-2}$ exprimem-se em funcção de x_{n-1} e x_n. Assim por deante.

Sejam, por exemplo, as equações

$$\begin{aligned}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_4 = 0 \ , \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4 = 0 \ , \\
a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 = 0 \ , \\
a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 + d_4 x_4 = 0 \ ,
\end{aligned}$$

e $\Delta = (a_1 b_2 c_3 d_4) = 0$. Suppondo o primeiro menor $(a_1 b_2 c_3)$ differente de zero, o systema pode considerar-se composto de tres equações distinctas e compativeis, com quatro incógnitas. Fazendo nas últimas fórmulas do n.° 55 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, os valores de x_1, x_2, x_3 tornam-se em

$$x_1 = -\frac{|dbc|}{|abc|} x_4, \quad x_2 = -\frac{|adc|}{|abc|} x_4, \quad x_3 = -\frac{|abd|}{|abc|} x_4 ;$$

ou, ordenando as letras (III),

$$x_1 = -\frac{|bcd|}{|abc|} x_4, \quad x_2 = \frac{|acd|}{|abc|} x_4, \quad x_3 = -\frac{|abd|}{|abc|} x_4 \ ,$$

e mais simplesmente

$$\frac{x_1}{A_4} = \frac{x_2}{B_4} = \frac{x_3}{C_4} = \frac{x_4}{D_4} \ ,$$

representando A_4, B_4, C_4 e D_4 os menores relativos á ultima linha de Δ, com os signaes implícitos. No caso de n equações homogeneas a n incógnitas achava-se do mesmo modo, suppondo $\triangle=0$,

$$\frac{x_1}{A_n}=\frac{x_2}{B_n}=\frac{x_3}{C_n}=\ldots=\frac{x_n}{L_n}.$$

Se transformarmos as equações (18) pela relação

$$y_r+x_r\,y_{n+1}=0\,,$$

onde r tomará todos os valores $1, 2, \ldots n-1, n$, resulta o systema homogeneo

$$\begin{aligned}
&a_1\,y_1+b_1\,y_2+\cdots-p_1\,y_{n+1}=0\,,\\
&a_2\,y_1+b_2\,y_2+\cdots-p_2\,y_{n+1}=0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n\,y_1+b_n\,y_2+\cdots-p_n\,y_{n+1}=0\,;
\end{aligned}$$

e as fórmulas (19) darão

$$-\frac{y_1}{y_{n+1}}=\frac{\triangle_1}{\triangle},\ -\frac{y_2}{y_{n+1}}=\frac{\triangle_2}{\triangle},\ \text{etc.},$$

ou, attendendo a que $\triangle_1$, $\triangle_2$, .. mudam alternadamente de signal quando se collocam as letras na ordem alphabética,

$$\frac{y_1}{(b_1c_2\ldots p_n)}=\frac{-y_2}{(a_1c_2\ldots p_n)}=\ldots=\frac{\pm\,y_{n+1}}{(a_1\,b_2\ldots l_n)},$$

onde y_{n+1} é uma quantidade qualquer differente de zero. Fazendo $y_{n+1}=1$ e notando que é indifferente dar o signal $+$ ou $-$ ao primeiro membro, por isso que os signaes se alternam, pas-

*

samos d'aquellas relações para as fórmulas

$$\frac{x_1}{(b_1 c_2 \ldots p_n)} = \frac{-x_2}{(a_1 c_2 \ldots p_n)} = \ldots = \frac{\pm 1}{(a_1 b_2 \ldots l_n)}.$$

Se forem dadas, por exemplo, as equações

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

acham-se immediatamente pelo processo exposto as relações

$$\frac{x}{(b_1 c_2)} = \frac{-y}{(a_1 c_2)} = \frac{1}{(a_1 b_2)}, \qquad (21)$$

que dão as expressões das incógnitas com grande commodidade.

II

Theoria das equações.

THEORIA DAS EQUAÇÕES.

CAPÍTULO I.

Numeros complexos.

58. O imaginario $\sqrt{-1}$ designa-se pela letra i. Por definição é $i^2 = -1$, donde resulta que as potencias inteiras e positivas de i reproduzem indefinidamente o período

$$i^{4n} = +1 \; , \; i^{4n+1} = i \; , \; i^{4n+2} = -1 \; , \; i^{4n+3} = -i \; ;$$

de $1 = -i^2$ tira-se $\frac{1}{i} = -i$, e os termos do período são os mesmos para n negativo ou positivo.

O imaginario ai considera-se formado com a *unidade* imaginaria i do mesmo modo que a se forma com a unidade dos numeros reaes. Assim faremos $ai = bi$ quando fôr $a = b$, e reciprocamente; e a somma de numeros d'esta espécie é definida pela expressão

$$ai + bi + \cdots = (a + b + \cdots)\, i \; .$$

Em $a+bi$ o signal $+$ não representa propriamente uma *somma*; e este numero chama-se *complexo*, porque as partes a e bi são de espécies *distinctas*. Pelo mesmo motivo, se fôr $a+bi=c+di$, serão separadamente eguaes as partes reaes e as imaginarias, ou $a=c$ e $b=d$.

Assim as egualdades entre numeros complexos reduzem-se a egualdades entre numeros reaes, e as combinações que podem fazer-se com umas podem egualmente fazer-se com as outras.

Cor. 1. Se fôr $a+bi=c$, será $a=c$ e $b=0$. Assim aos numeros reaes pode dar-se a forma de complexos.

Cor. 2. Se fôr $a+bi=di$, será $a=0$, $b=d$ e aos imaginarios puros tambem se pode dar a forma de complexos.

Cor. 3. Se fôr $a+bi=0$, será conjunctamente $a=0$ e $b=0$.

59. *Módulo* do complexo $a+bi$ é o numero positivo $\sqrt{a^2+b^2}$. Sendo nullo o módulo, é $a=0$, $b=0$, $a+bi=0$; e reciprocamente.

Complexos eguaes teem o mesmo módulo, mas a inversa não é verdadeira. Os numeros $3+4i$ e $4+3i$, por exemplo, teem ambos o módulo 5.

Dois complexos da forma $a \pm bi$ dizem-se *conjugados* e teem módulos eguaes.

60. Sejam OX um eixo orientado, O a origem, a a abscissa e b a ordenada de qualquer ponto M, ρ o raio vector OM do mesmo ponto; designe-se por α o angulo que o vector ρ faz com o eixo, sendo este angulo contado de OX para a parte superior do plano, desde 0 até 360°. Por definição de seno e coseno (*Trig.*) é sempre, para qualquer valor de α,

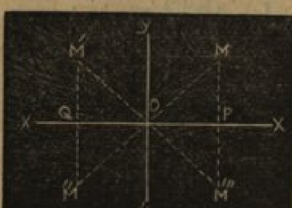


Fig. 1

$$a=\rho\cos\alpha\ ,\quad b=\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\ , \qquad (1)$$

e por conseguinte

$$a+bi=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,. \qquad (ii)$$

Assim o complexo $a+bi$ é definido pelo ponto cujas coordenadas são a e b, ou pelo *vector* ρ e pelo *argumento* α. De (i) tira-se $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$; portanto o vector ρ, que é sempre positivo, é egual ao módulo. O 2.° membro de (ii) representa-se abreviadamente por $(\rho)_\alpha$.

Para $b=0$, é $\mathrm{sen}\,\alpha=0$ e $(\rho)_\alpha$ real; este numero é positivo ou negativo, conforme é $\cos\alpha=\pm 1$, isto é, $\alpha=0$ ou $\alpha=\pi$. Para $a=0$, é $\cos\alpha=0$ e $(\rho)_\alpha=\pm bi$ conforme é $\mathrm{sen}\,\alpha=\pm 1$, isto é, conforme é $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ ou $\alpha=\frac{3}{2}\pi$. Assim, $+i$ e $-i$ representam duas direcções oppostas, perpendiculares a OX, como os simples signaes $+$ e $-$ designam duas direcções oppostas, contadas sobre OX. As direcções intermédias são indicadas por $\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, que representa o papel d'um signal directivo.

Dois pontos M e M‴, ou M′ e M″, symétricos relativamente a OX, representam imaginarios conjugados. Dois pontos M e M″, symétricos em relação á origem, definem imaginarios de signáes contrarios.

De (i) tira-se para α um só valor menor que 2π; mas na realidade o argumento pode ter uma infinidade de valores da forma $2k\pi+\alpha$, sendo k um inteiro positivo ou negativo. Pelas condições de egualdade de dois complexos (n.° 58), vê-se que complexos eguaes teem módulos eguaes, e argumentos α_1 e α_2 que satisfazem ás condições $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$ e $\mathrm{sen}\,\alpha_1=\mathrm{sen}\,\alpha_2$; donde

$$\alpha_2-\alpha_1=2k\pi\,. \qquad (22)$$

Para os argumentos α e α' de complexos conjugados será $\cos\alpha=\cos\alpha'$ e $\mathrm{sen}\,\alpha=-\mathrm{sen}\,\alpha'$, donde

$$\alpha+\alpha'=2k\pi\,. \qquad (23)$$

61. As definições das operações fundamentaes tornam-se applicaveis aos numeros complexos, generalisando-as nos termos seguintes.

1.° *Addição.* A expressão

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \qquad (iii)$$

define a *addição.* O resultado da operação depende unicamente das sommas $a_1 + a_2$ e $b_1 + b_2$ de partes reaes; por conseguinte os principios relativos á somma de numeros reaes são applicaveis á addição de complexos, isto é, *a ordem das parcellas é arbitraria*, etc.

Pela definição (iii) será

$$\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \qquad (iv)$$
$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1) + \rho_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)$$

suppondo

$$\rho\cos\alpha = \rho_1\cos\alpha_1 + \rho_2\cos\alpha_2 \,,$$
$$\rho \operatorname{sen}\alpha = \rho_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \,.$$

Quadrando e sommando estas expressões, acha-se

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,;$$

por onde se vê, suppondo $\rho_1 > \rho_2$ que é $\rho = \rho_1 \pm \rho_2$ para $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 1$, e em todos os outros casos $\rho < \rho_1 + \rho_2$ e $\rho > \rho_1 - \rho_2$.

É evidente a generalisação d'estes resultados para maior numero de parcellas, cujos módulos sejam $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$; o módulo ρ da somma será

$$\rho \overline{\overline{<}} \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n \,. \qquad (24)$$

O módulo da somma é menor que a somma dos módulos das *parcellas, ou egual a esta somma quando todos os numeros teem o mesmo argumento.*

A *subtracção* torna-se na addição, mudando o signal a uma das parcellas.

2.° *Multiplicação.* A expressão

$$(a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\ , \qquad (v)$$

onde se fez $i^2=-1$, define a multiplicação. Se fôr nullo um dos factores, $a_1+b_1i=0$ por exemplo, será $a_1=0$ e $b_1=0$; neste caso o producto é zero, porque todos os seus termos teem o factor a_1 ou b_1. Se fôr nullo o producto, ou

$$a_1a_2-b_1b_2=0\ ,\ a_1b_2+a_2b_1=0\ ,$$

teremos, quadrando e sommando,

$$\left(a_1a_2-b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=0\ ;$$

e portanto será zero o quadrado do módulo d'um dos factores, $a_1^2+b_1^2$ ou $a_2^2+b_2^2$. Logo, *o producto annulla-se quando um dos factores é zero, e reciprocamente.*

Por outra parte, o resultado da operação depende unicamente de productos de numeros reaes, e os princípios relativos á multiplicação d'estes numeros são applicaveis á multiplicação dos complexos; isto é, *a ordem dos factores é arbitraria*, etc.

Pela definição (v) será

$$\begin{gathered}\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)=\\ \rho_1(\cos\alpha_1+i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)\times\rho_2(\cos\alpha_2+i\,\mathrm{sen}\,\alpha_2)\end{gathered} \qquad (vi)$$

suppondo

$$\rho=\rho_1\rho_2\ ,\quad \alpha=\alpha_1+\alpha_2\ ;$$

e é evidente a generalisação d'estes resultados para maior numero de factores. Logo, *o módulo e o argumento do producto são respectivamente o producto dos módulos e a somma dos argumentos dos factores.*

Na somma α tomam-se as parallelas α_1, α_2, etc., com os seus signaes. No caso de dois factores conjugados, a somma dos argumentos é $2k\pi$ e $\rho_1 = \rho_2$, ou

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \times \rho_1 (\cos \alpha_1 - i \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho_1^2 \, ; \qquad (25)$$

logo, *o producto de imaginarios conjugados é o quadrado do módulo commum.*

A *divisão* reduz-se á multiplicação, por serem operações inversas uma da outra; logo *o argumento e o módulo do quociente são respectivamente a differença dos argumentos e o quociente dos módulos do dividendo e do divisor.*

62. A somma e a multiplicação de complexos representam-se geometricamente do modo que vamos indicar.

1.° *Addição.* Sejam M_1 e M_2 (*fig.* 2) os pontos que definem as parcellas (*iv*), e M a intersecção das rectas $M_1 M$ e $M_2 M$ tiradas por aquelles pontos e parallelas respectivamente a OM_2 e OM_1. As coordenadas de M_1 e M_2 serão

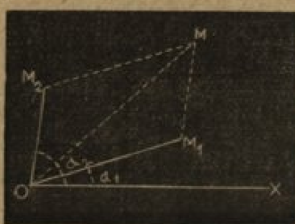


Fig. 2

$$(\rho_1 \cos \alpha_1 \; , \; \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1) \; ,$$

$$(\rho_2 \cos \alpha_2 \; , \; \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \; ;$$

e as de M são evidentemente

$$(\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 \cos \alpha_2 \; , \; \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2) \; .$$

Por conseguinte o ponto M define a somma das parcellas representadas por M_1 e M_2; e determina-se este ponto, construindo a *resultante* dos dois segmentos OM_1 e OM_2, cujos comprimentos são expressos pelos módulos ρ_1 e ρ_2 e cujas direcções são dadas pelos argumentos α_1 e α_2 das parcellas. A troca dos pontos M_1 e M_2 conduz ao mesmo ponto M, e corresponde á inversão na ordem das parcellas.

Sendo tres as parcellas, compõe-se a resultante de duas d'ellas com o vector da terceira, e assim por deante.

2.° *Multiplicação.* Sejam M_1 e M_2 (*fig.* 3) os pontos que definem os factores (*vi*), e tome-se no eixo o comprimento OU egual á unidade a que estam referidos os módulos ρ_1 e ρ_2; tirem-se as rectas $M_2 M$ e OM, que fazem com OM_2 os angulos $MOM_2 = \alpha_1$ e $OM_2M = OUM_1$.

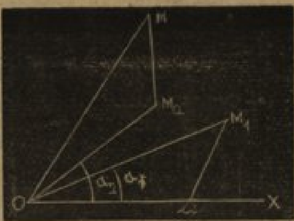


Fig. 3

Sendo $XOM = \alpha_1 + \alpha_2$, este angulo é o argumento α do 2.° membro de (*vi*). Da semelhança dos triangulos resulta $OM : OM_2 :: OM_1 : OU$, ou $OM = \rho_1 \rho_2$, e OM é o módulo ρ d'aquella mesma expressão.

Logo o ponto M define o producto dos factores considerados; e a multiplicação por um factor imaginario $\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$ consiste na multiplicação pelo módulo ρ_1, executada ao modo ordinario, seguida d'uma *rotação* egual ao argumento α_1. Assim, *o producto forma-se com o multiplicando do mesmo modo que o multiplicador se forma com a unidade.*

A troca dos pontos M_1 e M_2 corresponde á inversão dos factores, e conduz ao mesmo ponto M por ser $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ e $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$.

63. 1.° *Elevação a potencias.* A potencia d'expoente inteiro e positivo é um caso particular da multiplicação, e será

$$[\rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) . \qquad (26)$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Moivre*, e pode enunciar-se nos termos seguintes:

Sendo ρ *e* α *o módulo e o argumento d'um numero,* ρ^n *e* $n\alpha$

são o módulo e o argumento da potencia inteira, positiva e do grau n do mesmo numero.

Por definição d'expoente negativo é

$$[\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^{-n} = \frac{1}{[\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n}.$$

Sendo n inteiro, a fórmula de Moivre pode applicar-se ao denominador do 2.° membro; multiplicando ambos os termos da fracção resultante por $\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha$, cujo módulo é 1, e attendendo a (25), chega-se á fórmula

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^{-n} &= \rho^{-n}(\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha)\\ &= \rho^{-n}[\cos(-n\alpha) + i\,\text{sen}\,(-n\alpha)].\end{aligned}$$

Por onde se vê que a fórmula (26) é applicavel ao caso do expoente negativo.

4.° *Extracção de raizes.* Por definição, a raiz de grau n d'um numero $\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ é o numero $r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ que satisfaz a egualdade

$$[r(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)]^n = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha);$$

donde resulta por (26) e por (22)

$$r^n = \rho\,,\quad n\varphi = 2k\pi + \alpha\,.$$

A valores differentes de k, ou de $\varphi = \dfrac{2k\pi + \alpha}{n}$, podem corresponder raizes differentes do mesmo numero dado. Usaremos do expoente fraccionario para indicar todos os valores possiveis da raiz, e do radical para exprimir um valor determinado como

$\sqrt{9}=3$. Segundo esta convenção, das relações precedentes conclue-se

$$[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}=(\sqrt[n]{\rho})_{\frac{2k\pi+\alpha}{n}}=(\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\alpha}{n}}\times(1)_{\frac{2k\pi}{n}}; \tag{27}$$

e a última d'estas expressões resulta immediatamente da regra de multiplicação dos imaginarios. O factor

$$(1)_{\frac{2k\pi}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} \tag{28}$$

é que produz a multiplicidade de valores de $[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}$; para $k=0$ é $(1)_{\frac{2k\pi}{n}}=1$, e

$$\sqrt[n]{(\rho)_\alpha}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}\right).$$

Por conseguinte a fórmula de Moivre ainda tem logar para os expoentes fraccionarios, quando se considera sómente o valor da raiz correspondente a $k=0$, ou a $\sqrt[n]{1}=1$.

A $k=h$ e $k=tn+h$ correspondem em (27) os argumentos

$$\alpha_1=\frac{2h\pi+\alpha}{n},\qquad \alpha_2=2t\pi+\frac{2h\pi+\alpha}{n},$$

para os quaes é $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$ e $\operatorname{sen}\alpha_1=\operatorname{sen}\alpha_2$. Logo os valores distinctos da raiz $[(\rho)_\alpha]^{\frac{1}{n}}$ não podem ser mais de n; e são com effeito n, porque de 0 até 360° não ha dois angulos differentes que tenham conjunctamente o mesmo seno e o mesmo coseno. Os n valores d'aquella raiz correspondem aos n argumentos

$$\frac{\alpha}{n},\ \frac{2\pi+\alpha}{n},\ \frac{2.2\pi+\alpha}{n},\ \ldots\ \frac{(n-1).2\pi+\alpha}{n}, \tag{vii}$$

que procedem numa progressão arithmética cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Estes argumentos só darão valores reaes para a raiz, quando fôr *(n.º 60)*

$$\frac{2k\pi+\alpha}{n}=0\text{, ou }\frac{2k\pi+\alpha}{n}=\pi. \qquad (viii)$$

A primeira d'estas condições só pode verificar-se com $\alpha=0$ e $k=0$; para ter logar a segunda, pode ser $\alpha=0$ e $n=2k$, ou $\alpha=\pi$ e $n=2k+1$. D'aqui resultam as seguintes consequencias:

1.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr imaginario, não pode ser $\alpha=0$ nem $\alpha=\pi$, e as raizes são todas imaginarias.

2.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr real e positivo, é $\alpha=0$. Para n par, ambas as condições *(viii)* se verificam e ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa; para n impar, é impossivel a segunda e ha só uma raiz real, que é positiva. Em ambos os casos as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas porque, pondo de parte o primeiro termo de *(vii)*, nos restantes a somma de dois equidistantes dos extremos é sempre egual á somma dos mesmos extremos e tem a forma (23); para n par, o termo médio π dá a raiz negativa.

3.ª Se $(\rho)_\alpha$ fôr real e negativo, é $\alpha=\pi$. Neste caso não pode verificar-se a primeira condição *(viii)*. Para n par, não ha raiz real; e para n impar, ha uma raiz negativa cujo argumento π é o termo medio de *(vii)*. Em ambos os casos as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas.

Exemplo: seja $x=8^{\frac{1}{3}}$, d'onde $\rho=8$, $\sqrt[3]{\rho}=2$ e $\alpha=0$. Os argumentos *(vii)* são agora

$$0, \quad 120°, \quad 240°;$$

e sendo $\operatorname{sen} 120°=-\operatorname{sen} 240°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 120°=\cos 240°=-\frac{1}{2}$, acha-se $x=2$ e $x=-1\pm i\sqrt{3}$.

CAPITULO II.

Funcções inteiras.

64. Diz-se *racional e inteira* a funcção algébrica

$$f(x) \equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$$

em que n é inteiro e positivo.

Designa-se por $f(a)$ o resultado da substituição de x por a em $f(x)$. O cálculo de $f(a)$ faz-se pelo seguinte processo.

Os coefficientes $p_0, p_1, \ldots p_n$ dispõem-se em linha horizontal. Estes numeros podem ser positivos ou negativos, como a; e alguns podem ser zero, dizendo-se então que o polynomio é incompleto. Attende-se, porém, a todos; multiplica-se o primeiro por a, applicando a regra dos signaes, e assenta-se o producto por baixo de p_1. Faz-se a somma $ap_0 + p_1 = q_1$, e multiplica-se a por q_1; o producto assenta-se por baixo de p_2, e faz-se a somma $aq_1 + p_2 = q_2$, que se multiplica por a; somma-se o novo producto com p_3 e continua-se pelo mesmo estylo até o ultimo termo da funcção proposta.

Seja, por exemplo, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x + 7$ e $a = -3$; dispõe-se o cálculo do modo seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & -2 & 0 & -5 & +7 \\ & \underline{-3.3 = -9} & \underline{-3.(-11) = 33} & \underline{-3.33 = -99} & \underline{-3.(-104) = 312} \\ & -11, & 33, & -104, & 319 \end{array}$$

e acha-se $f(-3) = 319$.

65. O *resto da divisão d'uma funcção racional e inteira de* x *pelo binomio* x — a *é o resultado da substituição de* x *por* a *na funcção dada.*

Seja Q o quociente e R o resto da divisão, ou

$$f(x) \equiv (x-a).Q+R\ .$$

O resto R é independente de x, por ser o divisor do 1.° grau, e no quociente não ha termos com x em denominador; logo, fazendo nesta identidade $x=a$, virá

$$R=f(a)\ . \tag{29}$$

D'aqui resulta um processo simples para achar o quociente e o resto da divisão ds $f(x)$ por $x-a$. Dada a funcção com a forma que lhe temos supposto, o resto é (29)

$$R \equiv p_0a^n + p_1a^{n-1} + \cdots + p_{n-1}a + p_n\ ,$$

e o quociente será dado pela egualdade $(x-a)\,Q \equiv f(x)-R$ ou

$$\begin{aligned}(x-a)\,Q \equiv p_0(x^n-a^n) + p_1(x^{n-1}-a^{n-1}) + \cdots \\ + p_{n-2}(x^2-a^2) + p_{n-1}(x-a)\ ;\end{aligned}$$

d'onde se tira, dividindo por $x-a$,

$$\begin{aligned}Q \equiv\ & p_0(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ & + p_1(x^{n-2} + ax^{n-3} + \cdots + a^{n-2}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p_{n-2}(x+a) + p_{n-1}\ .\end{aligned}$$

Ordenando o **2.°** membro e reduzindo, acha-se

$$Q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \cdots q_{n-2}x + q_{n-1} ,$$

onde se fez

$$q_0 = p_0 , \ q_1 = aq_0 + p_1 , \ \text{etc.}$$

e portanto

$$R = aq_{n-1} + p_n .$$

Estas sommas são as mesmas do numero anterior, e os resultados precedentes mostram que: *os coefficientes do quociente e o resto da divisão de* f (x) *por* x — a *se formam multiplicando o coefficiente do termo antecedente do quociente por* a *e juntando ao producto o coefficiente do termo da mesma ordem do dividendo.*

Seja, por exemplo, $f(x) = 3x^6 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x - 4$ a dividir por $x+1$; fazendo $a = -1$, teremos o quadro seguinte:

$$\begin{array}{lr}
\textit{1.° coef.}\ \ldots\ldots & +3 , \\
\textit{2.°} \ \text{»} \ \ldots\ldots \ \ 0+3\times(-1) = & -3 , \\
\textit{3.°} \ \text{»} \ \ldots\ldots -3-3\times(-1) = & 0 , \\
\textit{4.°} \ \text{»} \ \ldots\ldots \ \ 2+0\times(-1) = & 2 , \\
\textit{5.°} \ \text{»} \ \ldots\ldots \ \ 2+2\times(-1) = & 0 , \\
\textit{6.°} \ \text{»} \ \ldots\ldots -7+0\times(-1) = & -7 .
\end{array}$$

O quociente é $3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7$, e o resto $R = -4 - 7\times(-1) = 3$.

66. *Fórmula de Taylor.* — Mudando x em $x+h$ na funcção inteira $f(x)$, desenvolvendo cada termo pela fórmula do binomio, reduzindo e ordenando segundo as potencias de h, acha-se

$$\begin{aligned} f(x+h) = & \, p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n \\ & + h\,(np_0x^{n-1} + (n-1)\,p_1x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}) \\ & + \frac{h^2}{2!}\,[n(n-1)p_0x^{n-2} + \cdots] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{h^n}{n!}\,(n!\,p_0)\,. \end{aligned}$$

Neste desenvolvimento a primeira linha é a funcção proposta $f(x)$; e qualquer das seguintes se forma da anterior, multiplicando cada um dos termos d'esta pelo expoente de x nesse termo e diminuindo uma unidade ao mesmo expoente. Esta operação chama-se *derivação;* o coefficiente da primeira potencia de h é a *derivada* de $f(x)$, e representa-se por $f'(x)$; o coefficiente de $h^2/2$ é a derivada de $f'(x)$, que se chama *segunda derivada* de $f(x)$ e se representa por $f''(x)$; em geral o coefficiente de $h^r/r!$ é a *derivada de ordem* r de $f(x)$, e representa-se por $f^r(x)$. Segundo estas convenções, a expressão de $f(x+h)$ torna-se em

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots & \\ + \frac{h^r}{r!}f^r(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x)\,. & \end{aligned} \tag{30}$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*. O seu último termo reduz-se a p_0h^n, e é $f^n(x) = n!\,p_0$, como facilmente se veria. Finalmente:

Derivada de $f(x)$ *é o coefficiente da primeira potencia de* h *no desenvolvimento de* $f(x+h)$;

A derivada da funcção inteira obtem-se multiplicando cada termo da funcção pelo respectivo expoente de x *e diminuindo uma unidade a este expoente.*

67. Por ser $f''(x)$ a primeira derivada de $f'(x)$, $f'''(x)$ a primeira derivada de $f''(x)$, etc., teremos

$$f'(x+h)=f'(x)+hf''(x)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x),$$

$$f''(x+h)=f''(x)+hf'''(x)+\cdots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^n(x), \quad (31)$$

etc.

Do mesmo modo será tambem

$$f(h+y)=f(h)+yf'(h)+\cdots+\frac{y^n}{n!}f^n(h).$$

Fazendo nesta expressão $h=0$, resulta a *fórmula de Maclaurin*,

$$f(y)=f(0)+yf'(0)+\cdots+\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+p_0y^n;$$

e fazendo $y+h=x$, vem

$$f(x)=f(h)+(x-h)f'(h)+\cdots+\frac{(x-h)^n}{n!}f^n(h). \quad (32)$$

68. Na funcção $f(x, y)$ de duas variaveis *independentes* podem dar-se a x e a y accrescimos quaesquer. Mudando x em $x+h$ virá

$$f(x+h, y)=f(x, y)+hf'_x(x, y)+\frac{h^2}{2!}f''_x(x, y)+\cdots,$$

designando por $f^r_{x^r}(x,y)$ a derivada de $f(x,y)$, de ordem r a respeito de x; para formar esta derivada não se considera y como variavel.

Se depois dermos a y o accrescimo k, será tambem

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+hf'_x(x,y+k)+\cdots$$

Neste último desenvolvimento $f^r_{x^r}(x,y+k)$ é ainda uma funcção de y, e por (30) teremos

$$f(x,y+k)= f(x,y)+kf'_y(x,y)+\frac{k^2}{2!}f''_{y^2}(x,y)+\cdots$$

$$f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+kf''_{x,y}(x,y)+\cdots$$

etc.,

onde $f'_y(x,y)$ representa a respeito de y o mesmo que $f'_x(x,y)$ a respeito de x e, em geral, $f^r_{x^p,y^q}(x,y)$ é o resultado que se obtém derivando p vezes em ordem a x e q vezes em ordem a y a funcção $f(x,y)$. É claro que será sempre $r=p+q$; e que a ordem das derivações é arbitraria, pois que se chegaria ao mesmo resultado dando primeiro o accrescimo k a y.

Das relações precedentes resulta a fórmula

$$f(x+h,y+h)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+kf'_y(x,y) \tag{33}$$

$$+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y)+hkf''_{x,y}(x,y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x,y)$$

$$+\text{etc.}$$

Seja, por exemplo, $f(x,y)\equiv ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f;$

as primeiras derivadas em ordem a x e y são

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2by + 2cx + 2e\,, \\ f'_y(x,y) &= 2ay + 2bx + 2d\,; \end{aligned} \tag{34}$$

a segunda derivada relativamente a x e y obtém-se derivando $f'_x(x,y)$ em ordem a y ou $f'_y(x,y)$ em ordem a x, e de qualquer dos modos se acha

$$f''_{x,y}(x,y) = 2b\,.$$

As segundas derivadas em ordem a x ou a y são $2c$ e $2a$.

69. De (30) deduz-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon\,,$$

sendo ε uma quantidade que se annulla para $h=0$.

D'esta relação resulta a seguinte definição:

Derivada da funcção $f(x)$ *é o limite da razão* $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ *quando* h *tende para zero.*

70. Supponhamos que a funcção $f(x)$ é definida por operações indicadas sobre outras funcções; consideremos os casos seguintes:

1.° *Somma.* A derivada de

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + \cdots\,,$$

é evidentemente

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) - f'_3(x) + \cdots$$

2.° *Producto.* Mudando x em $x+h$ no producto

$$f(x)=f_1(x)\times f_2(x)\times\cdots,$$

teremos

$$f(x+h)=\left(f_1(x)+hf_1'(x)+\cdots\right)$$
$$\times\left(f_2(x)+hf_2'(x)+\cdots\right)\times\text{etc.};$$

e o coefficiente da 1.ª potencia de h neste desenvolvimento é

$$f'(x)=f_1'(x)\times f_2(x)\times\cdots$$
$$+f_2'(x)\times f_1(x)\times\cdots+\text{etc.}$$

Logo, *a derivada do producto é a somma dos productos que se formam multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

3.° *Quociente.* Representando por $f(x)$ o quociente da divisão de $f_1(x)$ por $f_2(x)$, será $f_1(x)=f(x)\times f_2(x)$, e pela regra anterior

$$f_1'(x)=f'(x)\times f_2(x)+f_2'(x)\times f(x);$$

donde se tira, eliminando $f(x)$,

$$f'(x)=\frac{f_1'(x)\times f_2(x)-f_2'(x)\times f_1(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

Logo, *a derivada do quociente é o quociente que se obtém dividindo pelo quadrado do divisor a differença entre os productos da derivada do dividendo multiplicada pelo divisor e da derivada do divisor multiplicada pelo dividendo.*

Uma *constante* a pode ser considerada como coefficiente da potencia *zero* da variavel, e a sua derivada é nulla. Portanto, se fôr

$$f(x)=\frac{a}{f_2(x)},$$

a derivada d'esta fracção será

$$f'(x)=-\frac{af_2'(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

4.° *Potencia*. A potencia inteira é o producto de factores eguaes; por conseguinte a derivada de $f(x)=[f_1(x)]^n$ será (2.°)

$$f'(x)=n[f_1(x)]^{n-1}\times f_1'(x).$$

Logo, *a derivada da potencia* n *de* f(x) *forma-se multiplicando a potencia* n — 1 *da mesma funcção pelo expoente* n *e pela derivada de* f(x).

Assim, por exemplo, a derivada de $(x-a)^n$ é $n(x-a)^{n-1}$, porque neste caso a funcção dada é $x-a$, cuja derivada é 1. O mesmo resultaria do desenvolvimento de

$$(x+h-a)^n=[(x-a)+h]^n,$$

onde o coefficiente da primeira potencia de h é $n(x-a)^{n-1}$.

71. Se numa dada funcção $f(u,v)=y$ as variaveis $u=\varphi(x)$ e $v=\psi(x)$ são funcções d'uma variavel independente x, os accrescimos i, k e l de y, de u e de v, correspondentes ao accrescimo h de x, são

$$k = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \cdots$$

$$l = h\psi'(x) + \frac{h^2}{2}\psi''(x) + \cdots$$

$$i = kf'_u(u, v) + lf'_v(u, v) + \cdots$$

Segundo os valores de k e l, a última expressão torna-se em

$$i = f'_u(u, v) \times \left[h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \cdots\right]$$
$$+ f'_v(u, v) \times \left[h\psi'(x) + \frac{h^2}{2}\psi''(x) + \cdots\right] + h^2\varepsilon ,$$

representando por $h^2\varepsilon$ todos os termos restantes, que teem por factores potencias de h não inferiores á segunda.

Designando por $u,'$ v' e y' as primeiras derivadas de u, de v e de y, o coefficiente da 1.ª potencia de h no 2.º membro d'este desenvolvimento é

$$y' = u' . f'_u(u, v) + v' . f'_v(u, v) .$$

As derivadas f'_u e f'_v chamam-se *parciaes*, por se tomarem em ordem a uma variavel sómente: e da relação precedente resulta que:

A derivada d'uma funcção composta é a somma dos productos de cada derivada parcial da funcção pela derivada da variavel correspondente.

Cor. 1. No caso da *funcção de funcção* é $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, e a derivada

$$y' = u' . f'_u(u) .$$

Cor. 2. Na relação $f(x, y) = 0$ a cada valor attribuido a x correspondem valores determinados de y, e esta variavel é funcção *implícita* da independente x. Pelo princípio antecedente será $f'_x(x, y) + y' \cdot f'_y(x, y) = 0$, pois que a derivada de x é a unidade; e d'esta relação tira-se

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \cdot$$

Assim, por exemplo, na equação do 2.° grau a duas variaveis será

$$y' = -\frac{by + cx + e}{ay + bx + d}, \tag{35}$$

attendendo ás expressões (34).

72. Se fôr dada a funcção inteira do grau n

$$f(x) \equiv p_{n-1}x + p_{n-2}x^2 + \cdots + p_0 x^n ,$$

que se annulla para $x = 0$, sejam ρ_1 o módulo de x e ρ_2 o maior dos módulos dos coefficientes; por (24) teremos *mod.* $f(x) < \rho_2 \left(\rho_1 + \rho_1^2 + \cdots + \rho_1^n\right)$, ou

$$\text{mod.}\, f(x) < \rho_2 \cdot \frac{\rho_1 - \rho_1^{n+1}}{1 - \rho_1},$$

segundo a regra para a formação do módulo do producto e da potencia.

D'esta desegualdade conclue-se pór maioria de razão, para valores de $\rho_1 > 1$,

$$\text{mod.}\, f(x) < \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1} ;$$

e pode tornar-se *mod.* $f(x)$ inferior a qualquer quantidade positiva δ, determinando ρ_1 pela condição $\rho_1\rho_2/(1-\rho_1)<\delta$ ou

$$\rho_1<\frac{\delta}{\rho_2+\delta}=r.$$

Cor. 1. Ordenando a funcção $f(x)$ segundo as potencias ascendentes da variavel, o expoente de x no primeiro termo Ax^k será um inteiro positivo que pode ser zero. Fazendo

$$f(x)=Ax^k(1+\varepsilon),$$

será ε uma funcção de x que se annulla para $x=0$; podemos, pois, determinar uma quantidade positiva r tal, que para todos os valores de x, cujos módulos estejam comprehendidos entre 0 e r, o módulo de ε seja inferior a 1 ou a qualquer quantidade assignavel.

Cor. 2. Se a funcção $f(x)$ estiver ordenada segundo as potencias descendentes da variavel, fazendo

$$f(x)=A'x^n(1+\varepsilon),$$

será ε uma funcção de x que se annulla para $1/x=0$. Por consequencia pode sempre determinar-se uma quantidade positiva $1/r$ tal, que para todos os valores de $1/x$ cujos módulos sejam inferiores a $1/r$, ou antes, para todos os valores de x cujos módulos sejam superiores a r, o módulo de ε seja inferior a 1 ou a qualquer quantidade assignavel.

Cor. 3. Sendo reaes a variavel e os coefficientes, é sempre possivel dar a x um valor positivo r tal, que o signal da funcção, depois de ordenada, seja o do seu primeiro termo. O mesmo succederá para todos os valores de x *menores* que r, se os termos da funcção procedem na ordem *crescente* dos seus graus; e para todos os valores de x *maiores* que r, se aquella ordem é *decrescente.*

Cor. 4. Pela fórmula de Taylor a differença $f(x+h)-f(x)$ annulla-se com h, e portanto o módulo respectivo pode tornar-se menor que qualquer quantidade assignavel. Por conseguinte a funcção, sendo real, passa por differenças insensiveis do valor $f(a)$ a outro $f(b)$ quando a variavel x passa do mesmo modo do valor real a para b.

É isto que se entende por *continuidade* da funcção. Não é essencial que na passagem de $f(a)$ para $f(b)$ a funcção proceda sempre no mesmo sentido; pode crescer e diminuir durante este intervallo, *alternadamente* mas *continuamente*. Os termos *crescer* e *diminuir* tomam-se aqui no sentido algébrico, isto é: diremos que z é um valôr *intermédio* a t e u, quando $z-t$ e $u-z$ tiverem o mesmo signal.

CAPÍTULO III

Composição das equações.

73. Dizem-se *algébricas, racionaes e inteiras* as equações da forma $f(x)=0$, sendo $f(x)$ uma funcção inteira (*n.*° *64*). O *grau* d'esta equação é o grau n de $f(x)$.

Com aquella forma a equação está *transposta*; e tambem se suppõe *reduzida, ordenada* e *completa*. Quando se não verificar a última condição, restituiremos os termos que faltam, dando a cada um o coefficiente zero. Assim se entenderão sempre os enunciados; quando se falar do 1.°, 2.°, e *último* termo, deve entender-se que se trata do termo dos graus n, $n-1$ e zero.

Os coefficientes p_0, p_1, etc. suppõem-se inteiros; se o não fossem multiplicava-se toda a equação pelo denominador commum. O primeiro p_0 suppõe-se positivo; se o não fosse, multiplicava-se a equação por -1.

Raiz da equação $f(x)=0$ é todo o numero a que torna

$f(a)=0$. De (29) resulta que, sendo a raiz da equação $f(x)=0$, é $f(x)$ divisivel por $x-a$; e vice-versa.

74. *Se o valor real ou imaginario* x_0, *substituido por* x *na funcção inteira* $f(x)$ *de coefficientes reaes ou imaginarios, não faz* mod. $f(x_0)=0$, *ha sempre uma quantidade real ou imaginaria* h *que torna* mod. $f(x_0+h) <$ mod. $f(x_0)$.

Se fosse *mod.* $f(x_0)=0$, seria x_0 raiz da equação $f(x)=0$. Não sendo assim, pode o mesmo valor x_0 annullar successivamente $f'(x)$ e algumas das derivadas seguintes de $f(x)$, menos a última que é constante; se fôr p a ordem da primeira que não se annulla, de (30) tira-se

$$\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=1+h^p.\frac{f^p(x_0)}{p!\,f(x_0)}+\cdots+h^n.\frac{f^n(x_0)}{n!\,f(x_0)},$$

e representando por Q o quociente que está no 1.° membro d'esta egualdade, será (*n.° 61*, *2.°*)

$$\text{mod. Q}=\frac{\text{mod.}\, f(x_0+h)}{\text{mod.}\, f(x_0)}.$$

Sejam α e ρ o augmento e o módulo de h, α_k e ρ_k os mesmos elementos para o coefficiente de qualquer potencia k de h no desenvolvimento precedente; teremos (*n.os 61 e 63*)

$$Q=1+\rho_p\,\rho^p\left[\cos(\alpha_p+p\alpha)+i\,\text{sen}\,(\alpha_p+p\alpha)\right]+S,$$

sendo S a somma dos termos restantes.

Determinando α pela condição $\alpha_p+p\alpha=\pi$, virá

$$Q=1-\rho_p\,\rho^p+S',$$

e os termos de S' teem os mesmos módulos que os de S, a saber, $\rho_{p+1}\,\rho^{p+1}$, $\rho_{p+2}\,\rho^{p+2}$, ... $\rho_n\,\rho^n$, dos quaes todos podem ser zero menos o último. Por outra parte, para valores δ de ρ, que satisfaçam á condição $\rho_p\,\rho^p < 1$, é *mod.* $(1-\rho_p\,\rho^p) = 1-\rho_p\,\rho^p$; e portanto (24)

$$\text{mod.}\,Q < (1-\rho_p\,\rho^p) + \text{mod.}\,S'\,.$$

Mas é tambem *mod.* $S' < \rho_{p+1}\,\rho^{p+1} + \rho_{p+2}\,\rho^{p+2} + \cdots + \rho_n\,\rho^n$; d'onde resulta, por maioria de razão,

$$\text{mod.}\,Q < 1 - (\rho_p\,\rho^p - \rho_{p+1}\,\rho^{p+1} - \cdots - \rho_n\,\rho^n)\,.$$

Como os módulos são positivos, no parenthesis d'esta expressão só o primeiro termo é positivo. Ora pode achar-se sempre um numero r tal (*n.° 72, cor. 3*), que para $\rho \overline{\overline{<}} r$ aquelle primeiro termo seja maior que a somma dos restantes. Logo, dando a ρ o menor dos valores r e δ, virá *mod.* $Q < 1$ e portanto *mod.* $f(x_0+h) <$ *mod.* $f(x_0)$.

73. O principio fundamental da theoria das equações, ou *theorema de Dalembert*, é o seguinte:

Toda a equação algébrica racional e inteira tem pelo menos uma raiz, real ou imaginaria.

Dando a x todos os valores possiveis, reaes ou imaginarios, virão para *mod.* $f(x)$ diversos valores, um dos quaes será menor que todos os que forem differentes d'elle; este minimo não pode deixar de ser zero. Com effeito, se o minimo fosse *mod.* $f(a) = A$, differente de zero, haveria uma quantidade h que tornaria *mod.* $f(a+h) < A$ e o numero A não seria o menor valor de *mod.* $f(x)$, como se tinha supposto.

Contra esta demonstração tem-se objectado que *mod.* $f(x)$, decrescendo indefinidamente, pode não attingir o limite zero. Entretanto notaremos que *mod.* $f(x)$ não se approxima de zero quando *mod.* x cresce indefinidamente, pois que além d'um certo limite estas duas grandezas são conjunctamente crescentes (*n.° 72, cor. 2*); e para valores finitos de *mod.* x, o valor minimo de *mod.* $f(x)$ não pode deixar de ser zero, como se acaba de ver.

76. Pois que a equação $f(x)=0$ tem pelo menos uma raiz, designando por a_1 esta raiz, teremos (*n.° 65*)

$$f(x)\equiv(x-a_1).f_1(x)\ ,$$

sendo $f_1(x)$ um polynomio racional e inteiro do grau $n-1$. A equação $f_1(x)=0$ tem do mesmo modo uma raiz a_2; e assim teremos successivamente

$$f_1(x)\equiv(x-a_2).f_2(x)\ ,$$
$$f_2(x)\equiv(x-a_3).f_3(x)\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n-1}(x)\equiv p_0(x-a_n)\ .$$

Multiplicando membro a membro estas identidades e a precedente, virá, depois de feitas as reducções,

$$f(x)\equiv p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\ ; \qquad (36)$$

e $a_1,\ a_2,\ldots a_n$ são raizes da proposta $f(x)=0$.

77. Se o polynomio inteiro $f(x)$ de grau n se annulla para $n+1$ valores differentes de x, os coefficientes de todos os seus termos são zero.

Supponhamos o princípio demonstrado para o grau $n-1$; vamos ver que elle tem logar para o grau n e, como está verificado para o 2.° grau, concluimos que é geral.

Seja $f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ um polynomio de grau n que se annulla para $n+1$ valores differentes de x, um dos quaes representamos por a. Teremos

$$f(x)\equiv(x-a).\varphi(x)\ ,$$

e o polynomio inteiro $\varphi(x)$, de grau $n-1$, annulla-se para os restantes n valores de x que annullam $f(x)$. Ora os coefficientes de $\varphi(x)$ estam achados no n.° 65 e, substituindo em cada um a expressão do anterior, vê-se que elles são

$$p_0\,,\quad p_0a+p_1\,,\quad p_0a^2+p_1a+p_2\,,\quad \text{etc.}$$

e todos se annullam segundo a hypóthese; logo será successivamente $p_0=0$, $p_1=0, \ldots p_n=0$, como queriamos demonstrar.

Cor. Na identidade $f(x)=F(x)$ cada potencia de x tem coefficientes eguaes nos dois membros. Com effeito, transpondo os termos, o coefficiente d'essa potencia de x em $f(x)-F(x)\equiv 0$ é a differença d'aquelles coefficientes e deve ser zero.

78. Se em (36) houver factores eguaes, diz-se que a equação $f(x)=0$ tem o mesmo numero de *raizes eguaes*. Sendo, por exemplo, $a_1=a_2=\cdots=a_k$, a proposta tem k raizes eguaes a a_1, e k é a *ordem de multiplicidade* d'esta raiz. Se fôr $k=2$ ou $k=3$, diz-se que a_1 é raiz *dupla* ou *tripla*.

A cada factor (36) corresponde uma raiz da equação $f(x)=0$, a qual por outra parte não tem mais de n raizes (n.° 77); logo,

Uma equação algébrica e inteira do grau n *tem* n *raizes, reaes ou imaginarias, eguaes ou deseguaes.*

A forma mais geral d'aquelle producto será

$$f(x)\equiv(x-a_1)^r\,.\,(x-a_2)^s\cdots(x-a_k)^v \qquad (37)$$

com $r+s+\cdots+v=n$; a proposta $f(x)=0$ só tem raizes *simples*, quando é $r=s=\cdots=v=1$.

O grau da equação $f(x)=0$ pode abaixar-se em tantas unidades quantas forem as raizes conhecidas, dividindo o seu 1.° membro pelo producto dos factores binomios formados com estas raizes.

79. Nas equações de coefficientes reaes as raizes imaginarias são conjugadas duas a duas, e portanto em numero par.

8

Seja, com effeito, $a+bi$ uma raiz da equação $f(x)=0$, ou

$$f(x) \equiv [x-(a+bi)] \times Q .$$

Sendo reaes os coefficientes dos termos de $f(x)$, a quantidade i ha de desapparecer do 2.° membro d'esta identidade quando se effectuarem as multiplicações indicadas; o que não pode ter logar (n.° 58), sem que no producto se encontrem unicamente potencias pares de i. Logo a expressão precedente não se altera quando se muda i em $-i$, e na identidade

$$f(x) \equiv [x-(a-bi)] \times Q'$$

Q' será um polynomio inteiro, como Q; d'onde resulta que $a-bi$ tambem é raiz da proposta.

O producto $[(x-a)+bi] \times [(x-a)-bi]$ é (25) o quadrado $(x-a)^2+b^2$ do módulo commum dos factores; e este trinomio, do 2.° grau e de coefficientes reaes, é positivo para qualquer valor real de x. Por conseguinte, designando *todas* as raizes reaes da proposta por $a_1, a_2, \cdots a_m$, na expressão

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_m) \cdot \varphi(x) \qquad (38)$$

o polynomio $\varphi(x)$ conserva-se positivo para todos os valores reaes de x. Os numeros m e n hão de ser da mesma paridade, porque o grau mn de $\varphi(x)$ deve ser par.

80. Se as equações $f(x)=0$ e $F(x)=0$ tiverem k raizes communs, os seus primeiros membros serão divisiveis pelo producto dos k factores binomios correspondentes. Reciprocamente, se $\varphi(x)$ fôr o polynomio de grau mais elevado que divide conjunctamente $f(x)$ e $F(x)$, ou o *maior divisor commum* d'estes polynomios, as raizes da equação $\varphi(x)=0$ satisfarão as propostas.

Suppondo conhecido $\varphi(x)$, as outras raizes das propostas serão dadas pelas equações

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\,,\quad \frac{F(x)}{\varphi(x)}=0\,.$$

Se houver raizes communs eguaes, $\varphi(x)=0$ conterá cada uma d'ellas com o seu menor grau de multiplicidade; assim, se forem divisiveis $f(x)$ por $(x-a)^k$ e $F(x)$ por $(x-a)^{k+h}$, $\varphi(x)$ será divisivel por $(x-a)^k$ e as equações $F(x)=0$ e $\frac{F(x)}{\varphi(x)}=0$ ainda teem raizes communs.

O maior divisor commum $\varphi(x)$ pode determinar-se, como se verá no n.º seguinte, sem serem conhecidos os binomios elementares em que $f(x)$ e $F(x)$ se decompõem, ou as raizes das equações $f(x)=0$ e $F(x)=0$; e depois abaixam-se os graus d'estas equações por meio da divisão, como já se ensinou.

81. Representemos por A e B dois polynomios ordenados segundo as potencias decrescentes da mesma letra x, e supponhamos que o grau de A não é inferior ao de B. Dividindo A por B, sejam Q o quociente e R o resto, ou

$$A=B\times Q+R\,.$$

Se fôr $R=0$, será B o maior divisor commum de A e B. Não sendo assim, ou R é um numero e os polynomios dados são *primos* entre si, ou R ainda contém x; neste último caso, ordenando R e dividindo B por R, virá

$$B=R\times Q_1+R_1\,.$$

A esta egualdade ainda se applicam as mesmas observações, notando além d'isto que o maior divisor commum de B e R_1 o será tambem de A e B. Continuando por este processo de *divisões successivas*, como para a determinação do maior divisor commum de dois numeros, os graus dos restos vão diminuindo constantemente, e ha de por último chegar-se a um resto independente de x ou zero. No primeiro caso os polynomios A e B são primos entre si; no segundo caso o divisor da última divisão é o maior divisor commum dos mesmos polynomios.

É evidente que em cada uma d'estas operações pode multiplicar-se ou dividir-se o dividendo ou o divisor por um factor primo com o outro termo da mesma operação. Faz-se uso d'este princípio para simplificar o cálculo, que é sempre muito laborioso, procedendo do modo seguinte.

Primeiro, supprime-se no divisor qualquer factor, que não contenha x e seja commum a todos os termos d'aquelle polynomio. Depois evita-se o emprego de coefficientes fraccionarios, multiplicando cada dividendo parcial por um factor conveniente, que tambem não contenha x. Se forem k e m, respectivamente, os coefficientes dos primeiros termos do dividendo e do divisor, depois de simplificados, e $m=\alpha\beta$, sendo β o factor de m que não se encontra em k, basta multiplicar o dividendo por β para obter o primeiro termo do quociente, por $\alpha\beta^2$ para ter os dois primeiros termos, etc. Se o grau do dividendo exceder numa unidade o grau do divisor, o quociente só tem dois termos e basta multiplicar o dividendo por $\alpha\beta^2$.

Se os polynomios A e B se acharem decompostos em factores do 1.º grau, o seu maior divisor commum é o producto dos factores communs, cada um elevado ao menor expoente com que entra em A e B.

82. Comparando os coefficientes dos termos semelhantes nos dois membros da identidade

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n = p_0 (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

e attendendo á regra da multiplicação binomial, resultam as egualdades

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0 , \\ p_1 &= -p_0 (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) , \\ p_2 &= p_0 (a_1 a_2 + \cdots + a_{n-1} a_n) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x \ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n \cdot p_0 a_1 a_2 \cdots a^n . \end{aligned} \qquad (39)$$

D'estas relações se conclue, suppondo por brevidade $p_0 = 1$, que:

1.° *O coefficiente do 2.° termo da equação é a somma das raizes respectivas, tomadas com signal contrario.*

2.° *O coefficiente do 3.° termo é a somma dos productos distinctos das raizes, tomadas duas a duas,*

3.° *O coefficiente do 4.° termo é a somma, com signal contrario, dos productos distinctos das raizes tres a tres,* etc.

4.° *O ultimo termo é o producto das raizes, com o mesmo signal ou com signal contrario conforme a equação é de grau par ou impar.*

Estas relações já eram conhecidas para a equação do 2.° grau. São evidentes os termos em que os enunciados se modificariam, quando fosse p_0 differente de 1.

83. A funcção $f(x)$ de grau n tem, como se viu, n divisores do 1.° grau. Combinando-os em todas as ordens possiveis, dois a dois, tres a tres, etc., vê-se que o mesmo polynomio admitte $n(n-1)/2$ divisores do 2.° grau, $n(n-1)(n-2)/3!$ divisores do 3.° grau, etc.

Exercicios.

37. Achar o maior divisor commum dos polynomios

$$2x^4 + x^3 - 29x^2 - 34x + 24\,, \quad 4x^3 + 4x^2 - 21x + 9.$$

38. Resolver as equações cujos primeiros membros são os polynomios do *Ex.* 37.

39. Compôr a equação cujas raizes são $-\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{3}{2}$, 2,

40. Compôr $\varphi(x)$, sabendo que $1 \pm \sqrt{-3}$ e $1 \pm \sqrt{-2}$, são as raizes da equação $\varphi(x) = 0$.

41. Compôr a equação cujas raizes são $-\frac{1}{2}$, 1, $1 \pm \sqrt{-3}$.

CAPÍTULO IV.

Transformação das equações.

84. *Transformar a equação* f(x) = 0 *noutra que tenha as mesmas raizes com signaes contrarios.*

Segundo as relações (39), muda-se o signal a todos os termos cujos graus são de paridade differente do grau da proposta.

85. *Transformar a equação* f(x) = 0 *noutra cujas raizes sejam* h *vezes maiores.*

Da condição de transformação $y = hx$ tira-se $x = y/h$. Desembaraçando de denominadores, a transformada torna-se em

$$p_0 y^n + p_1 h y^{n-1} + \cdots + p_n h^n = 0 ;$$

portanto a transformação opera-se, mudando x em y e multiplicando cada coefficiente por uma potencia de h, cujo grau é complemento do expoente de x no mesmo termo para o grau da proposta.

Sendo inteiros h e os coefficientes da equação, os da transformada tambem o serão; mas estes últimos podem ser numeros muito elevados.

Na mesma hypóthese, fazendo $h = p_0$ e dividindo por esta quantidade, a transformada torna-se em

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_n p_0^{n-1} = 0 ;$$

por onde se vê que sempre se pode transformar uma equação de coefficientes inteiros noutra da mesma forma, em que o coefficiente do 1.º termo é a unidade.

Convirá fazer a transformação precedente com um valor fraccionario de $h = 1/k$, isto é, tornar as raizes k vezes menores, quando d'ahi não resultem coefficientes fraccionarios. Fazendo, por exemplo, $x = 12y$ na equação $x^3 - 144x - 10368 = 0$, ella torna-se em

$$y^3 - y - 6 = 0 ,$$

com os coefficientes mais simples.

86. *Transformar a equação* $f(x) = 0$ *noutra cujas raizes tenham menos que as da proposta a quantidade* h.

A condição de transformação é $y = x - h$ ou $x = h + y$, com h positivo ou negativo. Pela fórmula de Taylor a transformada será

$$f(h + y) = f(h) + y f'(h) + \cdots = 0 .$$

Para determinar promptamente os coefficientes d'esta equação notaremos que o resto da divisão de $f(x)$ por $x - h$ é $f(h)$, e o quociente Q_1 d'esta operação acha-se dividindo $f(x) - f(h)$ por $x - h = y$; teremos pois

$$Q_1 = f'(h) + \frac{1}{2} y f''(h) + \cdots .$$

Dividindo depois Q_1 por $y = x - h$, acha-se o resto $f'(h)$ e o quociente

$$Q_2 = \frac{1}{2} f''(h) + \cdots ;$$

e assim por deante. Logo os coefficientes da transformada são os restos d'estas divisões por $x - h$; e cada um d'elles se forma, como o dividendo seguinte, pelo processo do n.º 65. É o que melhor se verá num exemplo.

Seja $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ e procure-se a transformada em $y=x+2$; convém dar ao calculo a disposição seguinte, fazendo $h=-2$:

Coef. da proposta ..	$2, \quad 0, -2, +5, -4$
1.ª divisão	$2, -4, +6, -7, +10$;
2.ª »	$2, -8, +22, -51$;
3.ª »	$2, -12, +46$;
4.ª »	$2, -16$.

A transformada é $2y^4-16y^3+46y^2-51y+10=0$; os coefficientes de Q_1 são $2, -4, +6, -7$; etc. A equação é incompleta, mas restituiu-se o termo em x^3 dando-lhe o coefficiente zero.

87. Com a transformação precedente se resolvem os seguintes problemas:

1.º *Desembaraçar a equação do 2.º termo.* Ordenando o desenvolvimento *(n.º 66)*, é

$$f(y+h)=p_0y^n+(p_1+np_0h)y^{n-1}$$
$$+\left[p_2+(n-1)p_1h+\frac{n(n-1)}{2}p_0h^2\right]y^{n-2}+\cdots=0\;;$$

e determinando h de modo que seja $p_1+np_0h=0$, d'onde se tira

$$h=-\frac{p_1}{np_0},$$

desapparece da transformada o 2.º termo. Por ser np_0 differente de zero, o valor de h é finito e determinado; o problema é sempre possivel, e tem uma solução única. A somma das raizes da transformada é zero (39).

2.° *Reduzir á unidade o coefficiente do 1.° termo e desembaraçar a equação do 2.° termo, sem introduzir coefficientes fraccionarios.* Pela primeira condição faremos $y = p_0 x$, e a transformada resultante é

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_0 p_2 y^{n-2} + \cdots = 0\ ;$$

pela segunda condição faremos $y = y_1 - \frac{p_1}{n}$ ou, fazendo $z = ny_1$,

$$y = \frac{z - p_1}{n}\ .$$

Esta última transformação não introduz denominadores; e não influe nos coefficientes dos termos de graus n e $n-1$, porque o segundo é zero. Estas transformações reduzem-se a uma só pela relação

$$x = \frac{z - p_1}{np_0}\ .$$

Do mesmo modo poderiamos desembaraçar a equação de outros termos; mas, em geral, a transformação que supprimisse um termo faria reapparecer outro, que tivessemos supprimido antes.

88. Para transformar uma equação $f(x) = 0$ noutra, cujas raizes sejam recíprocas das raizes da proposta, muda-se x em $\frac{1}{y}$. Desembaraçando de denominadores e ordenando em sentido decrescente, os coefficientes da transformada são os mesmos de $f(x)$, tomados em ordem inversa.

Cor. Se forem nullos todos os r primeiros termos da equação $f(x) = 0$, esta equação tem r raizes infinitas. Com effeito, na transformada em $1/y$ faltam neste caso os r ultimos termos; e esta equação, sendo divisivel por y^r, tem r raizes eguaes a zero. A cada uma d'ellas corresponde na proposta uma raiz $x = \frac{1}{0}$.

Exercicios.

42. Formar a equação cujas raizes são, com signal contrario, as de $x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 7 = 0$.

43. Reduzir á unidade, sem coefficientes fraccionarios, o coefficiente do 1.º termo da equação $6x^3 - 3x + 2 = 0$.

44. Sendo a, b, c as raizes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, formar a equação cujas raizes são $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$.

45. Sendo a, b, c as raizes da equação $x^3 + qx + r = 0$, achar a equação cujas raizes são $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$.

46. Transformar a equação $f(x) = 0$ noutra racional, cujas raizes sejam os quadrados das raizes da proposta.

CAPÍTULO V.

Limites das raizes.

89. *Limite superior* das raizes d'uma equação é qualquer numero maior que a maior d'ellas. O limite mais conveniente será aquelle que fôr mais próximo da maior das raizes.

Se forem positivos todos os termos, zero é limite superior das raizes da equação. Se os termos com potencias pares da incognita tiverem todos o mesmo signal, contrario ao dos termos com potencias impares de x, a equação não tem raizes negativas. Se houver só termos positivos com potencias pares de x, a equação só tem raizes imaginarias ou nullas, e estas últimas serão em numero par. Se houver só termos positivos com potencias impares de x, a equação tem um numero impar de raizes nullas, uma pelo menos, e as restantes imaginarias. O termo independente de x considera-se de grau par.

Nos outros casos o limite superior das raizes determina-se por differentes méthodos, de que vamos dar a conhecer os principaes.

90. *Méthodo de Newton.* Mudando x em $y+h$ na equação $f(x)=0$, resulta a transformada

$$f(y+h)=f(h)+yf'(h)+\cdots+\frac{y^n}{n!}f^n(h)=0\ .$$

Substituindo h por um numero positivo que torne positivos os valores de $f(h)$, $f'(h)$, . . . $f^n(h)$, da equação $f(y+h)$ não podem resultar raizes positivas para $y=x-h$; portanto na proposta não pode ser $x>h$, donde se segue que

É limite superior das raizes da equação $f(x)=0$ *o numero que, substituido por* x *em* $f(x)$ *e em todas as suas derivadas, dá sempre resultados positivos.*

A derivada de ordem n é $f^n(h)=n!p_0$ e sempre positiva, como o coefficiente p_0 do 1.º termo da equação. A derivada anterior $f^{n-1}(h)$ é do 1.º grau em h, e facilmente se determina o inteiro h que convém á condição $f^{n-1}(h)>0$. Verifica-se depois se este valor satisfaz á condição $f^{n-2}(h)>0$, e no caso contrário juntam-se successivamente a h tantas unidades, quantas sejam necessarias para tornar aquella derivada positiva. Passa-se depois e do mesmo modo para $f^{n-3}(h)$, e assim por deante até se chegar a $f(h)$.

Tendo verificado que $f^r(l)$ e todas as suas derivadas até $f^n(l)$ são positivas, não é necessario experimentar nestas funcções qualquer numero $l+k$, sendo k positivo. Com effeito, teremos por (30)

$$f^r(l+k)=f^r(l)+kf^{r+1}(l)+\cdots+\frac{k^{n-r}}{r!}f^n(l)\ ;$$

e portanto, sendo $f^r(l)>0$, $f^{r+1}(l)>0$, $\cdot\ \cdot f^n(l)>0$, será tambem $f^r(l+k)>0$.

91. *Méthodo de Lagrange.* — Supponhamos a equação dividida pelo coefficiente p_0 e seja $n-r$ o grau do seu primeiro termo negativo, ou

$$f(x) \equiv x^n + \cdots - P_r x^{n-r} + \cdots - P_{r+s} x^{n-r-s} + \cdots \quad \pm P^n = 0 .$$

Se houver um numero k para o qual seja

$$k^n > P_r k^{n-r} + P_{r+s} k^{n-r-s} + \cdots ,$$

será tambem

$$1 > \frac{P_r}{k^r} + \frac{P_{r+s}}{k^{r+s}} + \cdots ,$$

e qualquer numero $l > k$ satisfaz a esta condição. Logo k será limite superior das raizes positivas da proposta, porque ao segundo membro da desegualdade precedente viriam addicionar-se os termos positivos da equação.

Ora sendo P o maior coefficiente negativo da proposta, a referida desegualdade está contida na seguinte

$$k^n > P\,(k^{n-r} + k^{n-r-1} + \ldots k + 1) = P . \frac{k^{n-r+1} - 1}{k-1} ;$$

esta última ainda se comprehende successivamente nas seguintes

$$k^n > P\frac{k^{n-r+1}}{k-1}, \quad k^{r-1}(k-1) > P, \quad (k-1)^r > P,$$

contentando-nos com valores de $k > 1$, e teremos finalmente

$$k \overline{\overline{>}} 1 + \sqrt[r]{P} .$$

Logo, *é limite superior das raizes d'uma equação a somma da unidade com a raiz do maior coefficiente negativo, de grau egual á differença entre o grau da equação e o expoente de* x *no seu primeiro termo negativo.*

Póde seguir-se outro processo na determinação d'este limite. Sendo P o inteiro immediatamente superior ao maior dos numeros

$$\sqrt[r]{P_r}\,, \quad \sqrt[r+s]{P_{r+s}}\,, \text{ etc.},$$

a desegualdade fundamental é successivamente comprehendida pelas seguintes:

$$k^n > P^r k^{n-r} + P^{r+s} k^{n-r-s} + \cdots,$$

$$k^n > P k^{n-1} + P^2 k^{n-2} + \cdots + P^n = P . \frac{k^n - P^n}{k - P},$$

$$k^n (k - P) > P k^n,$$

contentando-nos com limites superiores a P. Da última tira-se

$$k > 2P,$$

e portanto: *é limite superior o dobro do maior numero obtido quando a cada coefficiente negativo se extrahe a raiz de grau egual á differença entre o grau de equação e o expoente de* x *no termo respectivo.*

Na notação de que nos servimos, o numero r pode ser qualquer desde 1 até n; do mesmo modo s pode ser qualquer inteiro desde 1 até $n-r$, e assim por deante. Se fôr $r=1$, o limite superior é a somma do maior coefficiente negativo mais a unidade.

92. *Méthodo de Bret.*—Seja a proposta, com os signaes de cada termo em evidencia,

$$p_0 x^n + \cdots - p_r x^{n-r} + \cdots - p_{r+s} x^{n-r-s} + \cdots \pm p_n = 0 .$$

Se nos termos positivos substituirmos as respectivas potencias de x pela expressão

$$x^m = (x-1)\quad (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots x + 1) + 1\ ,$$

e reduzirmos os termos semelhantes com os negativos, em que não se faz esta transformação, os coefficientes das potencias $n-r$, $n-r-s$, etc. de x, que correspondem a estes termos negativos, são

$$(p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1})(x-1) - p_r\ ,$$
$$(p_0 + p_1 + \cdots p_{r-1} + p_{r+1} + \cdots + p_{r+s-1})(x-1) - p_{r+s}\ ,$$
etc.

Na primeira d'estas expressões entram os coefficientes de todos os termos positivos que precedem p_r, na segunda todos os que precedem p_{r-s}, etc. Alem d'isto, substituindo por x, qualquer valor $k > 1$, os coefficientes dos outros termos compõem-se só de partes positivas; e portanto, determinando um numero que, substituido por x, torne aquellas expressões positivas este valor de x deverá satisfazer ás condições

$$x > \frac{p_r}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1}} + 1\ ,$$

$$x > \frac{p_{r+s}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1} + p_{r+1} + \cdots + p_{r+s-1}} + 1\ ,$$

etc. ;

e será limite superior das raizes da proposta.

93. O méthodo de Newton, da, em geral, o limite mais próximo da maior das raizes. Quando estas são todas reaes, este limite é o inteiro immediatamente superior á maior; ou mesmo a maior das raizes quando ella é inteira.

Com effeito, representando por h o menor numero inteiro superior á maior raiz positiva da equação $f(x)=0$, as raizes da transformada $f(y+h)=0$ são todas negativas; e designando-as por $-b_1, -b_2, \cdots -b_n$, com os signaes em evidencia, os coefficientes de $f(y+h)$ serão todos positivos *(n.º 39)*. Mas estes coefficientes são $f(h)$ e todas as suas derivadas; por conseguinte h é o limite, achado pelo méthodo de Newton.

Se as raizes são todas reaes e a maior d'ellas é o inteiro h, será $f(h)=0$ e

$$f(y+h)=yf'(h)+\cdots\frac{y^n}{n!}f^n(h)=0.$$

Esta equação tem a raiz $y=0$ e todas as outras negativas; portanto serão positivos, como no caso precedente, os coefficientes $f'(h), \ldots f^n(h)$, e h é o limite achado pelo mesmo méthodo.

Dos méthodos de Lagrange e Bret, deve preferir-se o primeiro quando ha muitos termos negativos, e o segundo quando o primeiro termo negativo é precedido por muitos positivos e os maiores coefficientes negativos estam depois dos menores.

94. Para um numero l ser limite superior das raizes d'uma equação $f(x)=0$ não basta que a substituição de x por l ou por qualquer numero maior que l em $f(x)$ dê sempre resultados positivos; é necessario que estes resultados sejam *significativos.*

Assim em

$$(x-5)^4 \quad (x-3)^2 \quad (x-1)=0$$

qualquer inteiro $k>1$ dá resultados positivos; e **2**, por exemplo, não é limite superior das raizes d'esta equação.

Se unicamente soubermos que não ha numero algum maior que k que dê resultados negativos, só poderemos concluir que a equação não tem raizes superiores a k ou, se tem algumas, cada uma d'ellas é de ordem par de multiplicidade.

95. O limite das raizes negativas da equação $f(x)=0$ é o limite superior das raizes positivas da transformada $f(-x)=0$.

O limite inferior das raizes positivas da mesma equação é o limite superior das raizes da transformada $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Em geral, toma-se zero para limite inferior das raizes positivas.

96. Sejam α e ρ o argumento e o módulo da variavel x, α_r e ρ_r o argumento e o módulo do coefficiente p_r; dividindo a equação pelo coefficiente p_0 do 1.° termo, o módulo d'este termo será ρ^n e o do termo $r+1$ é

$$\frac{\rho_r}{\rho_0}\,\rho^{n-r}=\mathrm{R}_r\;\rho^{n-r}.$$

O *mod.* $f(x)$ não pode ser menor que

$$\rho^n-\mathrm{R}_1\;\rho^{n-1}-\mathrm{R}_2\;\rho^{n-2}\ldots-\mathrm{R}_n;$$

se acharmos para ρ um valor l que torne esta expressão positiva, e tal que o mesmo tenha logar para qualquer valor de $\rho>l$, será l limite superior dos módulos das raizes da equação proposta.

Ora a expressão precedente é funcção de quantidades reaes e tem todos os termos negativos, com excepção do primeiro; logo será *(n.° 91)*

$$l=1+\mathrm{R}_r,$$

representando por R_r o maior dos módulos R. Teriamos tambem, attendendo á relação entre R_r, ρ_r e ρ_0,

$$l=\frac{\rho_0+\rho_r}{\rho_0};$$

e do mesmo modo se acharia o limite superior dos módulos das raizes da transformada em $\frac{1}{y}$, ou

$$l_1 = \frac{\rho_n + \rho_s}{\rho_n},$$

sendo ρ_n o módulo do último termo da proposta e ρ_s o maior dos módulos dos coefficientes dos outros termos. Invertendo, seria $\frac{\rho_n}{\rho_n + \rho_s}$ o limite inferior dos módulos das raizes da proposta.

Exercícios.

47. Com as raizes $\pm\sqrt{8}$ e $\frac{7 \pm \sqrt{-3}}{2}$ formar a equação $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 56x - 104 = 0$.

48. Achar pelo 1.º méthodo o limite superior das raizes da equação precedente.

49. Resolver o mesmo problema pelos outros dois méthodos.

50. Achar pelo 1.º méthodo o limite superior das raizes da equação $4x^5 - 32x^4 + 55x^3 + 86x^2 - 179x - 84 = 0$.

51. Resolver o mesmo problema pelos outros dois méthodos.

CAPÍTULO VI.

Raizes eguaes.

97. O polynomio inteiro $f(x)$ de grau n é, em geral, da forma (37).

Se as raizes a_1 e a_2 da equação $f(x)=0$ são da mesma ordem r de multiplicidade, é

$$(x-a_1)^r.(x-a_2)^s=[(x-a_1)(x-a_2)]^r=X^r$$

e a_1 e a_2 são as raizes da equação do 2.° grau $X=0$. Se a proposta tem m raizes $a_1, a_2, \ldots a_m$ da mesma ordem r de multiplicidade, a parte correspondente de $f(x)$ é

$$[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)]^r=X_r^r,$$

e as quantidades $a_1, a_2, \ldots a_m$ são raizes simples da equação $X_r=0$, de grau $m<n$.

98. Dando ao producto (37) a forma

$$f(x)=(x-a_1)^r.Q,$$

o polynomio

$$Q=\frac{f(x)}{(x-a_1)^r}$$

não é divisivel por $x-a_1$; e a derivada de $f(x)$ será (*n.° 70, 2.°*)

$$\begin{aligned} f'(x)&=r(x-a_1)^{r-1}.Q+(x-a_1)^r.Q' \\ &=(x-a_1)^{r-1}.[rQ+(x-a_1)Q'], \end{aligned} \qquad (i)$$

designando por Q' a derivada de

$$Q=(x-a_2)^s\cdots(x-a_k)^v.$$

Do mesmo modo teremos

$$Q' = s\,(x-a_2)^{s-1}.\,R + (x-a_2)^s.\,R',$$

$$R = \frac{f(x)}{(x-a_1)^r.(x-a_2)^s}.$$

Se em (37) houvesse só tres factores e fosse $f(x) = (x-a_1)^r.$ $(x-a_2)^s.(x-a_3)^t$, seria $R = (x-a_3)^t$ e

$$R' = t\,(x-a_3)^{t-1} = t.\frac{f(x)}{(x-a_1)^r.(x-a_2)^s.(x-a_3)};$$

donde resultaria

$$f'(x) = r.\frac{f(x)}{x-a_1} + s.\frac{f(x)}{x-a_2} + t.\frac{f(x)}{x-a_3}.$$

É evidente que se acharia para a derivada uma expressão análoga á precedente, no caso de serem mais de tres os factores differentes de $f(x)$; e em geral teremos

$$f'(x) = r.\frac{f(x)}{x-a_1} + s.\frac{f(x)}{x-a_2} + \cdots + v.\frac{f(x)}{x-a_k}.$$

Esta relação mostra que cada um dos factores differentes de $f(x)$ entra em $f'(x)$ com o respectivo expoente diminuido de uma unidade; por conseguinte entrará em $f''(x)$ com o expoente diminuido em duas unidades, por ser $f''(x)$ a derivada de $f'x$, e em geral:

Se a_1 *é raiz da ordem* r *de multiplicidade da equação* $f(x)=0$, *a mesma quantidade é raiz de ordem* $r-1$ *em* $f'(x)=0$, *de ordem* $r-2$ *em* $f''(x)=0$, *etc.*

Applicando a fórmula (32) a $f(x)$, viria

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^r}{r!}\,f^r(a_1) + \cdots + \frac{(x-a_1)^n}{n!}\,f^n(x_1),$$

pois que, sendo a raiz a_1 de ordem r de multiplicidade, é

$$f(a_1) = f'(a_1) = \cdots = f^{r-1}(a_1) = 0.$$

99. Designando por X_r, como anteriormente, o producto dos factores simples, cuja ordem de multiplicidade em $f(x)$ é r, teremos em geral

$$f(x) = X_1 . X_2^2 . X_3^3 . X_4^4 \ldots,$$

donde resulta (i)

$$f'(x) = X_2 . X_3^2 . X_4^3 \ldots \times S,$$

designando por S o producto dos factores de $f'(x)$ que não entram em $f(x)$. O maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$ é

$$d_1 = X_2 . X_3^2 . X_4^3 \ldots;$$

se fôr $X_2 = X_3 = X_4 = \cdots = 1$, a proposta só tem raizes simples, e é $d_1 = 1$. Logo,

A equação $f(x) = 0$ *tem raizes eguaes quando o maior divisor commum de* $f(x)$ *e da sua derivada é differente da unidade, e vice-versa.*

100. O quociente da divisão de $f(x)$ por d_1, é

$$q_1 = X_1 . X_2 . X_3 . X_4 \ldots$$

Do mesmo modo, representando por d_2 o maior divisor commum entre d_1 e a sua derivada, por d_3 o maior divisor commum entre d_2 e a sua derivada, e assim por deante, teremos

$$d_2 = X_3 . X_4^2 \ldots,$$

$$d_3 = X_4 \ldots,$$

etc.;

e dividindo d_1 por d_2, d_2 por d_3, etc. virão os quocientes

$$q_2 = X_2 . X_3 . X_4 \dots$$

$$q_3 = X_3 . X_4 \dots$$

etc.

Uma nova série de divisões fará conhecer os polynomios

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2},\ X_2 = \frac{q_2}{q_3},\ \text{etc.},$$

que só teem factores simples; e em geral a equação $X_r = 0$, que não tem raizes eguaes, é composta com as raizes de ordem r de multiplicidade da proposta, cujo numero é dado pelo grau de X_r. Nem sempre saberemos resolver estas equações, mas em todo o caso:

É sempre possivel fazer depender a resolução d'uma equação com raizes múltiplas da resolução de equações que só teem raizes simples, e cada uma d'estas equações dá todas as raizes da mesma ordem de multiplicidade da proposta.

101. Se na equação não houver raizes da ordem r de multiplicidade, será $X_r = 1$. O cálculo fará conhecer esta circumstancia, dando $q_r = q_{r+1}$.

Seja, por exemplo, $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$; a derivada é $f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$. Procedendo á divisão de $f(x)$ por $f'(x)$, depois de supprimir no divisor o factor 6 commum aos coefficientes de todos os termos de $f'(x)$, o primeiro resto, dividido por -2, é

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2\ .$$

Continuando as operações, acha-se que este polynomio é o maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$, donde concluimos que a proposta tem raizes eguaes; e seguindo o processo do n.º anterior, forma-se o quadro

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

$$\begin{array}{ll} d_1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & q_1 = x^2 - x - 2 \\ d_2 = x^2 + 2x + 1 & q_2 = x^2 - x - 2 \\ d_3 = x + 1 & q_3 = x + 1 \\ d^4 = 1 & q^4 = x + 1 \end{array}$$

donde se tira

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2} = 1, \quad X_2 = \frac{q_2}{q_3} = x - 2,$$

$$X_3 = \frac{q_3}{q_4} = 1, \quad X_4 = \frac{q_4}{1} = x + 1.$$

Portanto é $f(x) = (x-2)^2 . (x+1)^4$; a proposta não tem raizes simples nem triplas, tem a raiz dupla 2 e a quádrupla -1.

102. Este processo é laborioso, e por isso não se applica ao cálculo das raizes commensuraveis, cuja determinação é facil como adeante se verá.

Ora, suppondo racionaes os coefficientes da proposta, tambem o serão os coefficientes de qualquer das equações $X_r = 0$. Portanto, se X_r fôr do 1.º grau, a raiz correspondente é commensuravel.

Posto isto, se a proposta é do 3.º grau e tem raizes eguaes, ellas são commensuraveis porque só poderão ser *uma* dupla ou *uma* tripla. Se a proposta é do 4.º grau e tem raizes eguaes, ellas só poderão deixar de ser commensuraveis se forem *duas* duplas; neste caso, a equação abaixa-se ao 2.º grau, extrahindo a raiz quadrada ao seu primeiro membro. Finalmente, se a proposta é do 5.º grau, as suas raizes múltiplas, havendo-as, são tambem commensuraveis, excepto se forem duas duplas; mas neste caso haverá uma raiz simples, que é commensuravel, e, dividindo pelo binomio correspondente, a equação abaixa-se ao 4.° grau e reduz-se ao caso anterior.

Em conclusão: o méthodo das raizes eguaes só se applica a equações de raizes incommensuraveis e de grau superior ao 5.°

103. Na indagação do maior divisor commum de uma funcção inteira e da sua derivada pode dispensar-se a primeira divisão. Sejam, com effeito,

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots,$$
$$f'(x)=np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}$$
$$+(n-3)p_3x^{n-4}+\cdots,$$

e multiplique-se $f(x)$ por n^2p_0 para evitar coefficientes fraccionarios *(n.° 81)*. Effectuando a divisão, acha-se o primeiro resto

$$[2np_0p_2-p_1(n-1)p_1]x^{n-2}+[3np_0p_3-p_1(n-2)p_2]x^{n-3}+\cdots,$$

que será o divisor da divisão immediata. Advertindo na composição d'este polynomio, reconhece-se que elle se forma pela regra seguinte:

A partir do 3.° termo de f(x), *multiplicam-se todos os coefficientes por 2, 3, 4, etc. vezes o coefficiente do 1.° termo de* f′(x); *multiplicam-se os coefficientes de* f′(x), *a partir do 2.° termo, pelo coefficiente do 2.° termo de* f(x), *e as differenças entre os segundos productos e os primeiros são os coefficientes do primeiro resto.*

A equação suppoe-se completa. Se fôr $p_1=0$, os coefficientes procuradores são os productos dos coefficientes de $f(x)$, a partir do 3.° termo, respectivamente multiplicados por 2, 3, 4, etc.

Exercicios.

52. Reconhecer se a equação $x^6-2x^5+x^4+8x^3-16x^2-8x+20=0$ tem raizes eguaes.

53. Resolver a mesma equação.

54. Sem praticar a operação, achar o resto da divisão de $x^8-3x^6+2x^4-x^3+1$ pela sua derivada.

55. O mesmo problema para a equação do *Ex.* 52.

CAPÍTULO VII.

Raizes comprehendidas entre dois numeros. Máximos e mínimos.

104. A equação $f(x)=0$ pode sempre suppôr-se desembaraçada de raizes eguaes *(n.º 100)*. Representando por $a_1, a_2, \ldots a_m$ todas as suas raizes reaes, dispostas por ordem de grandezas crescentes, o 1.º membro da proposta terá a forma (38), onde o factor $\varphi(x)$, que só depende das raizes imaginárias, se conserva positivo e differente de zero para todos os valores reaes de x.

Substituindo x em (38) successivamente pelos numeros x_1 e $x_2 > x_1$, e dividindo um dos resultados pelo outro, virá

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1-a_1}{x_2-a_1}\cdot\frac{x_1-a_2}{x_2-a_2}\cdots\frac{x_1-a_m}{x_2-a_m}\cdot\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}.$$

Se para a raiz real a_k é $x_1 < a_k < x_2$, o factor correspondente $\frac{x_1-a_k}{x_2-a_k}$ é negativo. Logo o producto precedente é positivo, e $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem o mesmo signal, quando entre x_1 e x_2 ha um numero par de raizes reaes da equação, ou nenhuma; $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem signaes contrários, quando entre estes limites ha um numero impar de raizes da proposta.

Reciprocamente: *se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem o mesmo signal, entre* x_1 *e* x_2 *ha um numero par de raizes reaes da equação* $f(x)=0$, porque se este numero fosse impar, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teriam signaes contrários; do mesmo modo, *se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem signaes contrários, entre* x_1 *e* x_2 *ha um numero impar de raizes da proposta.*

Os termos *maior* e *menor* tomam-se no sentido algébrico, e zero é um caso dos numeros pares.

105. Suppondo independente da incógnita o último termo da proposta, do theorema precedente deduzem-se os seguintes corollarios:

1.° *As equações de grau impar teem um numero impar de raizes reaes, de signal contrario ao do seu último termo.*

Seja primeiro, com o signal em evidencia,

$$f(x) = p_0 x^n + \cdots - p_n = 0 \,,$$

e $n = 2k + 1$; designando por l o limite superior das raizes positivas d'esta equação, será

$$f(0) < 0, \; f(l) > 0 \,,$$

e entre 0 e l haverá um numero impar de raizes.

Se o último termo da equação fôr positivo, o termo correspondente da transformada em $-x$ é negativo *(n.° 84)*, e esta equação tem um numero impar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

2.° *As equações de grau par, com o último termo negativo, teem um numero impar tanto de raizes positivas como de raizes negativas.*

Neste caso será ainda

$$f(0) < 0 \,, \; f(l) > 0 \,;$$

mas o último termo da transformada em $-x$ conserva-se negativo, e esta equação tem um numero impar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

3.° *As equações de grau par, com o último termo positivo,* *teem um numero par tanto de raizes positivas como de raizes negativas.*

Neste caso é

$$f(0)>0\,,\ f(l)>0\,,$$

tanto na proposta como na transformada em $-x$. As raizes reaes podem ser todas positivas, todas negativas ou faltarem completamente na equação dada.

106. Se em (38) substituirmos x por $x_1<a_1$ e depois fizermos crescer x continuamente até $x=x_2>a_m$, o signal d'um dos factores e o de $f(x)$ muda, todas as vezes que x passa por uma das raizes. No intervallo de duas raizes $f(x)$ passa por differentes estados de grandeza, e entre elles haverá, pelo menos, um *máximo* ou um *mínimo*. A funcção é *máxima* na passagem de crescente para decrescente, mínima no caso contrario.

Ora, pela fórmula de Taylor, para qualquer valor de x é

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon\,,$$

designando por ε uma quantidade que se annulla para $h=0$. Dado um valor x_0 de x, que não torna $f'(x_0)=0$, pode determinar-se um valor r de h *(n.º 72, cor. 3)* tal, que desde $x_0-r=x_1$ até $x_0+r=x_2$ a expressão precedente tenha o signal de $f'(x_0)$; e estreitando estes limites até não comprehenderem raiz alguma da equação $f'(x)=0$, $f'(x)$ conservará o mesmo signal *(n.º 104)* desde $f'(x_1)$ até $f'(x_2)$.

Posto isto, imaginemos o intervallo x_2-x_1 dividido em partes eguaes θ, tão pequenas quanto se quizer, e entre os numeros resultantes

$$x_1,\ x_1+\theta,\ x_1+2\theta,\ldots,\ x_2$$

tomem-se dois consecutivos quaesquer, que designaremos por

$$x_1+(m-1)\,\theta=x',\quad x_1+m\theta=x'+\theta\,.$$

A expressão

$$\frac{f(x'+\theta)-f(x')}{\theta}$$

conserva o signal de $f'(x_0)$ em toda a extensão dos valores de x, desde x_1 até x_2. Por conseguinte, se $f'(x_0)$ é positiva, $f(x)$ é *crescente* desde $f(x_1)$ até $f(x_2)$, pois que em todo o intervallo é $f(x'+\theta) > f(x')$; se $f'(x_0)$ é negativa, a funcção $f(x)$ é *decrescente*.

Temos supposto $f'(x_0)$ differente de zero. Se, porém, fôr $f'(x_0)=0$ e $x_0=x_1+m\theta$ um numero comprehendido entre x_1 e x_2, estreitem-se estes limites de modo que entre elles não haja outra raiz, além de x_0, da equação $f'(x)=0$. Neste caso $f'(x)$ conserva-se positiva, ou negativa, para todos os valores de x desde x_1 até $x_1+(m-1)\theta$; e é respectivamente negativa ou positiva, desde $x=x_1+(m+1)\theta$ até $x=x_2$. Logo $f(x)$ é crescente no primeiro intervallo e decrescente no segundo, ou vice-versa; e, pois que θ se pode tornar menor que qualquer grandeza assignavel, este resultado exprime-se nos seguintes termos:

A funcção inteira de coefficientes reaes cresce com os valores reaes da variavel emquanto a sua derivada não se torna negativa, e decresce em quanto a derivada não se torna positiva.

107. A variação de grandeza de $f(x)$ muda de sentido, como acabamos de ver, quando a derivada $f'(x)$ passa por zero. Portanto a funcção é *máxima* ou *mínima* para todos os valores reaes da variavel x, que sejam raizes da equação

$$f'(x)=0.$$

Se uma d'estas raizes é x_0, teremos

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^2}{2}[f''(x_0)+\varepsilon],$$

sendo ε uma quantidade que se annulla para $h=0$. Suppondo $f''(x_0)\gtrless 0$, podemos dar a h um valor r tão pequeno *(n.º 72, cor. 3)* que o signal de $f''(x_0)+\varepsilon$ seja o de $f''(x_0)$, qualquer que seja o signal de h; e pois que o factor $\frac{h^2}{2}$ é positivo, o accrescimo $f(x_0+h)-f(x_0)$ terá o signal de $f''(x_0)$ para todos os valores de h desde $h=-r$ até $h=+r$.

D'este modo, se $f''(x_0)$ é *positiva*, as differenças

$$f(x_0-r)-f(x_0)\,,\quad f(x_0+r)-f(x_0)$$

são positivas; por conseguinte é

$$f(x_0-r)>f(x_0)\,,\quad f(x_0+r)>f(x_0)\,,$$

e $f(x_0)$ é *minima*. Se $f''(x_0)$ é *negativa*, será

$$f(x_0-r)<f(x_0),\quad f(x_0+r)<f(x_0)$$

e a raiz x_0 corresponde a um *máximo*.

Supponhamos agora que é $f''(x_0)=0$ e representemos por $f^m(x)$ a primeira derivada a partir de $f'(x)$ que não se annulla para $x=x_0$; será

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^m}{m!}[f^m(x_0)+\varepsilon]\,.$$

Se m fôr impar a funcção conserva-se crescente ou decrescente, em quanto $f^m(x)$ se conserva positiva ou negativa; se m fôr par, $f(x_0)$ é máxima ou minima, conforme $f^m(x_0)$ é negativa ou positiva.

CAPÍTULO VIII.

Theoremas de Descartes, Budan e Sturm.

108. As equações suppõem-se reduzidas á forma $f(x)=0$, ordenadas em sentido decrescente, com o 1.° termo positivo e o último independente de x; designaremos por n o grau da proposta.

Dois termos consecutivos de $f(x)$ produzem uma *permanencia* ou uma *variação*, conforme teem o mesmo ou differente signal.

Entre dois termos quaesquer haverá um numero par de variações, ou nenhuma, se ambos teem o mesmo signal. Porquanto, se nos termos intermédios houver mudanças de signal, estas só poderão fazer-se aos pares. A recíproca é evidente.

Se a equação proposta fôr completa, os numeros p e v das suas permanencias e variações hão de satisfazer á condição $p+v=n$; e mudando x em $-x$, as permanencias tornam-se em variações e vice-versa.

Em geral a somma $v+v'$ das variações da proposta e da transformada em $-x$ não pode ser maior que n. O último termo de uma equação que só tem raizes imaginárias é positivo *(n.° 105)*, e portanto esta equação tem um numero par de variações.

109. A multiplicação da equação $f(x)=0$ por $x-a$, sendo a positivo, introduz no producto a raiz positiva a e um numero impar de variações, uma pelo menos.

Com effeito, a primeira variação da proposta dá-se no primeiro termo negativo de $f(x)$. Designando este termo por $-p_r x^{n-r}$, com $p_r>0$, esta parte de $f(x)$ será, com os signaes em evidencia,

$$(p_1x^n+\cdots+p_{r-1}x^{n-r+1})-(p_rx^{n-r}+\cdots)+\cdots;$$

donde resultam para $(x-a) \cdot f(x) = F(x)$ os termos

$$p_0 x^{n+1} + \cdots - (ap_{r-1} + p_r) x^{n-r+1} .$$

O termo $p_0 x^{n+1}$ é positivo e irreductivel; os termos seguintes podem reduzir-se ou produzir variações, e até pode ser $r=1$. Mas em todo o caso subsistirá o termo com x^{n-r+1}, de signal contrário ao primeiro: e entre os dois haverá um numero impar de variações, uma pelo menos.

A segunda variação de $f(x)$ apparece quando se chega novamente a um termo positivo, que designaremos por $p_s x^{n-s}$, com $p_s > 0$; e pode ser $s \geqq r+1$. Em todo o caso, dos termos

$$-(p_r x^{n-r} + \cdots + p_{s-1} x^{n-s+1}) + (p_s x^{n-s} + \cdots) + \cdots$$

de $f(x)$ resultam para $F(x)$

$$-(ap_{r-1} + p_r) x^{n-r+1} - \cdots + (ap_{s-1} + p_s) x^{n-s+1} ;$$

e estes dois termos subsistem sempre, produzindo pelo menos uma variação.

Continuando do mesmo modo, ha de chegar-se a um termo $\pm p_{n-r} x^r$ de $f(x)$, em que pode ser $r=0$, e depois do qual não ha variações ate $\pm p_n$ inclusivamente. Em $F(x)$ o termo com x^{r+1} tem o signal de $\pm p_{n-r}$, em quanto que o último $\mp ap_n$ tem signal contrário áquelle. Por conseguinte em $F(x)$ ha pelo menos uma variação mais do que em $f(x)$.

Por outra parte, sendo $p_0 x^n$ e $\pm p_n$ os termos extremos de $f(x)$, os de $F(x)$, sempre com os signaes em evidencia, serão $p_0 x^{n+1}$ e $\mp ap_n$. Portanto os numeros v e V de variações em $f(x)$ e $F(x)$ são de paridades differentes; e sendo $V > v$, será

$$V - v = 2k + 1 ,$$

com k inteiro e positivo ou zero.