ſeu capitulo quadrati æqualis rebus & numero addes quadrato dimidij rerum numerum æquationis, & totius accipe radicem quadratam, cui adde dimidium numeri rerum, & aggregatum eſt rei æſtimatio. Exemplum: ſit 1 quadratum æquale 10 rebus p:144, duc 5 in ſe fit 25 quadratum dimidij rerum, adde 144 fit 169, cuius ℞ eſt 13, huic adde 5 dimidium numeri rerum, fit 18, æſtimatio rei. Rurſus ſit 1 quadratum æquale $\frac{2}{3}$ rei p: 11, duc $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum in ſe, fit $\frac{1}{9}$, adde ei 11, fit 11$\frac{1}{9}$, accipe ℞ quæ eſt 3$\frac{1}{3}$, cui adde $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum, fit 3$\frac{2}{3}$, rei æſtimatio. Rurſus, ſit 1 quadratum æquale 10 rebus p: 6, duc 5 in ſe dimidium numeri rerum, fit 25, adde ei 6 fit 31, huius ℞ adde 5, dimidium numeri rerum erit rei æſtimatio, ℞ 31 p: 5. Rurſus ſit 1 quadratum æquale rebus ℞ 12 p: 22, duc ℞ 3 in ſe fit 3, quadratum dimidij numeri rerum, adde ei 22 fit 25, huius ℞ eſt 5, cui adde ℞ 3, quod eſt dimidium numeri rerum, fiet rei æſtimatio 5 p: ℞ 5, & ſi in hoc caſu numerus fuiſſet 20, eſſet rei æſtimatio ℞ 23 p: ℞ 3, & ſi fuiſſet numerus 9, eſſet æſtimatio rei ℞ 12 p: ℞ 3, quod eſt dicere, ℞ 27, & ſi fuiſſet 1 quadratum æquale rebus ℞ 12 p: ℞ cub. 10 numeri, duc ut prius ℞ 3, dimidium numeri rerum in ſe, fit 3. adde ei ℞ cub. 10, fit 3 p: ℞ cub. 10, huius accipe radicem, quę eſt ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10, cui adde dimidium numeri rerum & fiet æſtimati rei ℞ 3 p: ℞ v: 3 p: ℞ cub. 10. & hac uarietate exemplorum hic uſi ſumus, ut in reliquis idem fieri poſſe intelligas, tum etiam eadem in duabus ſequentibus regulis experire, quando quidem nos duplici exemplo cotenti erimus. Manifeſtum eſt igitur, quod hic bis addimus, ſcilicet numerum quadrato dimidij rerum, & dimidium rerum radici aggregati, & hoc eſt, quod in carmine diximus, da, bis, quaſi, bis iunge.

REGVLA II.

Si autem numerus quadrato & rebus æqualis ſit, quadrato di- 5
midij numeri rerum adijcies numerum æquationis, & totius, aggregati accipe radicem, à qua minue dimidium numeri rerum, & reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum, 144, æquatur 10 rebus & 1 quadrato, duc 5, dimidium 10 numeri rerum, in ſe, fit 25, huic adde 144 fit 169, huius ℞ eſt 13, à qua abijce 5, dimidium numeri rerum, relinquetur rei æſtimatio 8. Rurſus, ſit 6 æqualis 10 rebus p: 1 quadrato, ducto 5 dimidio rerum in ſe fit 25, adde 6 fit 31, ex huius radice abijce 5, dimidium numeri rerum, fit ℞ 31 m: 5, æquatio.

Ex hoc patet, quod hæc regula à præcedenti ſolum differt, quod Carmi.
minuat dimidium numeri rerũ. Ab aggregati radice, ubi illa iungebat, & hoc eſt, quod in carmine diximus. Ad mi, quaſi, adde primo,

deinde minue, scilicet, adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum postmodum ab aggregati radice.

Cor^m. Ex quo patet quòd differentia ęstimationis quadrati, ęqualis rebus & numero, & numeri æqualis rebus & quadrato, est numerus rerum ad unguem, ubi in eisdem rebus & numeris statuantur, uelut æstimatio quadrati æqualis 10 rebus p:144 est 18, & æstimatio 144 æqualis quadrato & 10 rebus est 8, & differentia 18 & 8 est 10.

REGVLA III.

6 Si uerò res æquales sint quadratis & numero, ducto, ut prius, dimidio numeri rerum in se, & ab eo detracto numero æquationis, radicem residui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum quã residuum est rei æstimatio. Exemplum. 1 quadratum p: 16, æquatur 10 rebus, ducto 5 in se fit 25, ut prius, deinde minue 16 ex 25 relinquitur 9, cuius ℞ quæ est 3, addita uel detracta à 5 dimidio numeri rerum, ostendit rei æstimationes, 8 addita, & 2 detracta, si igitur 10 res sumantur quæ sint 2 erunt 20, & tantum erit quadratum 2 cum 16, item si sumantur 10 res quæ sint 8, erunt 80, & tantum est quadratum 8, addito ei 16. Rursus si dicam, 10 res, æquantur 1 quadrato p: 6, ducto 5 dimidio numeri rerum in se, fit 25, detracto autem 6 relinquitur 19, cuius ℞ addita uel detracta ex 5, ostendit rei æstimationes, maiorem quidem 5 p:℞ 10 minorem uero 5 m:℞ 19.

Notandum. Quod si detractio ipsa numeri, à quadrato dimidij numeri rerum fieri nequit, quęstio ipsa est falsa, nec esse potest quod proponitur, semper autem pro regula generali in hoc tractatu toto est obseruandum, quòd cum ea quæ pręcipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit, nec esse potuit. Nunc autem subiungemus aliquas quæstiones, duas ex Mahumete, reliquas nostras ex omnibus his, quæ nec multiplici positione, nec propria utuntur regula, difficilimas.

QVAESTIO I.

Quæst. I. Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atq; insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaq; quadratum numeri incogniti quem quæris, esse 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m:4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ quadra^ti p:16 m:3 $\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ q̃d^ti p:4 m:3 $\frac{1}{3}$ rebus redde quod est minus, alteri parti, pro uniuersali regula, erũt res 4 $\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ q̃drati p: 4, quare per quartam regulam tertij capituli, diuisi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum q̃drati, & fient res 24 $\frac{24}{25}$ ęquales 23 $\frac{1}{25}$ p: q̃drato, quare per tertiam regulã, du-

ces

tes 12 $\frac{12}{25}$ in ſe, fiet 155 $\frac{469}{625}$, minue 23 $\frac{1}{25}$ fient 132 $\frac{544}{625}$, huius ℞ eſt 11 $\frac{13}{25}$, quam adde ad 12 $\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet ęſtimatio rei quęſita 24, ſcilicet quadrati cuius radix, eſt numerus ille qui quæritur. Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in poſitione rei pro primo numero, fuiſſet quadratum eius operationis fundamentum, & perueniſſes ad 1 quad' q̄dᵐ p:23 $\frac{1}{25}$ æqualia 24 $\frac{24}{25}$ quadrato, quare hæc ſit tibi pro exemplo, nunc ſequamur ſecundam illius.

QVAESTIO II.

Fuerunt duo duces quorũ unusquiſq; diuiſit militibus ſuis aureos 48. Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus ſingulis militibus daret, quæritur quòd unicuiq; milites fuerint? Pone numerum militum minorem 1 rem, maior erit 1 poſ° p:2, quia igitur ſumma diſtribuenda ęqualis fuit, manifeſtum eſt, quòd quantitates erunt proportione ſimiles, eſt autẽ 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 poſᵗᵐ p:2. fit $\frac{1}{12}$ poſᵘ p: $\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorũ hominum, fit $\frac{1}{12}$ quadrati p: $\frac{1}{6}$ poſ', duc uero omnia ad 1 q̄dᵐ, fiet 1 q̄dᵐ p:2 poſᵇ⁹, ęqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & eſt , duc in ſe, fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius ℞ minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro ſingulo, alijs 8 pro ſingulo. multiplicatio autem illa, quando reducitur quadrati pars ad integrum fit per exceſſum hominum, ſcilicet 12 per 2. Et cauſa in hoc eſt, quòd proportio differentiæ ſecundæ ad primam, eſt ut aggregati quòd diuidi debet ad productum ex numero hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, eſt uelut 4 differentiæ aureorum ad 2 differentiam hominum, & per hanc docuit modum operandi in quæſtionibus proportionum, & pręcipuè quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabſurdum eſſet intelligere medium hominem, nedũ quantitatem aliquam alogam ſeu latus. Quęſt. ſecundę.

QVAESTIO III.

Nunc autem proponamus quæſtiones noſtras, quarũ prima eſt ſimilis præcedenti. Duæ ſocietates hominũ, quarũ una continebat 3 homines pluſq; altera, diuiſerũt ęquales aureorum numeros, qui erant 93 plus numero hominum ipſorum utriuſq; ſocietatis ſimul iunctorum, & pro ſingulis hominibus ſocietatis minoris, cõtigerũt aurei 6 plus, quàm hominibus ſingulis maioris ſocietatis. Pones numerũ primę ſocietatis rem unam, habebit igitur ſecunda ſocietas rem & 3 p: quare ſumma aureorum, quę eſt 93 p: utraq; ſocietate, eſt Quęſti tertia.

96 p: duabus rebus, proportio autem excessus aureorū 6 qui contingunt societati minori, ad excessum hominū, scilicet ad 3, est ut summæ aureorum, ad productum ex numero hominum primæ societatis, in numerum hominum secundæ societatis, proportio autem 6 ad 3, dupla est, igitur proportio 2 pos^{um} p: 69 ad 1 q̄d^{m} p: 3 pos^{bus} productum ex 1 pos^{ne} in 1 pos^{em} p: 3, est dupla, igitur dimidium 2 pos^{um} p: 96, quod est 1 pos^{o} p: 48, æquale est, 1 q̄d^{to} p: 3 pos^{bus}, abiecta itaq; 1 pos^{ne} ex utraque parte, fiet 1 q̄d^{m} p: 2 pos^{bus} æquale 48, ducito dimidium 2 in se, fit 1, nam dimidium 2 est 1, huic adde 48, fit 49, huius radix est 7, à qua minue 1 dimidium numeri pos^{um}, habebis æstimationem pos^{is}, & numerum primæ societatis 6, ideo numerus hominum secundæ societatis, est 3, p: scilicet, horum si fiat collectio, addanturq; insuper 93, fiet numerus aureorum 108, primis igitur aurei 18, secundis 12, per capita contigere. Aliter & facilius expertis in operationibus positio fiat ut prius, eritq; summa aureorum 2 pos^{es} p: 96. diuide per positionem & positionem p: 3, habebis $\frac{2\text{ pos. p: }96}{1\text{ pos.}}$ æqualē 6 p: $\frac{2\text{ pos. p: }96}{1\text{ pos. p: }3}$ igitur detracto $\frac{2\text{ pos. p: }96}{1\text{ pos. p: }3}$ ex $\frac{2\text{ pos. p: }96}{1\text{ pos.}}$, relinquitur 6, at ex tali detractione fit $\frac{6\text{ pos. p: }288}{1\text{ quad. p: }3\text{ pos.}}$ igitur hoc est æquale 6. diuisis igitur 6 pos^{bus} p: 288. per 6, exibit 1 q̄d^{m} p: 3 pos^{bus}, nam si diuiso 10 per 2 exit 5, diuiso 10 per 5 exibit 2^{a}, igitur diuisis 6 pos. p: 288. per 6, exit 1 positio p: 48, & hæc æqualia sunt 1 quadrato p: 3 positionibus, quare ut prius, res ualet 6.

1 pos.
1 pos. p: 3.
93
2 pos. p: 96
6 — 2 — 3
1 pos. p: 48
1 q̄d. p: 3 pos.
1 q̄d. p: 2 pos. æq̄. 48

QVAESTIO IIII.

Quæst. 4. Est numerus, cui si addant̄ duę radices, aggregato uero iterū addantur duæ radices ipsius aggregati, fiet totum 10, tunc dices, 10 æqualis est secundo numero & duabus eius radicibus, ponemus igit̄ numerū aggregatum secundum, 1 q̄d^{m}, & hic, cū duabus radicibus, æqualis est 10, igit̄ rei ęstimatio per secundā regulā, est R: 11 m: 1, igit̄ abijce duplū huius ex 10, relinquetur aggregatum 12 m: R: 44, hoc autem ex supposito constat ex q̄drato & duabus radicibus, igitur 1 q̄d^{m} p: 2 pos^{bus} æquatur 12 m: R: 44, ducito 1, dimidium numeri rerum in se, fit 1, adde ei numerum fit 13 m: R: 44, accipe radicem, & ex ea minue 1 dimidium numeri rerum, habebis R: v: 13 m: R: 44 m: 1, hanc igitur duplicatam, si detraxeris ex aggregato, relinquetur numerus primus propositus, 14 m: R: 44 m: R: v: 52 m: R: 704, & ita posses

posses regrediendo quantumlibet procedere, ab ultimo semper inchoando termino. Prolixior autem ero hic in exemplis, quoniam hæc capitula mercaturæ maximè conueniunt, tum quia tyrones in his introducuntur, uelut & paruos pueros solent magistri diligentius minuta quæque docere, tum uerò quòd eadem in reliquis postmodum fabricare possumus.

14 m: R 44 m: R v: 52 m: R 704
duc radices eius R v: 52 m: R 704 m: 2
aggregatum 12 m: R 44
duc rabices huius R 44 m: 2
aggregatum 10

QVAESTIO V.

Inuenias numerum, à quo detracta R cubica, & residuo addita sua quadrata radice, perficiatur primus numerus. Pones itaque residuum illud à quo detraxisti radicem cubicam esse 1 quadratum, addemus itaque ei radicem quadratam & fiet 1 quadratum p: 1 pos^{ne}, & hoc æquale est 1 cubo, nam ex eo quod addito ad 1 quadratum tantum fit quantum erat prius, igitur quod additur æquale est ei quod minuitur, minuitur autem R cubica totius quantitatis, igitur pos^{o} est radix cubica aggregati, quare agregatum est cubus, & hic æqualis est 1 quadrato p: 1 pos. deprime per 1 pos. habebis 1 q̄d^{m} æquale 1 pos. p: 1, positio igitur est R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, at numerus primus fuit cubus positionis, igitur primus numerus est R 5 p: 2. Quæst. quinta.

cubus R 5 p: 2
q̄d^{m} 1 $\frac{1}{2}$ p: R 1 $\frac{1}{4}$
pos. R 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$

QVAESTIO VI.

Quidam ter iuit ad nundinas, in primo itinere retulit duplum eius quod attulerat, in secundo cum detulisset tale duplum secum, rediit cum eisdem pecuniis, & radice earum & duobus aureis plus, hoc totum autem seruauit, rediitque cum eo ad nundinas tertiò, & superlucratus est tantum, quantum esset illud quod produceretur ex pecuniis quas secū attulerat in se ductis, ac etiam quatuor aureos plus, reuersus est autem cum 310 aureis, quero igitur, quantum attulit secum pecuniarum, in primo itinere. Dices retulit aureos 310 & hoc fuit æquale pecuniis secundi itineris & quadrato earum & 4 p:. igitur pecuniæ quas attulit secum in 3^{o} itinere, quadratum æquatur 306 aureis, abiecto communiter numero 4, ponemus igitur pecunias quas secum attulit 1 pos^{cm}, et habebimus 1 q̄d^{m} p: 1 pos^{ne} æquale 306, igitur ex secunda regula, res ualet R 306 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, quod est dicere 17 & tot aureos detulit secum tertio itinere, & tot habuerat in secundo itinere quos seruauerat, dictum est autem, quod in secundo itinere lucratus est radicem eorum quos attulerat & 2 p: & retulit 17, igitur si lucratus fuisset radicem tantum, retulisset 15. igitur posi- Quæst. sexta.

tis pecunijs quas secũ attulit 1 q̃dratum, habebimus 1 q̃dratum p: 1 pos. equalia 15, igitˀ ex secunda regula, res ualet R 15 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & hoc est q̃d lucratus est in secundo itinere, & cum hoc etiam lucratus est aureos 2, lucrum igitur totum fuit eius itineris R 15 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, ipse autem retulit domum aureos 17, igitur iuit cum aureis 15 $\frac{1}{2}$ m: R 15 $\frac{1}{4}$, hæ pecuniæ sunt quas in primo itinere seruauerat, & fuerant duplum eius quod attulerat, primo igitur itinere attulit ad nundinas dimidium 15 $\frac{1}{2}$ m: R 15 $\frac{1}{4}$ aureorum, quod est 7 $\frac{3}{4}$ m: R 3 $\frac{13}{16}$ aureorum.

QVAESTIO VII.

Quæst. 7 Quidam rex proconsuli ducenti exercitum aureos misit 128000, ut 7000 equitum & 7000 peditum conduceret, ea erat stipendij ratio, ut pro singulis 100 aureis, semper 18 pedites plusquam equites conduceret, uenit tribunus quidam militum ad proconsulem cum 1700 peditibus & 200 equitibus, quæritur stipendij ratio. Hæc tertiæ quæstioni affinis est, considera quod 128000, sunt 1280 centena, quia dictum est quod pro singulis centum aureis differentia numeri peditum à numero equitum sit 18, diuide igitur 1280 in duas partes, quarum una ducta per unam quantitatem producat 7000, & similiter reliqua ducta per eandem quantitatem p: 18, producat etiam 7000, igitur posita quantitate equitum pro re, erit quantitas peditum res & 18 p: diuisis igitur 7000 per harum singulas, prouenient aggregata 1280, nam si ex partibus 1280 ductis in rẽ, & rem p: 18, fiunt 7000 & 7000, igitur diuisis 7000 per rem, & 7000 per rem p: 18, exeuntia iuncta facient 1280, ex talium igitur diuisione aggregantur $\frac{\text{pos. }14000\text{ p: }126000}{1\text{ quad. p: }18\text{ pos.}}$ & hoc cum sit æquale 1280, igitur diuiso numeratore per 1280, exit 1 q̃dm p: 18 pos. facta igitur tali diuisione, prodit 10 $\frac{15}{16}$ pos. p: 98 $\frac{7}{16}$, hocque est equale 1 quadrato p: 18 pos. igitur 1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ pos. æquatur 98 $\frac{7}{16}$ igitur res ualet R 110 $\frac{929}{1024}$ m: 3 $\frac{17}{32}$, sed R 110 $\frac{929}{1024}$ est 10 $\frac{17}{32}$, igitur detractis 3 $\frac{17}{32}$, relinquetur rei estimatio 7, & tot equites 100 aureis conducet, & pedites 25, igitur pro 1700 peditibus stipendium debuit esse 6800 aurei, & pro 200 equitibus aurei 2857 $\frac{1}{7}$.

$\frac{7000}{1\text{ pos.}}$ $\frac{7000}{1\text{ pos. p: }18}$

pos. 14000 p: 126000

1 quad. p: 18 pos.

pos. 14000 p: 126000

1280

pos. 10 $\frac{15}{16}$ p: 98 $\frac{7}{16}$

1 quad. p: 18 pos.

1 q̃d. p: 7 $\frac{1}{16}$ position: æqualia 98 $\frac{7}{16}$

QVAESTIO VIII.

Quæst. 8 Fac de 20, tres quantitates analogas, quarum secunda æqualis sit radicibus primæ & tertiæ simul iunctis, pone secundam esse positionem, reliquum erit 20 m: 1 posm, quia igitur ex hoc facere oportet

partes

partes duas, inter quas positio cadat proportione media, eritq; ut ex una in aliam fiat quadratum pos^{is}, quare per 16 6^i Elementorum Ex 5^i 2 Elementorum uel Reg: 6^i libri, ducemus dimidium 20 m: 1 pos^{nis} in se, & fiet 100 m: 10 pos^{bus} p: $\frac{1}{4}$ quadrati, à quo auferemus quadratum positionis, & fiet 100 m: 10 pos^{bus} m: $\frac{3}{4}$ quadrati, huius radicem adde, & minue à medietate 20 p: 1 pos^{nis}, & habebis partes quas uides, ut igitur iungas radices uniuersales harum, fac ut in 3° libro te docui, iunge primo quantitates & habebis 20 m: 1 pos^{em}, deinde multiplica quantitates ipsas inuicem, & iunge cum aggregato quãtitatum earum duplum, & fit totum 20 p: pos^{ne}, huius radix æquatur 1 pos^{ni}, igitur 1 q̄d^{m} æquatur 20 p: 1 pos^{ne}, quare per primam regulam ducemus $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum in se, & fit $\frac{1}{4}$, adde ad 20, fit 20 $\frac{1}{4}$, accipe radicem quæ est 4 $\frac{1}{2}$, & ei adde $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum fit 5, rei ęstimatio, quantitas scilicet media, quare faciemus ex residuo ad 20, duas partes inter quas cadat 5, & erunt alia positione instaurata, uel per regulas sexti libri, 7 $\frac{1}{2}$ p: R̸ 31 $\frac{1}{4}$ & 7 $\frac{1}{2}$ m: R̸ 31 $\frac{1}{4}$, harum radices simul iunctæ sunt 5.

10 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: R̸ v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.
10 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: R̸ v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.

20 m: 1 pos. aggregatum quan.
100 m: 10 pos. p: $\frac{1}{4}$ quad. m: 100 p: 10 pos. p: $\frac{1}{4}$ quad. productum quan.
æquiualens 1 quad.
producti radix 1 pos.
duplum radicis 2 pos.
aggregatum ex quantitatibus & pducto 20 p: 1 pos. cuius radix est æqualis positioni.

QVAESTIO IX.

Fac de 10 duas partes, quarum maior, detractis duabus suis radicibus, æqualis sit minori, additis duabus suis radicibus, constat igitur quod differentia maioris & minoris est, duę radices maioris, & duę minoris, ponatur igitur differentia hæc radix 4 pos^{um}, & ponatur pars una 5 p: R̸ 1 pos^{is}, & alia 5 m: R̸ 1 pos^{is}, & sumat aggregatum, radicum harum partium, & est ex libro quarto, R̸ tota (quam uniuersalissimam appellare solent) 10 p: R̸ v: 100 m: 4 pos^{bus}, & hoc æquatur duplicatum R̸ 4 pos^{um}, quare dimidium dimidio scilicet, R̸ 1 pos^{is}, huic R̸ ultimi, quare quadratum quadrato, scilicet 1 pos^{o} æquabitur 10 p: R̸ v: 100 m: 4 pos^{bus} igitur 1 pos. m: 10 æquatur R̸ v: 100 m: 4 pos^{bus}, quare quadrata quadratis, quæ sunt, 1 quadratum p: 100 m: 20 pos^{bus}, & 100 m: 4 pos. igitur 1 quadratum est æquale 16 pos^{bus}, igitur pos^{o} ęqualis 16, & nos uoluimus differentiam partium esse R̸ 4 pos^{um}, igitur differentia partium fuit R̸: 64, quæ est 8, & sic effugisti q̃d' quadrati, ponendo ℞ positionum.

QVAESTIO X.

Quest. 10 Fuerunt homines in tribus societatibus, & numeri illorum analogi ductoq; numero secundæ societatis, in numerum tertiæ, consurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in hoc considerare, quód perabsurdum est, ut tales numeri sint alogi, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur in qua proportione quadratum dimidij producti ex secunda in tertiam superat aggregatum omnium in numero aliquo quadrato, & inuenies quòd in dupla, capiendo, 1, 2, 4. productum ex dimidio 8, qui fit ex 2 in 4, & est 4 in se, excedit 7 aggregatum in 9 numero quadrato, & hoc uenaberis ex alia positione simplici. Pones igitur totidem res pro his numeris, scilicet 1 pos^{o}, 2 pos^{es}, 4 pos^{es}, harum aggregatum est 7 pos^{es}, adde his cubum 1 pos^{is}, & fiet 1 cubus p: 7 pos^{bus}, & hoc æquatur 8 quadratis, producto secundæ in tertiam, deprime partes per pos^{es}, fit 1 quadratum p: 7 æquale 8 pos^{bus}, quare per tertiam regulam, duc 4 dimidiũ numeri pos^{um} in se fit 16, abijce 7 numerum, relinquitur 9, huius ℞ addita uel detracta à 4 dimidio numeri rerum, ostendit 7, & 1 æstimationes rei, sed quia 1 non est numerus societatis, ideo dicemus quòd res fuit 7, & hic est numerus hominum primæ societatis, secunda igitur habebit homines quatuordecim, tertia 28, constat autem quod cubus, 7 cum aggregato numerorum est 392, & tantum producitur ex 14 secundo numero in 28 tertium.

1 pos.	cubus p:	1 cub.
2 pos.	aggreg.	7 pos.
4 pos.	produc. 3^{e} in 2^{am}	8 q̃d.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.

1 CVm uerò diligenter considerassem in his, uisum est mihi, ut etiam ultrà transgredi liceret, itaq; exemplo deriuatiuorum, quæ iam inuenta fuerant, q̃d' quadrati & quadrati æqualium numero, tum etiam cub' quadrati & cubi æqualium numero, ac reliquorum quatuor, capitulum cõstituerem q̃d' q̃d' quadrati, & q̃d' quadrati & numeri, inuicem æqualium, indeq; æstimatio rei ℞' ℞ est, æstimationis principalium eis correspondentium, uelut si 1 quadratum p: 1 pos^{ne} est æqualis 12, & æstimatio rei est 3, si 1 q̃d' q̃d' quadratum p: 1 q̃d' quadrato æquantur 12, æstimatio rei erit ℞' ℞ 3, indeq; ad excogitanda reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uerò ad alia me transtuli, uisumq; oportunum, ut æquationum naturam spectarem, cumq; & primi coniuncti (sic enim bino-

mium) & apotomę primæ (ſic enim reciſum uocamus) orginem intueter, uiſum eſt, ut in his duæ eſſent diuerſorum generum quantitates, numerus, & aloga pars, ſeu radix. porrò cum ad quadratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in ſe, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uerò conſtituitur in parte aloga, ex triplo quadrati numeri, cum q̃drato radicis in radicem. Igitur proportio partis alogæ in cubo, ad partem alogam in q̃drato, eſt uelut tripli quadrati partis, quæ eſt numerus, cum quadrato partis quæ eſt radix, ad duplum numeri, at proportio tripli quadrati numeri, ad duplum numeri, eſt ipſe numerus cum dimidio. proportio etiam quadrati radicis, ad duplum numeri, eſt quæ prouenit diuiſo tali quadrato per idem duplum, igitur ipſa proportio, eſt numerus ipſe cum dimidio ſui, & tali prouentu, quare aſſumptis totidem quadratis, erunt partes alogę æquales, quare tot quadrata ęquabuntur cubo & numero. Velut in hoc caſu, diuido 3 quadratū radicis, per 4. exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, qui eſt ęqualis numero & dimidio, fit $3\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac æſtimatione $3\frac{3}{4}$ quadrati æquabuntur cubo & alicui numero, & eſt numerus ipſe $\frac{1}{4}$.

res 2 p: ℞ 3
q̃d. 7 p: ℞ 48
cu. 26 p: ℞ 675

Demum uolens diligentius rem perſcrutari, poſui 10 quadrata æqualia cubo, & alicui numero, & poſui partem primam binomij (ſic enim uſus gratia appellabo coniunctum) eſſe, gratia exempli, 3, & conſtitui partem ſecundam 1 poſ^cm^, & hæc eſt radix. quadratum igitur, eſt 9 p: 1 quadrato, & hoc totum eſt numerus & 6 poſ^es^, & hoc eſt radix, at in cubo ut dictum eſt fit pars aloga ex triplo quadrati 3, & eſt 27, et quadrato 1 poſ^is^ quod eſt 1 quadratum, in partem quæ eſt aloga id eſt in 1 poſ^cm^, igitur 27 poſ^es^ p: 1 cubo, æquantur 10 quadratis, in parte aloga id eſt decuplo 6 poſ^m^ quod eſt 60 poſ^es^, igitur dicemus, quòd cubus æquatur 33, poſ^bus^, igitur deprimendo per poſ^es^, quadratum æquatur 33, igitur res eſt ℞ 33.

3 p: 1 poſ.
9 p: 1 q̃d. p: 6 poſ.
27 poſ. p: 1 cu.
60 poſ.
1 cu æqualis 33 poſ.

REGVLA.

Ex his tandem hæc formatur regula breuiſsima. Adde primo numero dimidium ſui, & totum abijce ex numero q̃dratorum reſiduū duces in duplū prioris numeri, & producti ℞ eſt ſecunda pars coniuncti. Exemplū, eſt cubus qui cum numero æqualis eſt 12 q̃dratis, & prima binomij pars eſt 5, adde dimidium 5 ad 5, fit $7\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit $4\frac{1}{2}$, duc $4\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius ℞ eſt ſecunda pars coniuucti, igitur 12 q̃drata & 5 p: ℞ 45, ęqualia ſunt cu bo & 40. Eadem ratione inueni, quòd numerus æquationis, scilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in quadratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, est differentia.

Post hęc deuolui consilium ad explorandum qualitatem capitulorum cub' q̄drati, rerum & numeri, uidiq́, quòd si dixero, cubus & 3 quadrata, ęqualia sunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædam intellecta, ęstimatio rei, cuius prima pars sit numerus, secunda uerò quantitas, alia pars irrationalis. Et sit gratia exempli, hic 1 p: ℞ 5, constat autem quòd coniungendo partes irrationales cubi & quadrati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, seu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq́ ex triplo quadrati numeri, & quadrato irrationalis partis, hoc est autem æquale, in capitulo cub' quadrati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroque pars rationalis talis sit, ut si iungantur, duplum numeri quadratorum, & etiam triplum sui quadrati, cum quadrato alterius partis, constituat numerum rerum. Et si pars rationalis uel numerus esset minus, oporteret ut esset differentia dupli numeri quadrati, & tripli quadrati partis, quę est ℞ cum quadrato partis quę est numerus, ipse numerus rerum. Exemplum, si 1 cubus p: 6 quadratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomę, sit m: 2, tunc ducemus 6 numerum quadratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod est 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & ℞ 42 est pars prima apotomę, quare res ualet ℞ 42 m: 2.

5 p: ℞ 45
5 —— 12 —— 15
7 3
25 45
175 —— 135
40

res 1 p: ℞ 5
q̄d. 6 p: ℞ 20
cub. 16 p: ℞ 320

3 Est & modus alius, qui similitudinis dicitur, atq́ hic quadruplex A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, sicq́ capitulo non uniuersalia inuenimus q̄d' q̄drati, rerum: ac numeri. A' cōuersione æquationum in naturam ei æquiualentem, ut exponemus infrà. A' modo pro ędendi ad æquationes per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim sunt modi in uniuersum.

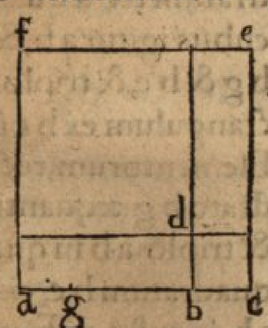
4 Est etiam transmutationis uia, qua ante demonstrationē uniuer-

salia

ſalia capitula multa inueni, atq; inter reliqua, cubi æqualis quadratis & numero, & cubi cum quadratis, æqualis numero, uelut cum conamur hanc ſoluere quæſtionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum ęquale ſit alterius quadrato, & ex uno in alterum ducto, producatur 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 quadrato p:8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æſtimatione, ſi diuiſeris 8 per eam, prodibit reliqua æquatio, ex qua in capituli illius cogitationem perueni. Quęſtiones igitur alio ingenio cognitas ad ignotas transfer poſitiones, nec capitulorum inuentio finem eſt habitura, non tamen extra hęc, ex una quæſtione, generalia poteris aſſequi.

Cum autem intellexiſſem capitulum, quod Nicolaus Tartalea 5
mihi tradiderat, ab eo fuiſſe demonſtratione inuentum Geometrica, cogitaui eam uiam eſſe regiam, ad omnia capitula uenanda. Itaq; ad eam tria ſuppoſita maxime utilia præmittere inſtitui, quorum di lucida declaratione, reliqua, quæ & ipſa demonſtrabuntur, facile erit intelligere, eſt autem horum hoc primum.

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis eſt, 6
cubis ambarum partium, triploq; productorum, uniuſcuiuſq; earum, uiciſsim in alterius quadratum. Quamuis hoc & reliqua duo quæ ſequunt᷑ alibi à nobis in 7° Elem. Geom. oſtenſa ſint, ne tamen huic operi quicquam deeſſet, placuit hic denuo demonſtrare. Sit igitur a c, diuiſa in puncto b, & ſit cubus totius a e, ſint etiam in baſi eius ſuperficies diſtinctæ, d a, d c, d f, d e. manifeſtum eſt autem ex 4ª 2ⁱ Elementorum, c d eſſe quadratum b c, & d f quadratum a b, & duo rectangula a d & d e, fieri ex a b in b c, ſingula, cubus autem totus conſtat ex a c linea, in quadratum a e, quare ex a c, in ſuperficies d a, d c d e, d f, componentes a e, quare cum a c conſtet ex a b & b c, conſtabit cubus a e, ex octo corporibus, quorum quatuor conſtant ex a b linea in ſuperficies d a, d c, d e d f, reliqua quatuor, ex b c linea, in eaſdem quatuor ſuperficies. At ex a b in f d, fit cubus a b, & ex b c in c d, cubus b c, conſtat igitur cubus a e, ex cubis a b & b c, & ex eo quod fit ex a b in d a, d c, d e, & eo quod fit ex c b in d a, d f & d e, at quod fit ex a b in c d, æquale eſt ei quod fit ex b c in d a, & quod fit ex b c in d f, æquale ei quod fit ex a b in a d, eo quod altitudines & baſes eædem ſunt, parallelipeda etiam ex a b in a d, uel d e æqualia ſunt inuicem, ſimiliter ex b c in a d, uel d e,



inuicem

inuicẽ æqualia, eo quòd d a & d e ſunt æquales ſuperficies, per 43. primi Elementorum, igitur cubus a c conſtat ex cubis a b & b c, & triplo a b in quadratum b c, & triplo b c in quadratum a b, quod erat probandum.

7 Ex hoc patet ſecundum, ſcilicet, quòd cubus a b, cum triplo a b in quadratum b c, ſuperat cubum b c, cum triplo b c in quadratum a b, in cubo differentiæ a b & b c, ſit igitur a g æqualis b c, & erit differentia a b & b c, linea g b, conſtat autem ex præcedente cubum a b, æqualem eſſe cubis a g & g b & triplo a g in quadratum g b, & triplo g b in quadratum a g, quare cubus a b cum triplo a b in quadratum b c, æqualis eſt cubis a g & g b, & triplo a b in quadratum g b, & triplo g b in quadratũ a g, & triplo a b, in quadratũ b c, uerum cubus a g æqualis eſt cubo b c, & triplum b g in quadratum a g, æquale eſt triplo b g in quadratum b c, & triplum a g in quadratum g b, æquale eſt triplo b c in quadratum b g, eo quòd b c æqualis eſt a g, cubus igitur a b, & triplum a b in quadratum b c, æqualia ſunt cubo b c, & b g, & triplo b g in quadratum b c, & triplo b c in quadratum b c, & triplo b g in quadratum b c, & triplo b c in quadratum b g, & triplo a b in quadratum b c, at ex b g in quadratum b c, fit quantum ex b c in rectangulum ex b g in b c ter, igitur ex b g in quadratum b c, æquale ei quod fit ex b c in rectangulum ex b c in b g ter, eadem ratione, quod ex a b in b c quadratum ter æquale ei quod ex b c in rectangulum ex a b in b c ter, cubus igitur a b, & triplum a b in quadratum b c æqualis eſt cubis b g & b c, & triplo b c in rectangulum b c in a b, & triplo b c in rectangulum ex b c in b g, & triplo b c in quadratum b g, at ex 4ª 2ı Elementorum, rectangulum ex b c in b a, & ex b c in b g, cum quadrato b g æquantur quadrato a b, igitur cubus b g cum cubo b c, & triplo a b in quadratum b c, quare cubus a b, cum triplo a b in quadratum b c, excedunt cubum b c, cum triplo b c in quadratum a b, in cubo differentiæ b g.

Corᵐ. primum. Ex hoc patet, quòd ſi b c ponatur m: quòd cubus a b conſtabit ex cubo a c & triplo a c in quadratum b c, addito per m: cubo b c, & triplo b c in quadratum a c, nam ſi b c fuiſſet p: differentia cubi a c cum triplo a c in quadratum b c, à cubo b c & triplo b c in quadratum a c, fuiſſet cubus a b, ex demonſtratis. Sed poſita b c m: tantum eſt quod aggregatur, quanta eſt differentia poſita b c p: igitur cubus a b, eſt aggregatum cubi a c & tripli a c, in quadratum b c, & tripli b c in quadratum a c m: & cubi b c m: Et eodem modo, ſi a b poneretur m: cubus b c conſtaret ex cubo a c, & triplo a c in quadratum a b, & triplo a b, in quadratum a c per m: & cubo a b per m:

Eodem

Eodem modo, si a b ponatur m: cubus eius componetur ex cubo Corm. 2
b c, & triplo b c in quadratum a c, & cubo a c per m: & triplo a c in quadratum b c per m: nam ut dictum est, cubus a b, est differentia talium partium per p: ex primo corrolario, igitur detracta maiore ex minore, fiet tantundem m: sed cubus a b m: est æqualis cubo a b p: in numero, ut enim 27 p: est cubus 3 p: ita 27 m: est cubus 3 m: igitur cubus a b m: est æqualis cubo b c & triplo b c in quadratum a c, & cubo a c m, & triplo a c in quadratum b c m:

Ex primo autem supposito, ostenditur etiam hoc tertium, quod 8
est, proportionem aggregati ex cubis a b & b c ad triplum productorum a b in quadratum b c, & b c in quadratum a b esse, ut aggregati primæ & tertiæ detracta secunda trium quantitatum anologarum in proportione a b ad b c ad triplum secundę earum. Constat enim ex 32ª 11 Elementorum, quod proportio cubi a b ad corpus ex a c in quadratum a b, est ut quadrati a b ad a d superficiem, quare ex pª. 6ᵗ. Elementorum, ut a b ad b c, eadem ratione parallelepipedi ex b c in quadratum a b ad parallelepipedum ex a b in quadratum b c, proportio, ut a b ad b c, atque rursus parallelepipedi, ex a b in quadratum b c ad cubum b c, ut a b ad b c. Quatuor igitur corpora, scilicet cubus a b parallelepipedum, ex b c in quadratum a b, parallelepipedum ex a b in quadratum b c, & cubus b c sunt in continua proportione linearum a b & b c. Statuamus ita hæc corpora breuitatis causa in quatuor literis h, k, l, m, ita ut h sit cubus a b, & k parallelepipedum ex b c in quadratum a b & l parallelepipedum ex a b in quadratum b c, & m, sit cubus b c, igitur cum ratio. m ad l sit ea quę l ad k. ut probatum est, item k ad l, ut h ad k erit per 24 5ⁱ Elementorum, k m ad l, ut h l, ad k, quare ex 12ª eiusdem, h k l m, ad k l, ut h l, ad k, quare ex 19ª eiusdem, h m ad k l, ut h l detracto k, ad k, quare per 22 eiusdem, h m ad triplum k l, ut h l dempto k ad triplum k, at cum h k l, sint in proportione a b ad b c, ut probatum est, erit per 11 eiusdem 5ⁱ Elementorum, cuborum a b & b c, simul iunctorum, ad triplum a b in quadratum b c, & b c in quadratum a b, uelut primæ & tertiæ trium linearum proportionalium in proportione a b & b c, detracta media ipsarum, ad triplum ipsius mediæ

h, k, l, m,

Ex hoc patet, quod proportio tripli b c in quadratum a b, ad triplum a b in quadratum b c, est ut a b c, ex 12ª 5ⁱ Element. Corm. 3

Et quod proportio cuborum a b & b c, cum duplo b c in quadratum a b, & a b in quadratum b c, ad residuum totius cubi a c, est Corm. 4

ut trium superficierum d c, d a, d e, ad d e superficiem, seu ut trium quantitatum proportionalium in proportione a b ad b c, ad mediam ipsarum, ac multa alia quæ breuitatis causa omitto.

De capitulorum transmutatione.
CAP. VII.

CUm fuerit numerus & denominatio media, extremæ ęqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes easdem, & sub eadem magnitudine numero æquales, uelut si dicam, quadratum æquatur 6 radicibus & 16. dicemus igitur etiam, quadratum & 6 radices, æquantur 16, manetque conuersa ratio, inde habita prima æquatione, detrahemus numerum radicum, & est 6, & habebimus secundam, uel secunda habita, addemus 6 numerum radicum, & fiet æquatio prima, uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non potest.

Verùm generalis est regula, cùm media denominatio, numero & extremæ denominationi ęquatur, tunc conuertetur in aliam mediam denominationem, tantundem à numero distantem: quantum prior media ab extrema denominatione distabat. Sic pro exemplo, si cubus & numerus ęquales sint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam æquabitur, sed non sub rerum numero. Ratio uero habendi mediam denominationem est, deprime maiorē denominationem ex medijs, per minorē, & radicem numeri æquationis, sumptam secundum naturam denominationis extremæ, reduces ad denominationē quę exijt, & cum eo numero, multiplicabis numerum denominationis medię proximioris maximę denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero, & qui exit, numerus est denominationis mediæ, uelut si cubus & 16 æquent̄ 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16, æqualia rebus. harum numerum sic uenabimur, deprime q̄dratum per res, exeunt res, accipe ℞ cub. 16, nam cubus est extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res sit id, quod prouenit, diuiso quadrato per rem, fiet igitur ℞ cub. 16, quoniam res non auget nec minuit, igitur ducemus ℞ cub. 16 in 6 numerum quadratorum, qui sunt proximiores cubo, quàm numero, & fient res ℞ cub. 3456 ęq̄les 1 cub. p: 16. Exemplum aliud cubus & 8 ęquantur 18 rebus, dices igitur, cubus & 8, ęq̄ntur quadratis, diuide igit̄ quadratum per rem exit res, accipe ℞ cubicam 8. quia cubus est maxima denominatio, & est 2, ea nō est deducēda aliter, cum res sit denominatio exiens, fiet igitur 2 diuisor 18 numeri rerum

rum, quia res sunt proximiores numero, quàm cubo, & exibit 9, numerus quadratorum æqualium cubo p:8, eodem modo, si dicamus 1 q̃d' quadratum p:64, æquatur 10 cubis, cadet transmutatio rebus in 1 q̃d' quadratum p:64 æquale rebus, diuide igitur cubum per rem exit quadratum, duc ℞ ℞ 64 quę est ex natura q̃d' quadrati, & est ℞ 8, ad naturam quadrati, scilicet denominationis exeuntis, fit 8, quem duc in 10 numerum cuborum, quia sunt proximiores maximæ denominationis, & fiunt res 80, contrà diuide res 80 per 8 ad habendum numerum cuborum.

1 q̃d' q̃d. p: 64 — 10 cub.
1 q̃d' q̃d. p: 64 — rebus
℞ 8 — q̃d. 8
10
res 80

Eadem ratio tenet, ubi denominatio media cum numero, æquatur extremæ, seu duæ denominationes extremæ, numero æquales fuerint, nam eadem regula unam æquationem in aliam transmutabimus Vt pro exemplo, cubus æquetur 9 rebus p:10, dicemus igitur, cubus p: q̃d' ℞ cubicæ 72900 æquantur 10, & si cubus æquatur 6 quadratis p:16, erit cubus & res ℞ cubus 3456, æqualis 19. Et si cubus p: 18 rebus, æquatur 8, erit cubus æqualis 9 quadratis & 8 numero. Et cum relatum primum p:6 cubis æquatur 80, erit relatum primum æquale quadratis p:80, diuide igitur cubum per quadratum, exit res, sume ℞ relati 80, et eam reducito ad naturam rei, remanet ℞ relati 80, quam ducito in 6 numerum cuborum, fit ℞ relata 6220 80, numerus quadratorum, igitur r p^{m} ęquatur quadratis ℞ relata 6220 80 p:80 numero, eadem ratione, si r^{m}p^{m} p:30 rebus æquale sit 32 numero, tunc erit r^{m}p^{m} æquale q̃d' quadrato & 32 numero, diuide q̃d' quadratum per rem, exit cubus, reducito 2 ℞ relata 32 ad cubum, fit 8, diuide 24 numerum rerum per 8, exit 3 numerus q̃d' quadratorum, qui cum 32 æquantur relato primo. 3

r^{m}p^{m} p: 6 cub. — 80
r^{m}p^{m} q̃d. p: — 80
r rel:80 —— res ℞ rel:80
6
q̃d. ℞ rel:9220 80

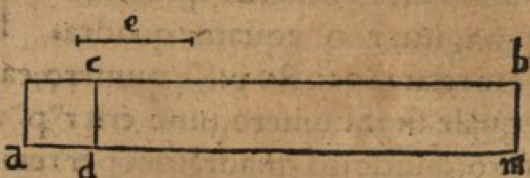
Sed pro habenda æstimatione in singulis, diuides quadratum radicis numeri æquationis, sumpta ipsa radice: secundum naturam maximæ denominationis, per æstimationem quam habes, quod exit est æstimatio conuersi capituli. Exemplum, dictum est, quód si cubus & 8 æquatur 18 rebus, cubus & 8 æquabitur 9 quadratis. In prima autem æquatione res ualet 4, uel ℞ 6 m:2, dico, quod si acceperis ℞ cubicam 8, quæ est 2, & duxeris eam in se fit 4, & diuiseris per priores æstimationes, scilicet 4, uel ℞ 6 m:2, exibunt 1, uel ℞ 24 m:4 ęstimationes cubi p:8 ęqualium 9 quadratis. Et eodem modo 4 dictum est, quod si $r^m p^m$ p: 6 cubis, æquatur 8o, quod $r^m p^m$ æquabitur ℞ r', 6220 8o quadratorum p: 8o, & in prima æquatione æstimatio rei manifestè est 2, duc igitur ℞ r' 8o in se, fit ℞ r'. 6400, diuide per 2, æstimationem relati & 6 cuborum æqualium 8o, exibit ℞ r' 200, æstimatio rei quando $r^m p^m$ æquatur ℞ r' 6220 8o quadratorum p: 8o ut uero facilior intellectus

cub. & q̄d' æq̄l' n^o in cub. æq̄l' re & n^o.
cub. æq̄l' q̄d' & n^o in cub. & res æq̄l' n^o.
cub. & n^s æq̄l' q̄d' in cub. & n^m æq̄l' rebus
q̄d' q̄d. & cub, æq̄l' n^o in q̄d' q̄d. æq̄l' reb⁹ & no.
q̄d' q̄d. & n^s æq̄l' cu. in q̄d' q̄d. & n^m æq̄l' rebus.
q̄d' q̄d. æq̄l' cu. & n^o in q̄d' q̄d. & res æq̄l' n^o.
$r^m p^m$ & q̄d' q̄d. æq̄l' no in $r^m p^m$ æq̄l' reb. & n^o.
$r^m p^m$ æq̄le q̄d q̄d. & n^o in $r^m p^m$ & res æq̄l' no.
$r^m p^m$ & n^s æq̄l' q̄d' q̄d. in $r^m p^m$ & n^m æq̄l' reb^o.
$r^m p^m$ & cu. æq̄l' n^o in $r^m p^m$ æq̄l q̄d. q̄d. & n^o.
$r^m p^m$ æq̄l' cu. & n^o in $r^m p^m$ & q̄d. æq̄l' no.
$r^m p^m$ & n^s æq̄l' cu. in $r^m p^m$ & n^m æq̄l q̄d.

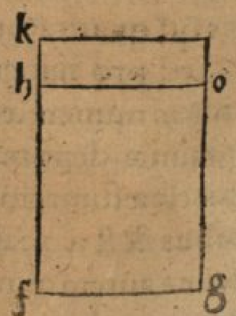
omnium horum sit, uigintiquatuor transmutationes subiungam, ex quibus alias discere licebit. hic namque duodecim sunt conuersiones, totidemque econtra, uelut si cubus & quadratum æquantur numero, conuertetur capitulum in cubum æqualem rebus & numero, at econtra, si cubus æqualis sit rebus & numero: cubus & quadrata numero etiam æqualia erunt.

DEMONSTRATIO.

Vt uerò eiusmodi sit aliqua, exempli causa, demonstratio, ponatur parallelepipedum a b constans ex a c cubo, & d b numero, æquale autem totum hoc quadratis a d lineæ. Igitur cum ipsum constet ex d c in a b, constabit etiam ex a m in quadratum d c, igitur a m est numerus quadratorum,



inter m d & d a, sint continue proportionales, e proximior a d, & f g proximior d m, quadratum autem f g sit g h, & sit g k superficies, æqualis ei quæ ex e in a m, compleatur autem corpus g k, secundum altitudinem f g, erit igitur ex 15 6ⁱ Elementorum a m ad f k, ut f g ad e, igitur ex 11ᵃ 5ⁱ Elementorum, a m ad f k, ut m d ad f g, seu f h. at per 19ᵃ 5ⁱ Elementorum erit a m ad f k, ut a d ad k h, ex 11ᵃ igitur eiusdem, m d ad f h, ut a d ad k h, quare cum sit m d, ad f h, ut f h ad e, &



e, & fh ad e, ut e ad a d, & e ad a d, ut a d ad k h, erunt quinque lineæ m d, fh, e, a d, h k. continue proportionales, igitur per 32 11ⁱ & 17 6ⁱ Elementorum erit g h ad a c, ut m d ad h k, utraque enim duplicata ei, quæ est fh, ad a d, quare quod ex d m quinta in a c quadratum secundæ, æquale est ei, quod ex k h prima in g h quadratum quartæ. Igitur corpus k o est numerus propositus, & cum cubo b g æquatur rebus totidem, quod sunt in superficie g k at g k æqualis est superficiei ex c in a m, est autem e radix cubica numeri d b, propositi, ex 34ª 11ⁱ Elementorum, & a m numerus quadratorum, ut propositum, est igitur numerus rerum g k fit ex radice cubica numeri æquationis in numerum quadratorum, & numerus æquationis manet idem scilicet corpus k o & b d, quorum unum alteri æquale esse demonstrauimus. Superest itaque, ut ostendamus æstimationem rei quæ est a d in uno, & f g, in altero esse, quales proponuntur, cadit enim inter eas proportionalis media e radix cubica numeri propositi, igitur ex 16ª 6ⁱ Elementorum diuiso quadrato e per unam earum exibit reliqua. Eodem modo probaremus reliquam partem regulæ, & generaliter, sed breuitati consulendum est in his quæ ordinem habent eum, ut unum ex altero cognoscatur.

REGULA.

Est & alius transmutandi modus, manente quidē denominationum numero, uariato autem æq̃tionis numero, uerū in reliquis eandē habet rationem, regula igitur est. Accipe radicem numeri æquationis, secundū naturam denominationis mediæ quā habes, & eam reduces multiplicando ad naturā denominationis mediæ, quā uis ęquari extremis in conuersione, & hic est numerus in secunda ęquatione. Exemplum, si dico, cubus & 8 æquatur 18 rebus, tu scis ex tabula suprapposita, quæ huic seruit regulæ, quòd transmutatᷓ in cubū & numerum ęqualia quadratis, at ex hac regula liquet, quòd numerus quadratorum æquatur numero rerum, erunt igitur cub. & numerus æquales 18 quadratis, pro numero igitᷓ ęquationis accipe 8, quia res non habent radicem, & duc in se fiet 64, numerus ęquationis, duxisti autem in se quia denominatio media in quam fienda est transmutatio, est quadratum. Eadem ratione, si dicatur, 1 q̃d q̃dratū p:8, ęquatur 12 rebus, traducetur in q̃d q̃dratum & numerum ęqualia cubis, quare reducemus 8 ad cubum & fiet 1 q̃d q̃dratum p:512, æquale 12 cubis. Et ita, si dicatur 1 pᵒ rᵐ p:8, æquatur 5 cubis, transmutatio fiet in rᵐ pᵐ p: numero, æquale 5 quadratis, ex tabula uel regula, igitᷓ pro numero (quia denominatio media in proposito est cubus) sumemus ℞ cub. 8, quæ est, & eam deducemus ad naturā qua- 6

 drati,

drati, quia quadratum est denominatio media in transmutatione, fiet igitur 4, quare erit $r^{o}\ p^{m}$ p:4, æquale 5 quadratis.

7 Eadem ratio tenet, cùm numerus & media denominatio extremæ æquantur, ut transmutetur in capitulum denominationum æqualium numero. Exemplum, si dicamus, 1 $p^{m}r^{m}$ p:4 cub. æquatur 64, accipimus propter cubum ℞ cubicam 64, & est 4, & eam reducemus ad quadratum denominationem mediam, in quam fienda est transmutatio, & habebimus 1 $p^{m}\ r^{m}$ æquale 4 quadratis & 16 numero, & si 1 $p^{m}\ r^{m}$ p:4 rebus æquatur 5, quia res non habet radicem, reducito 5 ad naturam quadrati quadrati, & fit 625, ideo dicemus, quód 1 $r^{m}p^{m}$ æquatur 4 quadratis quadrati p:625.

8 Aestimationis ratio sic habetur in media denominatione æquali extremæ & numero. Reducito æquationem quam habes in naturam denominationis mediæ, in quam fienda est trãsmutatio, & hoc abijce ex numero denominationis mediæ, & ℞ residui, sumpta secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, est rei æstimatio. Exemplum, si p^{m} r^{m}p:64 ęquatur 12, cubis dicemus $p^{m}r^{m}$p:16 æquatur 12 quadratis, æstimatio primæ æquationis est 2, & quia media denominatio in quam fit transmutatio est quadratum, ducemus 2 in se fit 4, abijce ipsum ex 12 numero cuborum, fit 8 residuum cuius sumemus ℞ secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, & est cubus, igitur ℞ cub. 8, quæ est 2, erit etiam æstimatio rei in secunda æquatione. Aliud Exemplum, si $p^{m}\ r^{m}$p:64, æquatur 24 quadratis, tu scis, quód transmutatur in $p^{m}\ r^{m}$ p:512 æquale 24 cubis, æquatio autem primi propositi fuit 2, cubus fit 8, nam media denominatio secunda est cubus, abijce 8 ex 4, numero quadratorum, relinquitur 16 cuius ℞ quadrata, id est sumpta secundum naturam denominationis mediæ primæ æquationis, quæ est 4, est æstimatio $p^{i}\ r^{i}$ p:512 æqualis 24 cubis.

1 $p^{m}r^{m}$ p:64	12 cub.
1 $p^{m}\ r^{m}$ p: 16	12 q̃d.

1 $p^{m}\ r^{m}$p:64	24 q̃d.
1 $p^{m}\ r^{m}$ p: 512	24 cu.

9 Sed ubi intermedia denominatio iungitur numero uel extremæ denominationi, facto transitu in comparem, ex 7 regula, reduces ut prius æstimationem quam habes in naturã denominationis medię cuius quæris ęstimationem: & ei adde numerũ denominationis medię, si media denominatio cuius ęstimatio quęritur, iuncta fuerit numero, uel minuenus, si iuncta fuerit extremę denominationi, & eius aggregati uel residui ℞ sumpta, ex natura denominationis mediæ, cuius ęstimatio cognita est, erit æquatio secũdę quęstioni s quęsita. Exemplum. sit $r^{m}\ p^{m}$ æquale 3 cubis p:8, & æstimatio rei cognita 2, & trans-

& transmutatur ex regula septima in $r^m p^m$ p:p 3 quadratis ęqualia 4, reduco igitur 2 ad naturam quadrati mediæ denominationis, cuius quæritur æstimatio.

| $r^m p^m$ 3 cub.p: 8
| $r^m p^m$ p: 3 q̄d. 4

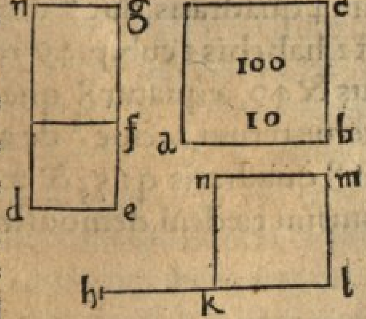
Sit 4, ex hoc abijcio 3 numerum quadratorum, quia quadrata sunt iuncta $r^o p^o$, & non numero, relinquitur 1, huius ℞ cub. quæ est 1, est rei æstimatio, est autem cubus denominatio media æquationis iam cognitæ. Rursus sit $r^m p^m$ æquale 7 quadratis p: 4, & sit transmutatio in $r^m p^m$ p: 7 cubis æquale 8, ex 7^a regula, & sit huius cognita æquatio, quę sit 1, & uelim reliquam, reduco 1 ad quadratum, mediam denominationem ignotam, & fit 1, huic addemus 7 numerus q̄dratorum, quia media denominatio ignota, quæ est quadratum, iungitur numero, scilicet 4, & habebimus 8, huius ℞ cubica sumpta ex natura mediæ denominationis cognitæ, & est 2, talis ℞ cubica, est rei æstimatio, quando $p^m r^m$ æquatur 7 q̄d. p: 4.

| $r^m p^m$ p: 7 cub. 8
| $r^m p^m$ 7 q̄d. p: 4

Ex hoc patet, quód semper, habito uno capitulo, per secundam, Cor^m.
tertiam & quartam regulam, uel per sextam, septimam, octauam, & nonam, habebimus aliud generaliter, si generaliter uel particulatim, si particulatim. Exemplum igitur tale sit, cognito capitulo cubi & rerum æqualium numero, proponatur cubus æqualis 3 quadratis & 10 numero, habebimus igitur ex septima regula cubum & 3 res æquales ℞ 10, æquatio huius est ℞ v: cub. ℞ $3\frac{1}{2}$ p: ℞ $2\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cub. ℞ $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $2\frac{1}{2}$ huius igitur quadratum, addito 3 numero quadratorum, quia quadrata iunguntur numero, erit æstimatio cubi æqualis 3 quadratis & 10 numero, & hoc est quia denominatio media cognita, quæ est res non habet ex se radicem, & sic primo generaliter capitulum cubi æqualis quadratis & numero: aliaq́ multa capitula inueni, duplici uia.

DEMONSTRATIO.

Et ne hoc uoluntarium uideatur, demonstratio huius adijcienda 10
est in uno pro omnibus, sit cubus d f, cum a b numero, ęqualis d g numero rerum, id est corpori d g, sit autem h l, numerus rerum, æqualis d g superficiei, in numero, & sit quod ex h k in k m, æquale a c numero, & quadrato a b, erit igitur quod ex h l in k m, æquale a c & cubo k l, & similiter, quod ex d e in d g, æquale cubo d e, & numero a b, d e autem est latus d f, & k l latus k m, sed h l æqualis est d g, cum igitur ex h k in k m fiat a c, & ex d e in f n, a b



posita

posita n f radice k m, & d e radice h k, nescio si ex d e in f n, fit a b, ex h k in k m fit a c, namque hoc à Theone in Euclidis commentario est demonstratum, igitur cùm æstimatio rei in uno sit k l, in altero d e, sequitur ut sublata f d, æquali h k (utraque enim æquatur quadrato d e, ex h l, relinquatur. k l, rei æstimatio, quod est propositum.

11 Est & genus transmutationis in dissimile, ut cum q̄d quadratum æquatur rebus & numero, & res est ℞ 5 p:2, gratia exempli, erit q̄d quadratum p: eisdem rebus æquale eidem numero, & res erit eius apotome, uidelicet ℞ 5 m:2, & econtra.

12 Transmutantur & ea, quæ constant ex quatuor nominibus, cum fuerint tres partes continue proportionles, & ęquales rebus uel cubis, dico autem, numerus & quadratum & q̄d quadratum, nam diuiso numero rerum per ℞ numeri, exit numerus cuborum, multiplicato uerò numero cuborū, per ℞ numeri, producitur numerus rerum æqualium q̄d quadrato & quadrato & numero eisdem, uelut, si q̄d quadratum p: 8 quadratis p: 64, æquantur 10 cubis igitur ducto 8 ℞ 64, in 10 numerum cuborum, erit 1 q̄d quadratum p: 8 quadratis p: 64, æquale 80 rebus. Habita autem una æquatione, diuide cum ea ℞ nuneri, quod exit, est reliqua æquatio, uelut 1 q̄d quadratum p: 8 quadratis p: 46, æquatur 56 rebus, & res est 4, erit 1 q̄d quadratum p: 8 quadratis p: 64 æquale 7 cubis, inde diuiso 8 radice 84, per 2 priorem æquationem, exit 4 secunda æquatio q̄d quadrati p: 8 quadratis p: 64, æqualium 7 cubis.

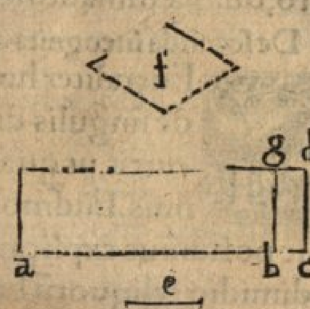
Est etiam transmutatio capitulorum ex tribus constantium, in ca-
13 pitula ex quatuor, & pro exemplo, regulam unam exponam, si sit capitulum cubi & numeri æqualium quadratis, conuertetur in capitulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, hoc modo, manente numero quadratorum, duc dimidium numeri quadratorum in se, & productum est numerus rerum, quæ sunt cum cubo, & octaua pars prioris numeri est semper numerus, qui est cum quadratis, & ęquatio semper manet eadem. Exemplum, cub. p: 16 ęquatur 14 quadratis, duc 7 dimidium 14 in se, fit 49, accipe $\frac{1}{8}$ de 16, quod est 2, habebis 1 cub. p: 49 rebus ęqualem 14 quadratis p: 2. Aliud, cubus & 40, æquatur 8 quadratis, duc 4 dimidium 8 in se fit 16, numerus rerum, accipe $\frac{1}{8}$ de 40 quod est 5 igitur cubus & 16 res æq̄ntur 8 quadratis q: 5, & æquatione una inuenta, habes reliquam cum sint eædem, demonstratio huius non est hic necessaria.

Docetur

Docetur æquatio generaliter mediæ denominationis æqualis extremæ & numero. CAP. VIII.

DEMONSTRATIO.

SIt inquam, cubus quadrati & numerus ęqualis aliquib. rebus, & sit numerus rerum a d, & sit b d portio, ex qua sumpto latere, quale relati primi e, ducto in a g reliquum numeri rerum, fiat f numerus æquationis, dico e esse rei æstimationem, nam quia ex supposito ex e in a g, fit f, & ex e in b d, fit cub. e, eo quòd e fuit latus relatum, b d, & productum ex e in a g, & in b d æquale est producto ex e in a d, sequit͂ cum a d, sit numerus rerum, quòd res ęquantur cubo quadrato, & numero f, sub æstimatione ipsius e. 1



REGVLA.

Secundum hoc formabitur regula, cum fuerint denominatio media & numerus, ęquales medię, & ex numero mediæ denominationis, feceris duas partes, ex q̃rum una in radicem alterius, sumptã secundum naturã denominationis, prouenientis ex diuisione extremæ per mediam, & deductam ad naturam ipsius mediæ denominationis, fiat numerus ęquationis, tunc radix ipsa anteq̃ deducetur ad naturã denominationis mediæ, est rei ęstimatio. Exemplum, 10 res, æquantur q̃drato & 21, tunc quia res sunt immediatę quadrato & numero, sufficit facere de 10 duas partes, ex quarum una in aliam fiat 21, & erunt 7 & 3, & utraq; est rei æstimatio. Aliud, 10 res, æquantur cubo & 3, hic res est coniuncta numero, sed nõ cubo, cum intermediet quadratum. Ideo diuidemus cubum per rem, exit quadratum, dicemus igitur fac ex 10, duas partes, ex quarum una in quadratam alterius radicem, fiat 3, & erunt 1 & 9, nã ex 1 in 3 R̸ 9 fit 3, ideo talis R̸ scilicet 3, est rei æstimatio. Aliud, 10 cubi æquales sunt q̃d' q̃drati, & 64, iam hic cubus hæret q̃d' q̃drato, & à numero distat intermediantibus q̃drato & re, dices igit͂, fac de 10 duas partes, ex quarum una in alterius cubũ, producat͂ 64, & erunt partes 8 & 2, qui ad cubũ deducendus est, igitur 2 est rei æstimatio, scilicet quòd oporteat semper numerũ cum quo operamur, esse rei æquationem. Aliud, & est quarti modi exemplum, 10 cubi æquantur p° r° & 48, tũc iam cubus distat à r° p°, intermedio q̃d' q̃drati, & à numero interpositis quadrato & re, diuide igitur r^m p^m per cubum exit quadratum, dicemus, fac de 10 numero medię denominationis duas partes, ex quarum una, in cubum radicis quadratę alterius, ꝓducatur 48 numerus ęquationis, & erunt partes 6 & 4, nam ex 6 in 2

8 cubum 2 radicis quadratę 4, fit 48, ideo ipſum 2 radix quadrata 4, eſt rei æſtimatio. Manifeſtum eſt igitur, quod ſemper ſuminus radicem ex natura denominationis, ſecundū quam media in maiore cō tinetur, & deducimus eam ad naturam ipſius mediæ, & qui ſcit hoc facere, nouit capitulū, & qui nouit capitulum, ſcit etiam hoc facere.

3 Eſt uerò manifeſtum, quod cum media denominatio, extremę & numero æqualis eſt, tunc in omnibus, preterquam in maximo numero, duas æſtimationes neceſſario habet.

De ſecunda incognita quantitate non multiplicata. CAP. IX.

GEneraliter hucuſq; noua inuēta tractauimus: nunc uerò de ſingulis dicendū ſpeciebus eſt, namq; ſępius illud occurrit, ut quæſtionem propoſitā, duplici poſitione ſoluamus. Eiuſmodi aūt eſt exemplum, quando aliter uix rem hanc poſſumus explicare. Tres erant uiri pecunias habētes. Primus cū dimidio reliquorū habuit aureos 32. Secundus cū reliquorū tertia parte 28. Tertius cū reliquorum parte quarta 31, quæritur quantum quiſq; habuit. Statuemus primò rem ignotam primam, ſecūdo ſecundam rem ignotam, tertio igitur 31 aurei, minus quarta parte rei, ac quarta parte quantitatis relicti ſunt, iam igit̃ uide, quantum habet primus, equidē ſi illi dimidiū ſecūdi et tertij adijcias, habiturus eſt aureos 32, habet igitur per ſe aureos 32 m: $\frac{1}{2}$ q̃n: m: $15\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ poſ.^{is} p: $\frac{1}{8}$ quant: quare habebit $16\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{8}$ quant.^{is} p: $\frac{1}{8}$ poſ: hoc autē cum ſit ęq̃le uni poſitioni, erit $\frac{7}{8}$ poſ: & $\frac{3}{8}$ quāt: æquale $16\frac{1}{2}$, quare deducēdo ad integra 7 poſ: & 3 quant: æquabantur 132. Rurſus uideamus, q̃ntū habeat ſecundus, habet hic 28, ſi ei tertia pars primi ac tertij addat̃, ea eſt $\frac{1}{3}$ poſ: p: $10\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ poſ: m: $\frac{1}{12}$ quant: hoc eſt igitur $\frac{1}{4}$ poſ: p: $10\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ quant: abijce ex 28 relinquitur, $17\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quant: m: $\frac{1}{4}$ poſ: & tantum habuit ſecundus. ſuppoſitum eſt autem habere illum quantitatem, quantitas igitur ſecunda, æqui ualet $\frac{1}{12}$ ſui met, & $37\frac{2}{3}$ m: $\frac{1}{4}$ poſ: abiectis communiter $\frac{1}{12}$ quātitatis, & reſtituto m: alteri parti, fient $\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ poſ: æqualia $17\frac{2}{3}$, quare 1 quan: p: 3 poſ: æqualia erunt 212, multiplicatis partibus omnibus per 12 denominatorē, inde duces quamuis earum ad ęqualitatem alterius, in poſitionum aut quātitatum numero, ut pote dicendo, 3 poſ: p: 11 quan: æquantur 212, uolo modo ut ſint 7 poſitiones,

Pri: Secund: Terti:
res quan: 31 m:
Quarta parte reliq̃ ℞
primus $16\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ poſ:
m: $\frac{3}{8}$ quan: æqualia
poſitioni primæ

$\frac{7}{8}$ poſ: p: $\frac{3}{8}$ quan: æq̃lia $16\frac{1}{2}$

Secundus $17\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$
quan: m: $\frac{1}{4}$ poſ: æq̃lia quantitati ſecundæ

$\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ poſ: æqual. $17\frac{2}{3}$

7 poſ: p: 3 qua: æq̃l 122
3 poſ: p: 1 quan: æq̃l 212
7 poſ, p: $15\frac{2}{3}$ quā: æq̃l $494\frac{2}{3}$

positiones, & erunt per regulam quatuor quantitatũ proportionalium, 25 $\frac{2}{3}$ quan: ęquales 494 $\frac{2}{3}$, habes igitur, ut uides, pos:p: 3 quantitatibus æqualia 132, & 7 pos:p: 25 $\frac{2}{3}$ quantitatibus æqualia 494 $\frac{2}{3}$, igiť cum 7 pos: sint idem, in utroq; erit differentia quantitatum, scilicet 22 $\frac{2}{3}$, æqualis numerorum differentiæ, quæ est 362 $\frac{2}{3}$, diuide igitur sicut in positione simplici, ꝑ capitulum tertium, 362 $\frac{2}{3}$, per 22 $\frac{2}{3}$, exit 16, æstimatio quantitatis, & tantum habuit secundus. Rursus ponamus primo esse rem, secundo iam erant 16, tertio sit secunda quantitas, cumq; secundus cum tertia parte primi & tertij, habeat 28, ipse autem habeat 16, erit $\frac{1}{3}$ pos:p: $\frac{1}{3}$ quantitatis æqualis 12, residuo 16 & 28, & ideo 2 pos: p: 1 quantitate æquabuntur 36, ad uerò primus, cum dimidio reliquorum habuit 32, dimidiũ reliquorum est 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: igitur 1 pos: p:8 p: $\frac{1}{2}$ quan: æquantur 32, igitur abiecto 8: fiet 1 pos: p: $\frac{1}{2}$ quan: æq̃lis 24, quia igitur 1 po:p: 1 quan: ęquabitur 36, igitur differentia 24 & 36, quę est 12, ęquatur dimidio quantitatis, quare per modũ capituli tertij, diuiso 12 per $\frac{1}{2}$, exit 24. æstimatio quantitatis, seu numerus aureorũ tertij, iam igitur constat secundũ habuisse 16, tertium 24 primus autem cum dimidio secundi & tertij habet 32, detracto 20 dimidio secundi & tertij, ex 32, relinquitur 12 numerus primi, habuit igitur primus aureos 12, secundus 16, tertius 24. Operatio prolixa, clara tamen ac facilis, semper autem reducenda est denominatio una ad eundem numerum, & tunc differentia numerorum æqualis necessariò erit differentiæ alterius denominationis, ut uidisti bis in hoc exemplo

7 pos:p:3 quan:	132
7 pos:p:25 $\frac{2}{3}$ quan:	494 $\frac{2}{3}$
22 $\frac{2}{3}$ quã, æquales	362 $\frac{2}{3}$

p[1]	2[2]	3[3]
1 pos:	16	1 quan:
$\frac{1}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quan: 12		
1 pos:p: $\frac{1}{2}$ quan: 24		
pos:p: 1 quan: 36		
$\frac{1}{2}$ quan: æqualis 12		

Exemplum aliud. Dixit primus secundo, da mihi tertiam partem tuorum, & 3 p: & habebo triplum residui tui. At secũdus primo, da dimidium, & 2 p: tuorũ, & quod tibi relinquetur, erit nona pars omnium quæ ego habebo. Dabimus primo rem, secundo quantitatẽ, quia igitur dando $\frac{1}{3}$ & 3 p: secundi primo, relinquiť secundo $\frac{2}{3}$ quan:m:3, & hoc est tertia pars aggregati primi quod est 1 posito p: $\frac{1}{3}$ q̃ntitatis p:3 igitur triplato $\frac{2}{3}$ quan:m:3, et fit 2 quan: m:9 erit hoc æquale pos. p: $\frac{1}{3}$ quan: p: 3, quare reddendo quod est minus, alteri parti fiet 1 posito p:12, æqualis 1 $\frac{2}{3}$ quan: Rursus quia dictum est, quòd si primus det dimidium p:2, secundo, erit residuum scilicet $\frac{1}{2}$

Primus	Secundus
1 pos,	1 quan:
1 pos.p: $\frac{1}{3}$ quã. p:3 triplum $\frac{2}{3}$ quan.m: 3.	
1 pos:p:12 ęq̃ 1 $\frac{2}{3}$ quã:	
1 quã:p: $\frac{1}{2}$ pos:p:2 nonuplum $\frac{1}{2}$ pos. m: 2	
1 quã:p:20 ęq̃l. 4 pos.	

pos.m:2, nona pars aggregati, quod est 1 quan:p: $\frac{1}{2}$ pos.p: 2, igitur multiplicando tale residuum per 9, fient $4\frac{1}{2}$ pos.m:18, ęquales 1 quan:p: $\frac{1}{2}$ pos^{bus} p:2, reddendo minus alteri parti, & auferendo similia, habebimus 4 pos. æquales 1 quan^{ti} p:20, habebas etiam 1 pos, p:12 ęqualem $1\frac{2}{3}$ quan^{ti}, reducito partes ad ęqualitatē unius denominationis, & primo multiplicando 1 pos.p: 12, ęq̃lem $1\frac{2}{3}$ quan per 4, fient 4 pos. p:48 ęquales $6\frac{2}{3}$ quan^{bus}, & hoc comparabis, ut uides in figura, cum 4 pos^{bus} æqualibus 1 quant^{ti} p:20. & similiter eadem ratione reducendo numerum quantitatū ad ęqualitatē, habebis 5 quan^{tes} æquales 36 p:3 positionibus, & 5 quantitates p: 100, æq̃les 10 pos^{bus}, in utroq; casu transferes uicissim, per regulam, si æqualibus ęqualia addas, tota quoq; fiēt æqualia, & habebis 4 pos^{es} p:68 p: 1 quan^{te} æq̃les 4 pos^{bus} p $6\frac{2}{3}$ quan^{bus} inde abiectis similibus, relinquent̄

4 pos.p:48 æq̃les $6\frac{2}{3}$ quan:
4 pos.æq̃les 20 p:1 quan:

4 pos.p:68 p:1 quan:æq̃les
4 pos, p:$6\frac{2}{3}$ quan:

$5\frac{2}{3}$ quan:æqualis 64

5 quan: æqual. 36 p:3 pos,
5 quan p:100 ęqual.20 pos.

5 quan:p:20 pos.æqual.
5 quan:quan:p:3 pos.p : 136

17 pos. æquales 136

$5\frac{2}{3}$ quan:ęquales 68, igitur diuiso 68, per $5\frac{2}{3}$, exit 12 æstimatio quantitatis, & id quod habuit secundus. Eadem ratione, transferes in secunda æquatione, partes dissimiles, dicendo, si 1 quan: æquantur 39 p:2 pos^{bus}, & 5 quan:p: 100, æquantur 20 pos^{bus}, igitur 5 quan^{es} p: 10 pos^{bus} p:3 pos^{bus}, æquantur 5 quan^{bus} p:3 pos^{bus} p: 136, inde abiectis similibus relinquuntur 17 pos^{es} æquales 136, quare diuiso 136 per 17 exibit 8, positionis ęstimatio, seu numerus primi habuit itaq; primus 8, secundus 12, & q̃muis aliter hęc etiā solui possint, hoc tamen ꝓprium est magis & purū, ut uno eodemq; impetu tota quæstio absoluat̄, & si etiam primum exemplum per solam rem ostendi queat.

Exemplum 3^{m} satis accomodatum inuenias tres quantitates quarum p^{a} cum 2^{a} sit sexqui altera p^{a} cum 3^{a} & p^{a} cum 3^{a} sit sexqui altera 2^{a} cum 3^{a}. pone tertiam 1 secunda 1 pos. p^{am} 1 quan: facilius tamen hoc modo: pone tertiam 1 pos. secundam 1 quan: igitur aggregatum ex prima & tertia erit $1\frac{1}{2}$ pos.p: $1\frac{1}{2}$ quan: detracta tertia relinquetur prima $\frac{1}{2}$ pos.p:$1\frac{1}{2}$ quan. Et similiter quia aggregatum primę & 2^{a} est sexqui alterum aggregato primę & tertię erit aggregatum primę & secundę $2\frac{1}{4}$ pos.p: $2\frac{1}{4}$ quan: Et quia secunda quantitas fuit 1 quan: igitur prima erit residuum $2\frac{1}{4}$ pos.p:$1\frac{1}{4}$ quan prima igitur quantitas primo modo fuit $\frac{1}{2}$ pos.p:$1\frac{1}{2}$ quā: & secūdo modo $2\frac{1}{4}$ pos.p:$1\frac{1}{4}$ quan: Et hæc erunt inter se æqualia ex prima Animi sententia Euclidis & rursus per tertiam earundem detractis utrinq; $\frac{1}{2}$ pos. & $\frac{1}{4}$ quan: relinquetur $1\frac{3}{4}$ pos. æqualis $\frac{1}{4}$ quan: igitur 1 quan: ęquabitur 7 pos. posita

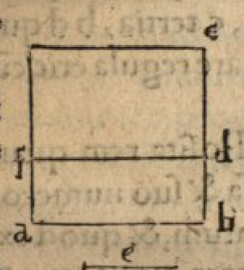
ſita igitur tertia 1 poſ. fuerit 1 erit ſecunda quæ eſt 1 quan. 7 & quia aggregatum eſt 8 & aggregatum primę & tertiæ eſt illi ſexqui alterum, erit 12 & cum ſit 1 erit prima 11. igitur quãtitates erunt prima 11 ſecunda 7, tertia 1 & aggregata 18.12.8. in ſexquialtera proportione uelut propoſitum fuit. Alio primo modo peruenis ad 1 quan ęqualem $1\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{1}{2}$ & 1 poſ. æqualem $\frac{1}{2}$ quan p: $1\frac{1}{2}$ igitur duplũ 2 poſ. æquabuntur 1 quan p: 3 ſed iam oſtendimus 1 quan etiam æqualem $1\frac{1}{2}$ poſ. $\frac{1}{2}$ igitur 2 poſ. æquabunt $1\frac{1}{2}$ poſ. d: $3\frac{11}{2}$ igitur $\frac{1}{2}$ poſ. æquatur $3\frac{1}{2}$ & 1 poſ. ęquabitur 7. per idem cum 1 quant æqualis ſit $1\frac{1}{2}$ poſ. p: $\frac{1}{2}$ & 1 poſ. ſit æqualis $\frac{1}{2}$ quam p: $1\frac{1}{12}$ erit 1 quan. æqualis $\frac{13}{4}$ quan. p: $2\frac{3}{4}$ igitur $\frac{1}{4}$ quan. æqualis $2\frac{3}{4}$, igitur 1 quan erit æqualis 11. Et eſt pulchrior modus quia oberamus per tres quantitates.

De ſecunda quantitate incognita multiplicata. CAP. X.

CVm uerò duę quantitates incognitę multiplicantur, aut in ſe ducantur quatuor fient modi, quorum maior pars tria habet membra.

DEMONSTRATIO.

Primus eſt, cum quadratum unius, & quantitates ipſę comparantur. Sit igitur primo quadratum a c, cuius latus a b, æquale duplo a b & quintuplo e, gratia exempli, igitur poſita b d æquali numero rerum, ſcilicet 2, erit a d ęquale duplo a b, igitur c f æquatur quintuplo e, quare ex 15ª ſexti Elementorum, a b ad e, ut 5 ad c d eſt autem a b poſitio, & c d poſitio m: 2, & 5 numerus cognitus, quare regula eſt.



REGVLA.

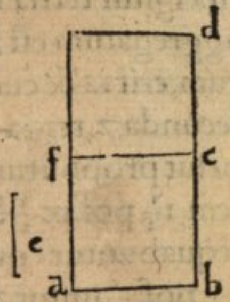
Poſita re quãtalibet, duc eam in ſe, detracto numero rerũ, & quod exit, diuide per numerũ ignotæ quantitatis, exibit æſtimatio ignotę quantitatis. Exemplũ, ponatur res 7, ducatur in 2 m: ſe, quia poſitum fuit, ut æquaretur duabus rebus, & quinq; quantitatibus, fiet 35, diuide 35, per 5 numerũ quantitatum, exit quan: etiam 7, & ſi ponatur res 10, ducemus eam in 2 m: id eſt in 8, & fiet 80 unde diuiſo 80 per 5 exit 16, quantitas 2ª. Quod ſi quantitas 2ª ponatur cognita, multiplicabimus eam p̃ ſuũ numerum & producto addemus quadratum dimidij ipſius numeri rerum, & radix totius, addito dimidio numeri rerum eſt æſtimatio rei Exemplum, ſit ſecunda quantitas 16, ducemus in 5 fit 80, adde 1, quadratum dimidij numeri rerum, fit 81, huius R: eſt 9, cui addito dimidio numeri rerum fit 10, quantitas ipſius rei.

DEMONSTRATIO.

Rurſus, ſit decuplũ a b, ęq̃le q̃drato a b, & ſeptuplo e, gratia exem-

 pli,

pli,& ſit q̃dratũ a b ſuperficies a c & b d ſit 10. igit̃ ſeptuplũ e ęq̃le eſt f d ſuperficiei,& ut in pręcedẽti, a b ad e,ſic 7 ad c d,quare regula eſt,cum res æq̃nͅtur q̃drato rei & quantitatibus



REGVLA.

Poſitã rem quantamcunq; libuerit, minuemus ex numero rerum,& ducemus eam in reſiduũ, pro ductũ diuidemus cum numero quantitatũ, quod exit eſt quantitatis æſtimatio.Exemplum,ponatur hoc in caſu res 8,minue ex 10 numero rerum, relinquuntur 2, quos duc in 8,fit 16, diuide per 7 numerum quantitatũ,exit 2 $\frac{2}{7}$ æſtimatio quantis,quod ſi ſecunda quantitas cognita ſit,ducemus eam in numerum ſuũ,& quod producitur,à quadrato dimidij numeri rerum minuemus,& radix reſidui,addita uel detracta,à numeri rerum dimidio,oſtendit ęſtimationẽ rei.Exemplum, ponatur q̃ntitas ſecunda 2 $\frac{2}{7}$,ducatur in 7 numerum quantitatum,fit 16,abijce hunc numerum ex 25,quadrato dimidij 10 numeri rerum , & relinquitur 9, cuius radix addita uel detracta à 5 dimidio 10 numeri rerum,oſtendit 8 uel 2,æſtimationes ipſius rei.

DEMONSTRATIO.

Sit etiam e numerus,ęqualis quadrato a b,quod eſt a c,& numero a b qui eſt ſuperficies f d,poſita igitur a b prima,numero e ſecunda, c tertia , b d quarta,erit proportio a b ad e, ut numeri e ad b d, quare regula erit,cũ quantitates æquantur rebus & quadrato rerũ.

REGVLA.

Poſita rem quantamcumq; libuerit,ducemus in aggregatum ex ipſa & ſuo numero,& productum diuidemus per numerum quantitatum,& quod exit eſt æſtimatio quantitatis.Exemplum,5 quantitates æquantur 7 rebus, & quadrato rei, & res eſt 3, dicemus igitur,duc 3 in 10,aggregatum 3 æſtimationis rei & 7 numeri rerum. fit 30,diuide per 5,numerũ q̃ntitatum,exit 6,æſtimatio quantitatis. Quòd ſi quantitas ſecunda ſit cognita, ducemus eam in ſuum numerum,& producto addemus quadratum dimidij numeri rerum & radix totius,detracto dimidio numeri rerũ,eſt æſtimatio rei. Exemplum, ponatur 6,quantitatis ęſtimatio,quando 5 quanitatis ęq̃les ſunt 7 rebus,& quadrato rei,duc igitur 6 æſtimationem quantitatum in 5,numerum quantitatum,fit 30,adde his quadratum 3 $\frac{1}{2}$ dimidij 7 numeri rerum, ſcilicet 42 $\frac{1}{4}$,ab huius radice,quæ eſt 6 $\frac{1}{2}$,ſi auferas 3 $\frac{1}{2}$,dimidium numeri rerum,relinquetur 3 æſtimatio rei.

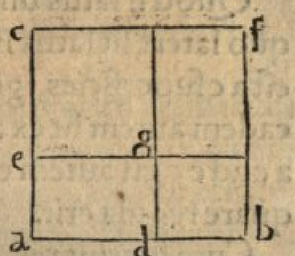
Notandum. Solemus autem his uti poſitionibus,cum duorũ numerorũ, qui ab initio ponunt̃,nulla exprimit̃ comparatio,nec in aggregato nec in differẽtia,nec in multiplicatione,nec in diuiſione,ſeu ꝓportione, nec in radice,his em̃ quinq; modis cõparant̃ numeri,quare ſi unus

conſiſtat,

consistat; nulla est secundæ quantitatis utilitas, sed una positione quæstio soluitur.

DEMONSTRATIO.

Quod si productum, ex re in quantitatem, quãtitatibus & rebus comparetur, consurgent duo modi tantũ, aut enim tale productum quantitatibus & rebus æquabitur, aut res æquabuntur producto & quantitatibus, sit igitur res a b, quantitas ac numerus quantitatum a d, numerus rerum a e, erunt igitur ex supposito, duæ superficies d c, & b e, æquales a f, est autem a f æqualis quatuor superficiebus, g a, g b, g c, g f, igitur hæ quatuor superficies, æquales sunt superficiebus d c & b e, detractis itaq; æqualiter tribus superficiebus g a, g b, g c relinquetur altera g a, æqualis g f, quare ex 15 6 Elementorum, a d, ad d b, ut c e ut e a, proportio igit̃ numeri quantitatum, ad residuum ex re, ut residui quantitatis, ablato numero rerum, ad numerum rerum, secundum hoc erit regula.



REGULA.

Si nota fuerit res, abijciemus ex ea numerum quantitatũ, & cum residuo diuidemus productum, ex numero rerum in numerũ quantitatum, quod exit est addendum numero rerum, & totum est quantitas.. Exemplum, sint 10 res & 12 quantitates, æquales producto rei in quantitatem, & sit quantitas 18, tunc abijcies econtra, 10 numerũ rerum, ex 18 quantitate, & relinquitur 8, cum quo diuide 120, productum ex 10 rerum numero, in 12 quantitatum numerum, & exit 15, quem adde ad 12 numerum quantitatum, fit 27, rei æstimatio, unde 10 res, sunt 270, & 12 quantitates sunt 216, quæ iuncta faciunt 486, ꝓductum 18 q̃ntitatis in 27 rem, & ita posuimus exemplum, regulę conuersum, ut intelligas unã & eandem esse rationẽ. Quod si ꝓductum ipsum cognitum sit, diuide ipsum ꝓductum per numerum q̃ntitatum, si sit minor numero rerum, aut per numerum rerũ, si ille sit minor numero q̃ntitatum, & dimidium exeuntis, duc in se. à q̃ abijce illud, quod ꝓuenit, diuiso ꝓducto ex numero maiore in productum quantitatis, in rem, per numerum minorem, seu numerus rerum sit maior seu minor, & ℞ residui, addita uel detracta ab eo quod in se duxeras, ostendit æstimationẽ quantitatis, aut rei scilicet, q̃ minore numero describit̃, inde diuiso ꝑ eam ꝓducto, exit illa, q̃ est maiore numero definita. Exemplum, 2 res & 6 q̃ntitates, ęq̃les sunt q̃ntitati rei, quę est

res	quan:	productũ
2	6	64

32
16 —— 256
6 —— 64 $\frac{192}{64}$
384 8
$\frac{2}{192}$

gratia

gratia exempli 64, diuido 64 per 2 minorē quàm 6, exit 32 cuius dimidiũ 16 in se duco, & fit 256, abijcio ex hoc, 192, qui prouenit, diuiso 384 producto 6 in 64, per 2, relinquuntur 64, cuius radix est 8, quę addita uel detracta à 16 numero, quem in se duxisti, ostendit rei ęstimationem 8, uel 24. quare si res ualet 8, quãtitas etiam erit 8, diuiso enim 64 per 8, exit 8, & si res ualet 24, quãtitas est $2\frac{2}{3}$, diuiso 64 per 24, & in utroq; casu, 2 res & 6 quãtitates, ęquantur 64 quantitati rei.

DEMONSTRATIO.

5 Quod si latus unum, æquatur producto unius in alterum & reliquo lateri, sit latus illud a b, & relinquũ a e, numerus uero lateris a b est a c superficies, igitur e f, fit ex supposito, ex a e in suum numerum, eadem autem fit ex a b in e c, proportio igitur a b ad a e, ut numeri a e ad e c, est autem e c residuum a e quantitatis, & a c numeri rerum, quare regula erit.

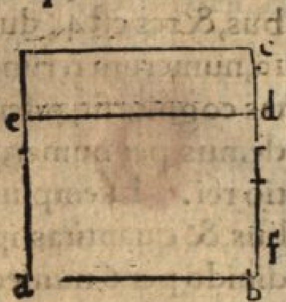
REGULA.

Cum fuerint res æquales quantitati rei, & quantitatibus, & nota fuerit quãtitas, minuemus eam ex numero rerum, deinde ducemus quantitatem in suum numerum, & productũ diuidemus per tale residuum, quod exit, est ęstimatio rei. Exemplũ, 10 res, ęquantur quantitati, rei, & quatuor quãtitatibus, & quantitas ipsa est 8, aufero 8 ex 10, relinquitur 2, dũco etiam 8 quantitatem, in 4 numerum ipsius, fit 32, quem diuido per 2 residuum relictum, exit 16, æstimatio rei, & ubi prima detractio nequiret fieri, casus nõ potest in ueris numeris esse. Si uerò non quantitas, sed ipsa res, sit cognita, quia ex a b, in a c, fit, quantũ ex a e in aggregatũ ex a b & numero a e, diuidemus productum ex numero rerum in æstimationem rei, per aggregatũ ex re & numero quantitatum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quantitati rei, & 4 quãtitatibus, & res est 16, duco 16 rem in 10 numerum rerum, fit 160, diuido per 20 aggregatum ex 4 numero quantitatum & 16 rei æstimatione, exit 8, æstimatio quantitatis, si uerò quantitas rei cognita esset, duces talem quantitatem rei, in numerum quantitatum, & productum diuides per numerũ rerum, cui exeunti adde quadratũ dimidij eius quod exit, diuisa quantitate rei per numerũ rerum: & radix aggregati, addito dimidio, quod prius in se duxeras, est rei ęstimatio. Exemplum, sint 4 res ęquales 5 quantitatibus, & quantitati rei, quę sit 45, ducam 45 per 5 numerum quantitatum, fit 225, diuido per 4 numerum rerum, exit $56\frac{1}{4}$, cui addo $31\frac{41}{64}$ quadratum $5\frac{5}{8}$, dimidij prouentus 45 diuisi per 4, & fit totum $87\frac{17}{64}$, cuius radici quæ est $9\frac{3}{8}$, si addantur $5\frac{5}{8}$ dimidium prouentus diuisionis, fiet 15 res.

DEMONSTRATIO.

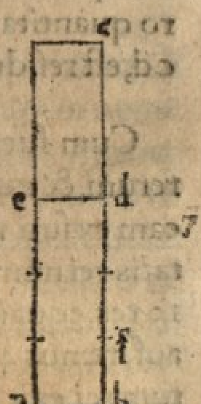
6 Cum uerò quadratum rei: & quantitas rei, & res, inuicem comparantur

rantur, fiunt modi tres, primus est, cum quadratum rei, æquale est quantitatibus rerum & rebus, & sit a b res, cuius quadratum a c, & sit b f quantitas, & a d quantitates rerum, & erit, ut quoties b f in b d continetur, totus sit numerus quantitatis rei, d c igitur exit rerum numerus, quia igitur b c æqualis est a b, & c d est numerus rerum, erit ut detracto numero rerum ex re, relinquatur b d, productum ex numero quantitatis rei, in quantitatem. unde regula.



REGVLA.

Cum quadratum rei æquatur rebus, & quantitatibus rerum, si res est cognita, auferemus ex ea numerum rerum, residuum diuidemus per numerum quantitatis rei, & prodibit quantitas. Exemplum, 10 res cum 4, quantitatibus rerum, æquantur quadrato rei, & res est 30, aufero 10 ex 30, relinquitur 20, quem diuido per 4, numerum quantitatis rei, & exit 5 æstimatio quantitatis. Quod si quantitas nota sit, ducemus eam in numerum quantitatis rei, & producto addemus numerum rerum. & conflabitur rei æstimatio. Exemplum, 10 res & 4 quantitates rei, æquantur quadrato rei, & quantitas est 7, ducemus 7 in 4 numerum quantitatis, & fiet 28, cui addemus 10 numerum rerum, fiet æstimatio rei 38. Si uero productum ex re in quantitatem cognitum fuerit, ducemus ipsum in numerum quantitatum rerum, & ei addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius cum dimidio numeri rerum superaddito, est æstimatio rei. Exemplum, quadratum rei æquatur 10 rebus, & quatuor quantitatibus rerum, & quantitas rei, est 50, ducemus 50 in 4 numerum suum, id est quantitatum rerum, & fit 200, cui addemus 25, quadratum dimidij 10 numeri rerum, fit 225, cuius radici addo 5, dimidium numeri rerum, & fit 20, rei æstimatio, unde diuiso 50 producto rei, in quantitatem exit $2\frac{1}{2}$, æstimatio quantitatis.



DEMONSTRATIO.

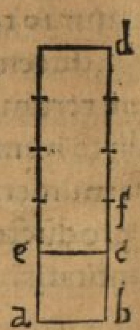
Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & numero rerum, ponemus rem a b, & q̄titatē b c, & quantitas rei a c, ea causa necessario erit & d c numerus rerū, & a d erit aggregatū quadratorum, igitur detracta d c ex b c, relinquetur b d, qua diuisa per numerum quadratorum, prodibit b f æqualis a b. regula igitur est.

REGVLA.

Cum fuerit quātitas rei æqualis quadratis rei & numero rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in numerum quadratorum, & producto addemus numerum rerum, & cõflabitur quantitas. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 10 rebus, & res est 4, duc 4 in 6 numerum quadratorum, fit 24, adde ei 10, numerum rerum, fit 34, æstimatio quantitatis. Quod si quantitas cognita sit, auferemus ex ea numerum rerum, & residuum diuidemus per numerum quadratorum rerum, quod exit, estq; æstimatio rei. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 10 rebus, & quantitas ipsa est 34, aufero 10 de 34, relinquitur 24, quem diuido per 6 numerum quadratorum, exit 4, æstimatio rei. Si uero quantitas rei cognita sit, diuidemus eam per numerum quadratorum, & prodeunti addemus quadratum dimidij eius, quod exit diuiso numero rerum per numerum quadratorum rerum, & radix totius, cum detractum fuerit idem dimidium erit rei æstimatio. Exemplum. Quantitas rei ęquat 6 quadratis rei, & 60 rebus, & quantitas rei est 1200, diuide 1200 per 6 numerum quadratorum rei, exit 200, cui addo 25, quadratũ 5, dimidij prouentus 60 numeri rerum, diuisi per 6 numerum quadratorum, fit 225, à cuius radice, quæ est 15, aufero 5 dimidium ipsius prouentus, & relinquetur 10, rei æstimatio, inde diuiso 1200, qui est quantitas rei: prodit 120 æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si numerus rerum, sit æqualis quadrato rei & quantitatibus rerum (etenim ad unum quadratum, uel ad unã quantitatẽ rei, per cõmunem diuisionem, semper, ut in uniuersis dictũ est capitulis, reducere licet) ponemus a b rem, quadratum eius a c, numerum rerum b d, erit igitur e d numerus quantitatis rei, & e d numerus productus ex numero quantitatum in quantitatem, quæ sit c f, quia igitur c d, est residuum a b & b d, erit regula hæc.



REGULA.

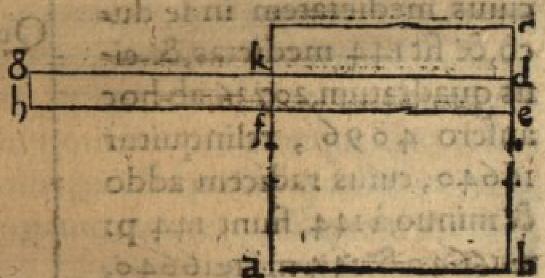
Cum fuerit numerus rerum, æqualis quantitatibus rerum, & quadrato rei, & fuerit res cognita, auferemus eam ex suo numero, & residuũ diuidemus per quantitatis rei numerum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum: 10 res, ęquantur quadrato rei, & tribus quãtitatibus rei, & res est 4, auferemus 4 ex 10, relinquuntur 6, diuido per 3, numerũ quantitatum rei, exit 2, ęstimatio quantitatis. Si uero quãtitas cognita sit ducemus eam in numerum quantitatis rei, & productũ auferemus ex numero rerum, residuum est rei ęstimatio. Exemplum: 10 res ęquantur quadrato rei, & producto rei in quantitatẽ ter, & quantitas est 2

duce-

ducemus igitur 2 æstimationem quantitatis, in 3, numerum quantitatis rei, & producitur 6, quem aufero ex 10, numero rerum, relinquitur 4, ęstimatio rei. Si uero productum ex re, in quantitatem, cognitum fuerit, ducemus illud in numerum suum, & productum auferemus à quadrato dimidij numeri rerum, & radix residui addita uel detracta, ab ipso dimidio numeri rerum, ostendit ęstimationem rei. Exemplum, 10 res, ęquantur quadrato rei, & 3 quantitatibus rerum, & quantitas rei est 8, ducam 8 in 3, numerum quantitatis rei, fit 24, hũc abijciemus ex 25 quadrato 5 dimidij 10, relinquetur 1, cuius R quæ est 1, addita uel detracta ex 5, ostendit 6, uel 4, æstimationes rei, unde diuiso 8 quantitate rei, per 6, uel per 4, exit $1\frac{1}{3}$ uel 2. æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si quadratum rei, & quantitas rei, & quantitas inuicem comparentur, consurgunt tres alij modi, sit igitur primo quadratum rei, æquale quantitatibus rerum, & numero quantitatum, & ponatur a b res ipsa, cuius quadratum a c, æquale sit quantitatibus rerum (quæ sint a d, ita ut d e, sit quantitas) & numero quantitatum d e, qui sit f h, eritq; superficies g f, æqualis ex supposito, superficiei c k, quare ex 15 sexti Element. a b, ad d e, uelut h f, ad d c, est aũt a b res, d e, quantitas, h f numerus quantitatum, c d residuum rei, & producti ex numero quantitatis rei in ipsam quantitatem, quare regula est.



REGVLA.

Cum quadratum rei æquale fuerit productis, ex quantitate in rem & in numerum, fueritq; res ipsa cognita, ducemus rem in numerum quantitatum rerum, & producto addemus numerum quantitatum, & cum aggregato diuidemus quadratum rei, prouentus est æstimatio quantitatis. Exemplum, quadratum rei, æquale sit sex quantitatibus rerum, & 20 quantitatibus, & ipsa res sit 12, duco 12, in 6 numerum quantitatis rei, fit 72, cui addo 20 numerũ quantitatum, fit 92, cum hoc diuido 244 quadratum rei, exit $1\frac{13}{23}$, quantitas ipsa: si uero quãtitas cognita sit: ducemus eam in numerum suum, & seruabimus productum, deinde ducemus eandem in numerum quantitatis rerum: huiusq; producti dimidium, in se ductum, addemus priori producto & radici ipsius aggregati, abijciemus dimidium

dium quod in se duxeramus, & totum est æstimatio rei. Exemplum Quadratum rei, æquale sit 12 quantitatibus, & 5 quantitatibus rei, & quantitas ipsa est 2, ducam 2 quantitatem, in 12 numerum suum, fit 24, deinde ducam eandem quantitatem 2, in 5 numerum quantitatis rei, & fit 10, huius dimidium quod est 5, duco in se, fit 25, addo ad 24, iam seruatum fit 49, huius radici quæ est 7, addo idem dimidium quod est 5, fit 12, æstimatio rei. Vbi autem nota esset quantitas rei (& est in figura superficies e k) ducemus eam in suum numerum, & producti tertiam partem, ad cubum reducemus, ducemus & quantitatem rei in numerum quantitatum, & dimidium producti in se multiplicabimus, & ab hoc auferemus partem quam ad cubum duxeramus, id est cubum ipsum, tertiæ partis, primi producti, quem seruasti, & radicem huius residui, addemus & minuemus, à dimidio secundi producti, & radices cubicæ aggregati, & residui simul iunctæ, sunt æstimatio rei. Exemplum. Quadratum rei, æquale est 12 quantitatibus, & 2 quantitatibus rei, & quantitas rei est 24, ducam 2, in 24, fit 48, huius tertiam partem, quæ est 16, ducam ad cubum, fit 4096, ducam etiam 24 in 12, fit 288, cuius medietatem in se duco, & fit 144 medietas, & eius quadratum, 20736, ab hoc aufero 4096, relinquitur 16640, cuius radicem addo & minuo à 144, fiunt 144 p: R 16640 & 144 m: R 16640, horũ radices cubice iunctæ, sunt rei æstimatio. Quòd si ex numero per æqualia diuidendo, sumpta medietas, non producat quadratum æquale, aut maius cubo tertiæ partis primi producti, operaberis per residuum regulæ capituli, cubi æqualis rebus & numero, nam facta multiplicatione per productum, ut in exemplo per 24, qui numerus est quantitas rei, erit cubus æqualis rebus & numero: rebus quidem productis ex quantitate rei in numerum suum: numero autem producto ex quantitate rei in numerum quantitatum, ut in exemplo dictum est, quod quadratum rei æquale fuit 2 quantitatibus rei, & 12 & quantitatibus, & quod quantitas rei est 24, dicemus igitur cubus æquatur 48 rebus, p: 288 numero, & 48 producitur ex 24 in 2, & 288 ex 24 in 12, ergo ponamus quod quadratum rei, æquale sit 2 quantitatibus rei & 3 quantitatibus, & quantitas rei sit 8 ducemus 8 in 2, & 3, & producentur 16 & 24, igitur cubus æquabitur 16

Quad. rei.	Quan:	Quan: rei
	12	2
Quan: rei	24	
	288	48
	144	16
	20736 ——	4096
	16640	
	144 p: R 16640	
	144 m: R 16640	

rebus

rebus p:24, & res ualet ℞ 13 p:1, ex capitulo suo, inde diuiso 8 quantitate rei, per ℞ 13 p:1, exit ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quantitas ipsa, est autem quadratum ℞ 13 p:1, hoc 14 p: ℞ 52 & quantitas rei est ℞ 75 $\frac{1}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, & est 8, cuius duplum est 16, & tres quantitates sunt, ℞ 52 m: 2, quæ iunctæ cum 16, duplo quantitatis rei, faciunt 14 p: ℞ 25, quadratum rei.

Quad. rei	Quan:	Quan:rei
	3	2
		8
	24	16

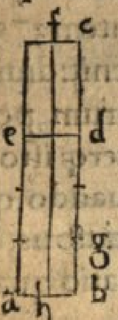
Nota quòd in hac regula, semper res est media proportionalis, Not^m. inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum, & pro- 1. ducto rei in numerum quantitatis rei, ut in exemplo, ℞ 13 p:1, quæ est res, est proportionalis inter ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{21}{3}$, quæ est quantitas, & ℞ 52 p:5, qui constat ex 3, numero quantitatum, & producto ex & 13 p:1, re ipsa, in 2, numerum quantitatis rei.

Nota etiã, quòd regula hæc pendet ex capitulo cubi æqualis re- Not^m. bus & numero, uelut sequens, ex capitulo cubi & numeri æqualium 2. rebus, & ultima, ex capitulo cubi & rerum æqualium numero.

Nota etiam, quòd res est eadem, quæ quæritur in capitulo cubi Not^m. æqualis rebus & numero, sed quantitas est numerus, qui proue- 3. nit diuiso quocunque numero, per rem ipsam, nam eidem capitulo, cubi æqualis rebus & numero, competit una sola res, sed infinitæ quantitates, uelut dictum est hic, quod res est ℞ 13 p:1, & diuisimus 8, quantitatem rei, si autem ponatur cubus æqualis 16 rebus & 24 numero, erit res semper ℞ 13 p:1, sed posita quantitate rei 4, erit numerus quantitatis 6, & quantitatis rei 4, & quantitas ℞ 1 $\frac{4}{9}$ m: $\frac{2}{3}$.

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & quantitatibus, 10 ponemus a b rem, & quantitatem b c, & numerum quadratorum, secundum quem b g, æqualis a b, continetur in b d, & erunt quadrata a d, iuncta, & e c residuum, æquale numero quantitatum, & sit numerus quantitatũ f c, erit igitur f b, æqualis e c, quare b c quantitatis, ad a b rem, ut d c residui rei, ductæ in numerum quadratorum, à quantitate ad c f numerum quantitatum, erit etiam ex hoc e b residuum, æquale a f residuo, quare a b media proportionalis inter a h & b c, diuisam secundum numerum, secundum quem b g continetur in b d.



Nota igitur, quod in hac tota regula, res media pro- Not^m. portionalis est, inter quantitatem diuisam, per numerum quadratorum, & residuum rei & numeri quantitatum.

REGVLA.

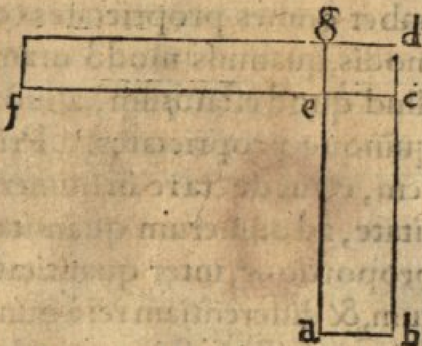
Regula igitur est, cùm quantitas rei, æqualis fuerit quadratis rei & quantitatibus, & res nota fuerit, ducemus eam in se, deinde in numerum quadratorum, & productum diuidemus, per residuum rei à numero quantitatum, & quod exit, est quantitas. Exemplum, Quan:rei æquatur tribus quadratis rei, & 12 quantitatibus, & sit res 20, gratia exempli, duco 20 in se. fit 400, duco 400 in 3 numerum quadratorum, fit 1200, diuido 1200, per 8, differentiam rei & numeri quantitatum, exit 150, quantitas ipsa. Si uerò quantitas ipsa cognita sit, non res, duc eam in numerum quantitatum, & productum diuide per numerum quadratorum, quod exit, abijce ex quadrato dimidij prouentus quantitatis diuisę per numerum quadratorum, & radix residui, addita uel detracta, à dimidio eiusdem prouentus, ostendit æstimationem rei. Exemplum. Quantitas rei, æqualis est 4 quadratis rei, & 3 quantitatibus, & quantitas ipsa est 50, duc 50 in 3 numerum quantitatum, fit 150, diuide 150, per 4 numerum quadratorum, exit $37\frac{1}{2}$, deinde diuide 50 per 4 scilicet quantitatum per numerum quadratorum, exit $12\frac{1}{2}$, huius dimidium, quod est $6\frac{1}{4}$, duc in se, fit $39\frac{1}{16}$, à quo abijce $37\frac{1}{2}$, relinquuntur $1\frac{9}{16}$, cuius radix est $1\frac{1}{4}$, quæ addita uel detracta à $6\frac{1}{4}$, ostendit æstimationes rei, $7\frac{1}{2}$, uel 5. Si autem productum seu quantitas rei cognita sit, ducemus quantitatem rei in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, exiens est numerus, qui cum cubo æquatur tot rebus, quotus est numerus qui prouenit diuisa quantitate rei per numerum quadratorum. Exemplum, Quantitas rei, quæ sit 1500, ęqualis est 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, ducemus igitur 6 in 1500, fit 9000, diuide per 4 numerum quadratorum, exit 2250, numerus, qui cum cubo æquatur 375 rebus, est autem 375 numerus, qui prouenit: diuiso 1500 numero quantitatis rei, per 4 numerum quadratorum, per capitulum autem suum, res ualet 10, uel ℞ 300 m:5, & uterque istorum numerorum, potest esse rei æstimatio, in casu isto, quando quant^{tas} rei, quæ est 1500, æquat 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, & æstimatio quantitatis habetur, diuiso 1500 qui est æstimatio quantitatis rei, per alteram æstimationem rei.

Quan:rei	Quad.rei	Quan:
1500	4	6
375	1500	
2250	1000	

DEMONSTRATIO.

Cùm uerò quantitates c d, in numero c f, æquales fuerint quadratis a b rei, & quantitati rei d e, reducendo ad unam quãtitatẽ rei, erit

erit detracta communi ſuperficie d e, ſuperficies g f æqualis a c, quare quadratum a b, per primam ſexti Elementorum, æquale ſuperficiei, ex e g in partem e f talem, qualis a b, eſt pars b c, igitur ex 16ª ſexti Elementorum, a b media eſt inter d c & partem illam ex e f, unde regula.



REGVLA.

Cum fuerint quantitates, æquales quantitati rei & quadratis rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in ſe, deinde productum in numerum quadratorum, & diuidemus, quod producitur ultimò, per numerum quantitatum, detracta re, & exibit quantitas. Exemplum, 12 quantitates, æquantur quantitati rei, & tribus quadratis rei & res eſt 4, ducam 4 in ſe, fit 16 ducam 16 in 3, numerum quadratorum rei, fit 48, diuidam 48, per 12 numerum quantitatum, detracto 4 re, & eſt diuidere per 8, exit 6, quantitas ipſa. Si uero quantitas cognita ſit, duc eam in numerum ſuum, & productum diuide per numerum quadratorum rei: ei prouentui adde quadratum dimidij eius, quod prouenit, diuiſa quantitate per numerum quadratorum, & radix totius, detracto eodem dimidio, eſt æſtimatio rei. Exemplum, 12 quan.^{es} æquantur quan.^{t} rei, & 3 quadratis rei, & quantitas eſt 6, duco 12 in 6, fit 72, diuido per 3 numerum quadratorum, fit 24, deinde diuido 6 quantitatem, per 3 numerum quadratorum, exit 2, cuius dimidium quod eſt 1, duco in ſe fit etiam 1, addo ad 24, fit 25, cuius ℞ 5, detracto 1, dimidio 2, relinquit 4 æſtimationem rei. Si uero quant.^{tas} rei nota ſit, ducemus eam in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, & quod exit, eſt numerus qui æquatur cubo & rebus, quarum numerus eſt id, quod prouenit diuiſa quantitate rei, per numerum quadratorum, inde æquatio rei, eſt æſtimatio quæſita, unde diuiſa quan.^{tas} rei, per æſtimationem rei: exibit æquatio quantitatis. Exemplū, 12 res, æquales ſunt quan.^{ti} rei, & 3 quad. rei, & quan.^{s} rei, eſt 24, duco 24 in 12, fit 288, diuido per 3, exit 96, deinde diuido 24 per idem 3, numerum quad. rei, exit 8, igitur cubus p:8 rebus: æquatur 96, tunc uero per capitulum ſuum, res ualet 4. Ideo 4 eſt rei æſtimatio, cum quo diuide 24 quantitatem rei, exit 6 quantitas ipſa.

Quad. rei		Quan: rei		Quan:
3	—	24	—	12
	8		288	
	96			

Scias,

Notandum.

Scias: quòd quodlibet capitulum, seu regula ex præcedentibus habet omnes proprietates contentas in eadem regula, in singulis modis, quamuis modò utamur una, modò alia, secundum quòd illud quod est notum, aliud fit. Exemplum, in decima regula sunt quinque proprietates. Prima, quòd proportio quantitatis ad
3 rem, est ut ducta re in numerum quadratorum, & detracta quantitate, ad numerum quantitatum. Secunda, quòd res est media proportione, inter quantitatem diuisam per numerum quadratorum, & differentiam rei à numero quantitatum. Tertia, quòd ducta re in se, & pòst in numerum quadratorum ducto quadrato, tantum fit quantum ex quantitate in residuum rei & numeri quantitatum. Quarta & Quinta, sunt reliqui duo modi procedendi illius regulæ, ad inuentionem rei, horum exempla in quæstionibus subiungere libuit.

QVAESTIO I.

Inuenias duos numeros, quorũ quadrata iuncta, sint 100, & productum unius in alterum duplum sit aggregato eorum. Ponemus primum rem, secundum quantitatem, igitur quantitas rei, æqualis est 2 rebus, & 2 quantitatibus, quare ex quarta regula, proportio residui rei, ad 2, ut 2 ad residuum quantitatis, igitur erunt tres quantitates proportionales, residuum rei, 2, & residuũ quantitatis, res autem constat ex suo residuo & 2, sed quantitas ex suo residuo & 2, igit res est aggregatum primæ & secundæ trium quantitatum proportionalium, & quantitas aggregatum secundæ & tertiæ, igitur ex dictis in capitulo trium quantitatum proportionalium, quadratum aggregati primæ & secundæ cum quadrato aggregati secundæ & tertiæ, & cum quadrato secundæ, æquantur quadrato aggregati ipsarum trium quantitatum, at uerò quadratum aggregati primę & secundę, & quadratum aggregati secundæ & tertiæ ex supposito faciunt 100, & quadratum secundæ est 4, quia secunda quantitas proportionalis fuit 2, igitur quadratũ aggregati omnium trium quantitatũ est 104, igitur tres quantitates ipsæ iunctæ, sunt ℞ 104 & quia secunda est 2, erunt reliquę, scilicet prima & tertia, ℞ 104 m:2 fac igitur ex ℞ 104 m:2, duas partes, producentes 4 quadratum, 2, & erunt ℞ 26 m:1 p:℞ v:23 m:℞ 104, & ℞ 26 m:1 m:℞ v:23, m:℞ 104, & quia res constat ex prima & secunda proportionali, & quantitas ex tertia & secunda proportionali, erit igitur ut addamus 2 utriq; parti, scilicet secundam quantitatem, & fiet res ℞ 26 p.1 p:℞ v: 23 m:℞ 104, & quantitas ℞ 26 p:1 m:℞ v:23 m: ℞ 104, horum quadrata iuncta sunt 100, præcise, & productum unius in alterum est ℞ 416 p:4

p:4, duplum aggregati eorũ, uia uerò cõmuni procedẽdo, peruenires ad partes has, quas uides infrà, liquet autẽ quòd illę confusę magis sunt, quamuis superioribus ęquiualeant.

R 26 p: 1 p: R v: 23 m: R 104
R 26 p: 1 m: R v: 23 m: R 104
R v^{ma} 50 p: R v: 2068 m: R 26624
R v^{a} 50 m: R v: 2068 m: R 26624

QVAESTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum q̃drata iuncta sint 100, & quadratum maioris, æquale sit ductui maioris in minorem quater cum octuplo maioris. Ponemus maiorem rem, minorem quantitatem, eritq́ quadratum rei, æquale 4 quantitatib. rei & 8 rebus, quare ex 6ª regula, auferemus 8 ex re, & fiet residuum res m:8, unde diuisum per 4 exibit $\frac{1}{4}$ rei m:2, & hæc est quantitas quadrata, igitur rei & $\frac{1}{4}$ rei m:2 æqualia sunt 110, quare $1\frac{1}{16}$ quad. p:4 m:1 re, æquabitur 100, & quadratum æquabitur $\frac{16}{17}$ rei, & $90\frac{6}{17}$, quare res est R $90\frac{100}{289}$ p: $\frac{8}{17}$, & quantitas est $\frac{1}{4}$ huius m:2, scilicet R $5\frac{191}{289}$ m: $1\frac{15}{17}$.

QVAESTIO III.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 100, & productum unius in alterum, æquale sit triplo quadrati minoris & sexcuplo eiusdem minoris. Ponemus rem minorem numerum, & quantitatem maiorem, igitur quantitas rei, æquatur 3 quadratis rei & 6 rebus, quare ex septima regula, quantitas est 3 res p:6 quadrata, igitur rei & trium rerum p:6 iuncta sunt 100, igitur 10 quadrata p: 36 rebus p:36, æquantur 100, & 1 q̃d. p. $3\frac{3}{5}$ rei æquatur $6\frac{2}{5}$, res igitur est, R $9\frac{16}{25}$ m: $1\frac{4}{5}$, & quantitas triplum huius p:6, id est R $86\frac{21}{25}$ p: $\frac{3}{5}$.

QVAESTIO IIII.

Fac de 20, tres partes in continua proportione, quarum mediæ q̃dratum ęquale sit duplo producti medię in minorem, & q̃druplo minoris, posita media re, & minore quantitate, erit q̃dratũ rei, æquale 2 quantitatibus rei, & 4 quantitatibus. Quare ex notando primo nonę regulę, res media est proportionalis, inter quantitatẽ & aggregatum ex numero quantitatũ 4, ac producto rei in numerum quantitatis rei, scilicet 2, tertia igit̃ q̃ntitas est 2 res p:4, quia igit̃ 3ª quantitas est 2 res p:4, & 2ª res, & hę cum prima constituunt 10, erit prima 6 m:3 rebus, quare ducta prima in tertiam, fiet quadratum secundæ, igitur 1 q̃dratum æq̃tur 24 m: 6 q̃dratis, quare 7 q̃drata ęq̃ãtur 24, & res est R $3\frac{3}{7}$, & hæc est media, cuius duplum p:4 est tertia, uidelicet 4 p: R $13\frac{5}{7}$, inde detracto aggregato secundę & tertię ex 10 relinquitur prima 6 m: R $30\frac{6}{7}$, hæ autem quãtitates proportionales

2 res p:4	res	6 m:3 rebus
4 p: R $13\frac{5}{7}$	R $3\frac{3}{7}$	6 m: R $30\frac{6}{7}$

Hh sunt,

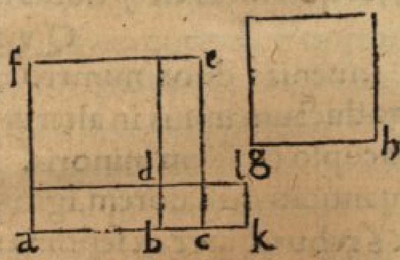
sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

De cubo rebus æqualibus numero. CAP. XI.

SCipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta fermè capitulũ hoc inuenit, tradidit uerò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cũ in certamen cũ Nicolao Tartalea Brixellense aliquando uenisset, occasionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressa demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quęsiuimus, eamq; in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subijciemus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli causa cubus g h, & sexcuplum lateris g h ęquale 20, & ponam duos cubos a e & c l, quorum differentia sit 20, ita quod productũ a c lateris, in c k latus, sit 2, tertia scilicet numeri rerum pars, et abscindã c b, ęqualem c k, dico, quod si ita fuerit, lineam a b residuũ, esse ęqualem g h, & ideo rei æstimationem, nam de g h iam supponebatᷣ, quod ita esset, perficiam igitur per modum primi suppositi sexti capituli huius libri, corpora d a, d c, d e d f, ut per d c intelligamus



cubum b c, per d f cubum a b, per d a triplum c b in quadratum a b, per d e triplum, a b in quadratum b c. Habebimus igitur quatuor supposita quorum duo dicta iam sunt, scilicet quod ex a c in c k, uel c b fit 2 et quod differentia cubi à c a cubo c b est 20, tertium deducitur ex his & est quòd cum id quod producitur ex a b, b c, a c ter sit æquale differentiæ d e & d a & triplum producti ex a b, a c, b c sit sexcuplum a b nam productum ex a c in c b est 2 ex primo supposito, ergo triplum eius est sex, & productum hoc in a b sexcuplum ipsius a b. hoc autem est differentia d e & d a. Quartum quod patet ex primo & secũdo corrolario sexti capituli quòd d f est differentia cubi a c cum triplo a c in quadratum c b a cubo c b cum triplo c b in quadratum a c. Ponatur igitur cubus a c, α, cubus a b c, β, triplum c b in quadratum a c, γ, triplum a c in quadratum c b, δ, differentia, α, & β, ε, differentia γ & δ ζ differentia α & δ a β & γ β igitur cũ ε componatᷣ ex ζ & β ut facile est demõstrare in numeris quos & pro exẽplo a latere ꝓposui ε aũt est 20 ex secũdo supposito & ζ sexcuplũ a b & ε cub. a b igitᷣ

cubus a b cum ſexcuplo a b quod eſt cum ſex rebus, nam a b eſt latus ſui cubi, æquatur 20 igitur cū & b h cubus cum ſexcuplo b h æq̄tur 20 erit b h cubus cum ſexcuplo b h ęqualia cubo a b cum ſexcuplo a b, igitur a b eſt res, et ipſa eſt differentia duorum laterum producentium 2, & quorum cubi differunt in 20 quod erat demonſtrandum. Ex his conficiemus regulam.

	24 1	25	
20		13	7
	4 14	18	

REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeruabis, uniq́ dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, abijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq́ Binomium cum ſua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica ſui Binomij, reſiduū quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio. Exemplum. cubus & 6 poſitiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8. duc 10 dimidium numeri in ſe, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quę eſt ℞ 108, & eam gemminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomium ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:10, horum accipe ℞^{cu} cub^{as} & minue illam quæ eſt Apotomæ, ab ea quæ eſt Binomij, habebis rei æſtimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub⁹ p:6 reb⁹ ęq̄lis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v: cu. ℞ 108 p:10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m:10

Aliud, cubus p:3 rebus æquetur 10: duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1 duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1, fiunt 26, huius radici adde 5, & ab ea minue 5, habebis Binomium ℞ 26 p:5, & Apotomen ℞ 26 m:5, igitur rei ęſtimatio eſt ℞ v: cubica ℞ 26 p:5 m: ℞ v: cubica ℞ 26 m:5, experientia ſic habetur.

ra: v: cubica ra: 26 p:5 m: ra: v: cubica ra: 27 m:5
cubi partium ra: 26 p: 5 m: ra: 26 m:5
hoc autem totum, ut liquet, eſt 10.
Quad: partium, ra: v: cubica 51 p: ℞: 2900 ℞ v: cu^{a} 51 m: ℞ 2600
triplicata q̄drata partium, ℞ v: cub: 1277 p: ℞ 1895400
ra: b: cubica 1377 m: ℞ 1865400 partes ipſæ
m: ra: v: cubica ℞ 26 m: 5. p: ra: v: cubica ℞ 26 p: 5
Producta partium in triplata quadratorum
p: ra: v: cubica 49299354 p: 6885 m: ra: 47385000 m: 7020
m: ra: v: cubica 49299354 m: 6885 m: ra: 47385000 p: 7020
Porro hę ra: cubicę quatuor nominibus conſtantes, ad duas reduci

possunt, cum enim 6885 dempseris ex 7020, relinquetur 135, detracta etiam radice 4738500, ex radice 4929354, relinquitur ℞ 18954, igitur talia producta erunt ℞ v: cubica ℞ 18954 m: 135 m: ra:v:cubica ra:18954, p:135, cubus igitur totus, ex demonstratis in 3° libro est 10 p:ra:v: cubica ra: 18954 m: 135 m:ra:v: cubica ra, 18954 p:135, at uero tres radices seu res sunt
ra:v:cubica ra:18954 p: 135 m:ra:v:cubica ra: 18154 m:135.

Iunctis igitur omnibus simul, cum radices illæ uniuersales cubicæ mutuo se deleant, fiet aggregatum cubi & trium rerum, 10, ad unguem.

Exemplum tertium, cubus & 6 res æquantur 2, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum fit 8, duc 1 dimidium 2, ad quadratum fit 1, iunge 8 & 1, fiunt 9, huius radix est 3, ergo geminatę 3, alteri adde 1 dimidium numeri, fiet 4, ab altero minue 1, similiter dimidium reliquum numeri, fit 2, minue igitur ra: cubi minoris ex maiore, habebis æstimationem rei, ra: cubicam 4 m:ra: cubica 2.

Memento autem eius, quod in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeramus, quandoque radices illas uniuersales cubicas, numero integro, uel fracto æquipollere, ut in primo exemplo docuimus, nam ra:v: cubica ra:108 p: 10 m:ra:v:cubica ra: 108 m:10, est 2 ut ibi ex regula patet, & ut experimento etiam notissimum est.

Facile autem est intelligere tum in hoc capite tum sequentibus quod habita æstimatione & numero rerum, habebimus numerum æquationis ducta æstimatione in numerum rerum, & ei quod producitur addito cubo eiusdem: aggregatum enim est numerus ęquationis uelut 1 cubus p:3 pos. ęstimatio est 2, dico duces 2 in 3, fit 6, adde ei 8 cubũ 2 fit 14 numerus æquationis. Et similiter si 1 cu. p: certo numero rerum cubus ęstimatio fit ℞ 8 m: 2. gratia exempli, æquetur 20, tunc habebimus numerum rerum ducendo ℞ 8 m: 2 ad cubum fit ℞ 3200 m: 56 detrahe à numero æquationis qui est 20, relinquetur 76 m: ℞ 3200, hoc diuide per ℞ 8 m: 2 æstimationem, exibit numerus rerum ℞ 648 m: 2.

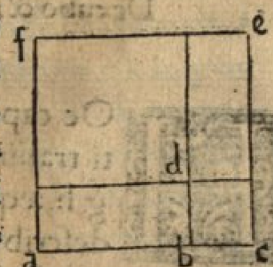
Et scias quod æquatio hæc communis esse potest omnibus capitulis, uelut cubi & numeri æqualium rebus, ut si 1 cu. p: 12 ęquetur 34 pos. & rei æstimatio est 3 p: ℞ 7 uel 3 m: ℞ 7, ideò si uelim 1 cub. p: numero pos. æqualem 12, sub hac ęstimatione erit ex regula pręcedente numerus rerum ℞ 1008 p: 2. Sequendo igitur formam capituli huius, & capiendo tertiam partem numeri rerum quæ est ℞ 112 p: $\frac{2}{3}$ & ducendo ad cubum fit ℞ 1905552 p: 224 $\frac{8}{27}$ adde 36 quadratum dimidij 12 numeri æquationis, habebis ℞ v: ℞ 1905552 p:

$260\frac{8}{27}$ cui adde & detrahe 6 & accipe ℞ cu. habebis æstimationem rei ℞ v: cui ℞ v: ℞ 190555 ℞ p: $260\frac{8}{27}$ p: 6 m: ℞ v: ut ℞ v: ℞ 190555 p: $260\frac{8}{27}$ m: 6.

De cubo æquali rebus & numero. CAP. XII.

DEMONSTRATIO.

SIt etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi d c & d e, quorum latera a b & b c, producãt tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico a c esse rei quæsitæ æstimationẽ, cum enim ex a b, in b c, fiat tertia pars numeri rerum, ex a b in b c ter, fiet numerus rerum, & ex a c in productum ex a b in b c ter, fient res ipsæ, posita a c re, at ex a c in productum a b in b c ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex a b in quadratum b c, alia tria ex b c in quadratum a b, hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa uero cum cubis d c & d f, ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum a e, cubi etiam d c & d f, æquiualent numero proposito, igitur cubus a e, æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrãdum, superest ostendere, quod triplũ a c in productum a b in b c, sit æquale sex corporibus, id ostendam, si probauero ex a b, in b c ducto in a c, fieri duo corpora ex a b in quadratum b c, & ex b c in quadratum a b, nam quod fit ex a c in productum a b in b c, æquale est ei, quod fit ex a b in superficiem b e, latera enim omnia omnibus sunt æqualia, sed hoc æquale est ei, quod fit ex a b in c d & d e, quod autem fit ex a b in d e, æquale est ei, quod fit ex c b in quadratum a b, quoniam latera omnia omnibus sunt æqualia, quod igitur ex a c, in productum a b in b c fit, æquale est his, quæ fiunt ex a b in quadratum b c & ex b c in quadratum a b, quod est propositum.



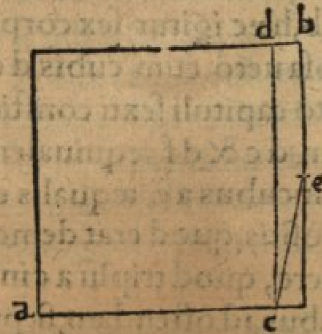
REGVLA.

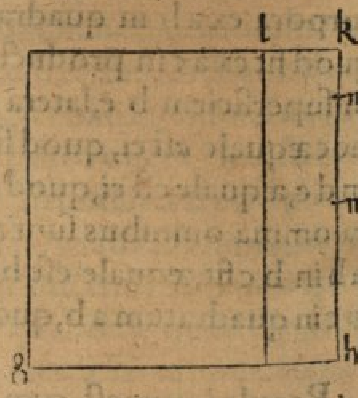
Regula igitur est, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipsum ex eodem, & residui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atque iterum minue ab eodem dimidio, habebisque ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum ℞ cubicæ iunctæ rem ipsam constituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 40, duc 2, tertiam partem numeri rerum cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidij numeri, fit 392, huius radicem adijce ad 20, p: ℞ 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m: ℞ 392, horum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt rei æstimationem, ℞ v:cubicam 20 p:℞ 392 p:℞ v:cubica 20 m:℞ 392. Aliud, cubus æquatur 6 rebus p:6, tertiam partem numeri rerum, quæ est 2, ad cubum ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri æquationis, relinquitur 1, cuius ℞ est 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt ℞ cubicam 4 p:℞ cubica 2, æstimationem rei.

At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞ $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero æquationis, tunc consules librum Alizę hic adiectum.

De cubo & numero æqualibus rebus. CAP. XIII.

DEMONSTRATIO.





F........ numerus,

HOc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus g h, æqualis rebus a b, quæ describunt quadrata superficie & numero f, & sit basis cubi g h, quadratum g k, cuius pars quarta sit h l residuum autem æquale a d superficiei, latus autem, quod Greci tetragonicum uocant, residui c d sit c e, sit uero m k dimidium h k, à qua abscindatur m n, æqualis c e, dico quod tam h n, quam n k, cubi, cum numero f, æquantur rebus a b, ut numerus rerum & æquationis idem maneat, & primo ostendamus de h n, constat enim cubum h n continere latus suum, h n in quadrato h n, quadratum autem a b) quia g l æqualis est a d, & g l triplum est quadrati h m) æquale est triplo quadrati h m, & quadrato m n, hæc autem superant, ex 2i Elementorum, quadratum h n, in duplo h m in n h, quare in eo quod fit ex h k in n k, quia h k dupla est ad h m, cubus igitur h n, continet latus suum h n in superficie a b minus eo, quod fit ex h k in k n. At uero, quia cubus g k cõtinebat res seu latera h k in quadrato h k, uel in quadrato a b, cum numero f, igitur ex communi animi sententia, f numerus æqualis est producto ex h k in differentiam quadratorũ a b & g k. at differentia g k & a b est, quanta differentia h l & c b, quia a d æqualis g l differentia autem h l & c b est, ut quadrati h m & m n, igitur ex differentia quadrati h m, & m n in h k, fit f numerus, at uero per eandem, differentia quadratorum h m, seu m k. & m n, est duplum m n in n k, cum quadrato n k, & ideo m n & m k in n k, & ideo h n in n k, igitur ex h k in productum h n in n k fit f numerus, addatur igitur f numerus, cubo h n, & ex alia parte productum ex h k in k n ductum in h n producto ex h n in superficiem a b, minus producto h k in k n, fiet cubus h n cum numero f æqualis h n ductæ in a b, seu rebus ex a b, quod erat probandum. Similiter, quia differentia g k & a b, quæ est h n in k n, ducta in k h, producit f, differentia etiam a b & quadrati k n (cum a b sit æqualis quadratis h m & m k & m n, & ductui k m in m h) æqualis est differentiæ dupli k h in h n a quadrato n h, addito ei rectangulo h n in n k, at quod fit ex h n in n k cũ quadrato n h, æquale est producto ex k h in h n, per 3^{am} 2^{i} Elementorum, igitur quadratum a b superat quadratum n k in producto k h in h n semel, cum igitur numerus f, contineat k h in producto k h in h n, & cubus k n, contineat k n in quadrato k n, erit ut cubus k n cum numero f, seu cum producto ex k n in rectangulum k h in h n, æqualis producto a b in k n, igitur cubus k n cum eodem numero f, æqualis est a b numero rerum eidem.

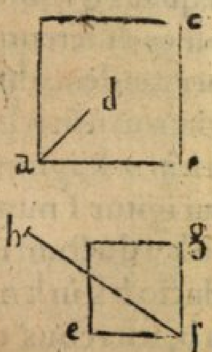
REGVLA.

Regula igitur est: cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, inuenies æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero, cuius dimidium in se ducito & triplicato, hoc abijce ex numero rerum, & R: residui addita dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, uel detracta, ostendit æstimationem cubi & numeri æqualium rebus. Exemplum, cubus p:3, æquatur 8 positionibus, tunc inuenio æstimationem cubi æqualis 8 rebus p:3, ex præcedenti capitulo, & est etiam 3, huius dimidium duco in se, fit $2\frac{1}{4}$, triplica, fit $6\frac{3}{4}$, abijce ex 8 rerum numero, fit residuum $1\frac{1}{4}$, cuius R: addita uel detracta ab $1\frac{1}{2}$ dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, ostendit utrasque æstimationes quæsitas alteram $1\frac{1}{2}$ p:R: $1\frac{1}{4}$, reliquam $1\frac{1}{2}$ m:R: $1\frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Nunc etiam ostendamus, quomodo maiore æstimatione habita, absque auxilio præcedentis capituli habeatur & reliqua, & sit, ut ex a d in a c quadratũ fiat numerus æquationis, ita quod quadrata a d & a c iuncta, faciant numerum rerum, eritque ex octauo capitulo, a d, rei æstimatio, & sit f h linea, cui si adderetur dimidium a d quadratum totius, æquale foret quadrato a c & quadrato dimidij a d, dico

f h



f h esse secundum æstimationem, quando cubus cum numero ex a d in a c æqualis est rebus in quadrato a c, & quadrato a d, fiat quadratum f g, quod cum quadrato f h æquale sit quadratis a c & a d, iunctis, quia igitur quadratum compositæ ex f h & dimidio a d, æquale est quadratis c a & dimidij a d, erit per 4 2^{i} Elementorum abiecto communi quadrato dimidij a d, quadratum a c æquale quadrato f h, & duplo f h in dimidium a d, quare rectangulo ex f h in a d semel cum quadrato f h, quare ex 16^{i} 6^{i} Elementorum a b media proportione inter f h & aggregatum f h & a d, quia uero quadratum e g, additum producto f h in se, & in a d, tantum facit, quantum additum, quadrato a c, e g uero & f h quadratum, æqualia sunt quadratis a d & a c, ex supposito, erit quadratum a c & quadratum a d & productum f h in a d, æquale quadratis a c & e g, inde abiecto communiter a c quadrato, erit e g quadratum, æquale ei quod fit ex f h in a d cum quadrato a d, per eandem e f media proportione est inter a d & aggregatũ ex a d & h f, cumq; similiter, ut ostensum est, a b sit media proportione per 67 lib. de Proport. seu quinti huius inter f h & aggregatum f h & a d, erit quia f h & a d iunctæ in utroq; ordine sunt prima quantitas, proportio f h, ad a d, ut a b ad e f duplicata, quare ex 17 6^{i} Elementorum, f h ad a d, ut a c ad e g, igitur ex 34^{i} 11^{i} Elementorum, corpus quod sub f h & e g continetur, æquale est corpori sub a d & a c, quare & numero æquationis, cumq; quadrata e g & h f, æquentur numero rerum, quia quadratis a c & a d, erit ex octauo capitulo huius, h f etiam æstimatio rei, in eodem capitulo. unde regula.

REGVLA.

Duc dimidium maioris æstimationis in se, & triplica, & aufer à numero rerum, & ℞ residui, detracto dimidio maioris æstimationis, est æquatio quæsita. Exemplum, cubus & 60, æquatur 46 rebus & maior æquatio est 6, pro habenda reliqua duc 3, dimidium prioris æstimationis in se, fit 9, hunc triplica fit 27, abijce 27 ex 46, relinquitur 19, ab huius radice abijce 3, dimidium primæ æstimationis, habebis secundam æstimationem, ℞ 19 m:3, Ex hoc capite habentur tria corrolaria primum quod æstimatio cubi æqualis rebus & numero est æqualis duabus æstimationibus cubi cum eodem numero æqualium totidem rebus ueluti cu. æquatur 16 rebus p:21 & æstimatio est ℞ $9\frac{1}{4}$ p:$1\frac{1}{2}$ erunt duæ æstimationes cu. p:21 æqualium 16 rebus simul iunctę ℞ $9\frac{1}{4}$ p:$1\frac{1}{2}$ altera.n. est 3 reliqua ℞ $9\frac{1}{4}$ m:$1\frac{1}{2}$. Ex hoc corrolario & regulis datus huius capitis sequitur secundum

scilicet

ſcilicet quod ex mutua multiplicatione & detractione cuiuslibet æſtimationis cu. & numeri æqualium rebus oritur altera. Tertium, æſtimationes cu. & numeri æqualium rebus ſe habent in comparatione æſtimationis cu æqualis totidem rebus & eidem numero, uelut apothome ad binomium. Ipſæ uero æſtimationes capituli cubi & numeri æqualium rebus inuicem ſe habent ita, ut radices ſingulorum reſiduorum ſint uelut prima pars Apothome, & dimidium prioris æſtimationis ut ſecunda pars uelut in exemplo ſuperiore habebis eſtimationes uiciſsim acceptas, quale inferius uides & ſuperior earum ut liquet neceſario eſt 3 & minor R: $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$. Experiaris & inuenies.

R: $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$
3
R: $9\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$

De cubo æquali quadratis & numero. CAP. XIIII.

Quod ſi cubus, æqualis ſit quadratis & numero, cõuertetur capitulum in cubum ęqualem rebus & numero, primo conuerſionis modo, qui eſt à toto ad partem, nam ſecundus eſt a parte ad totum, tertius à differentia partium, quartus à proportione.

Demonstratio.

Sit igitur cubus a c, in capituli 12 figura, æqualis 6 quadratis a c, & 100, cumque quadratum a c, conſtet ex quadrato a b, & gnomone eum circundante, erit cubus a c æqualis quadratis 6 a b, & gnomonibus 6 & 100, gnomo autem conſtat quadrato b c, & duplo a b, in b c, igitur cubus a c conſtat 6 quadratis a b & 6 quadratis b c & 6 productis a b, in b c bis, & 100, at ex a b in b c bis, fiunt 4 res, quia a b eſt res, & b c, 2, & 6 quadrata b c, ſunt triplum cubi b c, quia b c eſt tertia pars 6, igitur cubus a c, æqualis eſt 6 quadratis a b, & 24 rebus, & triplo cubi b c, & 100, at conſtat, quòd 24 numerus rerum, conſtat ex 9 numero quadratorum, in 4, qui eſt duplum tertiæ partis eiuſdem numeri. At ex alia parte conſtat etiam, cubus a c, cubis a b & b c, & triplo a b in q̃dratum b c, & triplo b c in quadratũ a b, hoc namque in primo ſupoſito ſexti capituli oſtenſum eſt, igitur cub. a c, æqualis eſt cubis a b & b c & 6 quadratis & 12 rebus, igitur cubus a b, & cubus b c, & 6 quadrati, & 12 res, æquantur 6 quadratis & 24 rebus, & triplo cubi b c & 100, conſtat autem, quod numerus quadratorum manet idem, quia eſt triplus ad b c, & b c fuit tertia pars numeri quadratorum, & numerus rerum eſt ex numero quadratorum in ſuam partẽ tertiam, hoc enim æquale eſt ſemper, triplo quadrati tertiæ partis, abiectis igitur communiter cubo b c ſemel, & 6 quadratis, & 12 rebus ſcilicet tot rebus, quot fiunt ex numero quadratorum in ſuam tertiam partem, relinquetur cubus a b, æqualis

100,& 12 rebus,& duplo cubi b c, manifestum est autem,quod numerus 100,manet idem,& quod numerus rerum fit ex numero quadratortm in tertiam sui partem, & quod duplum cubi b c,est 16, quia b c est 2,igitur cubus a b æqualis est 12 rebus,& 116 numero, ideo ex præcedenti capitulo, inuenta a b, addemus ei b c, tertiam partem numeri quadratorum,& conflabitur a c,& quia in quærendo a b,reducimus tertiam partem numeri rerum ad cubum, & hæc tertia pars numeri rerum,est quadratum tertiæ partis numeri quadratorum,ideo ex ultima contractione fit hæc regula.

REGVLA.

Adde cubum tertiæ partis numeri quadratorum,dimidio numeri æquationis, & totum quod inde fit,in se ducito,à quadrato abijce cubum quadrati tertiæ partis numeri quadratorum, residui radicem adde & minue dimidio aggregati, quod in se duxeras, habebis Binomium & Apotomen,cuius ℞ cubicam iunge,& eis adde tertiam partem numeri quadratorum,& totum quod conflatur, est rei æstimatio.Exemplum,cubus ęquatur 6 quadratis p:20,adde 8,cubum 2,tertiæ partis 6,ad 10,dimidium 20, fit 18,ab huius quadrato 324,abijce 64,cubum quadrati 2,relinquitur 260, cuius radicem adde & minue â 18,habebis 18,p:℞ 260,& 18 m:℞ 260, horum ℞ cubicæ iunctæ,addita tertia parte numeri quadratorum, constituunt rem,

De cubo & quadratis æqualibus numero. CAP. XV.

DEMONSTRATIO.

HOc capitulum conuertitur secundo modo, differentia autem est,quod primus modus ostendit addendam tertiam partem numeri quadratorum, & secundus minuendam,sit igitur, in figura 13[i] capituli,cubus a b cum 6 quadratis a b,æqualis 100, & ponatur b c tertia pars numeri quadratorum,& compleatur cubus a c,erit igitur cubus a c æqualis cubo a b,& 6 quadratis,& 12 rebus,& cubo b c,ex primo supposito 6[i] capituli,loco igitur cubi a b & 6 quadratorũ ponatur 100, nam illa erant æqualia 100,igitur cubus a c,ęqualis erit 12 rebus,& cubo b c, & 100,at 12 res ex a b,deficiunt â 12 rebus ex a c in 12 b c,at illud 12,ut ostensum est in præcedenti,fit ex triplo q̃drati b c,igitur 12 b c,est triplum cubi b c,igitur cubus a c & triplum cubi b c æq̃ntur 12 rebus, & cubo b c,& 100,abiecto igitur cubo b c cõmuni semel,erit cubus a b cũ duplo cubi b c,æqualis 12 rebus,& 100,duplũ autem cubi b c est 16,& numerus rerum est triplum q̃drati b c,tertiæ partis numeri qua-

quadratorum, & ideo inuenta æſtimatione a c, abijciemus b c tertiam partem numeri quadratorum, & relinquetur a b, cognita ſecundum hoc erit regula.

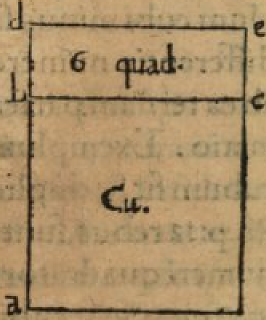
REGVLA.

Duc tertiam partem numeri quadratorum, ad cubum, & duplica illum cubum, & differentiam numero æquationis ab eo ſume, inde triplica quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, & habebis res, quæ æquantur cubo & numero, ſi duplum cubi fuit maius numero æquationis, uel res cum numero, æquales cubo, ſi duplum cubi minus ſit numero æquationis, uel res æquales cubo, ubi differentia numerorum nulla ſit, inde inuenta æquatione, minue ab ea tertiam partem numeri quadratorum, & reſiduum eſt rei æſtimatio. Exemplum. Cubus & 6 quadrata æquantur 100, duc 2 ad cubum fit 8, duplica fit 16, abijce ex 100 habebis cubum, æqualem 84 p: 12 rebus, ſunt autem 12 res, triplum quadrati 2, tertiæ partis 6, numeri quadratorum, res igitur eſt, ex capitulo 12. ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700, ab hoc abijce 2, tertiam partem 9 erit rei æſtimatio quæſita, quando cubus & 6 quadrata æquantur 100, hæc ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700 m: 2. Rurſus, ſit cubus & 6 quadrata, æqualia 25, & abijcio 16 duplū cubi tertiæ partis 6, ex 25, fient 9, & 12 res, ut prius, æquales cubo, res igitur ualet ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, abijce 2, relinquitur æſtimatio quæſita, ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$. Rurſus, cubus & 6 quadrata æquantur 16, abijce duplum cubi 2, ſcilicet 16, ex 16 numero relinquitur nihil, deinde ſume triplum quadrati & eiuſdem tertiæ partis numeri quadratorum, & eſt 12, numerus rerum, æqualium cubo, quare quadratum æquatur 12, quare res eſt ℞ 12, abijce 2 tertiam partem 6 relinquitur rei æſtimatio, ℞ 12 m: 2. Rurſus, cubus & 6 quadrata æquentur 7, ſume differentiam 7 & 16, dupli cubi 2, & eſt 9, & quia duplum cuborum eſt maius numero æquationis, & numerus rerum eſt 12, ut prius, habebimus cubum p: 9, æqualem 12 rebus, ideo res ualet 3 uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$, abijce 2, erit æſtimatio cubi & 6 quadratorum 1, uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $3\frac{1}{2}$, & hoc eſt in re m: quia $3\frac{1}{2}$ m: maius eſt quàm ℞ $5\frac{1}{4}$, & 6 quadrata ſunt 105 m: ℞ 9261, cubus uerò eſt ℞ 9261 m: 98, ſi igitur iungantur cubus & 6 quadrata, fient 7 ad unguem, ut patet.

Ex hoc eſt manifeſtum, cur capitulum, cubi & numeri æqualium q̄dratis, non demonſtratur ex capitulo cubi & quadratorum æqualium numero. Quemadmodum capitulum cubi & numeri, æqualium rebus, demonſtratum eſt ex capitulo cubi æqualis rebus & numero. Nam cum capitulum hoc perueniat aliquando ad capitulum cubi et numeri ęqualium rebus, melius est igitur ducere capitulū cubi & numeri æqualium quadratis, immediate ad capitulū cubi & numeri æqualium rebus, quàm ad idem capitulum, medio capituli cubi & quadratorum æqualium numero, nam & operatio longior, & demonstratio magis confusa euaderet.

Demonstratio.

Demonstratio alia similis nostræ generali, capituli septimi inuenta à Ludouico de Ferrarijs. Sit cubus a c & 6 quadrata, gratia exempli, c d æqualia 100, quia igitur b d, est altitudo 6 quadratorum, erit b d 6, posita igitur a d quadrato aliquo, erit a b quadratum m: 6, a c igitur superficies 1 q̄d̄ quadratis p: 36, m: 12 quadratis, & hæc est basis corporis a e, quare corpus a e est 1 cū quadratum p: 36 quadratis m: 12 q̄d̄ quadratis, & hoc est æquale 100, igitur 10, radix 100. æquatur 1 cub. m: 6 pos. radici 1 cū quadrati p: 36 quadratis, m: 12 q̄d̄ quadratis, æstimatio igitur rei est cognita, qua in se ducta, quia a d posita est 1 quadratum, habebitur a d, à qua detracta b d, quæ fuit 6, relinquetur a b, quæsita res.



Regula.

Regula igitur est, pone numerum quadratorum, numerum rerum, quæ cum ℞ numeri propositi æquantur cubo, & inuentam æstimationē in se ducito, à qua abijce productione numerum quadratorum seu rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, cubus & 6 quadrata æquentur 40, dices igitur, cubus æquatur 6 rebus & ℞ 40, æstimatio rei, est ex suo capitulo, ℞ v: cubica ℞ 10 p: ℞ 2 p: ℞ v: cubica ℞ 10 m: ℞ 2, hanc in se ducito producetur ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cubica 12, m: ℞ 50 p: 4, abijce 6 numerum rerum, relinquetur æstimatio quæsita, ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cub. 12 m: ℞
Exemplum. 80 m: 2. Idem inuenies ex prima regula operationis. Probatio est, ut in exemplo, cubus & quadrata 3, æquent 21, ęstimatio ex his regulis est, ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ p: ℞ $89\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ m: ℞ $89\frac{1}{4}$ m: 1, cubus igitur est hic constans ex septem partibus.

12 m: ℞ v: cubica, $4846\frac{1}{2}$ p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cubica $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$
p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $211977695 0\frac{7}{8}$ m: ℞ $2096286117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$
p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$
p: ℞ v: cub. $226\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$

Tria

Tria autem quadrata sunt ex septem partibus hoc modo
9 p: ℞ v: cub. $4846\frac{1}{2}$, p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$, p: ℞ v: cub: $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: $256\frac{1}{21}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$.

Inde iunctis tribus quadratis cum cubo sex partes, quæ sunt ℞ v: cubicæ æquales p: cum m: cadunt & relinquitur 21 ad amussim aggregatum.

QVAESTIO.

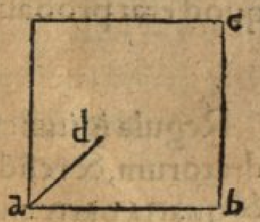
Columna quadrata 36 cubitis alta, lata & profunda cubito uno: ei pondere est æqlis ad amussim quadrata alia columna, à qua si detrahantur sex cubiti altitudinis, reliquum erit solidum undequaque quadratum, posita igitur secundæ columnæ latitudine 1 pos. erit 1 cu. p: 6 quad. æqualia 36, quare res erit ℞ cu. 16 p: ℞ cu. 4 m: 2 & hoc est latus basis columnæ altitudo aūt est 6 cubitorum, plus igit altitudo est cubitorum ℞ cu. 16 p: ℞ cu. 4 p: 4.

De cubo ac numero æqualibus quadratis. CAP. XVI.

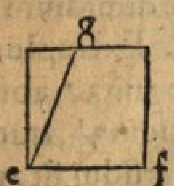
REGVLA.

Hoc capitulum per se patet: ex demonstratione septimi capituli, regula est, duc ℞ cubicam numeri, in numerum quadratorum, producetur numerus rerum æqualium cubo, & eidem numero, inuentis autem æstimationibus, duc ℞ cubicam numeri in se, & productum diuide per quamlibet æstimationem inuentam, exibit æstimatio quæsita utraque. Exemplum, 1 cubus p: 64, æquetur 18 quadratis, duc 18 in 4 ℞ cubicam 64, fit 72, numerus rerum æqualium cubo p: 64, huius æstimationes sunt ex capitulo suo, 8 & ℞ 24 m: 4, cum quibus diuide 16, quadratum 4, ℞ cubicæ 64, exit 2, & ℞ 96 p: 8, & hæ sunt æstimationes.

DEMONSTRATIO.



Et si una æstimationum habita a b, uolo habere reliquam, facio quadratum a b, quod sit a c, & detraho a b ex numero q̄dratorum & relinq̄tur a d, & ducatur a d, in aggregatū ex a b, & quarta parte a d, & superficiei productæ sumatur latus quod in eam potest, & ei addatur dimidium a d, & fiat e f, quam dico esse secundā æstimationem, fiat quadratum e f, & sumatur e g, quæ cū e f iuncta, æqualis sit aggregato a b & a d. Quia igitur e f quadratum, æquale est producto ex tetragonali in se, & dimidio a d in se, & producto tetra-



gonalis in a d per 4^{am} 2^{i} Elementorum, erit quadratum e f, æquale producto à d in aggregatum ex a b, & dimidio a d, & tetragonali ex 16^{a} 6^{i} Elementorum, igitur e f media inter a d & aggregatum a b & tetragonalis & dimidio a d, dimidium autem a d & tragonalis constituunt e f, ex supposito, e f igitur media est proportione inter a d & aggregatum a b & e f. Rursus, quod fit ex a b & a d, in a b & e f, æquale est ei quod fit ex e f & e g, in aggregatum a b & e f, quia ex supposito e f, & e g, æquantur a b, & a d & a b & e f manent idem, quod autem fit ex a d in a b & e f, ex probatis, æquale est quadrato e f, igitur quod fit ex a b in a b & e f, cum quadrato e f, æquale est ei quod fit ex e f & e g in e f & a b, abiecto igitur communi quadrato e f, erit quod fit ex a b in aggregatum a b & e f, æquale producto a b & e f in e g, cum eo quod fit ex e f in a b, detracto igitur communi iterum producto, a b in e f, relinquetur quadratum a b, æquale producto ex a b & e f in e g, quare a b media inter e g & aggregatum a b & e f, fuerat uero, ut dictum est, e f media, inter a d & aggregatum a b & e f, sunt igitur tres quantitates analogæ, in duobus ordinibus, quarum prima in utroque ordine eadem est, uidelicet aggregatum a b & e f, igitur per 67 libri 5^{i} huius, e g ad a d, ut a b ad e f duplicata,

a b & e f	
a b	e f
e g	a d

quare ex 17^{a} 6^{i} Elementorum, e g ad a d, ut a c ad quadratum e f, igitur ex 34 11^{i} Elementorum, corpus quod ex a d in a c, æquale est corpori ex e g in quadratum e f, sed a b fuit æstimatio rei. igitur corpus quod ex a d in a c æquale est numero æquationis posito aggregato a d & a b numero quadratorum, per demonstrationem habitam in capitulo octauo, igitur productum ex e g in quadratum e f, est æquale numero æquationis, cum igitur e f & e g, sint æquales numero quadratorum, quia aggregato a b & a d, & ex g e in quadratum e f, fiat numerus æquationis, erit per 8^{m} capitulum, e f rei æstimatio, quod erat probandum.

REGULA.

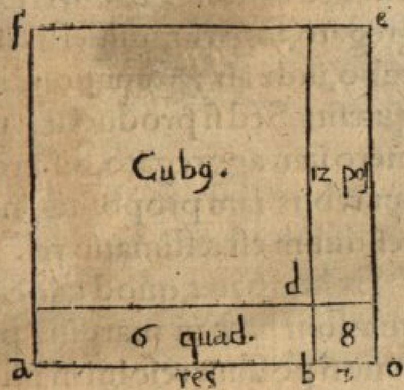
Regula igitur est, minue primam æstimationem â numero quadratorum, & residuum duc in aggregatum ex prima æstimatione, & quarta parte eiusdem residui, & producti accipe radicem, cui adde dimidium eiusdem residui, aggregatum est æstimatio rei quæsita. Exemplum, sit cubus cum 24 æqualis 8 quadratis, & æstimatio cognita 2, abiicio 2 ex 8, numero quadratorum relinquitur 6, hoc duc in $3\frac{1}{2}$, quod constat ex 2, prima æstimatione, & $1\frac{1}{2}$ quarta parte 6 residui, fit 21, cuius radici adde dimidium residui primæ æstimationis, quod est 3, fit ℞ 21 p: 3, æstimatio quæsita.

De

De cubo, quadratis & positionibus æqualibus numero. CAP. XVII.

DEMONSTRATIO.

Sit gratia exempli cubus a b, & 6 q̄drata, & 20 positiones æqualia 100, & addam b c ad a b, quæ sit 2, tertia pars numeri quadratorum, & describitur cubus uniuersalis a c, secundum quod componitur ex suis octo partibus, erit igitur cubus a b, f d superficies cum sua altitudine, & cubus b c 8, quia b c est 2, & a d corpora, 6 quadratis a b, æqualia, & corpora de 12 a b seu duodecuplo a b ex sexto capitulo huius libri, quia igitur cubus a b & 6 quadrata & 20 positiones, æquantur 100, addantur 8 positiones, quæ sunt reliquum ad 20 positiones, cubo a c, qui iam æquebatur cubo a b, & 6 quadratis, & 12 positionibus, & cubo b c, erit cubus a c cum 8 positionibus, æqualis 108, nam cubus a c excedit tria corpora d a, d e, in cubo c d, qui est 8, at quia 8 positiones a b deficiunt a b, 8 positionibus a c cubi maioris, in 8 b c seu octuplo b c, quæ est 2, addemus igitur octuplum b c utrique parti, & fiet cubus p:8 rebus, ęqualis 124



nota igitur ex capitulo suo a c, auferemus b c, relinquitur a q. Sit rursus cubus a b, & 6 quadrata & 12 res, æqualia 100, igitur addito cōmuni cubo b c, erit cubus a c æqualis 108, & a c ℞ cubicæ 108, & a b 2 m: quàm a c cognita, sit denuo cubus & 6 quadrata a b & 2 positiones ęqualia 100, additis igitur 10 positionibus residuis, ad cōplendum corpora d e, & addito cubo b c, fiet cubus a c æqualis 10 positionibus superadditis, & 108, sed 10 positiones a b deficiunt à 10 positionibus a c in 10 b c, addemus igitur 10 b c utrique parti, fiet cubus a c p:20, æqualis 10 positionibus p:108, abijce 20 ex utraque parte, relinquetur cubus a c ęqualis 10 positionibus p:88, inuenta a c, minue b c & relinquetur a b necessario cognita.

REGULA.

Regula igitur communis est, duc 3^{am} partem numeri quadratorum (quam hoc signo, ᵀp̄q̄d: demonstramus) ad cubum, addeque numero, inde duc numerum quadratorum in sui tertiam partem, & producti differētia à numerus rerum, est numers rerum addendarū cubo, ubi productū fuerit minus numero rerum propositarum uel addendarum numero, ubi productum fuerit maius numero rerum propositarū. Si igitur differentia est nulla, producti & numeri rerū

erit

erit cubus æqualis numero iam coaceruato, inde sumpta radice cubica numeri, minue ex ea Tpq̄d: & residuum est rei æstimatio, quod si positiones & cubus, æquentur numero, duces numerum positionum in Tpq̄d: & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubum, & res iam inuentas, ęquales numero iam aggregato, inde ab æquatione minue Tpq̄d:, & residuum est æstimatio. Quod si productum fuerit maius numero rerum, duc differentiā, quæ est numerus rerum, in Tpq̄d: & productum minue ex numero, quem habebas, aggregato, & si nihil superest, habebis cubum, æqualem rebus iam propositis tantum, quare deducendo ad minorem denominationem habebis q̄d^m ęquale numero, & res erit R quadrata numeri rerū, à qua minue Tpq̄d: & residuum erit æstimatio rei. Quod si in detractione producti ex numero rerum in Tpq̄d: à numero aggregato, superfit, numerus ille cum rebus iam propositis, æquatur cubo, inde ab æstimatione minue Tpq̄d: & residuum est æstimatio quæsita. Sed si productum numeri rerum in Tpq̄d: maius esset numero iam aggregato, differentia est numerus, qui cum cubo æquatur rebus iam propositis, inde habita æstimatione minue Tpq̄d: & residuum est æstimatio rei.

Ex hoc patet, quod tale capitulum resoluitur in quinq; capitula. quæ sunt hæc in margine posita, & non possunt resolui in plura, in aliquibus autem sequentium resolutio fit in tria postrema tantum, in omnibus autem capitulis quatuor denominationum, commune est cum fuerint resoluta in capitulum trium uel duarum denominationum, ut æstimationi inuentæ addatur aut minuatur Tpq̄d: ut in hoc capitulo semper minuitur, & commune est etiam omni capitulo ut rerum numerus & numerus ipse constituantur eodem modo, uelut hic numerus rerum, est differentia numeri rerum assumptarum in capitulo quatuor denominationum, & producti ex numero quadratorum in sui tertiam partem, & numerus capituli in quod resoluitur, est differentia producti ex numero rerum iam inuentarum, in Tpq̄d: & aggregati ex cubo Tpq̄d: & numero æquationis primo.

cubus & res ęquales numero.
cubus æqualis numero.
cubus æqualis rebus.
cubus æq̄lis rebus & numero
cubus & numerus æq̄les reb⁹

QVAESTIO I.

Exemplum. Est corpus quadratum undequaq;, quod cum superficiebus & lateribus est 22, dices igitur, cubus & 6 quadrata & 12 res æquantur 22, cuba igitur 2, tertiam partem numeri quadratorum, fit 8, adde ad 22 fit 30, deinde duc 6 numerum quadratorū in 2 sui par-

tem

tem tertiam, fit 2, differentia cuius à numero rerum est nihil, nam res etiam fuerant 12, habemus igitur 1 cubum æqualem 30, & res est ℞ cub. 30, abijce 2 Tp̄q̄d: fit æstimatio rei, ℞ cub, 30 m: 2.

Experientia autem est, ut iungas 1 cub. p: 6 q̄d. p: 12 reb⁹, & fiunt 22. Sex quadrata 24 p: ℞ cub. 194400, m: ℞ cub. 414720

cubus	22, m: ℞ cub. 194400, p: ℞ cub. 51840	
Duodecim res		℞ cub. 51840 m: 24
Aggregatum 22		

QVAESTIO. II.

Exemplum secundi. Inuenias quatuor numeros continuè proportionales, quorum primus sit 3 & reliqui tres sint 19, pone 2^m 1 rem, erit tertius $\frac{1}{3}$ quadrati, & quartus erit $\frac{1}{9}$ cubi, igitur 1 positio $\frac{1}{3}$ quadrati, $\frac{1}{9}$ cubi, æquantur 19, duc ad integra, habebis cubum & 3 quadrata & 9 res, ęqualia 171, nam omnia ducuntur per 9, adde igitur cubum tertiæ partis numeri quadratorum ad 171, & est 1, fit 172, deinde duc 3 numerū quadratorum in sui tertiam partem fit 3, huius producti & 9 numeri rerum, differentia est 6 numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, quia productum fuit minus, duc igitur 6 numerum rerum in 1 Tp̄q̄d: fit 6, adde ad 172, fit 178, igitur cubus & 6 res æquantur 178, & rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ 7929 p: 89 p: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89, ab hoc minue Tp̄q̄d: quæ est 1, habebis secundam quantitatem ℞ v: cubicam ℞ 7929 p: 89 m: ℞ v: cubica ℞ 7929 m: 89 m: 1, ex qua habebis reliquas.

Exemplum tertij modi. Cubus & 6 quadrata & 1 posito, æquantur 14, adde cubum 2 Tp̄q̄d: qui est 8, ad 14, fit 22, deinde duc 6 numerum quadratorum in 2 tertiam sui partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum est 11, numerus rerum æqualium cubo cum numero, quia numerus productus 12 fuit maior numero rerum, duc igitur 11 in 2 tertiam partem numeri quadratorum, fit 22, differentia cuius & numeri prioris aggregati est nulla, quare habebimus cubum æqualem 11 rebus, igitur quadratum æquatur 11, res igitur est ℞ 11, â qua minue 2 Tp̄q̄d: fit rei æstimatio ℞ 11 m: 2, sumpsisti autem differentiam in numero & non aggregasti, quia res æquabantur cubo, & non cubus cum rebus æquabantur numero, ut in præcedente exemplo.

QVAESTIO III.

Exemplum quarti modi. Ex oraculo iubet princeps fieri sacram ædem, cuius spacium sit 400 cubitorū, & longitudo latitudine maior sit 6 cubitis, latitudo altitudine 3 cubitis maior, quæritur quantitas. Pone altitudinem rem, latitudo erit 3 p: & longitudo 9 p: duc inuicem, habebis 1 cub. p:12 quadratis p:27 positionibus, æqualia 400, adde ad 400, cubum 4 ꝑq̄d: qui est 64, fit 464, duc 12 numerum quadratorum in tertiam sui partem, fit 48, cuius differentia à 27, est 21, numerus rerum, quæ æquantur cubo cum numero, quare duc 21 in 4 ꝑq̄d: fit 84, sume differentiam à 464, quæ est 380,

altitudo	1	pos:
latitudo	1	pos: p:3
longitudo	1	pos: p:9
productum	1 cub. p:12 q̄d: p:27 pos:	

& eam adde rebus, quia aggregatum numerorum primum, fuit maius numero producto secundo, habebis cubum æqualem 21 positionibus p:380, res igitur ualet ℞ v: cubicam 190 p, ℞ 35750, p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757, ab hac minue 4 ꝑq̄d: habebis altitudinem, qua habita, addendo 3 & 9, habebis latitudinem & longitudinem, ut uides

altitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757 m: 4
latitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 m: 1
longitudo, ℞ v: cu. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 p: 5.

Exemplum quinti modi. Cubus & 6 quadrata, & 2 res, æquantur 3, adde 8, cubum ꝑq̄d: ad 3 fit 11, deinde duc 9 in suam tertiam partem, fit 12, differentia à 2, numero rerum est 10 numerus rerum, duc in 2 ꝑq̄d: fit 20, cuius differentia ab 11, est 9 numerus, qui cum cubo æquatur 10 rebus, quia productum 2^m maius est numero aggregato, uoco autem productum secundum, quod fit ex numero rerum iam inuento, in ꝑq̄d: æstimatio igitur rei quando cubus & 9 æqualia sunt 10 rebus est 1, uel ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, abijce igitur 2 ꝑq̄d: fient duæ æstimationes quæsitæ, altera ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$ alia m: 1.

De cubo, & rebus æqualibus quadratis & numero. CAP. XVIII.

DEMONSTRATIO.

SIt in eadem figura, cubus a c cum 33 a c, æqualis 6 quadratis a c p:100, (gratia exempli) diuidatur cubus a c, posita b c ꝑq̄d: scilicet 2, in suas partes, erit cubus a c, æqualis cubo a b, cubo b c, sex quadratis a b, & 12 positionibus a b, at 33 a c, sunt 33 a b, & 33 b c, quæ sunt 66, quia b c est 2, igitur cubus a c, & 33 a c, æquantur cubo a b, cubo b c, sex quadratis a b, & 45 a b positionibus, & 66, hæc eadem igitur æqualia sunt 6 quadratis a c, & 100, at 6 quadrata a c, diuisa a c in b, per 4 2 Elementorum, æqualia sunt 6 quadratis a b, & 6 quadratis b c, & 12 superficiebus

ciebus a d,ſed a d eſt 2 poſitiones,quia b d eſt 2,igitur 12 a d ſunt 4 poſitiones a b,quare 6 quadrata a b,& 6 quadrata b c,& 24 poſitiones a b, & 100, æquantur cubo a b,cubo b c,6 quadratis a b,& 45 a b & 66 numero,cubus autem b c eſt 8 ,& 6 quadrata b c ſunt 24, igitur 6 quadrata a b , & 24 poſitiones a b, & 124,æquantur cubo a b,& 6 quadrat.a b,& 45 poſitionibus a b , & 74, facta igitur detractione ſimiliũ ex utraque parte, ſcilicet 6 quad 24 poſitionibus & 74. relinquetur cubus a b p:21 poſitionibus a b, æqualis 50 , manifeſtum eſt igitur quòd inuenta a b,ex capitulo ſuo,& addita b c ei quæ eſt 2, conflatur a c.

	6 q̄d^{ta} ab	24 poſ^{es} ab	124
cub^{9} ab	6 q̄drat^{a} ab	45 poſ^{es} ab	74
cub^{9} ab	p:	21 poſ^{bus} ab æquales	50

Manifeſtum eſt autem, quòd ubi poſitiones,quæ cum cubo erant, eſſent æquales productis , haberemus cubum æqualem numero tantum , & ubi poſitiones quæ cum cubo erant, eſſent pauciores , haberemus res ex una parte , & cubum ex alia,& tunc ſi numerus qui eſt cum cubo,foret æqualis alteri,eſſent poſitiones æquales cubo , & ſi eſſet minor , haberemus res & numerum æquales cubo:& ſi maior, haberemus res æquales cubo & numero,ex eadem demonſtratione,uelut in præcedente capitulo.

Regula.

Regula igitur eſt,ut primò ſtatuas numerum rerum ſemper,ut in præcedenti capitulo,& eſt ut ducas numerum quadratorum in tertiam ſui partem,& differentia huius producti , à numero rerum , eſt numerus rerum, quæ ſi nulla ſit,habebimus cubum æqualem numero,ſi autem productum ſit minus numero rerum,differentia erit numerus rerum,quę cum cubo ęquantur numero,& ſi productum fuerit maius,habebimus res æquales cubo:& tunc ſi numeri erunt æquales,erit cubus æqualis rebus,& ſi, qui producitur ex numero rerum,in ⊤p q̄d:fuerit minor numerò æquationis cum additione, erit cubus æqualis rebus & numero , quod ſi productus numerus ex rerũ numero in ⊤p q̄d:fuerit maior numero æquationis cum ſua additione,habebimus res æquales cubo & numero.Numerus autem æquationis ſic habetur, duc priorem numerum rerum , in tertiam partem numeri q̄dratorũ , & producti accipe differentiam,ab aggregato numeri æquationis , & dupli cubi ⊤p q̄d : differentia, erit numerus addendus cu.ſi primũ productum fuerit maius aggregato: uel rebus ſi fuerit minus, uel numerus æq̄lis cubo,ubi nullæ ſint res,inde habita æſtimatione, eam adde uel minus ⊤p q̄d:prout in exemplis doceberis,& habebis quæſitam æſtimationem.

 Exemplum

Exemplum primum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis & 25, duc 6 in 2, sui tertiam partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum nulla est, igitur cubus æquabitur numero, duc ergo 12 numerum rerum, in 2 Tp̄q̄d: fit 24, abijce ex 41, aggregato 16 dupli cubi 2, & 25 numero æquationis, relinquitur 17, qui æquatur cubo, res igitur est ℞ cubica 17, adde ei 2 Tp̄q̄d: fit rei æstimatio ℞ cubica 17 p: 2.

Exemplum secundum. Mercator fugiens, paciscitur redditurum $\frac{3}{4}$ debiti proportionaliter in tribus annis, ita quod si pactus fuisset redditurum $\frac{19}{27}$ primo anno reddidisset $\frac{9}{27}$, secundo $\frac{6}{27}$, tertio $\frac{4}{27}$, ut residua sint in eadem proportione, cum residuo capitali, quæritur portio cuiusque anni, reddendo solum $\frac{3}{4}$, & ponamus, quod capitale sit 4, ad uitãdum fractiones, uult igitur reddere 3, pone igitur quod restituat primo anno rem, igitur secundo anno restituet rem m: $\frac{1}{4}$ quadrati, & tertio anno, rem m: $\frac{1}{2}$ quadrati p: $\frac{1}{16}$ cubi, igitur in tribus bus annis restituet 3 res p: $\frac{1}{16}$ cubi m: $\frac{3}{4}$ quadrati, & hoc iam suponitur 3. quare reducito ad integrum, cubum ducendo per 16, habebis 1 cubum p: 48 rebus, æqualem 12 quadratis p: 48, duc 12 in 4 tertiam sui partem, fit 48, igitur differentia rerum nulla est, & cubus æquabitur numero, duc igit͞ 48, numerum rerum, in 4 Tp̄q̄d: fit 192, à quo detrahe 176, aggregatum ex dulpo cubi 4, & 48 numero æquationis, relinquitur 1 , & hic æquatur cubo, igitur rei æstimatio est ℞ cubica 16, quam minue ex 4, Tp̄q̄d: fiet æstimatio quæsita 4 m: ℞ cubica 16, reddet igitur anno primo 4 m: ℞ cubica 16, & secundo ℞ cubicam 16 m: ℞ cubica 4, & tertio, ℞ cubicam 4 m: 1, & horum residua, sunt proportionalia, cum 4, & iuncta faciunt 3, & est conuersum primi exempli, & residua ipsa sunt ℞ cubica 16, ℞ cubica 4, & 1.

Exemplum tertium. Cubus & 15 res, æquantur 6 quadratis & 24, duc 6 in sui tertiam partem, fit 12, cuius differentia à 15 numero rerum, est 3, & quia productum fuit minus, erit cubus & 3 res, ęqualia numero, duc igitur 15 numerum rerum, in 2 Tp̄q̄d: fit 30, minue ex 40, aggregato 24 & duplo cubi Tp̄q̄d: relinquitur 10, igitur 10 æquatur cubo p: 3 rebus, & rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5, m: ℞ v: cubica 26 m: 5, cui adde 2 Tp̄q̄d, habebis quæsitam æstimationem.

Exemplum quartum. Cubus & 15 res, æquantur 6 quadratis p: 10, iterum habebo cubum & 3 res, æquales numero, & numerus productus erit 30, ut prius, uerum aggregatum ex duplo cubi 2, Tp̄q̄d: & 10 numero æquationis, est 26, differentia igitur est 4, cum igitur cubus & 3 res æquentur 4, rei æstimatio est 1, & quia productus

ctus numerus est maior aggregato, id est 30, maior est 26, minuemus 1 æstimationem æquationis inuentæ ex 2, ᴛp̄q̄d: & relinquetur r æstimatio quæsita cubi & 15 rerum, æqualium 6 quadratis & 10.

Ideo patet quod in hoc casu, ubi cubus & res, ęquantur numero, si differentia numerorum nulla foret, uelut si loco 10, posuissemus 14, æstimatio rei esset ᴛp̄q̄d: scilicet 2, quia in æquatione inuenta, nihil haberemus addendum uel minuendum, quia cubus & 3 res, æquarentur nihil.

Exemplum quintum. Cubus & 10 res, æquatur 6 quadratis p:4, duc igitur numerum quadratorum in tertiam sui partem, ut prius, fit 12, differentia cuius à numero rerum, est 2, & quia productum est maius numero rerum, ideo 2 res æquabuntur cubo, pro numero itaq; duc 10 numerum rerum primum, in 2 ᴛp̄q̄d: fit 20, differentia cuius à 20, aggregato dupli cubi ᴛp̄q̄d: & 4, est nihil, igitur non habebimus numerum, sed cubus æquabitur, ut dictum est, 2 rebus, igitur deprimendo, quadratum æquabitur 2, ergo rei æstimatio, est R̸ 2, quam adde uel minue ᴛp̄q̄d:, habebis ueram æstimationum quæsitam, 2 p:R̸ 2, uel 2 m:R̸ 2, & potest etiam esse 2, & sic habet tres æstimationes hic casus,

Exemplum sextum. Sit cubus & 21 res, æqualia 9 quadratis p:5, tunc ut prius, ducam 9, in 3 tertiam sui partem, fit 27, huius differentia à 21, est 6 numerus rerum, cubo æquandarum, quia productum 27, est maius 21 numero rerum, addo igitur 54, duplum cubi ᴛp̄q̄d: ad 5 numerum ęquationis fit 59, cuius differentia, à 63, producto numeri rerum prioris, in ᴛp̄q̄d: est 4, igitur quia productum est maius aggregato, addemus numerum cubo, & fiet 1, cubus p:4, æqualis 6 rebus, iam inuentis, huius igitur æstimationis sunt tres, prima est 2, secunda R̸ 3 m:1, tertia ficta m:R̸ 3 p:1, quas adde ad 3 ᴛp̄q̄d: habebis ueras æstimationes illas quas à latere uides.

Prima	5
Secunda	2 p:R̸ 3
Tertia	2 m:R̸ 3

Exemplum septimum. Cubus & 26 res, æquantur 12 quadratis p:12, duc 12 numerum quadratorum, in sui tertiam partem, quæ est 4, fit 48, cuius differentia à 26, numero rerum, est 22, & quia productum est maius numero rerum, res æquabunt cubo, deinde duc 26 numerum rerum, in 4 tertiam partem numeri quadratorum, fit 104, abijce ex 140 duplo cubi ᴛp̄q̄d: & 12 numeri simul iunctis, fit 36, numerus addendus rebus, quia aggregatum est maius ꝓducto, econtrario, exemplo pręcedenti, cubus igitur æquabitur 22 rebus, p:36, quare eius erunt tres ęstimationes, prima R̸ 19 p:1, & est uera, secunda ficta m:R̸ 19 m:1 tertia etiam ficta, quæ est m, 2, has adde singulas, ꝛpq̄d: habebis ueras tres æstimationes, quarum experientiam à latere in margine posui.

Prima	5	p:℞ 19
Secunda	5	m:℞ 19
Tertia	2	

Ex hoc patet, quòd numerus quadratorum, in his tribus exemplis, in quibus æstimatio rei triplicatur, semper componitur ex tribus æstimationibus iunctis simul, uelut in quinto exemplo, 2 p:℞ 2, & 2, & 2 m:℞ 2, componunt 6, numerum quadratorum, & in sexto exemplo, 5, & 2 p:℞ 3, & 2 m:℞ 3, componunt 9, numerum quadratorum, & in septimo exemplo, 5 p:℞ 19, & 5 m:℞ 19 & 2, componunt 12, numerum quadratorum, ideo duabus cognitis, tertia semper emergit, & causa est cognita in initio huius libri. Et manifestum est, quòd cum peruenimus ad res, quæ à cubo separantur, seu numerus rebus, seu cubo iungatur, semper emergunt tres æstimationes, & causa dicta est superius ibidem, ubi de uera & ficta æstimatione locuti sumus. Et patet etiam, quòd omnes modi hi, ad additionem semper possunt referri, quamuis minus cum additur, uicem gerat, plus cum detrahitur, ostensum est enim quod tantum est minuere 4 ex 12, quantum addere 4 m: ad 12, utroque enim modo fiet 8.

cubus primæ	410 p:℞ 167884
26 res	130 p:℞ 12844
aggregatum	540 p:℞ 273600
12 quadrata.	528 p:℞ 273600
numerus	12
aggregatum	540 p:℞ 273600
cub⁹ secundæ	410 m:℞ 167884
26 res	130 m:℞ 12844
aggregatum	540 m:℞ 273600
12 quadra.	528 m:℞ 273600
numerus	12
aggregatum	540 m:℞ 273900
cubus tertiæ	8
26 res	52
aggregatum	60
12 quadra.	48
numerus	12
agggregatum	60

Ex hoc patet quod numerus quadratorum, diuiditur trifariam, & una æstimatione habita aggregatum reliquarum cognitum relinquetur.

Alia Demonstratio.

Sit igitur cubus & 100 res æqualia 6 quadratis p: 10 numero. Et ponatur a b rei æstimatio, b c ꝛpq̄d: a g autem æqualis, b c, quare g b est differentia a b & b c, cubus autem g b, est differentia cubi a b cum triplo a b. in quadratum b c, à cubo b c cũ triplo b c in quadratum a b, ex sexto capitulo, cubus uerò a b cum 100 rebus, æquatur 6 quadratis p: 10, ex supposito, 6 quadrata autem a b, sunt triplũ b c in quadratum a b, triplum igitur b c in quadratum a b, & cubus

b c,

b c,qui est 8,sunt 2 m:quam cubus a b cum 100 rebus,dico autem 2 m:quia cubus b c, qui iungit̃ 6 quadratis,debuit esse 10,& est tantum 8,at cubus a b cum 100 rebus, superat cubum a b,& triplũ a b in quadratum b c quod est 12 res,in 88 rebus,differentia igit̃ cubi b c & tripli b c in quadratum a b, à cubo a b,cum triplo a b in quadratum b c,est 88 a b,m:2 huic igitur differentię,æqualis est cubus g b, ut diximus,ponat̃ igitur b g res erit igitur g c seu a b, 2 m:re cuius quantitas sumpta 88 uicibus,ut dictum est, æquatur cubo b g p:2,igitur cubus b g, p:2, p:88 suis rebus,æqualis est 176,quare cubus b g cum 88 suis rebus æquatur 174,quare si eam æstimationem b g detraxeris ex b c,quæ est Tpq̃d:scilicet 2,habebis quantitatem a b,quæsitam. Et hæc demonstratio fuit inuenta à Ludouico Ferrario,et ostendit clarius rationem supradictarum operationum.

ALIA. DEMONSTRATIO.

Ponatur rursus, cubus cum 5 rebus, æqualis 6 quadratis a c 10, & ponatur e f res, d e Tpq̃d: differentia d e & e f, e h, eritq́ ex demonstratione consimili premissæ,ut cubus e h, æquetur 7 reb⁹ p:16 inde inuenta æstimatione, si ei addatur h f Tpq̃d: quæ est 2,habebitur e f res quęsita, nec in hoc addam uerba,quia demonstratio est similis præmissæ,& operatio eius in hac parte,est clarior in nostra demonstratione.

REGVLA.

Regula igitur sumpta ex hac demonstratione est,si numerus rerum æqualis est,producto ex numero quadratorum in suam tertiam partem, duc Tpq̃d:ad cubum,℞ cubicam differentiæ huius, & numeri æquationis,adde Tpq̃d:ubi cubus sit minor numero, aut minue,ubi sit maior,& totum est æstimatio rei, manifestum est autem,quòd ubi cubus Tpq̃d:& numerus,sint ęquales,non addemus nec minuemus,sed Tpq̃d:erit ipsa rei æstimatio.

Exemplum.Cubus & 12 res,ęquantur 6 quadratis p:8,tunc quia ducto 6,numero quadratorum,in 2 sui tertiam partem,fit 12,numerus rerum,ad unguem,ideo duc 2 Tpq̃d:ad cubum, fit 8,cuius differentia à numero ęquationis nulla est,ideo ęstimatio rei est 2 Tpq̃d: Et si cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p:9, tunc quia cubus æquatur numero,abijciemus 8,cubum Tpq̃d:ex 9,relinquitur 1 cuius ℞ cubicam quæ est 1,addo Tpq̃d: quia cubus Tpq̃d. est minor æquatione numeri,fit rei æstimatio 3. Et eadem ratione,si cubus p:12 rebus,ęquetur 6 quadratis p:7,detracto 7 a b 8,cubo Tpq̃d.relinquilinquitur 1, cuius ℞ cubicam quæ est 1, detrahe ex 2, ℞p q̄d. relinquitur 1, rei æstimatio.

Quod si numerus positionum, maior sit producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam, differentia erit numerus rerum ut in prima demonstratione, & suis regulis, hunc duc in ℞p q̄d. & ei adde cubum ℞p q̄d. & huius aggregati, numeriq; æquationis differentia, est numerus æquationis cubi, & talium rerum differentia, si nulla sit, æstimatio rei est ℞p q̄d. Et si numerus æquationis est minor aggregato, æstimationem inuentam minue, & si maior, adde ℞p q̄d. quod fiet, erit rei æstimatio. Exemplum, cubus & 20 res, æquantur 6 quadratis & 24, ducto 6 in in 2, tertiam partem sui, fit 12, cuius differentia â 20, numero rerum, est 8, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, duc igitur numerum rerum, in 2 ℞p q̄d. fit 16, adde ei 8, cubum ℞p q̄d. fit 24, differentia cuius nulla est a 24 numero æquationis, igitur æstimatio rei est ℞p q̄d. scilicet 2, sit rursus cubus cum 20 rebus, æquales 6 quadratis & 15, habebimus igitur, ut prius, cubum & 8 res, pro numero, duc ut prius, 8 numerum rerum posteriorem in 2 ℞p q̄d. fit 16, adde cubum ℞p q̄d. fit 24, abijce 15, relinquitur 9, igitur cubus & 8 res, æquatur 9, & rei æstimatio est 1, quod minue ex 2, ℞p q̄d. relinquitur uera æstimatio rei 1, minuisti autem, quia 15 numerus æquationis, est minor aggregato cubi & producti, quod est 24, & si bene animaduertis, eodem modo fit in prima parte regulæ, quando numerus rerum æqualis est producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam. Rursus, cubus cum 20 rebus, æqualis sit 6 quadratis p: 33, habebis itaque cubum, ut prius, & 8 res, æquales differentiæ 24 aggregati, & 33 numeri æquationis, quare cubus & 8 res, æquabuntur 9, & æstimatio rei erit 1, addendum ℞p q̄d. quia numerus æquationis 33, est maior numero aggregato 24, quare rei æstimatio erit 3.

Quòd si numerus positionum, minor sit producto ex numero quadratorum in sui tertiam partem, differentia nihilominus erit numerus rerum ut prius, sed hæ non copulabuntur cubo, imò erunt ei ęquales, deinde duc ipsum numerum rerum posteriorum, in ℞p q̄d, & productũ iunge numero æq̄tionis, huius aggregati & cu. ℞p q̄d. differentia est numerus ęquationis secundę, si igitur differentia nulla est, cubus æquabitur rebus, & ℞ quadrata numeri rerum addita ℞p q̄d. est ęstimatio rei, quod si aggregatum sit maius cubo, erit differentia, numerus qui cũ rebus ęquatᷓ cubo, inde habita æstimatione, adde ei ℞p q̄d. & fiet uera æstimatio. Quòd si cubus fuerit maior aggregagregato, differentia erit numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, adde ei ^{T}p̄q̄d. quod conflatur, est rei uera æstimatio, & tam multiplex habēda, ut in nostra regula docuimus, quanquam quod ad regulam pertinet, & hæc nostra sit. Exemplum igitur, Cubus & 9 res, æquales sint 6 quadratis p:2, tunc numerus rerum secundus erit 3, duc in 2, ^{T}p̄q̄d. fit 6, adde ad 2 numerum æquationis, fit 8, cubus autem ^{T}p̄q̄d. est 8, differentia nulla, igitur cubus æquatur 3 rebus, res igitur est ℞ 3, & rei æstimatio 2 p:℞3. Rursus, cubus p: 9 rebus, æqualis sit 6 quadratis p:4, habebimus ut prius, cubum æqualem 3 rebus, pro numero duc 3 numerum rerum posteriorem in 2 ^{T}p̄q̄d. fit 6, adde 4 numerum æquationis, fit 10, abijce 8, cubum ^{T}p̄q̄d. fit 2, addendus rebus, quia aggregatum est maius cubo ^{T}p̄q̄d. igitur cubus æquatur 3 rebus, p:2, & res erit 2, addito 2 ^{T}p̄q̄d. fit 4, uera æstimatio. Iterum, sit cubus p: 21 rebus, æqualis 9 quadratis p:5, erunt igitur 6 res in posteriore equatione, quia 9 numerus quadratorum, ductus in 3, tertiam sui partem, producit 27, duc igitur 6 numerum posteriorem rerum, in 3, ^{T}p̄q̄d. fit 18, adde ei 5, fit 23, differentia cuius à numero producto ex cubo c ^{T}p̄q̄d. est 4, & quia aggregatum est minus cubo, ideo cubus & 4, æquabuntur 6 rebus, æstimatio igitur est 2, uel ℞ 3 m: 1, & ficta ℞ 3 p: 1, quæ est m: si igitur his addas 3 ^{T}p̄q̄d. habebis æstimationes quæsitas 5, & 4 p:℞ 3, & 2 p:℞ 3, in harum qualibet uerum est, quod cubus & 21 res, æquales sunt 9 quadratis & 5 numero.

De cubo & quadratis æqualibus rebus & numero. CAP. XIX.

DEMONSTRATIO.

Sit etiam cub. a b, & 6 quadrata, æqualia 20 rebus p:200. gratia exempli, & ponemus b c 2, ^{T}p̄q̄d. erit igitur a c res p:2, & eius cubus, erit cubus & 6 quadrata, & 12 res, & 8 iam autem suppositū est, quod cubus a b & 6 quadrata, sint æqualia 20 rebus p:200. Igitur ponantur, 20 res & 200: loco cubi, & 6 quadratorum, & fiet cubus a c, æqualis 32 rebus p:208, at quia 32 res a b, deficiunt à 32 rebus a c, in 32 b c, addantur utrique parti 32 b c, erunt igitur 32 res p:208, æquales cubo p:64, tantum enim sunt 32 b c, abijce 64 ab utraque parte, erit cubus æqualis 32 rebus p: 144, inde inuenta æstimatione abijce b c, ^{T}p̄q̄d. relinquetur a b.

REGVLA.

Regula igitur est, duc numerum quadratorum, in tertiam sui par tem,productum adde numero rerum,& aggregatum erit numerus rerum,inde duc hunc numerum in Tpq̄d.& producti sume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo Tpq̄d.quæ si nulla est, habebis cubum æqualem rebus, si uerò sit productum minus aggregato, differentia est numerus, qui cum rebus, æquatur cubo; quod si productum fuerit maius aggregato, differentia est numerus qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, Tpq̄d.residuum est æstimatio uera, quæsita.

Exemplum, Cubus & 6 quadrata, æqualia sunt 20 rebus & 56, duc 6 in 2 tertiam sui partem, fit 12, adde ad 20 fit 32, duc 32 in 2 Tpq̄d. fit 64, adde ad 56 numerum æquationis 8 cubum Tpq̄d. fit 64, differentia producti ab aggregato nulla est, res igitur æquabuntur cubo, quare deprimendo quadratum æquatur 32, & res est ℞ 32, & uera æstimatio ℞ 32 m:2. Rursus, cubus & 6 quadrata, æqualia sint 20 rebus p:112, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 20, fit 32, numerus rerum, duc in 2 Tpq̄d. fit 64, abijce ex 120 aggregato cubi Tpq̄d.& numeri æquationis, relinquitur 56, numerus qui cum 32 rebus æquatur cubo, res igitur est ℞ 29 p:1, minue Tpq̄d. relinquitur æstimatio rei ℞ 29 m:1. Rursus, cubus & 6 quadrata, æqualia sint 20 rebus p:41, habebis igitur ut prius, in secunda æquatione, 32 res, & 15 numerum, nam detracto 49 aggregato numeri æquationis & 8 cubi Tpq̄d. ex 64, producto 32 in Tpq̄d. relinquitur 15, quia uerò productum est maius aggregato, erit 15 cum cubo æqualis 32 rebus, & res erit 5, uel ℞ $13\frac{1}{4}$ m:$2\frac{1}{2}$, uel ficta ℞ $13\frac{1}{4}$ p:$2\frac{1}{2}$, abijce 2 Tpq̄d. habebis æstimationem ueram 3, & duas fictas per m: scilicet $4\frac{1}{2}$ o:℞ $13\frac{1}{4}$, & $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $13\frac{1}{4}$ sicut diximus in capitulo primo

De cubo æquali quadratis rebus & numero.
CAP. XX.

DEMONSTRATIO.

Sit iterum cubus a c, æqualis 6 quadratis, 5 rebus, & 88 (gratia exempli) & ponatur b c Tpq̄d.scilicet 2, manifestum est igitur, quod cubus a c, æquatur 6 quadratis a b & 12 a b, & cubis a b, & b c, hæc eadem igitur æqualia sunt 6 quadratis a c, 5 rebus a c, & 88, abijciatur iam cubus b c communis, scilicet 8 relinquentur, cubus a b & 6 quadrata a b, & 12 a b, æqualia 6 quadratis a c, 5 rebus a c, p:80, at 6 quadrata a c, superant 6 quadrata a b in 6 gnomonibus a b quadrati, & erunt 24 res ex a c,

minus.