# ALGEBRA
# COMPLEMENTAR

# ALGEBRA

# COMPLEMENTAR

LIÇÕES PROFESSADAS NO ANNO ESCOLAR
DE 1914-1915



COIMBRA
FRANÇA & ARMENIO
LIVREIROS — EDITORES
1915

COIMBRA — IMPRENSA DA UNIVERSIDADE — 1915

# LIÇÕES
## DE
# ALGEBRA COMPLEMENTAR

## I. — Preliminares

**1.** Dá-se o nome de *variavel* á grandeza que pode tomar diversos valores, em numero finito ou infinito. Pelo contrario chama-se *constante* a grandeza que conserva sempre o valor que uma vez lhe foi attribuido.

Convencionalmente designam-se as variaveis pelas ultimas letras do alphabeto. O conjuncto de todos os valores de que uma variavel é susceptivel constitue o seu *campo de variabilidade.*

Comparando uma grandeza com outra da mesma especie, arbitrariamente escolhida para unidade, a cada um dos seus valores se pode fazer corresponder um numero racional ou irracional, positivo ou negativo. Por outra parte, se numa recta invariavel ou *eixo* tomarmos um ponto fixo ou *origem* O, cada ponto do eixo ficará determinado pela sua distancia á origem, expressa numa certa unidade linear e tomada com o signal positivo ou negativo conforme o ponto considerado estiver á direita ou á esquerda de O; reciprocamente a cada numero dado corresponderá um ponto determinado do eixo.

É, pois, natural representar cada valor da variavel por um

1

ponto d'esta recta; e diremos frequentemente, por exemplo, *ponto a* em vez de *valor a da variavel.*

D'este modo tambem um campo de variabilidade será expresso por um conjuncto de pontos da recta fixa. Estes pontos podem ser em numero finito ou infinito, constituindo um ou mais segmentos completos do eixo ou mesmo achando-se isolados.

Um segmento cujos pontos pertencem todos a um campo chama-se *intervallo.* Se os seus extremos forem $a$ e $b > a$, diz-se que $a$, $b$ e $b - a$ são respectivamente o *extremo inferior, extremo superior* e a *amplitude* do intervallo $ab$.

Se um ponto da recta fixa pertence a um campo de variabilidade e ao mesmo tempo a um intervalo cujos pontos pertencem *todos* ao mesmo campo, diz-se que a variavel é *continua* naquelle ponto. Se o intervallo fica todo á direita ou todo á esquerda do ponto considerado, diz-se que neste ponto a variavel é *continua á direita* ou *continua á esquerda* respectivamente.

A um intervallo $ab$ tambem se dá o nome de *grupo de pontos.* Seja $a$ um ponto da recta fixa, que pode pertencer ou não a um certo campo, e supponhamos que, tomando para a direita ou para a esquerda ou de ambos os lados de $a$ um segmento arbitrariamente pequeno de que $a$ seja um extremo, se encontra sempre dentro d'esse segmento, por mais pequeno que elle seja, um ponto que pertença ao campo considerado. Diremos então que $a$ representa um *limite dos valores da variavel,* ou um *ponto limite* do grupo. Assim, por exemplo, se o campo é composto dos infinitos pontos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

é claro que, tomando á direita do ponto zero um segmento arbitrariamente pequeno, nelle se encontrarão sempre infinitos pontos d'esta especie. Portanto zero será o *ponto limite* d'este grupo.

Um caso particular convém considerar. Se um campo fôr tal que, tomando um ponto para a direita e a distancia arbitrariamente grande da origem, por maior que seja esta distancia existam sempre á direita d'esse ponto outros que pertençam ao mesmo campo, dizemos que o *extremo superior do campo é o ponto* $+\infty$. Se o mesmo tiver logar para a esquerda da origem, dizemos que o *extremo inferior do campo é o ponto* $-\infty$. Correspondentemente se pode dizer que *um limite dos valores da variavel é* $+\infty$ *no primeiro caso e* $-\infty$ no *segundo*, ou ainda que $+\infty$ *e* $-\infty$ *são respectivamente pontos limites do grupo de pontos.*

Do mesmo modo duas variaveis $x_1$ e $x_2$, independentes entre si, podem ser representadas por um ponto de um plano fundamental. Bastará traçar neste plano dois eixos concorrentes e, tomando para origem em cada uma d'estas rectas o seu ponto de intersecção, contar numa dellas a variavel $x_1$ e na outra a variavel $x_2$, como fica dito. A intersecção das parallelas aos eixos, tiradas pelos pontos $x_1$ e $x_2$, será o ponto do plano que representa o systema das duas variaveis.

Continuando pelo mesmo processo, um systema de tres variaveis independentes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ pode ser representado por um ponto do espaço. Tendo marcado no plano fundamental o ponto $(x_1, x_2)$, na perpendicular ao plano, tirada por esse ponto, se contará a terceira variavel $x_3$. Querendo generalisar este modo de representação, podemos admittir a noção de *espaços a* n *dimensões*, e um systema de valores de $n$ variaveis será designado por um ponto d'este espaço.

**2.** Duas variaveis $x$ e $y$ podem estar ligadas entre si por uma relação de dependencia tal que, dado um valor arbitrario a uma d'ellas que por este motivo se chama *independente*, fique inteiramente determinado um valor da outra. Imaginemos, por exemplo, todos os circulos que podem descrever-se em torno de um centro fixo. O raio d'estes circulos é variavel bem como a sua area, mas para cada valor do raio fica logo determinado o valor da area correspondente. Logo estas duas variaveis dependem uma da outra.

Esta dependencia pode ter logar por differentes formas. Pode acontecer que para certos valores da variavel independente, que supporemos ser $x$, resulte um só valor bem determinado de $y$; que para outros valores de $x$ venham para $y$ diversos valores determinados, e que para outros não haja valor algum bem determinado de $y$.

Mas imaginemos que se define o campo de variabilidade de $x$ e a dependencia entre $x$ e $y$ por modo tal, que para todos os pontos d'esse campo $y$ *seja determinado e tenha um valor único*. Diremos então que $y$ é *funcção* de $x$ no mesmo campo, o que se indicará por um symbolo tal como

$$y=f(x),$$

representando por $f$ ou por outra letra F, $\varphi$, $\Psi$, etc., o symbolo de *funcção*. O valor que toma $y$ para $x=a$ é representado por $f(a)$.

Se a dependencia entre as variaveis $x$ e $y$ fôr tal que, ao mesmo tempo que $y$ se considera funcção de $x$, tambem $x$ se pode considerar funcção de $y$, diz-se que a funcção $x$ é *inversa* da funcção $y$.

A representação analytica de que temos tratado é ordinariamente chamada *explicita*, por contraposição a outra que se chama *implicita*.

Imaginemos que é dada uma relação analytica entre as variaveis $x$ e $y$, isto é, uma relação expressa por uma serie de operações analyticas que devam executar-se simultaneamente sobre as duas variaveis; e supponhamos que deve ser zero o resultado final que se obtem depois de effectuadas estas operações sobre cada systema de valores de $x$ e $y$. Esta hypothese traduz-se na fórmula

$$f(x, y) = 0,$$

onde $f$ indica o conjuncto de todas as operações que devem executar-se sobre $x$ e $y$. Posto isto, se podermos definir um campo de variabilidade de $x$ de modo que a todos os valores de $x$ comprehendidos nesse campo corresponda um valor bem determinado de $y$ que convém á relação dada, diremos que $y$ é funcção implicita de $x$.

Convém observar aqui que ao conceito de funcção não anda inherente a possibilidade da sua representação geometrica ou analytica, isto é, a existencia de algum processo analytico ou geometrico que nos permitta, dado um valor de $x$, determinar o valor correspondente de $y$.

Se dermos a $x$ todos os valores para os quaes a funcção $y$ fica determinada, os systemas em numero infinito dos valores das duas variaveis definirão outros tantos pontos do plano, que na maior parte dos casos formam uma curva; e assim teremos uma representação geometrica da funcção $y$, pois que esta curva indicará a maneira como $y$ varia quando damos a $x$ todos os valores possiveis. Todavia este modo de representação nem sempre se pode verificar, e ha funcções para as quaes o conjuncto dos infinitos pontos $(x, y)$ não forma propriamente uma curva. Ha muitos exemplos d'este caso.

Quanto á representação analytica, qualquer das operações fundamentaes de addição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, applicada á variavel $x$ combinada com quantidades constantes, dá logar a uma nova variavel cujo valor depende em geral do valor de $x$ e que, por conseguinte, pode em geral dizer-se funcção de $x$. O mesmo succede quando á variavel $x$ se applica mais que uma d'aquellas operações ou a mesma repetida varias vezes. Teremos outros exemplos de funcções quando a variavel $y$ representa o seno, o coseno, a tangente, etc., de um arco $x$, ou ainda o logarithmo ou a exponencial de um numero $x$. Cada uma d'estas funcções corresponde a uma operação analytica bem determinada, que tem de praticar-se sobre a variavel; e de uma funcção, cujo valor pode calcular-se effectuando um certo numero d'estas operações sobre a variavel independente, se diz que é *capaz de uma representação analytica*. Entretanto casos ha em que entre $x$ e $y$ existe uma relação de dependencia, sem que todavia seja possivel exprimi-la por fórmulas analyticas em *todo* o campo de variabilidade de $x$.

**3.** O conceito de funcção, que definimos para o caso de uma variavel independente, pode generalisar-se para maior numero de variaveis. Se tivermos $h+1$ variaveis $y, x_1, \ldots, x_h$ taes que, dando a $x_1, \ldots, x_h$ certos valores comprehendidos em campos determinados, venha sempre para $y$ um valor determinado, diz-se que $y$ é *funcção* das variaveis $x_1, \ldots, x_h$ e escreve-se

$$y = f(x_1, \ldots, x_h).$$

Entre as funcções analyticas das variaveis $x_1, \ldots, x_h$, chamam-se *racionaes inteiras* ou simplemente *inteiras* aquellas que são representadas pela somma algebrica de um numero *finito* de termos da forma

$$\text{(1)} \qquad A x_1^{\alpha_1} \cdots x_h^{\alpha_h},$$

em que A é constante e os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ são numeros inteiros e positivos ou zero. Por exemplo

$$y = x_1 x_2 - \frac{2}{3} x_3^2 + 4 x_1^3 x_3$$

é uma funcção inteira das variaveis $x_1, x_2, x_3$.

A funcção inteira é, pois, um polynomio que podemos representar pela notação

$$y = \Sigma \mathrm{A} x_1^{a_1} \dots x_h^{a_h},$$

onde o symbolo *sommatorio* $\Sigma$ designa a somma algebrica de um numero finito de termos da forma do termo geral (1).

**4.** As funcções analyticas dividem-se em *algebricas* e *transcendentes*. Quanto entre as $h+1$ variaveis $y, x_1, \dots, x_h$ existe uma relação de dependencia que se traduz na equação

$$(2) \qquad f(y, x_1, \dots, x_h) = 0,$$

em que $f(y, x_1, \dots, x_h)$ é funcção inteira d'aquellas $h+1$ variaveis, diz-se que $y$ é *funcção algebrica* das variaveis independentes $x_1, \dots, x_h$.

As razões trigonometricas *seno, coseno*, etc., a exponencial $y = a^x$ e a funcção logarithmica $y = \log x$ são *funcções transcendentes*.

No caso de duas variaveis sómente a equação

$$f(x, y) = 0$$

mostra que, se $y$ é funcção algebrica de $x$, a inversa $x$, se existir, tambem é funcção algebrica de $y$.

Designando por $n$ um numero inteiro e positivo, á funcção algebrica pode-se dar a forma

$$\mathrm{A}_0 y^n + \mathrm{A}_1 y^{n-1} + \dots + \mathrm{A}_{n-1} y + \mathrm{A}_n = 0,$$

e os coefficientes $\mathrm{A}_i$ são funcções inteiras das variaveis $x_1, \dots, x_h$; podem alguns d'estes coefficientes ser constantes ou zero. Esta funcção diz-se *racional* quando é $n=1$ e reduz-se, pela definição anterior do symbolo sommatorio, a

$$\frac{\Sigma \mathrm{A} x_1^{\alpha_1} \dots x_h^{\alpha_h}}{\Sigma \mathrm{B} x_1^{\beta_1} \dots x_h^{\beta_h}}.$$

A funcção diz-se *irracional* quando é $n > 1$.

As funcções racionaes subdividem-se em *inteiras* e *fraccionarias* conforme é ou não constante o denominador da ultima expressão.

Resumindo: *As funcções analyticas dividem-se em algebricas e transcendentes; as algebricas subdividem-se em racionaes e irracionaes; ns racionaes podem ser inteiras ou fraccionarias.*

*As funcções inteiras exprimem-se effectuando com as variaveis independentes e um numero finito de constantes unicamente as operações de addição, subtracção e multiplicação.*

*Racionaes são as funcções que se exprimem effectuando com as variaveis independentes e um numero finito de constantes unicamente as operações de addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

*As funcções algebricas que não são inteiras nem racionaes chamam-se irracionaes.*

5. A *Algebra Complementar* é o ramo da analase que tem por objecto o estudo das funcções algebricas. O problema fundamental que a algebra trata de resolver é o seguinte:

*Dadas as equações algebricas*

$$f_1(x, y, z, \dots) = 0,\ f_2(x, y, z, \dots) = 0, \text{ etc.}$$

*achar o systema ou systemas dos valores das incógnitas $x, y, z, \dots$ que satisfazem a estas equações.*

Cada um d'estes systemas é uma *solução* das propostas e a sua determinação depende, em geral, da resolução dos dois problemas seguintes:

1.º Separar as incógnitas por processos de *eliminação,* de modo que a questão se reduza á resolução de uma só equação com uma incógnita.

2.° Resolver a equação final $f(x)=0$.

A quantidade $x$ pode ser considerada como funcção algebrica dos coefficientes $a, b, c, \ldots$ d'esta equação. A *resolução algebrica* tem por objecto determinar a natureza e formas possiveis d'esta funcção

$$x=\varphi(a, b, c, \ldots).$$

A *resolução numerica* limita-se á indagação de processos práticos, pelos quaes seja possivel, dados os valores numericos de $a, b, c, \ldots$ achar a *raiz* ou *raizes* da equação, isto é, os valores numericos de $x$ que a satisfazem.

## II. — Polynomios. Identidades.

**6.** Definições. — *Duas funcções* $\mathfrak{f}_1$ *e* $\mathfrak{f}_2$ *dizem-se* identicamente *eguaes, o que se exprime pela notação* $\mathfrak{f}_1 \equiv \mathfrak{f}_2$, *quando a egualdade* $\mathfrak{f}_1=\mathfrak{f}_2$ *subsiste para todos os valores das variaveis.*

*Diz-se que a funcção* $\mathfrak{f}$ *é identicamente nulla, e escreve-se* $\mathfrak{f}\equiv 0$, *quando é* $\mathfrak{f}=0$ *para quaesquer valores das variaveis.*

**7.** Por definição, a funcção inteira de uma variavel é a somma algebrica

$$f(x)\equiv c_1 x^{\alpha_1}+c_2 x^{\alpha_2}+\ldots+c_k x^{\alpha_k},$$

em que os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são numeros inteiros e positivos ou zero. As constantes $c_1, \ldots, c_k$ são numeros reaes positivos, negativos ou zero, ou numeros imaginarios.

Suppondo feitas as reducções, como é sempre possivel, os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ serão todos differentes uns dos outros.

Diremos então que $c_i x^{\alpha_i}$ é um *termo* de $f(x)$, $c_i$ o *coefficiente* d'este termo e $\alpha_i$ o seu *grau*. O maior grau dos differentes termos é o *grau* do polynomio, com tanto que o coefficiente do termo correspondente seja differente de zero. O polynomio cujos termos teem todos zero por coefficiente não tem grau. Se fôr $\alpha_k=0$, o ultimo termo da expressão de $f(x)$ reduz-se a uma constante; d'aqui resulta que o termo constante se considera de grau zero, e o polynomio que se reduz sómente a este termo é tambem de grau zero.

O polynomio de grau $n$ diz-se completo quando nos seus termos se encontram todas as potencias do variavel $x$, desde a potencia de expoente $n$ até á de expoente zero inclusivè. Se o polynomio fôr incompleto, podem preencher-se as lacunas restituindo-lhe os termos que faltarem e dando a cada um o coefficiente zero. Assim o polynomio ordenado terá a forma

$$(1) \qquad f(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-2}x^2 + p_{n-1}x + p_n;$$

e d'este modo fica esclarecido o que deva entender-se quando se fala em *primeiro termo, segundo termo*, etc., *último termo* de $f(x)$.

**8.** Como se disse, suppomos o polynomio (1) de grau $n$, isto é, $p_0 \gtrless 0$. Substituindo $x$ por $a$ e subtrahindo, vem a differença

$$f(x)-f(a) \equiv p_0(x^n-a^n)+p_1(x^{n-1}-a^{n-1})+\ldots+$$
$$+p_{n-2}(x^2-a^2)+p_{n-1}(x-a).$$

Ora, sendo $i$ um numero inteiro, é

$$x^i-a^i=(x-a)(x^{i-1}+ax^{i-2}+\ldots+a^{i-2}x+a^{i-1});$$

pondo successivamente $i=n$, $n-1$, etc. e substituindo os resultados na expressão precedente, virá

$$(2)\quad \begin{cases} f(x)-f(a)\equiv(x-a)[p_0(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a x^{n-2}+a^{n-1}) \\ \qquad\qquad +p_1(x^{n-2}+ax^{n-3}+\ldots+a^{n-2}) \\ \qquad\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +p_{n-2}(x+a)+p_{n-1}]. \end{cases}$$

O factor que está multiplicando o binomio $x-a$ no segundo membro d'esta identidade é ainda uma funcção inteira de $x$, que designaremos por $f_1(x)$ e é do grau $n-1$. Assim teremos

$$f(x)-f(a)\equiv(x-a)f_1(x),$$

donde se tira

$$(3)\qquad f(x)\equiv(x-a)f_1(x)+f(a);$$

e o polynomio $f_1(x)$ será da forma

$$f_1(x)\equiv q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}.$$

A expressão (3) mostra que o resto da divisão de $f(x)$ por $x-a$ é $f(a)$. O quociente d'esta operação é $f_1(x)$, cujos coefficientes se vê por (2) que são:

$$(4)\quad \begin{cases} q_0=p_0, \\ q_1=p_0a+p_1=aq_0+p_1, \\ q_2=p_0a^2+p_1a+p_2=aq_1+p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1}=p_0a^{n-1}+p_1a^{n-2}+\ldots+p_{n-1}=aq_{n-2}+p_{n-1}; \end{cases}$$

o resto $f(a)$, que designaremos por $q_n$ para uniformisar a notação, é

$$q_n=p_0a^n+p_1a^{n-1}+\ldots+p_{n-1}a+p_n=aq_{n-1}+p_n.$$

Por conseguinte o primeiro termo do quociente tem o mesmo coefficiente que o primeiro termo do dividendo, como immediatamente resultaria de ser a unidade o coefficiente do primeiro termo do divisor. Os outros coefficientes do quociente e o resto são dados pela fórmula geral

$$q_i = aq_{i-1} + p_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

cujo enunciado, a que se chama *regra de Rufini*, é o seguinte:

*Na divisão de* f(x) *por* x — a *o coefficiente de cada termo do quociente e o resto é egual ao coefficiente do termo anterior do quociente multiplicado por* a, *mais o coefficiente do termo da mesma ordem no dividendo.*

Na applicação desta regra devemos completar o polynomio $f(x)$, se elle fôr incompleto, e attender ao signal de $a$. Seja, por exemplo,

$$f(x) \equiv 3x^6 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x - 4$$

e o divisor $x + 1$; fazendo $a = -1$, teremos:

$$\begin{array}{ll}
\text{coef. de } f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3,\ 0,\ -3,\ 2,\ 2,\ -7,\ -4 \\
\qquad q_0 = & 3, \\
\qquad q_1 = 0 + 3\,.(-1) \;\; = & -3, \\
\qquad q_2 = -3 - 3\,.(-1) = & 0, \\
\qquad q_3 = 2 + 0\,.(-1) \;\; = & 2, \\
\qquad q_4 = 2 + 2\,.(-1) \;\; = & 0, \\
\qquad q_5 = -7 + 0\,.(-1) = & -7, \\
\qquad q_6 = -4 - 7\,.(-1) = & 3.
\end{array}$$

O quociente é pois

$$3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7$$

e o resto é 3.

9. Continuando a designar por $f(x)$ o polynomio (1) onde suppomos $p_0 \neq 0$, seja $a_1$ uma raiz da equação $f(x)=0$. Por definição será $f(a_1)=0$ e de (3) resulta

$$f(x) \equiv (x-a_1) f_1(x),$$
$$f_1(x) \equiv p_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \ldots + q_{n-2} x + q_{n-1}.$$

Logo:

THEOREMA I — *Se* $a_1$ *fôr raiz da equação inteira* $f(x)=0$, *o polynomio* $f(x)$ *será divisivel por* $x-a_1$.

Se $a_2 \neq a_1$ fôr ainda raiz da equação $f(x)=0$, substituindo $x$ por $a_2$ na primeira das egualdades precedentes virá

$$0=(a_2-a_1) f_1(a_2);$$

e, pois que $a_2-a_1$ é differente de zero, será $f_1(a_2)=0$. Por conseguinte hade ser pelo *Theor. I*

$$f_1(x) \equiv (x-a_2) f_2(x),$$

e além d'isto

$$f_2(x) \equiv p_0 x^{n-2} + r_1 x^{n-3} + \ldots + r_{n-2};$$

donde resulta, pelas últimas expressões de $f(x)$ e $f_1(x)$,

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2) f_2(x).$$

Continuando pelo mesmo processo, é evidente que se chegaria á seguinte conclusão:

THEOREMA II. — *Se houver* k *constantes differentes* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \gtreqless n)$ *que verifiquem as condições*

$$f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_k)=0,$$

*será*

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)f_k(x),$$

$$f_k(x) \equiv p_0x^{n-k} + s_1x^{n-k-1} + \dots + s_{n-k}.$$

No caso de ser $k=n$ reduz-se $f_k(x)$ a $p_0$ e é

$$f(x) \equiv p_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

Se o numero $a_{n+1}$ é differente de qualquer dos numeros $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, não pode ser $f(a_{n+1})=0$ em quanto seja $p_0 \neq 0$. Logo:

THEOREMA III. — *Um polynomio do grau* n *em* x *não pode annular-se para mais de* n *valores differentes de* x.

**10.** Se o polynomio (1) se annullar para $n+1$ valores differentes de $x$, serão eguaes a zero os coefficientes de todos os seus termos.

Suppondo a proposição demonstrada para polynomios do grau $n-1$, vamos ver que ella tem logar para os polynomios do grau $n$; e visto que o mesmo principio está verificado para os polynomios de grau 2, concluimos que elle é geral.

Ora, se fôr $a$ um dos $n+1$ valores de $x$ que annullam o polynomio $f(x)$ de grau $n$, será

$$f(x) \equiv (x-a)f_1(x);$$

e o polynomio $f_1(x)$, de grau $n-1$, ha de annullar-se para os $n$ valores restantes de $x$. Assim, pela hypothese, os coefficientes de $f_1(x)$ são todos eguaes a zero; donde se conclue, pelas expressões (4), que os coefficientes de $f(x)$ são tambem todos eguaes a zero. Logo:

THEOREMA I. — *A condição necessaria e sufficiente para que um polynomio inteiro a uma variavel se annulle identicamente é que os coefficientes de todos os seus termos sejam eguaes a zero.*

Acabamos de ver que esta condição é *necessaria*, e é manifesto que ella é tambem *sufficiente*.

Se dois polynomios $f_1(x)$ e $f_2(x)$ a uma variavel $x$ forem identicamente eguaes, a sua differença $\varphi(x)$ será identicamente nulla e vice-versa. Supponhamos que $ax^k$ e $bx^k$ são os termos de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em que a variavel tem o mesmo espoente $k$; em

$$\varphi(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$$

haverá o termo

$$(a-b)\, x^k$$

e de ser $\varphi(x) \equiv 0$ resulta pelo *Theor. I* que será $a-b=0$, ou $a=b$. Logo:

Teorema II. — *A condição necessaria e sufficiente para serem identicamente eguaes duas funcções inteiras de uma variavel é que os termos homologos nas duas funcções tenham coefficientes eguaes.*

**11**. A funcção inteira de $h$ variaveis é do mesmo modo a somma algebrica

$$(5) \quad f(x_1, \ldots, x_h) \equiv c_1 x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\theta_1} + c_2 x_1^{\alpha_2} \ldots x_h^{\theta_2} + \ldots + c_k x_1^{\alpha_k} \ldots x_h^{\theta_k},$$

em que os expoentes $\alpha_1, \ldots, \theta_k$ são numeros inteiros e positivos ou zero. As constantes $c_1 \ldots, c_k$ são numeros reaes positivos, negativos ou zero, ou numeros imaginarios.

Suppondo feitas as reducções, como no caso anterior, não haverá naquella somma duas parallelas em que todas as variaveis tenham os mesmos expoentes; isto é, se os expoentes forem $\alpha_i, \ldots, \eta_i, \theta_i$ numa parcella e $\alpha_j, \ldots, \eta_j, \theta_j$ na outra, pode ser

$$\alpha_i = \alpha_j, \ldots, \eta_i = \eta_j,$$

mas será $\theta_i \gtrless \theta_j$.

Diremos então que

$$c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} . \, x_h^{\theta_i}$$

é um *termo* da funcção; $c_i$ é o *coefficiente* d'este termo, $\alpha_i$ o seu *grau relativamente a* $x_1$, $\beta_i$ o seu *grau relativamente a* $x_2$, etc. e $\alpha_i+\beta_i+\ldots+\theta_i$ o seu *grau geral* ou simplesmente o *grau* d'este termo. A maior das sommas

$$\alpha_i+\beta_i+\ldots+\theta_i$$

é o *grau* do polynomio, comtanto que seja differente de zero o coefficiente do termo correspondente. O polynomio cujos termos teem todos zero por coefficiente não tem grau. Se fôr $\alpha_k=\beta_k=$ $=\ldots=\theta_k=0$, o ultimo termo da expressão de $f(x_1,\ldots,x_h)$ reduz-se a uma constante; d'aqui resulta que o termo constante se considera de grau zero, e o polynomio que se reduz sómente a este termo é tambem de grau zero.

O polynomio de uma só variavel e até uma constante podem considerar-se como casos particulares dos polynomios de $h$ variaveis, suppondo que são zero os expoentes de algumas destas variaveis ou de todas ellas.

Uma funcção $f(x,y,\ldots)$ diz-se *homogenea* quando satisfaz á condição

$$f(kx,\ ky,\ldots)\equiv k^i f(x,y,\ldots),$$

e diz-se que $i$ é o *grau de homogeneidade* d'esta funcção. Por exemplo

$$\frac{x^3-5y^3+2\sqrt{x^6+y^6}}{\sqrt{x^3-y^3}}$$

é uma funcção homogenea e o seu grau de homogeneidade é $\frac{3}{2}$. A funcção inteira do grau $n$ é homogenea quando todos os seus termos são do grau $n$ e $n$ é tambem o seu grau de homogeneidade.

Designando por $n$ o grau do polynomio (5) relativamente a $x_1$, e ordenando este polynomio segundo as potencias decrescentes de $x_1$, podemos dar-lhe a forma

$$(6)\quad \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_h) \equiv \varphi_0(x_2, \ldots, x_h)\, x_1^n \\ \qquad + \varphi_1(x_2, \ldots, x_h)\, x_1^{n-1} + \ldots \varphi_n(x_2, \ldots, x_h). \end{cases}$$

O coefficiente $\varphi_i$ de $x_1^{n-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é funcção inteira das outras $h-1$ variaveis, e pode ser constante ou zero.

**12.** Theorema I. — *A condição necessaria e sufficiente para que uma funcção inteira de* h *variaveis seja identicamente nulla é que se annullem os coefficientes de todos os seus termos.*

É manifesto que esta condição é *sufficiente*. Por outra parte, se ella fôr *necessaria* para funcções de $h-1$ variaveis, vamos demonstrar que tambem o será para polynomios de $h$ variaveis; e o theorema ficará demonstrado pelo methodo chamado de *inducção mathematica*, visto que já foi demonstrado para o caso de uma variavel só.

Com effeito, se a funcção $f(x_1, \ldots, x_h)$ fôr identicamente nulla, demos-lhe a forma (6). Dando ás variaveis $x_2, \ldots, x_h$ os valores $a_2, \ldots, a_h$ o polynomio ficará sómente com a variavel $x_1$ e hade annullar-se para todos os valores de $x_1$. Por conseguinte, n.º 10, *Theor. I*, serão nullos os coefficientes de todos os seus termos, ou

$$\varphi_i(a_2, \ldots, a_h) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mas isto mesmo terá logar para todos os systemas de valores que se attribuam ás variaveis $x_2, \ldots, x_h$, e os polynomios $\varphi_i$ de $h-1$ variaveis serão identicamente nullos. Logo, segundo a hypothese, são nullos todos os coefficientes d'estes polynomios; e como elles são precisamente os coefficientes de todos os termos de $f(x_1, \ldots, x_h)$, fica demonstrado o theorema.

Se dois polynomios $f_1$ e $f_2$ de $h$ variaveis forem identicamente eguaes, a sua differença $f_1 - f_2$ será identicamente nulla e vice-versa. D'aqui resulta, como no caso de uma variavel, que:

Theorema II. — *A condição necessaria e sufficiente para que* *duas funcções inteiras de qualquer numero de variaveis sejam identicamente eguaes é que os termos homólogos tenham em ambas coefficientes eguaes.*

**13.** Theorema I. — *Se* $n_1$ *e* $n_2$ *são os graus de dois polynomios* $f_1$ *e* $f_2$, *o grau do producto* $f_1\, f_2$ *será* $n_1+n_2$.

A proposição está demonstrada para os polynomios de uma variavel. Vamos ver que, se ella tiver logar para polynomios de $h-1$ variaveis, tambem hade verificar-se para polynomios de $h$ variaveis e portanto é geral.

Consideremos em primeiro logar dois polynomios homogeneos. Todos os termos que proveem da multiplicação de $f_1$ por $f_2$ serão de grau $n_1+n_2$, e o theorema ficará demonstrado para este caso quando se provar que no producto ha, pelo menos, um termo cujo coefficiente é differente de zero.

Ordenando os dois polynomios segundo as potencias de uma das variaveis, de $x_1$ por exemplo, teremos

$$f_1(x_1,\ldots,x_h) \equiv \varphi_0'(x_2,\ldots,x^h).x_1^{k_1} + \varphi_1'(x_2,\ldots,x_h).x_1^{k_1-1} + \ldots$$
$$f_2(x_1,\ldots,x_h) \equiv \varphi_0''(x_2,\ldots,x_h).x_1^{k_2} + \varphi_1''(x_2,\ldots,x_h).x_1^{k_2-1} + \ldots$$

Os coefficientes dos termos de $f_1$ não são todos nullos, visto que, por hypothese, $f_1$ é do grau $n_1$; e por $k_1$ designamos o expoente mais elevado que a variavel $x_1$ tem nos termos de $f_1$ cujos coefficientes são differentes de zero. Portanto não pode ser $\varphi_0'=0$. O mesmo se pode dizer de $\varphi_0''$, e além d'isto $\varphi_0'$ e $\varphi_0''$ são, como $f_1$ e $f_2$, polynomios homogeneos; os graus d'estes polynomios são respectivamente $n_1-k_1$ e $n_2-k_2$.

Posto isto, o termo do producto $f_1\, f_2$, em que $x_1$ tem grau mais elevado, será

$$\varphi_0'(x_2,\ldots,x_h).\varphi_0''(x_2,\ldots,x_h)\, x_1^{k_1+k_2}.$$

Mas, sendo o theorema verdadeiro para polynomios homogeneos de $h-1$ variaveis, o producto $\varphi'_0 \cdot \varphi''_0$ será um polynomio homogeneo de grau $n_1-k_1+n_2-k_2$. Neste producto haverá um ou mais termos com coefficientes differentes de zero; os productos d'elles por $x_1^{k_1+k_2}$ darão para $f_1\,f_2$ outros tantos termos de grau

$$n_1-k_1+n_2-k_2+(k_1+k_2)=n_1+n_2,$$

com coefficientes differentes de zero como se queria demonstrar.

Consideremos agora dois polynomios não homogeneos $f_1$ e $f_2$, aos quaes será sempre possivel dar a forma

$$f_1(x_1,\ldots,x_h)=\varphi'_{n_1}(x_1,\ldots,x_h)+\varphi'_{n_1-1}(x_1,\ldots,x_h)+\ldots$$
$$f_2(x_1,\ldots,x_h)=\varphi''_{n_2}(x_1,\ldots,x_h)+\varphi''_{n_2-1}(x_1,\ldots,x_h)+\ldots$$

designando por $\varphi'_i$ e $\varphi''_j$ polynomios homogeneos dos graus $i$ e $j$ respectivamente, ou identicamente nullos. Ora, por hypothese, $f_1$ é do grau $n_1$ e portanto não pode ser $\varphi'_{n_1}\equiv 0$; e o mesmo se dirá de $\varphi''_{n_2}$. Mas os termos de grau mais elevado no producto $f_1\,f_2$ hão de provir do producto de $\varphi'_{n_1}$ por $\varphi''_{n_2}$; e como, pelo caso anterior, o producto d'estes factores homogeneos será de grau $n_1+n_2$, este será tambem o grau do producto $f_1\,f_2$.

Corollario. — *O producto de* k *polynomios de graus* $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ *é um polynomio de grau* $n_1+n_2+\ldots+n_k$.

**14.** Theorema. — *Se o producto de dois ou mais polynomios se annulla identicamente, um dos factores pelo menos é identicamente nullo.*

Se assim não fosse, todos os polynomios teriam graus determinados e o producto teria tombem um certo grau, contra a hypothese.

D'aqui resulta que, na identidade

$$\varphi f_1\equiv\varphi f_2,$$

podemos supprimir o factor $\varphi$, commum aos dois membros, se $\varphi$ não fôr identicamente nullo. Com effeito d'aquella identidade resulta a seguinte

$$\varphi(f_1 - f_2) \equiv 0$$

e, não sendo $\varphi \equiv 0$, será $f_1 - f_2 \equiv 0$ ou

$$f_1 \equiv f_2,$$

como resultaria se tivessemos supprimido o factor $\varphi$.

## III. — Fórmula de Taylor.

**15.** Arranjos $k$ a $k$ de $n$ objectos distinctos

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

são todas as collecções que se podem formar dispondo em $k$ logares differentes ($k \overline{\gtrless} n$) e em todas as ordens possiveis outros tantos objectos arbitrariamente escolhidos entre os propostos. Uma d'estas collecções distingue-se de todas as outras por algum dos seus elementos, ou só pela ordem d'estes elementos, ou de ambos os modos.

Designaremos por $A_{n,k}$ o numero de todos os arranjos de $n$ objectos $k$ a $k$. É claro que o numero N dos arranjos em que um elemento $a_i$ occupa o primeiro logar será egual ao numero d'aquelles em que o elemento inicial é outro qualquer $a_j$. E pois que o numero dos elementos dados é $n$, teremos

$$A_{n,k} = n \, . \, N.$$

Por outra parte, os arranjos cujo elemento inicial é $a_i$ poderiam obter-se conservando fixo este elemento e effectuando todos os arranjos $k-1$ a $k-1$ dos outros $n-1$ elementos. Por conseguínte será $N = A_{n-1, k-1}$ ou

$$A_{n, k} = n . A_{n-1, k-1}.$$

Diminuindo successivamente uma unidade a $n$ e a $k$ teremos do mesmo modo as egualdades

$$A_{n-1, k-1} = (n-1) A_{n-2, k-2},$$
$$A_{n-2, k-2} = (n-2) A_{n-3, k-3};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{n-k+2, 2} = (n-k+2) . A_{n-k+1, 1},$$
$$A_{n-k+1, 1} = n-k+1;$$

e a ultima é evidente, porque para qualquer valor de $p$ hade ser $A_{p, 1} = p$. Multiplicando membro a membro estas egualdades e a precedente, acha-se finalmente, depois de feitas as reducções,

(1) $$A_{n, k} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Logo, *o numero de arranjos de* n *objectos* k *a* k *é o producto de* k *factores inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de* n.

Permutações de $n$ objectos são os arranjos d'estes objectos $n$ a $n$. Designando por $P_n$ o numero das permutações de $n$ elementos e pondo $k = n$ em (1) virá

(2) $$P_n = 1.2.3\dots n.$$

Logo, *o numero das permutações de* n *elementos é o producto dos* n *primeiros numeros inteiros.*

Este producto pode ser expresso por algum dos symbolos

$$\underline{n|} \quad \text{ou} \quad n!,$$

que se lê *factorial n*.

Combinações de $n$ objectos $k$ a $k$ são os arranjos que se distinguem por algum dos seus elementos. Considerando estes elementos como factores numericos, ás combinações pode-se dar tambem o nome de *productos distinctos*.

Entre os seis arranjos 2 a 2

$$a_1 a_2,\ a_2 a_1;\ \ a_1 a_3,\ a_3 a_1;\ \ a_2 a_3,\ a_3 a_2$$

dos tres elementos $a_1$, $a_2$, $a_3$, os tres distinctos

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_2 a_3$$

são as combinações dos mesmos elementos 2 a 2. Comparando estes dois grupos de collecções vê-se logo que os arranjos podem deduzir-se das combinações permutando os elementos de cada uma d'ellas. Mas é evidente que esta consideração é applicavel a todos os casos e portanto, designando pos $C_{n,k}$ o numero de combinações de $n$ elementos $k$ a $k$, teremos

$$A_{n,k} = C_{n,k} P_k;$$

d'aqui se tira por (1) e (2)

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

A última fracção representa-se muitas vezes pelo symbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}}$$

que se lê *n sobre k*. Multiplicando ambos os termos por $\underline{|n-k}$ viria

$$\binom{n}{k} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|k}\,\underline{|n-k}};$$

e mudando nesta expressão $k$ em $n-k$ resulta

$$\binom{n}{n-k}=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-k.\lfloor k}=\binom{n}{k}.$$

Logo, *o numero das combinações de* n *objectos* k *a* k *é egual ao numero das combinações dos mesmos objectos* n — k *a* n — k.

Os coefficientes binomiaes de ordem $n$ são

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ldots\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n},$$

onde se vê, pelo principio antecedente, que dois equidistantes dos extremos são eguaes. Fazendo $a=b=1$ em

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

acha-se

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Fazendo successivamente $x=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ na identidade

$$(1+x)^{k+1}-x^{k+1}=1+\binom{k+1}{1}x+\binom{k+1}{2}x^2+\ldots+\binom{k+1}{k}x^k,$$

sommando os resultados e representando por $S_{i,n}$ $(i=1,2,3,\ldots)$ a somma $1^i+2^i+\ldots+n^i$ das potencias $i$ dos $n$ primeiros numeros inteiros, virá

$$(1+n)^{k+1}=1+n+\binom{k+1}{1}S_{1,n}+\binom{k+1}{2}S_{2,n}+\ldots+\binom{k+1}{k}S_{k,n}.$$

Por esta fórmula teriamos $S_{k,n}$ expresso em $S_{1,n}$, $S_{2,n}$, etc., e se podiam calcular successivamente os numeros

$$S_{1,n}=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_{2,n}=1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

$$S_{3,n}=1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}.$$

A última d'estas expressões mostra que é $S_{3,n}=(S_{1,n})^2$.

**16.** Mudando $x$ em $x+h$ na funcção inteira (1) do n.º 7, desenvolvendo as potencias de $x+h$ e ordenando relativamente a $h$, acha-se

$$\begin{aligned} f(x+h) &= p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+\ldots+p_{n-2}(x+h)^2+p_{n-1}(x+h)+p^n \\ &= p_0 x^n+p_1 x^{n-1}+\ldots+p_{n-2} x^2+p_{n-1} x+p_n \\ &\quad + h[np_0 x^{n-1}+(n-1)p_1 x^{n-2}+\ldots+2p_{n-2} x+p_{n-1}]+\varepsilon h^2. \end{aligned}$$

De $f(x+h)-f(x)=k$ resulta $f(x+h)=f(x)+k$; assim aquella differença representa o *incremento* que proveio para a funcção $f(x)$ do *incremento* $h$ dado á variavel independente $x$.

No desenvolvimento precedente de $f(x+h)$ a parte independente de $h$ é precisamente a mesma funcção $f(x)$ de grau $n$, e o coefficiente da primeira potencia de $h$ é uma funcção de $x$, de grau $n-1$, que se deduz de $f(x)$ pela seguinte lei, chamada *regra de derivação* : *multiplica-se cada termo de* f(x) *pelo expoente de* x *nesse termo e diminue-se uma unidade ao expoente.* A funcção assim formada chama-se *derivada* de $f(x)$, e designa-se por $f'(x)$; temos assim

$$f'(x)=np_0 x^{n-1}+(n-1)p_1 x^{n-2}+\ldots+2p_{n-2} x+p_{n-1}.$$

Applicando a regra de derivação a $p_n$, ou a uma constante qualquer, acha-se que a sua derivada é zero, por isso que a derivada de $c = c.x^0$ é $0.cx^{-1} = 0$.

A derivada de $f'(x)$ chama-se *segunda derivada* de $f(x)$, e é designada por $f''(x)$. Applicando a regra de derivação á expressão precedente de $f'(x)$ viria

$$f''(x) \equiv n(n-1)p_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_1 x^{n-3} + \ldots + 2p_{n-2},$$

que é uma funcção inteira de grau $n-2$.

Em geral, designando por $f^{(k)}(x)$ a *derivada de ordem* $k$ de $f(x)$, isto é, a funcção inteira de grau $n-k$ que se obteria applicando $k$ vezes successivas a regra de derivação a $f(x)$, seria

$$f^{(k)}(x) \equiv n(n-1)\ldots(n-k+1)p_0 x^{n-k} + (n-1)(n-2)\ldots(n-k)p_1 x^{n-k-1} + \ldots$$

O coefficiente numerico de cada termo de $f^{(k)}(x)$ é o producto de $k$ inteiros consecutivos; dividindo, pois, ambos os membros da ultima expressão por $k!$, viria mais simplesmente

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{n}{k} p_0 x^{n-k} + \binom{n-1}{k} p_1 x^{n-k-1} + \binom{n-2}{k} p_2 x^{n-k-2} + \ldots$$

Para $k = n$ teriamos a constante

$$f^{(n)}(x) \equiv n(n-1)\ldots 2p_0 = n!\, p_0,$$

e para $k > n$ seria sempre $f^{(k)}(x) = 0$.

Posto isto, desenvolvendo as potencias de $x+h$ que estam no segundo membro da expressão de $f(x+h)$, acha-se para coefficiente de $h^k$

$$\binom{n}{k} p_0 x^{n-k} + \binom{n-1}{k} p_1 x^{n-k-1} + \binom{n-2}{k} p_2 x^{n-k-2} + \ldots,$$

que é, como acabamos de ver, a expressão de $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$. Logo, o desenvolvimento de $f(x+h)$ será

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x);$$

e esta egualdade é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*.

Applicando esta fórmula ás funcções inteiras $f'(x)$, $f''(x)$, etc., viria

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x),$$

$$f''(x+h) = f''(x) + hf'''(x) + \ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(x),$$

etc.

Mudando $x$ em $h$ e vice-versa, a fórmula de Taylor torna-se em

$$f(x+h) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{2} f''(h) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(h),$$

onde $f(h)$, $f'(h)$, ..., $f^{(n)}(h)$ são os resultados obtidos quando se substitue $x$ por $h$ em $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$. Para $h=0$ temos a fórmula de Maclaurin, que é a seguinte:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Mudando $x$ em $x-h$ na penultima fórmula, obtem-se a seguinte:

$$(3) \qquad f(x) = f(h) + (x-h) f'(h) + \ldots + \frac{(x-h)^n}{n!} f^{(n)}(h).$$

Na funcção inteira $f(x, y)$ de duas variaveis independentes podemos dar a $x$ e a $y$ respectivamente incrementos quaesquer $h$ e $k$. Mudando primeiro $x$ em $x+h$, pela fórmula de Taylor teremos a expressão

$$f(x+h,y)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y)+\cdots$$

Designamos por $f^{(r)}_{x^r}(x,y)$ o resultado que se obtem applicando $r$ vezes successivamente a $f(x,y)$ a regra de derivação relativamente a $x$, como se $y$ fosse constante. Por isto a estas funcções se dá o nome de *derivadas parciaes*.

Mudando depois $y$ em $y+k$ na ultima egualdade, virá ainda

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+hf'_x(x,y+k)+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y+k)+\cdots$$

Mas $f^{(r)}_{x^r}(x,y)$ é em geral funcção inteira de $y$, e portanto será pela mesma fórmula de Taylor

$$f(x,y+k)=f(x,y)+kf'_y(x,y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x,y)+\cdots,$$

$$f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+kf''_{x,y}(x,y)+\frac{k^2}{2}f'''_{x,y^2}(x,y)+\cdots,$$

$$f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+kf'''_{x^2,y}(x,y)+\cdots$$

Designamos por $f^{(r)}_{y^r}(x,y)$ a derivada parcial da ordem $r$ de $f(x,y)$ relativamente só a $y$, e por $f^{(r)}_{x^p,y^q}(x,y)$ a funcção que se obtem derivando $p$ vezes relativamente a $x$ e $q$ vezes relativamente a $y$ a funcção $f(x,y)$. Nesta última expressão será $p+q=r$; é claro que nas funcções inteiras a ordem das derivações é arbitrária, e este principio é geral.

Das ultimas egualdades resulta o desenvolvimento

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+kf'_y(x,y)$$
$$+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y)+hkf''_{x,y}(x,y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x,y)+\text{ etc.}$$

Se fôr, por exemplo,

$$f(x, y) \equiv ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + g,$$

as primeiras derivadas parciaes relativamente a $x$ e $y$ serão

$$(4) \qquad \begin{cases} f'_x(x, y) \equiv 2by + 2cx + 2e, \\ f'_y(x, y) \equiv 2ay + 2bx + 2d. \end{cases}$$

A segunda derivada relativamente a $x$ e $y$ obtem-se derivando a primeira d'estas funcções relativamente a $y$ ou a segunda relativamente a $x$, e de qualquer dos modos se achará

$$f''_{x,y}(x, y) = 2b.$$

Finalmente as segundas derivadas relativamente a $x$ e a $y$ sómente são respectivamente $2c$ e $2a$, d'onde resulta que

$$f(x+h, y+k) \equiv f(x, y) + 2h(by + cx + e)$$
$$+ 2k(ay + bx + c) + h^2c + 2hkb + k^2a;$$

ou, ordenando relativamente ás variaveis,

$$f(x+h, y+k) \equiv ay^2 + 2bxy + cx^2$$
$$+ 2(ch + bk + e)x + 2(bh + ak + d)y + f(h, k),$$

que é a mesma expressão precedente mudando $x$ em $h$, $y$ em $k$ e vice-versa.

## IV. — Continuidade.

**17.** O valor absoluto do numero real A exprime-se pelo symbolo

$$|A|,$$

que se lê *módulo de A*.

Segundo as regras do cálculo algebrico é evidente que

$$|A|+|B| \gtreqless |A+B|,$$
$$|A| \times |B| = |AB|.$$

**18.** Entende-se por *vizinhança* do ponto $a$ definida por um numero positivo dado $\alpha$ o conjuncto dos pontos $x$ para os quaes é

$$|x-a|<\alpha.$$

Esta desegualdade desdobra-se nas duas

$$-\alpha<x-a<\alpha,$$

ou

$$a-\alpha<x<a+\alpha;$$

por onde se vê que os pontos de que se trata estam contidos no intervallo cujos extremos são $a-\alpha$ e $a+\alpha$.

Do mesmo modo a *vizinhança* do ponto $(a, b)$ do plano, definida pelos numeros positivos $\alpha$ e $\beta$, comprehende todos os pontos do plano cujas coordenadas $(x, y)$ verificam as desigualdades

$$|x-a|<\alpha, \quad |y-b|<\beta.$$

Esta vizinhança compõe-se dos pontos internos de um rectângulo contido entre as parallelas ao eixo dos $y$ tirados pelos pontos $a-\alpha$ e $a+\alpha$ do eixo dos $x$, e as parallelas a este ultimo eixo tiradas pelos pontos $b-\beta$ e $b+\beta$ do eixo dos $y$.

A *vizinhança* do ponto $a$, $b$, $c$ compõe-se de todos os pontos $x$, $y$, $z$ que verificam as desigualdades

$$|x-a|<\alpha,\quad |y-b|<\beta,\quad |z-c|<\gamma,$$

sendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ numeros positivos.

Finalmente a *vizinhança* do ponto $a_1$, $a_2$, ..., $a_h$ compõe-se de todos os pontos $x_1$, $x_2$, ..., $x_h$ que verificam as desigualdades

$$|x_1-a_1|<\alpha_1,\quad |x_2-a_2|<\alpha_2,\ \ldots,\ |x_h-a_h|<\alpha_h,$$

sendo tambem positivas as quantidades $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_h$.

**19.** Designando por $k_i$ o valor que a funcção $f_i(x_1, \ldots, x_h)$ tem no ponto $a_1$, $a_2$, ..., $a_h$, diz-se que a funcção $f_1$ é *continua* neste ponto quando, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$, é possivel determinar uma quantidade positiva $\delta$ tal, que para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i-a_i|<\delta,\quad i=1, 2, \ldots, h,$$

seja

$$|f_1-k_1|<\varepsilon.$$

**20.** Theorema I. — *Se duas funcções* $f_1(x_1, \ldots, x_h)$ *e* $f_2(x_1, \ldots, x_h)$ *forem continuas no ponto* $a_1, \ldots, a_h$, *a funcção* $\varphi=f_1+f_2$ *tambem é continua neste ponto.*

Segundo a hypothese, qualquer que seja a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$, haverá sempre dois numeros positivos $\delta_1$ e $\delta_2$ taes que seja

$$\left.\begin{aligned} |f_1-k_1|&<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_1,\\ |f_2-k_2|&<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_2.\end{aligned}\right\} \quad i=1, 2, \ldots, h.$$

Portanto, se designarmos por $\delta$ o menor dos numeros $\delta_1$ e $\delta_2$, será

$$|f_1-k_1|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad |f_2-k_2|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i-a_i|<\delta,\quad i=1, 2, \ldots, h.$$

Mas (n.º 17) é

$$|(f_1-k_1)+(f_2-k_2)|=|(f_1+f_2)-(k_1+k_2)|\leqq|f_1-k_1|+|f_2-k_2|;$$

donde se conclue que para os mesmos valores das variaveis será

$$|(f_1+f_2)-(k_1+k_2)|<\varepsilon,$$

que é a condição de continuidade da somma $f_1+f_2$.

Corollario. — *Se as funcções* $f_1, f_2, \ldots, f_i$, *em numero finito, são continuas num ponto, a somma* $f_1+f_2+\ldots+f_i$ *é continua no mesmo ponto.*

**21.** Theorema.—*Se duas funcções* $f_1(x_1,\ldots,x_h)$ *e* $f_2(x_1,\ldots,x_h)$ *forem continuas no ponto* $a_1, \ldots, a_n$, *a funcção* $\varphi=f_1\times f_2$ *tambem é continua nesse ponto.*

Segundo a hypothese, qualquer que seja a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\theta$, será possivel determinar dois numeros positivos $\delta_1$ e $\delta_2$ tão pequenos que sejam

$$|f_1-k_1|<\theta \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_1,$$
$$|f_2-k_2|<\theta \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_2$$

ou, desigdando por $\delta$ o menor dos numeros $\delta_1$ e $\delta_2$,

$$|f_1-k_1|<\theta,\quad |f_2-k_2|<\theta$$

para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i - a_i| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Por outra parte é $f_1 f_2 - k_1 k_2 \equiv f_2 (f_1 - k_1) + k_1 (f_2 - k_2)$ e por conseguinte (n.º 17)

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| \leqq |f_2| \cdot |f_1 - k_1| + |k_1| \cdot |f_2 - k_2|,$$

donde resulta, substituindo $|f_1 - k_1|$ e $|f_2 - k_2|$ por $\theta$,

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \{ |f_2| + |k_1| \} \cdot \theta.$$

Mas

$$|f_2| = |k_2 + (f_2 - k_2)| \gtreqless |k_2| + |f_2 - k_2|$$

ou

$$|f_2| < |k_2| + \theta;$$

e assim teremos

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \{ |k_1| + |k_2| \} \theta + \theta^2.$$

Posto isto, seja $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena. Se os numeros $|k_1|$ e $|k_2|$ não forem ambos nullos, determinaremos $\theta$ pela condição de verificar as desigualdades

$$\{ |k_1| + |k_2| \} \theta < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad \theta^2 < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

isto é,

$$\theta < \frac{\frac{1}{2} \varepsilon}{|k_1| + |k_2|}, \quad \theta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Se for $|k_1| = |k_2| = 0$, faremos simplesmente $\theta^2 < \varepsilon$ ou

$$\theta < \sqrt{\varepsilon}.$$

De qualquer dos modos ficará satisfeita a desigualdade

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \varepsilon,$$

que exprime a condição da continuidade do producto $f_1 f_2$ no ponto considerado.

Corollario. — *Se forem contínuas num ponto as funcções* $f_1, f_2, \ldots, f_i$ *em numero limitado, o producto* $f_1 f_2 \ldots f_i$ *será contínuo no mesmo ponto.*

**22.** A condição de continuidade é satisfeita em todos os pontos por uma constante, considerada como um caso particular das funcções de $h$ variaveis. O mesmo se dirá de cada variavel $x_i$.

D'aqui resulta, pelo corollario do último theorema, que a expressão

$$c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} \ldots x_h^{\theta_i},$$

em que os expoentes $\alpha_i$, $\beta_i$, … $\theta_i$ são numeros inteiros e positivos, é contínua em todos os pontos. Pelo corollario do *Theor. I* a somma algebrica de um numero limitado de termos d'aquella forma, é egualmente contínua. Logo:

Theorema III. — *A funcção inteira de* h *variaveis é contínua em todos os pontos.*

## V. — Determinantes.

### § 1.º — Definições.

**23**. Chama-se *transposição*, e designa-se pelo symbolo $(\alpha, \beta)$ a troca de dois elementos $\alpha$, $\beta$ de uma permutação. De uma das permutações de $n$ elementos, escolhida arbitrariamente, podem deduzir-se todas as outras por transposições successivas; aquella permutação toma o nome de *principal*. Seja, por exemplo, 2413 a permutação principal dos quatro elementos 1, 2, 3, 4; fazendo a transposição (2, 4) dos dois primeiros elementos obtém-se outra permutação, e as duas são

$$2413, \quad 4213.$$

Transpondo successivamente o terceiro elemento com cada um dos precedentes, aquellas permutações e as que d'ellas se deduzem por esta forma são, ao todo, as $2.3$ seguintes:

$$\begin{array}{ccc} 2413, & 1423, & 2143; \\ 4213, & 1243, & 4123. \end{array}$$

Transpondo afinal nestas permutações o último elemento successivamente com cada um dos tres primeiros, teremos obtido as $2.3.4$ permutações dos quatro elementos dados.

Dá-se uma *inversão* entre dois elementos de uma permutação quando elles se acham dispostos em ordem contrária áquella em que os mesmos elementos se succedem na permutação principal. Por commodidade adoptamos geralmente como principal a permutação cujos elementos procedem na ordem natural, excepto quando expressamente se diga o contrario; assim a permutação principal de quatro elementos seria 1234, e em 2431 haveria quatro inversões, a saber: *uma* de 2 com 1, *duas* de

4 com 3 e com 1, *uma* de 3 com 1. Em geral, conta-se o numero das inversões de uma dada permutação comparando cada um dos seus elementos com todos os seguintes.

As permutações de $n$ elementos dividem-se em duas classes. São de *primeira classe* ou *pares* a principal e aquellas em que ha um numero par de inversões. As outras são de *segunda classe* ou *impares*. O numero total das inversões em duas permutações P e P′ dos mesmos elementos é par ou impar, conforme P e P′ são da mesma ou de differentes classes.

**24.** Theorema de Bezout.—*Duas permutações dos mesmos elementos são de classes differentes quando uma d'ellas resulta da simples transposição de dois elementos da outra.*

Na demonstração d'este theorema temos a considerar os dois casos seguintes:

1.° Se os elementos transpostos $\alpha$, $\beta$ são contíguos, a permutação P e a outra P′, que resulta simplesmente da transposição d'aquelles elementos de P, terão a forma

$$P = A\alpha\beta C, \quad P' = A\beta\alpha C.$$

A e C são os mesmos em P e P′, e representam o grupo dos elementos que precedem e o d'aquelles que succedem aos dois elementos transpostos; se $\alpha$ fôr o elemento inicial ou $\beta$ o elemento final de P, faremos respectivamente $A = 1$ ou $C = 1$.

Ora é evidente que as inversões produzidas pelos elementos de A, comparados com os de C e com $\alpha$ e $\beta$, são as mesmas em P e P′. O mesmo se diria das inversões de $\alpha$ e $\beta$ com os elementos de C. Mas a transposição $(\alpha, \beta)$ ha de produzir ou desfazer uma inversão; portanto, designando por $v$ e $v'$ os numeros de inversões que ha em P e P′, será $v' = v \pm 1$. Logo as permutações P e P′ são de classes differentes, visto que os numeros $v$ e $v'$ são de *paridades differentes*, isto é, um é par e o outro é impar.

2.° Se entre $\alpha$ e $\beta$ ha um grupo B de $h$ elementos, as duas permutações podem ser representadas por

$$P = A\alpha B\beta C, \quad P' = A\beta B\alpha C$$

e a differença $v - v'$ ou $v' - v$ só pode provir da transposição $(\alpha, \beta)$.

Ora, transpondo $\alpha$ successivamente com cada um dos $h$ elementos de B e com $\beta$, da permutação P deduz-se a seguinte:

$$P'' = AB\beta\alpha C;$$

e transpondo $\beta$ successivamente com cada um dos $h$ elementos de B, de $P''$ se deduz a permutação considerada $P'$.

D'este modo se vê que $P'$ se pode deduzir de P por meio de $2h + 1$ transposições de elementos consecutivos; e pois que, pelo caso anterior, cada uma d'estas operações produz mudança de classe e o numero d'ellas é impar, segue-se que P e $P'$ são de classes differentes.

Corollario. — *O numero das permutações pares de* n *elementos é egual ao das impares.*

Com effeito, de cada permutação de uma classe resultará uma da outra classe pela transposição de dois elementos. Pode-se advertir que para qualquer valor de $n > 1$ o numero das permutações de $n$ elementos é par.

**25.** Invertendo a ordem dos elementos de uma permutação P, a permutação resultante diz-se *inversa* de P. Estam neste caso 1234 e 4321.

Entre as permutações dos mesmos elementos, a inversa da principal é aquella em que o numero de inversões é máximo, porque cada um dos seus $n$ elementos produz inversões com todos os seguintes. Assim, este numero será expresso por

$$V = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Designando por $i$ o quociente inteiro da divisão de $n$ por 4, o numero V será par quando $n$ tiver alguma das formas $4i$ ou $4i+1$, e impar quando fôr $n=4i+2$ ou $n=4i+3$. Exprime-se este resultado nos termos seguintes:

*A permutação inversa da principal de* n *elementos é par ou impar conforme seja dupla ou simplesmente par o maior numero par contido em* n.

**26.** Trocando successivamente o primeiro elemento de uma permutação P de ordem $n$ com cada um dos seguintes, obtém-se a permutação *circular* de P. As duas são da mesma classe quando $n$ é impar e vice-versa, porque se passa de uma para a outra por meio de $n-1$ transposições.

Assim, por exemplo, 4321 é a permutação circular de 1432. A primeira é par e a segunda é impar.

O nome de *circular* resulta da maneira como esta permutação se poderia obter, fazendo corresponder cada elemento da permutação dada P, que continuamos a suppor de ordem $n$, a uma das $n$ divisões eguaes de uma circumferência. Imprimindo a esta circumferência uma rotação de amplitude egual a uma das suas divisões e em sentido contrario áquelle em que ellas procedem, o logar da permutação P passaria a ser occupado pela correspondente permutação circular.

**27.** O numero $t$ das inversões que os primeiros $k$ elementos de uma permutação P de ordem $n$ produzem, quando se comparam sómente com os últimos $n-k$ elementos da mesma permutação, determina-se do modo seguinte.

Representemos pelos numeros 1, 2, 3, ..., $n$ os elementos de P, e supponhamos que os da permutação principal procedem na ordem natural. Designemos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ os $k$ elementos considerados, dispostos em ordem ascendente. Um d'elles $\alpha_h$ só produz inversões com os $\alpha_h-1$ numeros $1, 2, \ldots, (\alpha_h-1)$ menores que $\alpha_h$; mas havemos de excluir d'estes os $h-1$ numeros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ que se encontram entre os $k$ primeiros elementos de P, e por conseguinte o numero das inversões que resultam da comparação de $\alpha_h$ com os ultimos $n-k$ elementos de P será

$$\alpha_h - 1 - (h-1) = \alpha_h - h.$$

Pondo successivamente $h = 1, 2, 3, \ldots, k$, sommando os resultados e fazendo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = s$, acha-se finalmente

$$t = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \ldots + (\alpha_k - k) = s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Qualquer que seja a permutação $p$ dos elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, a somma $s$ tem sempre o mesmo valor. Se não houver inversões entre os primeiros $k$ nem entre os últimos $n-k$ elementos de P, o numero total das inversões de P será

$$(1) \qquad v = s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Se houver $u$ inversões nos primeiros $k$ e $u'$ nos ultimos $n-k$ elementos, o numero das inversões de P será

$$(2) \qquad v = u + u' + s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

O numero $t$ sómente será zero quando fôr

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \ldots, \quad \alpha_k = k.$$

O numero de inversões que o elemento inicial $\alpha_1$ faz com as seguintes é evidentemente $\alpha_1 - 1$.

**28.** Chama-se *matriz* a figura formada com $np$ elementos dispostos em $n$ filas horizontaes, ou *linhas*, e $p$ filas verticaes, ou *columnas;* o rectangulo, a que esta disposição dá logar, encerra-se ordinariamente entre dois traços duplos verticaes. Contam-se as linhas de cima para baixo, e as columnas da esquerda para a direita.

Duas notações se tem adoptado para representar systematicamente e de um modo geral os elementos de uma matriz. Na notação de Leibnitz designam-se todos os elementos pela mesma letra affectada de dois índices, que podem ser sobrepostos como em $a_i^j$, ou consecutivos como em $a_{i,j}$. Dispondo os índices de cada systema na ordem natural, os inferiores ou do primeiro systema indicam a ordem da linha e os superiores ou do segundo systema indicam a ordem da columna em que se encontra o elemento considerado; assim o elemento $a_i^j$ está no cruzamento da linha $i$ e da columna $j$. Os dois numeros $i$ e $j$ definem a *posição* d'este elemento na matriz, o que se exprime pelo symbolo $(i, j)$. D'este modo a matriz, de $n$ linhas e $p$ columnas será:

$$\left\|\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^p \end{matrix}\right\|.$$

Na notação de Cauchy os elementos são representados por letras differentes affectadas de um índice só. Distinguem-se as columnas pelas letras e as linhas pelos índices, representando-se aquella mesma matriz pelo quadro seguinte:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & u_2 \\ . & . & . & . \\ a_n & b_n & \dots & u_n \end{matrix}\right\|.$$

As letras desempenham aqui o mesmo papel que os índices do segundo systema na notação de Leibnitz, e o que dissermos d'estes se applicará áquellas ou vice-versa.

Quando o numero das linhas é egual ao das columnas, ou $n=p$, a matriz diz-se *quadrada* e de *ordem* $n$. Chama-se *primeira diagonal* á que parte do vértice superior da esquerda e *segunda diagonal* á outra. O numero dos elementos d'esta matriz é $n^2$. Chama-se *transposição de linhas e columnas* a troca ordenada d'estas filas umas pelas outras, isto é, a troca effectuada de modo que a primeira linha passe a ser primeira columna, a segunda linha se mude em segunda columna, e assim por deante.

**29.** Consideremos o producto

$$(3) \qquad T = a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_n}^{\beta_n},$$

cujos factores são $n$ elementos de uma matriz quadrada de ordem $n$ escolhidos de modo que em T entre como factor um elemento, mas um só, de cada linha e um elemento, mas um só, de cada columna da matriz.

A collecção

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

dos índices inferiores dos factores de T será uma permutação dos numeros 1, 2, ..., $n$, por isso que nella entram $n$ elementos e que estes elementos são todos differentos. Com effeito, se fosse, por exemplo, $a_i = a_j$, em T encontravam-se dois elementos da linha $\alpha_i$, ou da linha $\alpha_j$, o que é contrário á hypóthese.

O mesmo se dirá da collecção

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$$

dos índices superiores. Para definir a classe d'estas permutações tomam-se para principaes nos dois systemas de índices aquellas que se encontram nos elementos da primeira diagonal e em ordem descendente. Quando os indices procedem segundo a ordem das linhas e das columnas, cada uma das permutações principaes tem os elementos dispostos na ordem natural.

Podemos agora dar a seguinte:

DEFINIÇÃO.—DETERMINANTE *de* $n^2$ *elementos, dispostos numa matriz quadrada, é a somma algebrica dos productos distinctos de* n *elementos escolhidos de modo que em cada producto entre como factor um elemento, mas um só, de cada linha e um elemento, mas um só, de cada columna da matriz; dando a cada producto o signal + ou —, conforme são da mesma classe ou de classes differentes as permutações dos índices dos dois systemas nos elementos considerados.*

Designando por $v$ e $v'$ os numeros de inversões d'estas permutações, o numero $v+v'$ será par se elas forem da mesma classe e vice-versa. Por conseguinte, representando por $\Delta_n$ o determinante de $n^2$ elementos, que se diz *de ordem n* ou *de n linhas*, a definição precedente traduz-se na fórmula

$$(4) \qquad \Delta_n = \Sigma(-1)^{v+v'} . a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n} .$$

Tambem se pode representar o determinante pela sua matriz encerrada entre dois traços verticaes, do modo seguinte:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} .$$

É, porém, necessario não confundir o conceito da matriz, que é simplesmente um systema de quantidades ao qual não corresponde um valor determinado, com o conceito de determinante, que é uma somma. Esta distincção se confirmará quando virmos que na matriz se podem effectuar transformações que, produzindo matrizes differentes, não influem no valor do determinante.

Se em (3) trocarmos dois factores, $a_{\alpha_i}^{\beta_i}$ e $a_{\alpha_j}^{\beta_j}$ por exemplo, o producto não muda de valor; e as permutações dos índices, que eram primeiro

$$\alpha_1 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_j \ldots \alpha_n,$$
$$\beta_1 \ldots \beta_i \ldots \beta_j \ldots \beta_n,$$

tornaram-se em

$$\alpha_1 \ldots \alpha_j \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n,$$
$$\beta_1 \ldots \beta_j \ldots \beta_i \ldots \beta_n,$$

e ambas mudam de classe pelas transposições $(\alpha_i, \alpha_j)$, $(\beta_i, \beta_j)$. Por conseguinte o signal do termo considerado tambem se não altera, e d'aqui se segue que em (4) podemos dispôr os factores do termo geral de modo que os índices de um systema sigam a ordem natural. Assim, a somma em que se resolve o determinante $\Delta_n$ pode ser expressa pela fórmula

$$(5) \qquad \Delta_n = \Sigma(-1)^{v'} . a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_n^{\beta_n},$$

dispondo os índices inferiores na ordem natural e notando que na permutação correspondente será $v=0$.

A fórmula (5) mostra que, para ter o desenvolvimento do determinante, basta effectuar todas as permutações dos índices superiores e pela classe de cada uma d'ellas se determinará o signal do termo correspondente. D'aqui resulta que:

1.º O termo

$$a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n,$$

que corresponde á permutação principal d'aquelles índices, pertence ao determinante onde tem o signal $+$. Este termo chama-se *principal*, e é formado com os elementos da primeira diagonal; estes termos teem egualmente o nome de *principaes*.

2.° O termo

$$a_1^n a_2^{n-1} \dots a_n^1,$$

que corresponde á permutação inversa da principal, pertence tambem ao determinante e o seu signal é dado pelo coefficiente (n.° 25),

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Este termo é formado com os elementos da segunda diagonal.

3.° O numero dos termos do determinante de ordem $n$ é $n!$ Metade são positivos e metade são negativos (n.° 24, *Corol.*)

O determinante pode representar-se simplesmente por

$$| a_i^j |, \text{ ou } (a_1^1 \dots a_n^n),$$

e ainda por

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots n \end{pmatrix}.$$

Na notação de Cauchy pode-se escrever, por exemplo, $\Delta_3 = | a\, b\, c |$.

**30.** Pela regra do numero anterior teremos o desenvolvimento de

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

effectuando as permutações 12, 21 dos indices 1,2. Conservando os indices inferiores na ordem natural e attendendo á regra dos signaes, teriamos $\Delta_2 = a_1^1\, a_2^2 - a_1^2\, a_2^1$.

Egualmente para

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

effectuam-se as permutações dos índices 1, 2, 3. Pela regra do n.º 23 teremos primeiro as duas

123, 213,

ás quaes depois se juntarão as seguintes:

321, 132, 312, 231.

Conservando os índices inferiores na ordem natural e attendendo á regra dos signaes, viria

$$\Delta_3 = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^2\, a_2^1\, a_3^3 + a_1^3\, a_2^1\, a_3^2 - a_1^1\, a_2^3\, a_3^2 + a_1^2\, a_2^3\, a_3^1 - a_1^3\, a_2^2\, a_3^1.$$

Este desenvolvimento tem 6 termos, 3 positivos e 3 negativos.

Do mesmo modo se obteria o desenvolvimento de determinantes de ordem mais elevada, mas o processo seria cada vez mais complicado e hade ser substituido por outros mais expeditos. Os determinantes de 3.ª ordem resolvem-se facilmente pela *regra de Sarrus*, de que principalmente convirá usar quando os elementos não estejam expressos em alguma das notações de Leibnitz ou de Cauchy. A regra é a seguinte:

Ligam-se os elementos que ocupam as posições (1,2), (2,3) assim como (2,1), (3,2) por meio de parallelas á primeira diagonal e completam-se os triangulos cujos vértices são respectivamente (3,1) e (1,3). Os elementos da primeira diagonal e os que formam os vértices dos dois triangulos compõem os termos positivos do determinante. Para ter os termos negativos opéra-se de modo análogo relativamente á segunda diagonal.

**31**. Chamam-se *conjugados* dois elementos $a_\alpha^\beta$ e $a_\beta^\alpha$ que teem os mesmos índices, mas invertidos. Os elementos principaes são conjugados de si mesmos. Dois elementos conjugados estam situados symetricamente a respeito da primeira diagonal.

O determinante diz-se de *diagonal vazia* quando todos os elementos principaes são zero, *symetrico* quando os elementos conjugados são eguaes dois a dois, *contra symetrico* ou *pseudo symetrico* quando os elementos conjugados teem, dois a dois, o o mesmo valor numerico e signaes contrarios, *hemisymetrico* quando é contrasymetrico e de diagonal vazia.

Desenvolvendo pela regra de Sarrus o determinante symetrico

$$S = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{vmatrix},$$

acha-se $S = acg + 2bde - ae^2 - cd^2 - gb^2$. Para $a = c = g = 0$ seria $S = 2bde$.

Desenvolvendo o determinante contrasymetrico

$$S' = \begin{vmatrix} a & -b & d \\ b & c & -e \\ -d & e & g \end{vmatrix}$$

acha-se $S' = acg + ae^2 + cd^2 + gb^2$. Para $a = c = g = 0$ seria

$S' = 0$ e, em geral, o determinante hemisymetrica de ordem impar é nullo.

**32.** Combinando de todas as maneiras $i$ linhas e $i$ columnas de uma matriz de $np$ elementos, para todos os valores possiveis de $i$, os determinantes formados com os elementos communs a estas filas orthogonaes chamam-se *determinantes da matriz*. A ordem d'elles pode variar desde o menor dos numeros $n$ e $p$ até á unidade, considerando cada elemento como um determinante de *primeira ordem*.

Entre os determinantes de uma matriz alguns poderão annullar-se, e em muitos casos convirá especificar a ordem mais elevada dos que podem ser differentes de zero. Este numero chama-se *caracteristica*.

Assim, quando dissermos que $c$ é a caracteristica de uma matriz, queremos significar que na matriz há, pelo menos, um determinante de ordem $c$ que é differente de zero e todos os determinantes de ordem superior a $c$ se annullam.

O menor valor de $c$ será a unidade, porque não teremos de considerar matrizes compostas só de elementos zero. O maior valor possivel de $c$ é o menor dos numeros $n$ e $p$.

## § 2.° — Propriedades fundamentaes.

**33.** A transposição das linhas e columnas de um determinante $\Delta$ corresponde a uma rotação de 180° executada pelo plano de $\Delta$ em torno da sua primeira diagonal; e cada elemento de $\Delta$ irá ocupar no novo determinante $\Delta'$ a posição que o seu conjugado tinha em $\Delta$.

Ora um termo

$$T = \pm a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_n}^{\beta_n}$$

de $\Delta$ hade encontrar-se, abstrahindo do signal, em $\Delta'$ e vice-versa; por isso que em T se encontra um elemento, e um só, de cada linha e de cada columna de $\Delta'$.

O signal é tambem o mesmo. Com effeito as permutações dos índices das linhas e das columnas de $\Delta$, em que se encontram os elementos de T, são respectivamente

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \quad \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n;$$

e as permutações dos índices das linhas e das columnas de $\Delta'$ em que se encontram os mesmos elementos de T são, em virtude da transposição,

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n, \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

isto é, as mesmas. Além d'isto os elementos principaes, sendo conjugados de si proprios, são os mesmos em $\Delta$ e $\Delta'$, e d'aqui se segue que as permutações principaes são as mesmas nos dois determinantes. Logo o signal do termo considerado é tambem o mesmo em ambos, e portanto:

I. *O valor de um determinante não se altera quando se mudam ordenadamente as linhas em columnas e as columnas em linhas.*

**34.** Se no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^h & \dots & a_1^k & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_h^1 & \dots & a_h^h & \dots & a_h^k & \dots & a_h^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^1 & \dots & a_k^h & \dots & a_k^k & \dots & a_k^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^h & \dots & a_n^k & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

trocarmos duas columnas $h$ e $k$, é evidente que, abstrahindo do signal, os termos dos desenvolvimentos de $\Delta$ e do determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^k & \dots & a_1^h & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_h^1 & \dots & a_h^k & \dots & a_h^h & \dots & a_h^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^1 & \dots & a_k^k & \dots & a_k^h & \dots & a_k^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^k & \dots & a_n^h & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

serão os mesmos.

Quanto aos signaes, os termos principaes de $\Delta$ e $\Delta'$ são respectivamente

$$T = + a_1^1 \dots a_h^h \dots a_k^k \dots a_n^n,$$
$$T' = + a_1^1 \dots a_h^k \dots a_k^h \dots a_n^n.$$

Este último tem o signal — em $\Delta$, porque as permutações dos índices inferiores são as mesmas em T e T′, emquanto que as dos índices superiores são de classes differentes pelo theorema de Bezout.

Por outra parte as linhas teem os mesmos indices em $\Delta$ e $\Delta'$, e nos termos positivos de cada determinante a permutação dos índices superiores hade ser da mesma classe da respectiva permutação principal e vice-versa. Logo será $\Delta' = -\Delta$; e como da propriedade I resulta que o mesmo succederia quando se trocassem duas linhas, segue-se que:

II. *Um determinante muda de signal pela troca de duas filas parallelas.*

Corollario. — *Trocando* p *filas parallelas do determinante* $\Delta$, *o novo determinante será* $\Delta' = (-1)^p \cdot \Delta$.

Uma permutação circular de $p$ linhas ou columnas é equivalente á troca de $p-1$ filas parallelas ou á multiplicação do determinante por $(-1)^{p-1}$.

**35.** Em todos os termos do determinante entra como factor um elemento, e um só, de cada linha e de cada columna, e d'aqui se segue que, multiplicando todos os elementos de uma fila por um numero, cada termo do determinante fica multiplicado por esse numero. Logo:

III. *Se multiplicarmos ou dividirmos todos os elementos de uma fila por um numero, o determinante fica multiplicado ou dividido pelo mesmo numero.*

COROLLARIO I. — *Se forem zero todos os elementos de uma fila de* $\Delta$, *será* $\Delta = 0$.

COROLLARIO II. — *Mudando os signaes a todos os elementos de uma fila o determinante muda tambem de signal. Mudar os signaes aos elementos de* p *filas equivale a multiplicar a determinante por* $(-1)^p$. *Mudando os signaes a todos os elementos de um determinante de ordem* n, *o determinante muda ou não de signal conforme* n *é impar ou par.*

**36.** Pela propriedade III pode-se operar no determinante uma transformação, que em geral simplificará o seu desenvolvimento. Seja

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Multipliquem-se primeiro as columnas respectivamente por $bc$, $ca$ e $ab$, como na reducção de fracções ao mesmo denominador, e divida-se o determinante por $a^2b^2c^2$. Divida-se depois a primeira linha por $abc$, e multiplique-se o determinante por este factor. Teremos assim

$$\Delta = \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \begin{vmatrix} abc & bca & cab \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix}.$$

Se fôsse $a = 0$, por exemplo, multiplicariamos sómente as duas ultimas columnas de $\Delta$ por $c$ e $b$. Em geral é sempre possivel reduzir á unidade todos os elementos de uma fila que sejam differentes de zero, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = x^2y^2z^2. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{z}{xy} & \frac{y}{zx} \\ 1 & \frac{z}{xy} & 0 & \frac{x}{yz} \\ 1 & \frac{y}{xz} & \frac{x}{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ xyz & z^2 & 0 & x^2 \\ xyz & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Obtem-se o segundo determinante dividindo por $x$ a segunda linha e a segunda columna do proposto, por $y$ a terceira linha e a terceira columna, por $z$ a quarta linha e a quarta columna e multiplicando o resultado por $x^2y^2z^2$. As outras transformações não offerecem difficuldade.

**37.** Se forem eguaes os elementos correspondentes de duas filas parallelas, o determinante annulla-se. Com effeito, trocando essas filas, o determinante muda de signal (II); mas o seu valor não se altera porque a matriz se conserva exactamente a mesma, e por conseguinte será $\Delta = -\Delta$ ou $2\Delta = 0$, isto é, $\Delta = 0$.

Se os elementos correspondentes de duas filas parallelas são proporcionaes, o determinante annulla-se. Assim teremos, por exemplo, em virtude da propriedade III,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & pb & b \\ a' & pb' & b' \\ a'' & pb'' & b'' \end{vmatrix} = p . \begin{vmatrix} a & b & b \\ a' & b' & b' \\ a'' & b'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

Este resultado é evidentemente geral e portanto:

IV. *Sendo proporcionaes os elementos correspondentes de duas filas parallelas, o determinante annulla-se.*

Assim, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 9 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2.2 & 5 \\ -1 & 2.(-1) & 9 \\ 3 & 2.3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

como se poderia ver effectuando o desenvolvimento pela regra de Sarrus.

**38.** Um determinante da fórma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

resolve-se na somma dos tres

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \beta_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \beta_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \gamma_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Com effeito a expressão

$$a_1 b_2 (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) c_4 = a_1 b_2 \alpha_3 c_4 + a_1 b_2 \beta_3 c_4 + a_1 b_2 \gamma_3 c_4$$

mostra que o termo principal de $\Delta$ é egual á somma dos termos principaes dos tres determinantes em que $\Delta$ se resolveu; e do mesmo modo cada termo de $\Delta$ será egual á somma dos termos *homólogos* d'estes tres últimos determinantes. O principio traduzido na penúltima egualdade é geral; logo:

V. *Se os elementos de uma columna (ou linha) forem expressos por sommas de* i *parcellas ou polynomios, o determinante resolve-se na somma dos* i *determinantes que se obteem quando no determinante dado todos os polynomios se substituem successivamente pelo primeiro termo, segundo termo, etc., de cada um.*

Teriamos uma applicação d'esta propriedade fazendo inversamente

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & b \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0,$$

por onde se veria que os primeiros dois determinantes são numericamente eguaes e de signaes contrários.

**39.** Pela propriedade V é

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+pc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & pc_1 & c_1 \\ a_2 & pc_2 & c_2 \\ a_3 & pc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ou, pois que o ultimo d'estes determinantes é zero, IV,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1+pc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

É evidente a generalização d'este principio a determinantes de ordem mais elevada e á somma de mais columnas. O mesmo se dizia das linhas, e portanto:

VI. *Um determinante não se altera quando aos elementos de uma columna, ou linha, se juntam os elementos correspondentes de outras columnas, ou linhas, respectivamente multiplicados por factores constantes.*

Por esta propriedade, a que se chama *principio da addição* *das linhas*, teriamos, por exemplo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \times \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix},$$

e este ultimo determinante resultou de dividir por 4 a primeira columna e por 5 a segunda linha de $\Delta$, multiplicando depois $\Delta$ por $4 \times 5$. Depois, subtrahindo da 1.ª, 3.ª e 4.ª linha a 2.ª multiplicada respectivamente por 3, 5 e 7, acha-se

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

D'este modo se pode fazer depender um determinante de outro, em que os elementos de uma fila, menos um, sejam eguaes a zero.

### § 3.º — Determinantes menores.

**40**. *Menor de classe $h$* de um determinante $\Delta$ de ordem $n$ é o determinante de ordem $n-h$ que se obtém quando se supprimem $h$ linhas e $h$ columnas de $\Delta$.

O numero de menores de 1.ª classe do determinante $\Delta$ é egual ao numero dos elementos de $\Delta$, ou $n^2$, porque são distinctos os systemas de duas filas orthogonaes que se cruzam sobre dois elementos differentes.

Cada um d'estes menores é um determinante de ordem

$n-1$, que terá $(n-1)^2$ menores de 1.ª classe. Todos elles são menores de 2.ª classe de $\Delta$, mas não são distinctos porque duas linhas e duas columnas dadas cruzam-se sobre $2^2$ elementos. Por conseguinte em $\Delta$ haverá

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2}$$

menores distinctos de 2.ª classe. Do mesmo modo se veria tambem que no mesmo determinante ha

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{3^2}$$

menores distinctos de 3.ª classe, e assim por deante.

**41.** Os elementos de um determinante podem considerar-se como menores de classe $n-1$ de $\Delta$, e a cada um d'elles corresponde um menor de 1.ª classe.

Em geral, a um menor M de ordem $h$ de um determinante de ordem $n$ corresponde outro menor M' de ordem $n-h$, que se obteria supprimindo as $h$ linhas e as $h$ columnas representadas em M. Um d'estes menores diz-se *complementar* do outro.

Assim no determinante de 5.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$$

os menores

$$\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_4^2 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^2 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$$

são complementares. N'um d'elles faltam os índices que se encontram no outro.

Chamam-se *menores principaes de* $\Delta$ aquelles cujos elementos principaes são tambem elementos principaes em $\Delta$, isto é, aquelles que estão contidos em linhas e columnas dos mesmos índices. *Primeiro menor principal* de ordem $h$ de $\Delta$ é o que se contém nas primeiras $h$ linhas e nas primeiras $h$ columnas de $\Delta$. Se um menor é principal, o seu complementar tambem é menor principal.

Num determinante de ordem $n$ haverá tantos menores principaes de ordem $h$ quantas são as combinações de $n$ elementos $h$ a $h$, ou $\binom{n}{h}$.

**42.** Seja M um menor de ordem $h$ do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

e M′ o menor complementar de M.

Um termo de M será da forma, (5),

$$t = (-1)^u a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_h}^{\beta_h}$$

com os índices inferiores na ordem natural e designando por $u$ o numero de inversões da permutação $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_h$. Do mesmo modo um termo de M′ será da fórma

$$t' = (-1)^{u'} \cdot a_{\alpha_{h+1}}^{\beta_{h+1}} a_{\alpha_{h+2}}^{\beta_{h+2}} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n},$$

tambem com os índices inferiores na ordem natural e designando por $u'$ o numero de inversões da permutação $\beta_{h+1}$ $\beta_{h+2} \ldots \beta_n$.

Por outra parte, ao termo geral (3) do determinante $\Delta_n$ tambem se pode dar a forma

$$T = (-1)^{v+v'} \cdot a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots a_{\alpha_h}^{\beta_h} a_{\alpha_{h+1}}^{\beta_{h+1}} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n}$$

sendo $v$ e $v'$ respectivamente os numeros de inversões das permutações $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h \alpha_{h+1} \ldots \alpha_n$ e $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_h \beta_{h+1} \ldots \beta_n$. Ora, pondo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = s_1$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_h = s_2$ e $s_1 + s_2 = s$, será por (1) e (2)

$$v = s_1 - \frac{h(h+1)}{2}, \quad v' = u + u' + s_2 - \frac{h(h+1)}{2},$$

e portanto $v + v' = u + u' + s - h(h+1)$; d'aqui resulta, por ser par o numero $h(h+1)$, que

$$(-1)^{v+v'} = (-1)^{u+u'} \cdot (-1)^s.$$

Logo será

$$T = (-1)^s \, tt'.$$

Mas $t$ e $t'$ são dois termos quaesquer de M e M′. Além d'isto $s$ é, por definição, a somma dos índices das linhas e das columnas de $\Delta$ representadas em M, e portanto conserva o mesmo valor para todos os termos de M. D'aqui se conclue que todos os termos do producto

$$(-1)^s \, MM'$$

pertencem ao desenvolvimento de $\Delta$. Estes termos são distinctos por corresponderem a termos distinctos de M, ou de M', ou de ambos estes factores.

O factor $(-1)^s \, M'$ chama-se *complemento algebrico de M,* e assim teremos por definição

$$(6) \qquad c.a.M = (-1)^s [m.c.M];$$

designamos por $c.a.M$ o *complemento algebrico* de M, por $m.c.M$ o *menor complementar* de M e por $s$ a somma dos índices das linhas e columnas representadas em M.

Na indicação do signal é indifferente empregar a potencia $s$ ou $s'$ de $-1$, sendo $s'$ a somma dos índices das linhas e das columnas representadas em M'. Com effeito a somma dos índices de todas as linhas e columnas de $\Delta$ é por um lado $s+s'$ e por outra parte $2(1+2+\ldots+n)$. Por aqui se vê, sendo eguaes estas sommas, que $s+s'$ é um numero par e portanto

$$(-1)^s = (-1)^{s'}.$$

Por conseguinte será tambem

$$c.a.M' = (-1)^s \, [m.c.M'],$$

e por este motivo se dizem *reciprocos* os menores M e M'.

Pois que as linhas e as columnas representadas num menor principal teem os mesmos índices, para estes menores o numero $s$ é par. Logo, se o menor M fôr principal, será

$$(7) \qquad c.a.\mathrm{M} = m.c.\mathrm{M}.$$

**43**. O menor complementar do elemento $a_i^j$ do determinante $\Delta$ de ordem $n$ é o determinante de ordem $n-1$ que se obtém supprimindo em $\Delta$ a linha $i$ e a columna $j$ e, designando por $A_i^j$ o complemento algebrico d'aquelle elemento, será

$$A_i^j = (-1)^{i+j}.[m.c.a_i^j].$$

Os $(n-1)!$ termos do producto $a_i^j\, A_i^j$ fazem parte, como se viu, do desenvolvimento de $\Delta$.

O elemento $a_i^j$ diz-se *par* quando os indices $i$ e $j$ são ambos pares ou ambos impares. O complemento algebrico de um elemento par é o respectivo menor complementar, e o de um elemento impar é o seu menor complementar com signal contrário.

O signal tambem se pode determinar pela regra seguinte, chamada *do percurso orthogonal:*

*Percorre-se a primeira linha do determinante desde o primeiro elemento até á columna em que se encontra o elemento considerado. Desce-se depois por esta columna até chegar ao mesmo elemento. Enunciando o signal + no ponto de partida e mudando de signal em cada elemento percorrido, o ultimo signal enunciado é o que se deve empregar.*

Facilmente se justifica esta regra, por isso que o primeiro elemento do determinante é par e em cada fila um dos indices conserva-se constante e o outro procede na ordem natural.

**44.** Nas $h$ columnas de $\Delta$ representadas no menor M conteem-se $\binom{n}{h}$ menores de ordem $h$, que se obteriam praticando todas as combinações $h$ a $h$ das $n$ linhas do determinante.

Designando por $c$ este numero, por $M_1, M_2, \ldots M_c$ aquelles menores e por $(M'_1)$, $(M'_2)$, $\ldots$, $(M'_c)$ os respectivos complementos algebricos, será

$$(8) \qquad \Delta = M_1 (M'_1) + M_2 (M'_2) + \ldots + M_c (M'_c).$$

Com effeito os termos em que se resolve o segundo membro de (8) são distinctos pelo factor $M_i$, ou por $(M'_i)$, ou por ambos. O numero de termos de $M_i$ é $\underline{|h}$, o de $(M'_i)$ é $\underline{|n-h}$ e portanto o da somma (8) será

$$\binom{n}{h} \cdot \underline{|h} \cdot \underline{|n-h} = \underline{|n} ,$$

que é exactamente o numero de termos de $\Delta$.

Á expressão (8) dá-se o nome de *desenvolvimento de Laplace.*

**45.** Applicando a fórmula (8) ao caso em que os menores $M_1, \ldots, M_c$ se reduzem aos elementos de uma linha ou de uma columna e designando por $A^j_i$, como anteriormente se fez, o complemento algebrico do elemento $a^j_i$, teremos para o desenvolvimento do determinante $\Delta$ as duas expressões:

$$\Delta = A^1_i \, a^1_i + A^2_i \, a^2_i + \ldots + A^n_i \, a^n_i,$$

$$\Delta = A^j_1 \, a^j_1 + A^j_2 \, a^j_2 + \ldots + A^j_n \, a^j_n.$$

Visto que, abstrahindo do signal, $A^j_i$ é um determinante de ordem $n-1$, estas fórmulas mostram como um determinante $\Delta$ se pode fazer depender de outros cuja ordem vae diminuindo successivamente de uma unidade.

Supponhamos agora que no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^j \dots a_1^k \dots a_1^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \dots a_n^j \dots a_n^k \dots a_n^n \end{vmatrix} = A_1^j a_1^j + A_2^j a_2^j + \dots + A_n^j a_n^j$$

é $a_i^j = a_i^k$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Neste caso é $\Delta = 0$ pela propriedade IV e, mudando $a_i^j$ em $a_i^k$ no segundo membro da ultima egualdade viria

$$A_1^j a_1^k + A_2^j a_2^k + \dots + A_n^j a_n^k = 0.$$

Para as linhas teremos uma relação semelhante e portanto:

*É egual a zero a somma dos productos que se obteem quando se multiplicam os elementos de uma fila pelos complementos algebricos dos elementos homólogos de outra fila parallela á primeira.*

Estes resultados e os precedentes estão comprehendidos nas seguintes fórmulas:

$$(9) \quad \begin{cases} A_i^1 a_h^1 + A_i^2 a_h^2 + \dots + A_i^n a_h^n = \delta, \\ (i = h, \delta = \Delta;\ i \neq h, \delta = 0); \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} A_1^j a_1^k + A_2^j a_2^k + \dots + A_n^j a_n^k = \delta, \\ (j = k, \delta = \Delta;\ j \neq k, \delta = 0). \end{cases}$$

A applicação das fórmulas (9) e (10) ao determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

dá, para $i=h$ e $j=k$, as relações seguintes

$$\begin{aligned}\Delta = A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 &= A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3,\\ = A_2a_2 + B_2b_2 + C_2c_2 &= B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3,\\ = A_3a_3 + B_3b_3 + C_3c_3 &= C_1c_1 + C_2c_2 + C_3c_3,\end{aligned}$$

sendo os complementos algebricos dos elementos de $\Delta$:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Applicando as mesmas fórmulas ao caso $i \neq h$ e $j \neq k$ teremos as doze relações

$$\begin{aligned}A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2 &= A_1a_3 + B_1b_3 + C_1c_3 = 0,\\ A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1 &= A_2a_3 + B_2b_3 + C_2c_3 = 0,\\ A_3a_1 + B_3b_1 + C_3c_1 &= A_3a_2 + B_3b_2 + C_3c_2 = 0;\\ A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 &= A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 = 0,\\ B_1a_1 + B_2a_2 + B_3a_3 &= B_1c_1 + B_2c_2 + B_3c_3 = 0,\\ C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 &= C_1b_1 + C_2b_2 + C_3b_3 = 0.\end{aligned}$$

Por estas fórmulas se acharia que o determinante do n.º 39, desenvolvido pelos elementos da primeira columna, daria

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}$$

Por este processo se pode abaixar em uma unidade a ordem do determinante, quando são nullos todos os elementos de uma fila menos um. Esta disposição pode obter-se pela propriedade VI, do modo que se viu no mesmo exemplo; e assim tambem, subtrahindo respectivamente da 2.ª e da 3.ª columna do ultimo determinante a 1.ª multiplicada por 3 e a segunda multiplicada por 2, virá

$$\Delta = -20. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -7 & 11 \end{vmatrix} = 20. \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -20.$$

Inversamente pode-se elevar em uma unidade a ordem do determinante pela addição de duas filas orthogonaes. O elemento em que estas filas se cruzam será $+1$ ou $-1$, conforme a sua posição seja par ou impar no novo determinante. Os restantes elementos de uma das filas serão zeros, e os da outra podem ser quaesquer. Assim teremos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ -1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

sendo arbitrários $\beta_1$, $\beta_2$ e $\beta_3$.

Desenvolvendo cada um dos determinantes successivos pelos elementos da primeira columna segundo a fórmula (9), teremos

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

É claro que, fazendo o desenvolvimento pelas linhas segundo a fórmula (9), se chegaria ao mesmo resultado quando fossem nullos os elementos para o outro lado da primeira diagonal; e que o determinante se simplificaria do mesmo modo, ainda mesmo que fosse de ordem mais elevada. Logo:

*O determinante reduz-se ao termo principal quando são nullos todos os elementos para um lado da primeira diagonal.*

Se forem nullos todos os elementos para um lado da segunda diagonal, o determinante de ordem $n$ reduz-se a este termo com o signal determinado (n.º 25) pelo coefficiente $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**46.** Theorema. — *Um determinante de ordem* n, *em que são nullos os elementos communs ás primeiras* h *linhas e ás ultimas* n — h *columnas, é egual ao producto dos dois determinantes adjacentes á matriz de elementos zero. Os elementos que completam a matriz do determinante podem ser quaesquer.*

Com effeito, desenvolvendo o determinante pelos menores de ordem $h$ contidos nas suas primeiras $h$ columnas, o primeiro termo do desenvolvimento de Laplace é o segundo membro da egualdade

$$
(11) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots a_1^h & 0 & \dots 0 \\ . & . & . & . \\ a_h^1 & \dots a_h^h & 0 & \dots 0 \\ a_{h+1}^1 & \dots a_{h+1}^h & a_{h+1}^{h+1} & \dots a_{h+1}^n \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & \dots a_n^h & a_n^{h+1} & \dots a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^h \\ . & . & . \\ a_h^1 & \dots & a_h^h \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\ . & . & . \\ a_n^{h+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}
$$

porque ambos os seus factores são menores principaes de $\Delta$. Os outros termos do desenvolvimento annullam-se, porque em cada um entra como factor um determinante que tem uma linha de zeros pelo menos.

*Se forem nullos os elementos communs ás primeiras* $h+1$ *linhas e ás ultimas* $n-h$ *columnas de* $\Delta$, *será* $\Delta=0$.

Neste caso o último determinante do segundo membro de (11) teria uma linha de zeros.

Corollario. — *Um determinante de ordem* $n$ *pode elevar-se directamente á ordem* $n+p$.

Viu-se no n.º 45 como este resultado se obteria, elevando a ordem do determinante em uma unidade de cada vez; mas será preferivel proceder do modo seguinte. Construa-se um determinante R de ordem $p$ que seja egual á unidade, fazendo por exemplo

$$
R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}
$$

Disponha-se a primeira diagonal de R no prolongamento da primeira diagonal do determinante considerado, e complete-se a matriz quadrada de ordem $n+p$ preenchendo as linhas com zeros e as columnas com elementos arbitrarios, ou vice-versa. O determinante assim obtido será, do mesmo modo que (11), o producto de dois factores, um dos quaes é o determinante dado e o outro é $R=1$.

**47.** O último theorema pode enunciar-se com mais generalidade nos termos seguintes, e a demonstração seria a mesma:

THEOREMA. — *Se no determinante* $\Delta$ *de ordem* n *forem nullos os elementos de* h *columnas, com excepção sómente dos que pertencem a* h *linhas differentes,* $\Delta$ *reduz-se ao producto da multiplicação do menor de ordem* h *contido nestas linhas e columnas pelo respectivo complemento algebrico.*

Este theorema tem uma applicação importante no desenvolvimento do determinante cujos elementos principaes são da forma $a+x$. Resolvendo este determinante segundo a 1.ª columna, pela propriedade V teremos

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1+x & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 0 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}.$$

Cada um dos dois últimos determinantes ainda se decompõe em dois pelo mesmo processo e assim seguidamente, de modo que $\Delta$ resolve-se afinal na somma de $2^n$ determinantes de elementos simples.

Dois d'estes determinantes serão

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}=x^n;$$

e um dos restantes será, por exemplo,

$$
(12) \qquad \begin{vmatrix}
x & 0 & \dots & 0 & a_1^{h+1} & \dots & a_1^n \\
0 & x & \dots & 0 & a_2^{h+1} & \dots & a_2^n \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & x & a_h^{h+1} & \dots & a_h^n \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_n^{h+1} & \dots & a_n^n
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\
. & . & . \\
a_n^{h+1} & \dots & a_n^n
\end{vmatrix} . x^h,
$$

onde o factor de $x^h$ é um menor principal de ordem $n-h$ de $\Delta_0$.

Designemos em geral por $\Delta'$ um dos outros determinantes em que $\Delta$ ficou resolvido. Se a variavel $x$ se encontrar na columna $\alpha_i$ de $\Delta'$, o índice da linha que cruza esta columna sobre o elemento $x$ será o mesmo $\alpha_i$, porque $x$ entra só nos elementos principaes de $\Delta$. Além d'isto os restantes elementos d'aquella columna $\alpha_i$ serão zero.

Por conseguinte se $x$ se encontrar em $h$ columnas de $\Delta'$, nestas columnas só se encontrará um menor de ordem $h$ que seja differente de zero, o qual se reduz a $x^h$ e é um menor principal de $\Delta'$. O complemento algebrico $\delta$ d'este menor é o respectivo menor complementar, que será um menor principal de ordem $n-h$ de $\Delta_0$; e assim teremos

$$\Delta' = \delta x^h.$$

No termo (12) o menor $\delta$ está contido nas últimas $n-h$ linhas e columnas de $\Delta_0$.

Mas a mesma disposição se verificará com todas as combinações $h$ a $h$ das $n$ columnas de $\Delta$, visto que *todos* os elementos principaes de $\Delta$ são da forma $a+x$. Logo, designando por $S_{n-h}$

a somma de todos os menores principaes de ordem $n-h$ de $\Delta_0$, os termos do desenvolvimento de $\Delta$ em que entra a potencia $h$ de $x$ são dados pela expressão

$$S_{n-h}x^h,$$

e o numero d'elles é $\binom{n}{n-h}$.

Fazendo succesivamente $h=1, 2, \ldots, n-1$, teremos assim

$$\Delta = \Delta_0 + S_{n-1}x + S_{n-2}x^2 + \ldots + S_1 x^{n-1} + x^n.$$

Sommando os numeros de parcellas em que se pode resolver cada termo d'este desenvolvimento, acha-se o numero total (n.º 15)

$$1+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{1}+1=2^n,$$

que é com effeito, como já vimos, o numero dos determinantes de elementos simples em que $\Delta$ se resolve.

A chamada *equação em s* da Geometria Analytica no espaço é

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-s & b'' & b' \\ b'' & a'-s & b \\ b' & b & a''-s \end{vmatrix} = 0.$$

Applicando o desenvolvimento precedente ao seu primeiro membro, temos de fazer $x=-s$ e portanto mudaremos o signal dos termos em que entram potencias impares de $x$. O termo independente de $s$ é o determinante symetrico

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

Designando por $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ os menores principaes de 2.ª ordem de $\Delta_0$ teremos

$$\delta = aa' - b''^2, \quad \delta' = aa' - b'^2, \quad \delta'' = a'a'' - b^2;$$

os de 1.ª ordem são

$$a, \quad a', \quad a'',$$

e por conseguinte

$$\Delta = \Delta_0 - (\delta + \delta' + \delta'')s + (a + a' + a'')s^2 - s^3$$

será o desenvolvimento pedido.

### § 4.º — Producto de determinantes. Determinante adjunto.

**48.** O producto de dois determinantes, um de ordem $n$ e outro de ordem $p$, exprime-se num determinante de ordem $n+p$ pelo theorema do n.º 46. Se os determinantes forem ambos de ordem $n$, o producto pode ser expresso por um determinante da mesma ordem $n$, como vamos ver.

Sejam os determinantes dados

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Transponham-se as linhas e columnas de $\Delta_1$; segundo aquelle theorema, o producto será

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & \beta_1^1 & \dots & \beta_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & \beta_n^1 & \dots & \beta_n^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

e os elementos $\beta_1^1, \ldots, \beta_n^n$ são arbitrários. Substituindo o determinante d'estes elementos pelo seguinte

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

o producto toma a forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & -1 & \ldots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Juntem-se á columna $i$ d'este determinante as $n$ últimas respectivamente multiplicadas por $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n$. Fazendo successivamente $i = 1, 2, \ldots, n$, virá

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ m_1^1 & m_1^2 & \ldots & m_1^n & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ m_2^1 & m_2^2 & \ldots & m_2^n & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ m_n^1 & m_n^2 & \ldots & m_n^n & \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

onde se fez

$$m_i^j = a_j^1 \alpha_i^1 + a_j^2 \alpha_i^2 + \ldots + a_j^n \alpha_i^n.$$

Posto isto, permutem-se em $\Delta$ as columnas $j$ e $n+j$ ($j=1, 2, \ldots, n$); o determinante virá multiplicado por $(-1)^n$, e teremos

$$(-1)^n . \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n & m_1^1 & m_1^2 & \ldots & m_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n & m_2^1 & m_2^2 & \ldots & m_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n & m_n^1 & m_n^2 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix}$$

D'esta expressão resulta pelo theorema do n.º 46

$$(-1)^n . \Delta = S \begin{vmatrix} m_1^1 & \ldots & m_1^n \\ . & . & . \\ m_n^1 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix},$$

ou, supprimindo o factor commum $S = (-1)^n$,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ . & . & . \\ \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^1 & \ldots & m_1^n \\ . & . & . \\ m_n^1 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix}.$$

Os elementos do último determinante são a somma dos productos que se obteem multiplicando os elementos de cada linha de um dos factores pelos elementos homólogos de todas as linhas do outro factor.

D'este modo se acharia, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Em geral o quadrado de um determinante é expresso por um determinante symetrico.

Da mesma forma se acharia

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ a_1b_2+b_1a_2 & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix},$$

donde se deduz a expressão

$$(13) \qquad (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2)^2=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2).$$

Transpondo as linhas e as columnas no factor $\Delta_1$ e depois em $\Delta_2$, vê-se que o producto de dois determinantes pode tomar quatro formas que resultam:

1.° da multiplicação de linhas por linhas,

2.° da multiplicação de linhas por columnas,

3.° da multiplicação de columnas por linhas,

4.° da multiplicação de columnas por columnas.

**49.** Designando por $A_i^j$ o complemento algebrico do elemento $a_i^j$ do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

o determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

chama-se *adjunto* de $\Delta$.

Effectuemos o producto $P = \Delta \times \Delta'$, multiplicando successivamente cada linha $h$ de $\Delta'$ por todas as linhas de $\Delta$. O elemento $m_i^j$ de P será a somma dos productos dos elementos da linha $i$ de $\Delta'$ pelos elementos homólogos da linha $j$ de $\Delta$, ou

$$m_i^j = A_i^1 a_j^1 + A_i^2 a_j^2 + \dots + A_i^n a_j^n.$$

Esta expressão mostra, (9), que é

$$\text{para } i = j, \quad m_i^i = \Delta,$$

$$\text{para } i \neq j, \quad m_i^j = 0;$$

portanto os elementos de cada linha de P são zero, com excepção apenas do elemento principal que é $\Delta$. Logo será

$$\Delta \times \Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n.$$

Esta expressão é uma identidade, porque subsiste quaesquer que sejam os elementos de $\Delta$; e pois que o factor $\Delta$ não é identicamente nullo, é permittido (n.º 14) supprimir nos seus dois membros este factor commum. D'aqui resulta a egualdade

$$(14) \qquad \Delta' = \Delta^{n-1}.$$

**50.** Designemos por $\alpha_i^j$ o complemento algebrico do elemento $A_i^j$ de $\Delta'$. Por definição será

$$(15) \qquad \alpha_i^j = (-1)^{i+j}.[m.c.A_i^j].$$

Elevemos á ordem $n$ este menor de $\Delta'$, que é um determinante de ordem $n-1$. Para o conseguir podemos fazer (n.º 45)

$$\alpha_i^j = (-1)^{i+j}. \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^{j-1} & A_1^j & A_1^{j+1} & \dots & A_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i-1}^1 & \dots & A_{i-1}^{j-1} & A_{i-1}^j & A_{i-1}^{j+1} & \dots & A_{i-1}^n \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^{i+j} & 0 & \dots & 0 \\ A_{i+1}^1 & \dots & A_{i+1}^{j-1} & A_{i+1}^j & A_{i+1}^{j+1} & \dots & A_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & \dots & A_n^{j-1} & A_n^j & A_n^{j+1} & \dots & A_n^n \end{vmatrix};$$

e multiplicando a linha $i$ por $(-1)^{i+j}$, virá finalmente

$$\alpha_i^j = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^{j-1} & A_1^j & A_1^{j+1} & \dots & A_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i-1}^1 & \dots & A_{i-1}^{j-1} & A_{i-1}^j & A_{i-1}^{j+1} & \dots & A_{i-1}^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i+1}^1 & \dots & A_{i+1}^{j-1} & A_{i+1}^j & A_{i+1}^{j+1} & \dots & A_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & \dots & A_n^{j-1} & A_n^j & A_n^{j+1} & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Formemos o producto $\alpha_i^j \times \Delta$ multiplicando successivamente cada linha de $\alpha_i^j$ por todas as linhas de $\Delta$. Teremos, como anteriormente,

$$\alpha_i^j \times \Delta = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_{i-1}^j & a_i^j & a_{i+1}^j & \dots & a_n^j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix},$$

e neste determinante todos os elementos principaes são eguaes a $\Delta$, menos o da columna $i$ que é $a_i^j$.

Permutemos no mesmo determinante a linha $i$ e a columna $i$ com cada uma das precedentes. Teremos effectuado assim um numero par $2(i-1)$ de trocas de filas parallelas e d'estas permutações, que por este motivo não produzem mudança de signal, resultará para aquelle producto a forma

$$\alpha_i^j \Delta = \begin{vmatrix} a_i^j & a_1^j & a_2^j & \dots & a_{i-1}^j & a_{i+1}^j & \dots & a_n^j \\ 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix} = a_i^j \Delta^{n-1}.$$

Nesta egualdade podemos supprimir o factor commum $\Delta$, como anteriormente fizemos e pelo mesmo motivo. Assim teremos finalmente

$$(16) \qquad \alpha_i^j = a_i^j \Delta^{n-2}.$$

**51.** Em dois determinantes da mesma ordem dizem-se *correspondentes* dois menores contidos respectivamente nas mesmas linhas e nas mesmas columnas.

Sejam M e M′ dois menores correspondentes de ordem $h$ do determinante $\Delta$ e do seu adjunto $\Delta'$; será

$$(17) \qquad c.a.\mathrm{M}' = \mathrm{M}\,\Delta^{n-h-1},$$

como vamos demonstrar.

Supponhamos em primeiro logar que

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^h \\ . & . & . \\ a_h^1 & \dots & a_h^h \end{vmatrix}, \quad \mathrm{M}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1^1 & \dots & \mathrm{A}_1^h \\ . & . & . \\ \mathrm{A}_h^1 & \dots & \mathrm{A}_h^h \end{vmatrix}$$

são os primeiros menores principaes de ordem $h$ de $\Delta$ e $\Delta'$.

Neste caso o complemento algebrico $\mu$ de M′ é simplesmente o menor complementar de M′, que é o determinante de ordem $n-h$

$$\mu = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{h+1}^{h+1} & \mathrm{A}_{h+1}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{h+1}^{n} \\ \mathrm{A}_{h+2}^{h+1} & \mathrm{A}_{h+2}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{h+2}^{n} \\ . & . & . & . \\ \mathrm{A}_{n}^{h+1} & \mathrm{A}_{n}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{n}^{n} \end{vmatrix}.$$

Eleve-se este determinante á ordem $n$, pondo (n.º 46, *Cor.*)

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A^1_{h+1} & A^2_{h+1} & \dots & A^h_{h+1} & A^{h+1}_{h+1} & A^{h+2}_{h+1} & \dots & A^n_{h+1} \\ A^1_{h+2} & A^2_{h+2} & \dots & A^h_{h+2} & A^{h+1}_{h+2} & A^{h+2}_{h+2} & \dots & A^n_{h+2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A^1_n & A^2_n & \dots & A^h_n & A^{h+1}_n & A^{h+2}_n & \dots & A^n_n \end{vmatrix},$$

como é permittido, por isso que os elementos communs ás primeiras $h$ columnas e ás últimas $n-h$ linhas podem ser quaesquer.

Effectuando o producto de $\mu$ por $\Delta$ pela multiplicação de linhas por linhas e attendendo a (9), virá

$$\mu\,\Delta = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_h & a^1_{h+1} & a^1_{h+2} & \dots & a^1_n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a^h_1 & a^h_2 & \dots & a^h_h & a^h_{h+1} & a^h_{h+2} & \dots & a^h_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix},$$

ou
$$\mu\,\Delta = M\,\Delta^{n-h}$$

por isso que o primeiro menor principal de ordem $h$ do último determinante é o menor M, depois de transpostas as linhas e columnas. Supprimindo nesta egualdade o factor commum $\Delta$, resulta a expressão (17).

Consideremos agora um menor qualquer M contido nas linhas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ e nas columnas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ de $\Delta$, assim como o menor M′ contido nas mesmas linhas e columnas de $\Delta'$.

Transportem-se as linhas representadas em M de modo que se mude a linha $\alpha_1$ para o primeiro logar de $\Delta$, a linha $\alpha_2$ para o segundo logar e, em geral, a linha

$$\alpha_i \quad (i=1, 2, \ldots, h)$$

para o logar $i$. Para esta linha a mudança depende de

$$\alpha_i - i$$

trocas de linhas adjacentes.

Opere-se de modo semelhante com as columnas $\beta_1, \ldots, \beta_h$. Designando por $\Delta_1$ o determinante assim obtido, o seu primeiro menor principal de ordem $h$ será $M_1 = M$. Por outra parte, o numero de trocas de filas parallelas adjacentes, que foi necessario effectuar para levar M á posição $M_1$, é

$$r=(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\ldots+(\alpha_h-h)+(\beta_1-1)+(\beta_2-2)+\ldots+(\beta_h-h)$$

ou, designando por $s$ a somma dos índices das linhas e das columnas representadas em M,

$$r=s-2\,(1+2+\ldots+h);$$

e por ser $(-1)^r=(-1)^s$ segue-se que será

$$\Delta_1=(-1)^s.\Delta. \tag{18}$$

O adjunto $\Delta_1'$ de $\Delta_1$ terá a mesma disposição de linhas e columnas que $\Delta_1$. Mas cada elemento $A_i^j$ de $\Delta$, torna-se para $\Delta_1'$ em

$$(-1)^s.A_i^j,$$

por isso que a troca de duas linhas ou de duas columnas adjacentes produz mudança de signal nos complementos algebricos de todos os elementos do determinante. Por conseguinte, representando por $M_1'$ o primeiro menor principal de ordem $h$ de $\Delta_1'$, será

$$m.c.M_1' = (-1)^{(n-h)s}.[m.c.M'],$$

visto que $m.c.M'$ é um determinante de ordem $n-h$.

Além d'isto o complemento algebrico do menor principal $M_1'$ é simplesmente o seu menor complementar, e por conseguinte

$$c.a.M_1' = (-1)^{(n-h)s}.[m.c.M'].$$

Ora, por difinição, é

$$c.a.M' = (-1)^s [m.c.M'];$$

d'esta expressão e da precedente resulta que

$$(19) \qquad c.a.M_1' = (-1)^{(n-h-1)s}.[c.a.M'].$$

Mas pelo caso que se tratou primeiro é

$$c.a.M_1' = M_1.\Delta_1^{n-h-1}$$

ou, attendendo a (18) e visto ser $M_1 = M$,

$$c.a.M_1' = (-1)^{(n-h-1)s}.M.\Delta^{n-h-1}$$

D'esta egualdade e da (19) se deduz a (17), que assim fica demonstrada no caso geral. De (17) se pode deduzir (16), pondo $h = 1$.

Sendo $\Delta = 0$, annullam-se $\Delta'$ e os complementos algebricos de todos os menores de $\Delta'$. Os que correspondem aos menores de 2.ª ordem são da forma

$$c.a. \begin{vmatrix} A_i^j & A_i^l \\ A_k^j & A_k^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i^j & a_i^l \\ a_k^j & a_k^l \end{vmatrix} \Delta^{n-3};$$

e se fosse $\Delta = 0$, seria

$$A_i^j \; A_k^l = A_k^j \; A_i^l$$

isto é,

$$A_i^j : A_i^l :: A_k^j : A_k^l, \quad A_i^j : A_k^j :: A_i^l : A_k^l.$$

Logo:

*Se for $\Delta = 0$, os complementos algebricos dos elementos homólogos de duas columnas ou de duas linhas de $\Delta$ são proporcionaes entre si.*

## VI. — Dependencia linear.

**52.** Duas collecções de constantes, como (1, 2, 3, 4) e (2, 4, 6, 8) por exemplo, dizem-se proporcionaes entre si quando os elementos de uma se podem obter multiplicando os elementos correspondentes da outra por um factor constante.

Ordinariamente entende-se que *cada uma* das duas collecções se pode obter operando d'este modo sobre a outra. Mas no caso das collecções (1, 2, 3, 4) e (0, 0, 0, 0), por exemplo, se é possivel passar da primeira para a segunda multiplicando os seus elementos por zero, não ha factor com que se possa passar da segunda para a primeira.

Para definir a proporcionalidade em termos que convenham a todos os casos, adopta-se a seguinte:

Definição I. — *Duas collecções de constantes*

$$x'_1, \; x'_2, \; \ldots, \; x'_p,$$
$$x''_1, \; x''_2, \; \ldots, \; x''_p$$

*dizem-se proporcionaes quando existem dois factores constantes* $k_1$, $k_2$, *que não são ambos nullos e verificam as egualdades.*

$$k_1 x_i' + k_2 x_i'' = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Para $k_1 \neq$ o teremos

$$x_i' = -\frac{k_2}{k_1} x_i'',$$

e para $k_2 \neq 0$ teriamos egualmente

$$x_i'' = -\frac{k_1}{k_2} x_i'.$$

Por conseguinte a definição I é conforme com a noção anterior de proporcionalidade; e além d'isso abrange evidentemente o caso das collecções.

$$\begin{matrix} x_1', & x_2', & \ldots, & x_h', \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, \end{matrix}$$

para as quaes bastaria fazer $k_1 = 0$ e dar a $k_2 \neq 0$ um valor qualquer.

O conceito de proporcionalidade generalisado para maior numero de collecções toma o nome de *dependencia linear,* e assim temos a seguinte:

Definição II. — *Diz-se que são* linearmente dependentes n *collecções de* p *constantes cada uma*

$$x_1^{(i)}, \; x_2^{(i)}, \; \ldots, \; x_p^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*quando existem* n *constantes* $k_1$, $k_2$ ..., $k_n$, *que não são conjunctamente nullas e verificam as egualdades*

$$k_1 x_j' + k_2 x_j'' + \ldots + k_n x_j^{(n)} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

6

*Quando não existe um systema de factores que satisfaçam a estas condições, as collecções dizem-se* linearmente independentes.

Do mesmo modo o conceito de proporcionalidade generalisa-se para os polynómios com a seguinte:

DEFINIÇÃO III. — *Os* n *polynómios* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *com qualquer numero de variaveis dizem-se* linearmente dependentes *quando existem* n *constantes* $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *que não são conjunctamente nullas e verificam a identidade*

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n \equiv 0.$$

*Quando não existem estes factores os polynómios são* linearmente independentes.

A theoria da *dependencia linear* assenta nos seguintes principios elementares:

THEOREMA I. — *Se* n *grupos de constantes,* ou n *polynómios, são linearmente dependentes, é sempre possivel exprimir linearmente um d'elles nos restantes, mas não necessariamente* um qualquer.

Com effeito, sendo differente de zero pelo menos um factor $k_i$, podemos dividir por $k_i$ a relação ou relações em que entrar este factor.

THEOREMA II. — *Se entre* n *collecções, ou entre* n *polynómios, houver um certo numero* $l < n$ *que sejam linearmente dependentes todas as collecções, ou todos os polynómios, o são egualmente.*

Para ver que assim é bastaria adoptar para factores da dependencia linear as $l$ constantes que correspondem ás $l$ collecções, ou aos $l$ polynómios, e que não são conjunctamente nullas, e mais $n-l$ zeros.

THEOREMA III. — *Se uma das* n *collecções se compõe unicamente de zeros, ou se um dos* n *polynómios é* identicamente nullo, *todas as collecções, ou todos os polynómios, são linearmente dependentes.*

É o que se pode reconhecer adoptando um factor $k \neq 0$ para a collecção de zeros, ou para o polynómio identicamente nullo, e $n-1$ zeros para as collecções restantes, ou para os outros polynómios.

**53.** Dadas $n$ collecções de $p$ constantes, consideremos separadamente os casos de ser $n \leq p$ e $n > p$.

1.° CASO, Designando por $\alpha$ a matriz das $np$ quantidades que formam as collecções dadas, ou

$$\alpha = \begin{Vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_p \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_p \\ . & . & . & . \\ x^{(n)}_1 & x^{(n)}_2 & \dots & x^{(n)}_p \end{Vmatrix},$$

vamos demonstrar o seguinte

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para serem linearmente dependentes* n *collecções de* p *constantes cada uma*

$$x^{(i)}_1, x^{(i)}_2, \dots, x^{(i)}_p, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

*quando* n≦ p, *é que se annullem todos os determinantes de ordem* n *contidos na matriz* $\alpha$.

A condição é evidentemente necessária por isso que, sendo as collecções linearmente dependentes, em cada um d'esses determinantes haverá uma linha que pode ser expressa por uma combinação linear das outras e portanto todos elles se annullam.

Para provar que a mesma condição é sufficiente, supponhamos que todos aquelles determinantes se annullam e designemos por c a caracteristica da matriz $\alpha$. Consideramos $c > 0$ porque, se fosse $c = 0$, todos os elementos de $\alpha$ se annullariam e é evidente que não teremos de considerar collecções compostas de zeros sómente. Na maior parte dos casos será $c=n-1$, mas pela hypothese só podemos dizer que é $c<n$.

Segundo a definição de *caracteristica*, em $\alpha$ haverá pelo menos um determinante de ordem $c$ que é differente de zero, e supporemos que esse determinante $\delta$ se encontra nas primeiras $c$ linhas e nas primeiras $c$ columnas de $\alpha$. Não se prejudica d'este modo a generalidade da demonstração, porque aquella disposição se pode sempre obter ordenando convenientemente as collecções e as quantidades que as compõem; é evidente que a ordem de umas e outras é indifferente para a questão de que se trata. O determinante $\delta$ será, pois,

$$\delta=\begin{vmatrix} x_1' & \ldots & x_c' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(c)} & \ldots & x_c^{(c)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Em $\alpha$ ha, pelo menos, mais uma linha do que em $\delta$. Seja $\delta'$ um determinante de $\alpha$ formado com as primeiras $c+1$ linhas e com as primeiras $c$ columnas e mais uma das seguintes. Pela definição de *caracteristica* será

$$\delta'=\begin{vmatrix} x_1' & \ldots & x_c' & x_j' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(c)} & \ldots & x_c^{(c)} & x_j^{(c)} \\ x_1^{(c+1)} & \ldots & x_c^{(c+1)} & x_j^{(c+1)} \end{vmatrix}=0.$$

Designemos por $k_1, k_2, \ldots k_{c+1}$, os complementos algebricos dos elementos da ultima columna de $\delta'$. Estes complementos conservam os mesmos valores e os mesmos signaes para qualquer outra columna $j$ de $\alpha$ que esteja representada em $\delta'$, porque são independentes dos elementos d'esta columna e a posição de cada um d'estes elementos é a mesma em todos os determinantes de ordem $c+1$ assim formados. Entre aquelles complementos, o último pelo menos é differente de zero por ser

$$k_{c+1} = \delta.$$

Além d'isto, pelas fórmulas (10), a somma

$$k_1 x'_j + k_2 x''_j + \ldots + k_{c+1} x_j^{(c+1)}, \quad (j = c+1, c+2, \ldots, p)$$

representa o desenvolvimento de qualquer dos determinantes $\delta'$, e é zero porque em todos os casos é $\delta' = 0$. Para os outros valores de $i = 1, 2, \ldots, c$ a mesma expressão é a somma dos productos da multiplicação dos elementos de uma columna pelos complementos algebricos dos elementos correspondentes de outra columna de $\delta'$, e esta somma é ainda egual a zero segundo aquellas fórmulas. Logo será

$$k_1 x'_j + k_2 x''_j + \ldots + k_{c+1} x_j^{(c+1)} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

por conseguinte as primeiras $c+1$ das collecções dadas são linearmente dependentes. D'aqui se segue que todas o são tambem, pelo *Theor.* II do n.° 52.

2.° CASO. O caso de ser $n > p$ reduz-se ao precedente juntando $n-p$ zeros a cada collecção de $p$ constantes. Temos assim $n$ collecções de $n$ constantes cada uma, e na matriz quadrada $\alpha$ ha só um determinante de ordem $n$; este determinante é egual a zero, por ter pelo menos uma columna de zeros. As $n$ collecções são pois linearmente dependentes pelo *Theor.* I, e d'aqui resulta evidentemente que tambem o serão as collecções dadas. Logo:

THEOREMA II. — *São linearmente dependentes* n *collecções de* p *constantes quando é* n > p.

**54.** Se forem dados $n$ polynómios $f_1, f_2, \ldots, f_n$ com um numero qualquer de variaveis independentes, a condição necessária e sufficiente da sua dependencia linear consiste em serem linearmente dependentes as $n$ collecções dos seus coefficientes.

Por conseguinte os theoremas demonstrados no n.° anterior são applicaveis áquelles polynómios.

## VII. — **Systemas lineares não homogeneos.**

**55.** Consideremos em primeiro logar o systema linear

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1 \equiv a_1^1\, x_1 + a_1^2\, x_2 + \ldots + a_1^j\, x_j + \ldots + a_1^n\, x_n - b_1 = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ F_i \equiv a_i^1\, x_1 + a_i^2\, x_2 + \ldots + a_i^j\, x_j + \ldots + a_i^n\, x_n - b_i = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ F_n \equiv a_n^1\, x_1 + a_n^2\, x_2 + \ldots + a_n^j\, x_j + \ldots + a_n^n\, x_n - b_n = 0, \end{array}\right.$$

em que o numero das equações é egual ao das incógnitas.

Se fôr differente de zero o *determinante do systema*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

isto é, o determinante dos coefficientes das incógnitas, não se annullarão conjunctamente os complementos algebricos $A_1^j, \ldots, A_n^j$ dos elementos da columna $j$ de $\Delta$. Multipliquem-se as equações (1) respectivamente por estes factores, e designe-se por $S_j$ a somma dos productos; será

$$(2)\qquad S_j \equiv A_1^j\, F_1 + A_2^j\, F_2 + \ldots + A_n^j\, F_n = 0,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Substituindo $F_1, \ldots, F_n$ pelos desenvolvimentos (1) e praticando as reducções, virá

$$S_j = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n - (A_1^j b_1 + A_2^j b_2 + \ldots + A_n^j b_n) = 0$$

e o coefficiente do termo geral $m_i x_i$ será

$$m_i = A_1^j a_1^i + A_2^j a_2^i + \ldots + A_n^j a_n^i.$$

Esta ultima expressão mostra, (10), que é

$$\text{para } i = j, \quad m_j = \Delta,$$
$$\text{para } i \neq j, \quad m_i = 0.$$

Por outra parte

$$A_1^j b_1 + A_2^j b_2 + \ldots + A_n^j b_n$$

é o desenvolvimento de um determinante $\Delta_j$, que se obteria substituindo em $\Delta$ os elementos da columna $j$ pelos termos conhecidos das equações (1), depois de transpostos para o segundo membro.

D'estas considerações se conclue que a equação (2) se reduz a

$$S_j = \Delta x_j - \Delta_j = 0;$$

e pondo successivamente $j = 1, 2, \ldots, n$, teremos as $n$ equações

(3) $$\Delta x_1 - \Delta_1 = 0, \ \Delta x_2 - \Delta_2 = 0, \ \ldots, \ \Delta x_n - \Delta_n = 0,$$

das quaes se tira

(4) $$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

por ser $\Delta \neq 0$.

56. Dois systemas de equações dizem-se *equivalentes* quando as soluções de cada um d'elles conveem ao outro.

Os systemas (1) e (3) são equivalentes. Com effeito uma solução do systema (1) torna

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0$$

e por conseguinte satifaz a (2) ou, o que é a mesma coisa, a (3).

Reciprocamente, representando por $R_i$ o resultado que se obtem quando na equação $F_i = 0$ se substituem as incógnitas pelos valores (3), teremos a egualdade

$$R_i = a_i^1 \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_i^2 \frac{\Delta_2}{\Delta} + \ldots + a_i^n \frac{\Delta_n}{\Delta} - b_i.$$

Multiplicando ambos os membros por $\Delta$, como é permittido por ser $\Delta \gtrless 0$, vem

$$\Delta R_i = a_i^1 \Delta_1 + a_i^2 \Delta_2 + \ldots + a_i^n \Delta_n - b_i \Delta.$$

Desenvolvendo agora cada determinante $\Delta_j$ pelos elementos da columna $j$, que são os termos conhecidos das equações (1) depois de transpostos, e praticando as reducções relativamente a estes elementos, teremos

$$\Delta R_i = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \ldots + m_n b_n - b_i \Delta.$$

Mas o cofficiente do termo geral $m_j b_j$ d'este desenvolvimento será

$$m_j = a_i^1 A_j^1 + a_i^2 A_j^2 + \ldots + a_i^n A_j^n$$

e esta expressão mostra, (9), que é

$$\text{para } j = i,\ m_i = \Delta,$$

$$\text{para } j \neq i,\ m_j = 0.$$

Por conseguinte o mesmo desenvolvimento reduz-se a

$$\Delta R_i = b_i \Delta - b_i \Delta = 0$$

ou, visto ser $\Delta \neq 0$,

$$R_i = 0$$

e cada uma das equações $F_i = 0$ é satisfeita pela solução (4).

Logo os systemas (1) e (3) são equivalentes e assim:

*Se fôr differente de zero o determinante de um systema de* n *equações do primeiro grau com* n *incógnitas, este systema admitte uma solução e uma só; o valor de cada incógnita será dado por uma fracção, cujo denominador é o determinante do systema e cujo numerador se obtem substituindo no denominador os coefficiente d'essa incógnita pelos termos conhecidos das equações respectivas depois de transpostos.*

A este enunciado dá-se o nome de *regra de Cramer.*

**57.** A equivalencia dos systemas (1) e (3) foi demonstrada para o caso de ser $\Delta \neq 0$. Um exemplo bastará para mostrar que os dois systemas podem deixar de ser equivalentes quando é $\Delta = 0$.

Consideremos as equações

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = 2,$$

$$x + y + z = 3.$$

O determinante d'este systema é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e os determinantes $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ são neste caso

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

As equações (3) tornam-se agora em

$$0.x = 0, \quad 0.y = 0, \quad 0.z = 0$$

e admittem uma infinidade de soluções, emquanto que o systema proposto não admitte, manifestamente, solução alguma.

O caso de ser $\Delta = 0$ está comprehendido no caso geral, que vamos considerar.

**58.** Supponhamos que é dado um systema

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1 \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^p x_p - b_1 = 0, \\ F_2 \equiv a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^p x_p - b_2 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_n \equiv a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^p x_p - b_n = 0 \end{cases}$$

de $n$ equações do primeiro grau com $p$ incógnitas, sendo $n$ e $p$ dois numeros quaesquer inteiros e positivos. Tres casos se podem dar, a saber:

1.° As equações não admittem solução: o systema diz-se *incompatível*.

2.º As equações teem uma solução unica: o systema diz-se *determinado*.

3.º As equações admittem infinitas soluções: o systema diz-se *indeterminado*.

No reconhecimento d'estes casos recorre-se ás matrizes:

$$\alpha = \begin{Vmatrix} a_1^1 \, a_1^2 \, \dots \, a_1^p \\ a_2^1 \, a_2^2 \, \dots \, a_2^p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \, a_n^2 \, \dots \, a_n^p \end{Vmatrix}, \quad \beta = \begin{Vmatrix} a_1^1 \, a_1^2 \, \dots \, a_1^p \, b_1 \\ a_2^1 \, a_2^2 \, \dots \, a_2^p \, b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \, a_n^2 \, \dots \, a_n^p \, b_n \end{Vmatrix}.$$

A matriz $\alpha$ é formada com os coefficientes das incognitas, e chama-se *matriz do systema*. A matriz $\beta$ é formada com os mesmos coefficientes e os termos conhecidos das equações (5), e chama-se *matriz completa*. Designando por $f_1, f_2, \dots, f_n$ os polynomios a que se reduzem os primeiros membros das equações (5) quando se omittem os termos conhecidos, teremos as $n$ identidades:

$$(6) \qquad F_i \equiv f_i - b_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

É evidente que a caracteristica de $\alpha$ não pode ser superior á caracteristica $c$ de $\beta$, porque todos os determinantes de $\alpha$ se encontram egualmente em $\beta$. Assim teremos a considerar os dois casos seguintes:

1.º Caracteristica de $\alpha$ menor que $c$;

2.º Caracteristica de $\alpha$ egual a $c$.

1.º Caso. Em $\beta$ hade haver, pelo menos, um determinante $\delta$ de ordem $c$ que seja differente de zero; e em $\delta$ haverá uma columna dos termos conhecidos $b_i$, aliás o mesmo determinante se encontraria em $\alpha$ e a caracteristica de $\alpha$ não seria menor que $c$, contra a hypothese.

Supponhamos que o determinante $\delta$ se encontra nas primeiras $c$ linhas e nas últimas $c$ columnas de $\beta$, isto é, no canto superior da direita d'esta matriz. Não se prejudica d'este modo a generalidade dos resultados, porque aquella disposição se pode sempre obter ordenando convenientemente as equações e as incógnitas que nellas figuram; é evidente que a ordem de umas e outras é indifferente para a questão de que se trata. Os polynómios $f_1, f_2, \ldots, f_c$ serão linearmente dependentes, pois que a caracteristica de $\alpha$ é menor que $c$; e haverá $c$ factores $k_1, k_2, \ldots, k_c$, que não são conjunctamente nullos e verificam a identidade

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_c f_c \equiv 0.$$

D'aqui resulta, por (6), a identidade:

$$k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots + k_c F_c \equiv -(k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_c b_c) = C.$$

Mas, por ser $c$ a caracteristica de $\beta$, os polynomios $F_1, F_2, \ldots, F_c$ são linearmente independentes: donde se conclue que será $C \neq 0$.

Por conseguinte as equações (5) são incompativeis. Se houvesse um systema de valores das incógnitas para o qual se annullassem todas as funcções $F_i$, substituindo esses valores na ultima identidade viria

$$0 = C \neq 0.$$

2.º Caso. Os determinantes da matriz $\beta$, em que entra uma columna de termos conhecidos $b_i$, tomam o nome de *caracteristicos*. Para que as duas matrizes tenham a mesma caracteristica é necessário e sufficiente que se annullem todos os determinantes caracteristicos.

Ora, se fôr c a caracteristica commum de $\alpha$ e de $\beta$, em ambas as matrizes haverá um determinante $\delta$ de ordem $c$ que é differente de zero. Supponhamos, e já se viu que é lícita a hypothese, que $\delta$ é o determinante que occupa o canto superior da esquerda das duas matrizes: á direita da ultima columna de $\delta$ haverá em $\beta$ outras columnas, pelo menos a dos termos conhecidos $b_i$.

Posto isto, junte-se a $\delta$ uma das columnas seguintes de $\beta$ e uma linha qualquer $c+h$; teremos assim um determinante, que é egual a zero por ser de ordem $c+1$. Por conseguinte os polynómios $F_1, \ldots, F_c, F_{c+h}$ são linearmente dependentes, e entre elles existe uma relação da forma

$$k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots + k_c F_c + k_{c+h} F_{c+h} \equiv 0.$$

Mas os polynómios $F_1, F_2, \ldots, F_c$ são linearmente independentes, porque nas primeiras $c$ linhas de $\beta$ ha pelo menos um determinante differente de zero; por conseguinte será

$$k_1 F_1 + \ldots + k_c F_c \not\equiv 0,$$

e por aqui se vê que hade ser $k_{c+h} \not\equiv 0$, para se poder verificar a última identidade. Podemos portanto dividi-la por esta constante, e assim teremos

$$F_{c+h} \equiv k_1^{(h)} F_1 + k_2^{(h)} F_2 + \ldots + k_c^{(h)} F_c\,, \quad (h=1, 2, \ldots, n-c).$$

Estas identidades mostram que uma solução das $c$ primeiras equações (5) satisfaz neste caso ás restantes $n-c$; consideremos sómente aquellas $c$ equações. Transpondo para o segundo membro os termos conhecidos, bem como os termos que envolvem as incógnitas $x_{c+1}, \ldots, x_p$, demos a estas incógnitas valores arbitrários $x'_{c+1}, \dots, x'_p$. Os segundos membros das equações

$$(7) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_1^c x_c = b_1 - a_1^{c+1} x'_{c+1} - \dots - a_1^p x'_p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_c^1 x_1 + \dots + a_c^c x_c = b_c - a_c^{c+1} x'_{c+1} - \dots - a_c^p x'_p \end{cases}$$

podem considerar-se conhecidos, e o determinante d'este systema de $c$ equações a $c$ incognitas é, por hypothese, differente de zero.

Por conseguinte a regra de Cramer é applicavel ás equações (7). Assim se achariam para $x_1, \dots, x_c$ os valores $x'_1, \dots, x'_c$, os quaes, juntos aos que attribuimos ás outras incógnitas, dão uma solução das $c$ primeiras equações (5) e portanto de todo o systema.

Convém notar que não pode ser $c > p$. Para $c = p$ haverá uma solução ùnica. Para $c < p$ haverá infinitas soluções, visto serem arbitrários os valores attribuidos a $x_{c+1}, \dots, x_p$.

Da discussão precedente resulta:

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para ser compativel um systema de equações lineares não homogeneas é que a matriz do systema e a matriz completa tenham a mesma caracteristica,* ou *que os determinantes caracteristicos sejam todos eguaes a zero.*

THEOREMA II. — *Dado um systema de equações lineares não homogeneas com* p *incógnitas e tendo a matriz do systema e a matriz completa a mesma caracteristica* c, *podemos dar valores arbitrários a* p — c *incógnitas e as outras ficarão determinadas de um modo único. As* p — c *incógnitas podem ser escolhidas como se quizer, comtanto que seja* c *a caracteristica da matriz dos coefficientes das outras incógnitas.*

**59.** Entre o numero $p$ das incógnitas e o numero $n$ das equações podem dar-se as tres relações seguintes:

1.º $p > n$. Se as duas matrizes teem a mesma caracteristica $c$, hade ser $c = n$ ou $c < n$; em qualquer dos casos podem dar-se valores arbitrários a $p - c$ incógnitas, e o systema é indeterminado.

2.º $p = n$. Se fôr $c = n$, o determinante do systema é differente de zero, a regra de Cramer é applicavel e o systema é determinado. Se fôr $c < n$, o determinante do systema é egual a zero e as equações admittem infinitas soluções quando as duas matrizes teem a mesma caracteristica.

3.º $p < n$. Se as duas matrizes teem a mesma caracteristica $c$, pode ser $c < p$ ou $c = p$. No primeiro caso o systema é indeterminado. No segundo caso, suppondo que a caracteristica da matriz das $c$ primeiras equações é $c$, os valores que estas equações derem para as incógnitas satisfazem ás outras equações e todas ellas teem uma solução única: o systema é determinado.

Em todos os casos o systema é incompativel se as duas matrizes não teem a mesma caracteristica, e esta condição é a primeira que se deve examinar. No exemplo do n.º 57 a caracteristica da matriz do systema é 1 e a da matriz completa é 2, pois que é, por exemplo, o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

O caso $\Delta = 0$ (n.º 57) fica assim esclarecido: o systema é indeterminado quando as duas matrizes teem a mesma caracteristica, e incompativel quando esta condição se não verifica.

Sendo $p < n$, pode acontecer que seja $n = p + 1$ e $c = p$. A caracteristica da matriz completa só poderá ser maior que $p$, se fôr differente de zero o determinante R dos coefficientes das incógnitas e dos termos conhecidos. Por conseguinte, neste caso

$$R=0$$

será a condição de compatibilidade do systema.

## VIII. — Systemas lineares homogeneos.

**60.** Dizem-se *homogeneas* as equações

$$(8)\qquad \begin{cases} f_1 \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^p x_p = 0, \\ f_2 \equiv a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^p x_p = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ f_n \equiv a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^p x_p = 0, \end{cases}$$

em que faltam os termos conhecidos. A matriz d'este systema e a matriz completa só differem por uma columna de zeros, e portanto teem a mesma caracteristica que se chama *caracteristica do systema.*

N'este caso os enunciados dos theoremas I e II do n.º 58 teem de ser modificados nos termos seguintes:

THEOREMA I. — *Um systema de equações lineares homogeneas é sempre compativel.*

THEOREMA II. — *Sendo* c *a caracteristica de um systema linear homogeneo com* p *incógnitas, podem-se dar quaesquer valores a* p — c *incógnitas e as outras* c *ficarão determinadas de um modo único.*

Estas $c$ incógnitas hão de ser escolhidas de modo que seja $c$ a caracteristica da matriz dos seus coefficientes. Se fôr $c=p$, o systema só admitte a solução $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$. Visto não poder ser $c > p$, temos que:

THEOREMA III. — *A condição necessária e sufficiente para que um systema de equações lineares homogeneas com* p *incógnitas tenha outra solução além de* $x_1 = \ldots = x_p = 0$ *é que a sua caracteristica seja menor que* p.

COROLLARIO I. — *Se o numero das equações for menor que o das incógnitas, haverá sempre solução differente de zero.*

COROLLARIO II. — *Se o numero das equações for egual ao das incógnitas, a condição necessária e sufficiente para haver soluções differentes de zero é que o determinante dos coefficientes das incógnitas seja egual a zero.*

**61**. No caso em que o numero das incógnitas excede em uma unidade o numero das equações a matriz do systema (8) é

$$\alpha = \left\| \begin{array}{ccc} a_1^1 & \ldots & a_1^p \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \ldots & a_{p-1}^p \end{array} \right\|,$$

em que o numero das columas excede em uma unidade o numero das linhas. Designemos por $\delta_i$ o determinante de ordem $p-1$, cuja matriz resulta de $\alpha$ pela suppressão da columna $i$. Se as equações consideradas são linearmente independentes, um dos determinantes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ será differente de zero, por ser a caracteristica $c = p-1$.

Seja $\delta_i \neq 0$. Transpondo para o segundo membro em todas as equações o termo em $x^i$ e dando a esta incógnita um valor arbitrário $x_i'$, teremos o systema:

$$a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^{i-1} x_{i-1} + a_1^{i+1} x_{i+1} + \cdots + a_1^p x_p = -a_1^i x_i',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{p-1}^1 x_1 + \cdots + a_{p-1}^{i-1} x_{i-1} + a_{p-1}^{i+1} x_{i+1} + \cdots + a_{p-1}^p x_p = -a_{p-1}^i x_i'.$$

O determinante d'este systema é differente de zero, e o numero das equações é egual ao das incógnitas. Resolvendo-as pela regra de Cramer, achava-se para cada uma das incógnitas $x_k$ o valor expresso pela fracção

$$x_k = \frac{A}{\delta_i},$$

cujo numerador se forma substituindo em $\delta_i$ os coefficientes de $x_k$, isto é, os elementos da columna $k$ de $a$, pelos termos conhecidos das equações respectivas. Será, pois,

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{k-1} & -a_1^i x_i' & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots & a_1^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \dots & a_{p-1}^{k-1} & -a_{p-1}^i x_i' & a_{p-1}^{k+1} & \dots & a_{p-1}^{i-1} & a_{p-1}^{i+1} & \dots & a_{p-1}^p \end{vmatrix}.$$

Levando neste determinante a columna $k$ para o logar da columna que falta em $\delta_i$, por meio de $i-k-1$ trocas de columnas, e pondo em evidencia o factor $-x_i'$, commum a todos os elementos da columna $k$, virá

$$A = (-1)^{i-k} x_i' \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{i-1} & a_1^i & a_1^{i+1} & \dots & a_1^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \dots & a_{p-1}^{k-1} & a_{p-1}^{k+1} & \dots & a_{p-1}^{i-1} & a_{p-1}^i & a_{p-1}^{i+1} & \dots & a_{p-1}^p \end{vmatrix}.$$

Este determinante é aquelle mesmo que designámos por $\delta_k$; por conseguinte teremos

$$x_k = \frac{(-1)^{i-k} \cdot x_i' \delta_k}{\delta_i},$$

d'onde se conclue evidentemente que $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ são proporcionaes aos determinantes $[\delta_1, -\delta_2, \ldots, (-1)^{p-1}\delta_p]$.

Se as equações fossem linearmente dependentes, todos estes determinantes seriam eguaes a zero e o caso não offerecia interesse.

## IX. — Numeros incommensuraveis, negativos e complexos.

### § 1.° — Numeros incommensuraveis.

**62.** A arithmetica define as operações ou combinações que se podem praticar com os numeros racionaes positivos, e estuda as propriedades d'estas operações. A classe dos numeros *racionaes* é formada pelos numeros inteiros e pelas fracções cujos termos são numeros inteiros; estes numeros podem ser positivos ou negativos.

A Algebra representa os numeros por letras afim de generalisar os resultados, e define as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas do seguinte modo:

1.° Addição dos numeros representados pelas letras $a$ e $b$ é a combinação *univoca* d'estes numeros, representada pela notação $a+b$, cujas leis fundamentaes são:

$\alpha$) $a+b=b+a$, *(lei commutativa)*;
$\beta$) $(a+b)+c=(a+c)+b$, *(lei associativa)*;
$\gamma$) $a+0=a$, *(o modulo da somma é zero)*.

2.° Subtracção é a operação inversa da addição.

3.° Multiplicação dos numeros $a$ e $b$ é a combinação univoca d'estes numeros representada pela notação $a \times b$, ou simplesmente $ab$, e regida pelas seguintes leis fundamentaes:

α) $ab = ba$, *(lei commutativa)*;
β) $(ab)c = (ac)b$, *(lei associativa)*;
γ) $(a + b)c = ac + bc$, *(lei distributiva)*;
δ) $a + 0 = 0$, $a \times 1 = a$, *(o modulo da multiplicação é a unidade)*.

4.° Divisão é a operação inversa da multiplicação.

5.° Potenciação é a multiplicação de factores eguaes.

6.° Radiciação é a operação inversa da potenciação.

O cálculo arithmetico funda-se principalmente nestas leis fundamentaes, na propriedade que teem as operações de darem resultados eguaes quando $a$ e $b$ são substituidos por quantidades eguaes e nas leis fundamentaes das egualdades, a saber: $a = a$; $a = b$, $\therefore b = a$; $a = b$, $b = c$, $\therefore a = c$.

As operações de subtracção e radiciação não são sempre possiveis, emquanto se empregam sómente os numeros racionaes positivos. Para não separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novas classes de numeros e generalisam-se as definições das operações: tendo em vista que se observem as propriedades fundamentaes acima indicadas, e que as novas definições conduzam aos mesmos resultados que as anteriores quando se applicam a numeros racionaes e positivos. É o mesmo que se fez na Arithmetica, quando se generalisou a definição de multiplicação para a tornar applicavel aos numeros fraccionarios. Os numeros *irracionaes* appareceram ainda na Arithmetica, onde foram introduzidos pela operação de radiciação; na Algebra appareceram primeiro os numeros *negativos*, e depois os *imaginários* que occorrem na radiciação dos numeros negativos.

**63.** Antes de definir as operações com os numeros incommensuraveis, vejamos como elles podem ser representados.

Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

e outro grupo de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots;$$

supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores que os do segundo grupo, e que a differença

$$v_n - u_n$$

se pode tornar tão pequena quanto se queira para valores de $n$ sufficientemente grandes.

Se existir um numero racional A maior que todos os numeros do primeiro grupo e menor que os do segundo, esse numero será completamente determinado pelos dois grupos. Com effeito, se houvesse outro numero B naquellas condições, os dois numeros estariam comprehendidos entre $u_n$ e $v_n$, por maior que fosse $n$, e portanto seria

$$|B - A| < v_n - u_n;$$

mas esta desegualdade é incompativel com a condição de se poder tornar a differença $v_n - u_n$ menor que qualquer quantidade assignavel, pois que A e B são dois numeros invariaveis.

Se não existir numero algum racional que satisfaça áquellas condições, diremos, por definição, que os dois grupos estão separados por um numero *irracional*. Como neste caso qualquer numero racional differente dos que formam os dois grupos ha-de ser maior do que um valor de $u_n$ ou menor do que um valor de $v_n$, vê-se que cada numero irracional divide todos os numeros racionaes em dois grupos taes, que os numeros do primeiro grupo são todos menores que os do segundo grupo. Os numeros do primeiro grupo dizem-se *menores* e os do segundo grupo *maiores* do que o numero irracional considerado.

Os dois grupos são denominados *classes contiguas ou de Dedekind*. Dois numeros irracionaes A e B dizem-se *eguaes*, quando todos os numeros racionaes menores que A são tambem menores que B e todos os numeros racionaes maiores que A são tambem maiores que B.

Diz-se que é $A > B$ quando existe algum numero racional menor que A e maior que B.

**64.** Addição. — Sejam A e B dois numeros, racionaes ou irracionaes, determinados pelas classes

$$A \quad \begin{cases} u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \\ v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots, \end{cases}$$

$$B \quad \begin{cases} u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots \\ v'_1, v'_2, \ldots, v'_n, \ldots. \end{cases}$$

Forme-se o grupo de numeros crescentes

$$u_1 + u'_1, \; u_2 + u'_2, \; \ldots. \; u_n + u'_n, \; \ldots$$

e o dos numeros decrescentes

$$v_1 + v'_1, \; v_2 + v'_2, \; \ldots, \; v_n + v'_n, \; \ldots$$

Os numeros do primeiro d'estes grupos são menores que os do segundo, e a differença $(v_n + v'_n) - (u_n + u'_n) = (v_n - u_n) + (v'_n - u'_n)$ pode tornar-se indefinidamente pequena para valores sufficientemente grandes de $n$. Por conseguinte os dois últimos grupos determinam um numero racional ou irracional que os separa, e este numero será a *somma* dos dois A e B.

Esta definição satisfaz aos requisitos exigidos no n.º 62, como vamos ver. Em primeiro logar, se os numeros A e B forem racionaes, aquelles grupos definem o numero racional $A+B$, que os separa.

Depois, por ser

$$u_n + v_n = v_n + u_n, \quad u'_n + v'_n = v'_n + u'_n,$$

os grupos de numeros que definem $A+B$ são os mesmos que definem $B+A$, donde resulta $A+B=B+A$.

Finalmente tambem seria evidentemente $A+0=A$ e, se forem

$$u''_1, \; u''_2, \; \ldots, \; u''_n, \; \ldots$$
$$v''_1, \; v''_2, \; \ldots, \; v''_n, \; \ldots$$

as classes que definem um terceiro numero C, de

$$(u_n + u'_n) + u''_n = (u_n + u''_n) + u'_n,$$
$$(v_n + v'_n) + v''_n = (v_n + v''_n) + v'_n$$

se conclue que será $(A+B)+C=(A+C)+B$.

**65.** Subtracção. — Consideremos os mesmos numeros A e B e supponhamos que é $A>B$. Facilmente se provaria como no caso anterior que as classes

$$\begin{matrix} u_n - v'_n, \\ v_n - u'_n, \end{matrix} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

determinam um numero racional ou irracional. Digo que este numero é a *differença* A — B, isto é, segundo a definição de subtração, a somma do mesmo numero com B é egual a A. Com effeito esta somma é representada pelas duas classes

$$\begin{aligned} &u_n - v'_n + u'_n\,, \\ &v_n - u'_n + v'_n\,, \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

e, sendo $\alpha$ um numero racional qualquer menor do que o numero representado por estas classes, para valores de $n$ sufficientemente grandes teremos

$$\alpha \overline{\overline{<}} u_n - v'_n + u'_n < u_n < \mathrm{A}.$$

Do mesmo modo para qualquer numero racional $\beta$ maior do que o numero representado pelas mesmas classes, teremos

$$\beta \overline{\overline{>}} v_n - u'_n + v'_n > v_n > \mathrm{A}.$$

Logo pela definição de *egualdade*, as duas classes anteriores ás ultimas duas representam um numero tal, que a somma d'este numero com B é egual a A, ou $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + \mathrm{B} = \mathrm{A}$.

**66.** Multiplicação. — Chama-se *producto* da *multiplicação* de A por B ao numero definido pelas duas classes contíguas

$$(u_n \times u'_n)\,, \quad (v_n \times v'_n)\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Para justificar esta definição temos de mostrar em primeiro logar que estas duas classes representam um numero racional ou irracional. Com effeito os productos $u_n \times u'_n$ crescem e os productos $v_n \times v'_n$ decrescem quando $n$ cresce indefinidamente. Por outra parte é $v_n v'_n > u_m u'_m$, quaesquer que sejam os numeros $n$ e $m$, e da desegualdade

$$v_n v'_n - u_n u'_n = v_n (v'_n - u'_n) + u'_n (v_n - u_n) < v_1 (v'_n - u_n) + v'_1 (v_n - u_n)$$

resulta que a differença $v_n v'_n - u_n u'_n$ se pode tornar indefinidamente pequena para valores de $n$ sufficientemente grandes.

Seria facil mostrar que o producto, definido d'este modo, satisfaz ás leis fundamentaes da multiplicação.

**67.** Divisão. — Dados os mesmos numeros A e B, é facil ver que os numeros $\frac{u_n}{v'_n}$ crescem com $n$, os numeros $\frac{v_n}{u'_n}$ decrescem nas mesmas circumstancias conservando-se sempre superiores aos primeiros, e finalmente da desegualdade

$$\frac{v_n}{u'_n} - \frac{u_n}{v'_n} = \frac{v_n v'_n - u_n u'_n}{u'_n v'_n} < \frac{v_n v'_n - u_n u'_n}{(u'_1)^2}$$

e da desegualdade anterior resulta que a differença

$$\frac{v_n}{u'_n} - \frac{u_n}{v'_n}$$

se pode tornar indefinidamente pequena para valores sufficientemente grandes de $n$. Logo as duas classes contiguas

$$\begin{matrix} \dfrac{u_n}{v'_n} \\ \dfrac{v_n}{u'_n} \end{matrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definem um numero racional ou irracional que se chama *quociente* dos numeros A e B.

Com effeito, para justificar esta definição bastará mostrar, segundo a definição da divisão, que o producto d'aquelle numero por B é um numero egual a A. Ora este producto é definido pelas duas classes

$$\left(\frac{u_n}{v'_n} \times u'_n\right), \left(\frac{v_n}{u'_n} \times v'^n\right), \qquad (n=1, 2, 3, \ldots);$$

sendo $\alpha$ um numero racional qualquer menor que o numero representado por estas duas classes, para valores sufficientemente grandes de $n$ teremos

$$\alpha \overline{\overline{<}} \frac{u_n}{v'_n} \times u'_n < u_n < A$$

e, sendo $\beta$ um numero racional qualquer maior que aquelle mesmo numero, teremos para valores sufficientemente grandes de $n$

$$\beta \geqq \frac{v_n}{u'_n} \times v'_n > v_n > A.$$

Logo, pela definição de egualdade, será $\frac{A}{B} \times B = A$.

Da potenciação e radiciação não será necessario tratar especificadamente. A primeira é um caso particular da multiplicação e a segunda é a inversa d'aquella.

As leis fundamentaes das egualdades podem considerar-se axiomaticas, bem como o principio da conservação dos resultados das operações executadas sobre os numeros $a$ e $b$ quando os substituimos por outros eguaes respectivamente a $a$ e a $b$.

**68.** Esta doutrina abrange os numeros irracionaes que se encontraram na Arithmetica por occasião da radiciação dos numeros inteiros.

Assim $\sqrt{A}$, por exemplo, quando não é expressa por um numero racional, representa um numero irracional que separa o grupo de numeros racionaes obtidos quando, na extracção da raiz quadrada pelos processos ensinados na Arithmetica, se leva a approximação successivamente até decimas, centesimas, etc., formando os numeros

$$\frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \ldots, \frac{m_n}{10^n}, \ldots,$$

do grupo de numeros

$$\frac{m_1+1}{10}, \frac{m_2+1}{10^2}, \ldots, \frac{m_n+1}{10^n}, \ldots .$$

Os quadrados dos numeros do primeiro grupo e dos numeros racionaes inferiores a estes são menores que A, e os quadrados dos numeros do segundo grupo e dos numeros racionaes superiores a estes são maiores que A. Por isso $\sqrt{A}$ separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores que A d'aquelles cujos quadrados são maiores que A.

Os grupos de numeros

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$$

$$\frac{4}{10}, \frac{34}{100}, \frac{334}{1000}, \ldots$$

dão-nos um exemplo de duas classes contiguas separadas por um numero racional, que é neste caso o quebrado $\frac{1}{3}$.

### § 2.° — Numeros negativos.

**69.** A differença $a-b$ é definida na Arithmetica quando é $a>b$. Se fôr $b>a$, aquella subtracção é impraticavel com os numeros considerados no sentido arithmetico; por este motivo se considera aquella differença neste caso como definição de uma nova classe de numeros, a que se dá o nome de *numeros negativos*.

Quando é $a>b$ e $c>d$, os numeros $a-b$ e $c-d$ são eguaes se é

$$a+d=b+c.$$

No caso de ser $a<b$ e $c>d$, os mesmos numeros dizem-se eguaes, por definição, quando esta condição tem lugar.

Diz-se que é $a-b>c-d$ quando se verifica a condição

$$a+d>b+c$$

D'aqui resulta, pondo $a=c=0$, que será $-b>-d$ quando fôr $d>b$; isto é, um numero negativo é tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto.

As operações effectuadas com os numeros d'esta nova classe definem-se do modo seguinte:

1.° Chama-se *addição* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)+(c-d)=a+c-(b+d).$$

2.° Chama-se *multiplicação* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)(c-d)=ac+bd-(bc+ad).$$

No caso de ser $a=c=0$ é $-b\times(-d)=bd$.

*Subtracção* e *divisão* são as operações inversas da addição e da multiplicação. *Potenciação* é a multiplicação de factores eguaes.

§ 3.º — **Numeros complexos.**

**70.** A extracção de raizes de grau par dos numeros negativos é impraticavel com os numeros estudados até agora, e d'aqui vem a necessidade de introduzir no cálculo uma nova classe de numeros para representar aquellas raizes; estes numeros, que se chamam *imaginários* ou *complexos*, são da forma geral $a+bi$, sendo por definição

$$i^2=-1.$$

D'esta expressão resulta que as potencias inteiras de $i$ se reproduzem indefinidamente em periodos de quatro termos differentes, a saber:

$$i^{4n}=+1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$$

Dois imaginarios *puros* $ai$ e $bi$ dizem-se eguaes quando é $a=b$, e reciprocamente. A somma d'estes numeros é definida pela egualdade

$$ai+bi=(a+b)i.$$

Em $a+bi$ o signal $+$ não representa propriamente uma *somma*, porque não é possivel sommar um numero real $a$ com o imaginário $bi$; alguns auctores substituem aquelle signal por um symbolo, que exprime unicamente que o numero é composto de duas partes de especie differente. Por este motivo se dá ao numero $a+bi$ o nome de *complexo*.

Por definição dizem-se eguaes dois numeros complexos $a+bi$ e $c+di$ quando é

$$a=c, \quad b=d;$$

e reciprocamente. As egualdades entre numeros complexos reduzem-se a egualdades entre numeros reaes, e as combinações que se podem fazer com umas tambem se poderão fazer com as outras.

Corollario I. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=\mathrm{c}$, *será* $\mathrm{a}=\mathrm{c}$ *e* $\mathrm{b}=0$. *Aos numeros reaes pode-se dar a forma de complexos.*

Corollario II. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=\mathrm{di}$, *será* $\mathrm{a}=0$ *e* $\mathrm{b}=\mathrm{d}$. *Aos imaginários puros pode-se dar a forma de complexos e* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$ *é a forma mais geral de todos os numeros.*

Corollario III. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=0$, *será* $\mathrm{a}=\mathrm{b}=0$; *e inversamente.*

**71.** Chama-se *módulo* do complexo $a+bi$ o valor arithmetico de $\sqrt{a^2+b^2}$; portanto o módulo é sempre um numero positivo, e pode, como para os recursos reaes, ser representado pelo symbolo

$$|a+bi|=+\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dois complexos eguaes teem evidentemente o mesmo módulo. A inversa não é verdadeira; os numeros $3+4i$ e $4+3i$, por exemplo, teem o mesmo módulo e não são eguaes.

Dois complexos da forma $a+bi$ e $a-bi$ dizem-se conjugados e teem módulos eguaes.

Fazendo, como é permittido,

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\cos^2 \alpha,$$

teriamos tambem

$$1 - \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} = \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Pondo

$$\rho^2 = a^2 + b^2,$$

das relações precedentes tira-se

$$(1) \qquad a = \rho \cos \alpha, \quad b = \rho \operatorname{sen} \alpha,$$

e portanto

$$a + bi = \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha),$$

que é a *forma trigonometrica* do numero complexo. O angulo $\alpha$ chama-se *argumento* e $\rho$ é, como dissemos, o módulo.

As equações (1) dão para $\alpha$ um só valor menor que $2\pi$. Designando este valor por $\alpha_1$, o argumento pode ter uma infinídade de valores da forma $2k\pi + \alpha_1$, sendo $k$ um numero inteiro, positivo ou negativo. D'aqui resulta, pelas condições de egualdade de dois complexos, que complexos eguaes teem o mesmo módulo, como já se disse; e sendo

$$\rho (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2),$$

os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ hão de satisfazer ás condições

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2, \quad \operatorname{sen} \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha_2.$$

A recíproca é egualmente verdadeira, e por conseguinte:

*As condições necessarias e sufficientes para dois numeros complexos serem eguaes é que tenham módulos eguaes e que a differença dos argumentos seja um multiplo inteiro de $2\pi$.*

Os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ de dois complexos conjugados hão de satisfazer ás condições

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \operatorname{sen}\alpha_1 = -\operatorname{sen}\alpha_2,$$

d'onde resulta $\alpha_2 = 2k\pi - \alpha_1$; por conseguinte:

*Dois complexos conjugados teem o mesmo módulo e a somma dos seus argumentos é um multiplo inteiro de $2\pi$.*

**72.** As operações fundamentaes com numeros complexos definem-se nos termos seguintes:

1.° Addição. — A addição de complexos é definida pela egualdade

$$(2) \qquad (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

O resultado da operação depende unicamente das sommas $a_1 + a_2$ e $b_1 + b_2$ de numeros reaes. Por conseguinte as leis que regem a addição d'estes numeros são applicaveis aos numeros complexos, quando a addição é definida pela egualdade (2).

Se representarmos por $\rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ a somma dos complexos $\rho_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)$ e $\rho_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2)$, por aquella definição teremos

$$\rho\cos\alpha = \rho_1\cos\alpha_1 + \rho_2\cos\alpha_2,$$
$$\rho\operatorname{sen}\alpha = \rho_1\operatorname{sen}\alpha_1 + \rho_2\operatorname{sen}\alpha_2.$$

Elevando estas expressões ao quadrado e sommando os resultados, acha-se

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

D'aqui resulta, suppondo $\rho_1 > \rho_2$, que será

$$\rho = \rho_1 \pm \rho_2$$

quando fôr $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 1$; em todos os outros casos é $\rho < \rho_1 + \rho_2$ e $\rho > \rho_1 - \rho_2$. Logo:

*O módulo da somma não pode ser maior que a somma dos módulos das parallelas.*

Subtracção é a operação inversa da addição, e portanto é

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Com effeito, sommando o segundo membro d'esta egualdade com $a_2 + ib_2$, a somma será $a_1 + ib_1$.

2.º Multiplicação. — A multiplicação de complexos é definida pela egualdade

$$(3)\quad (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Facilmente se veria que neste producto se verificam as leis commutativa, associativa e distributiva da multiplicação, visto que elle depende unicamente do producto de numeros reaes; e bem assim que a unidade é o módulo d'esta operação.

Por outra parte, se um dos factores se annullar, $a_1 + ib_1$ por exemplo, será $a_1 = b_1 = 0$ e o producto tambem é zero. Inversamente, se o producto fôr zero, teremos

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 = 0$$

ou, n.º 48, (13),

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0.$$

D'aqui resulta que hade ser $a_1^2 + b_1^2 = 0$ ou $a_2^2 + b_2^2 = 0$, isto é, um dos factores do producto será nullo.

Se fôr $\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ o producto dos dois numeros complexos

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1), \quad \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2),$$

pela definição (3) e pelas condições de egualdade de complexos teremos

$$\rho \cos \alpha = \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) = \rho_1 \rho_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$\rho \operatorname{sen} \alpha = \rho_1 \rho_2 (\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1) = \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2).$$

D'aqui resulta que será

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2;$$

para maior numero de factores, cujos módulos fossem $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ e os argumentos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ teriamos do mesmo modo que o módulo $\rho$ e o argumento $\alpha$ po producto seriam

$$(4) \qquad \rho = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_i, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i .$$

Logo:

*O módulo e o argumento do producto são respectivamente o producto dos módulos e a somma dos argumentos dos factores.*

No caso de dois imaginários conjugados, que tenham o módulo commum $\rho_1$ e os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$, será (n.° 71) $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ e portanto

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \times \rho_1 (\cos \alpha_1 - i \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho_1^2.$$

*O producto de dois imaginários conjugados é egual ao quadrado do módulo commum.*

**73.** A potencia do expoente inteiro e positivo $n$ é o caso particular do producto quando são eguaes os factores. Logo (4)

$$[\rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha).$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Moivre.*

Por definição de expoente negativo é

$$[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{-n}=\frac{1}{[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{n}}.$$

Sendo $n$ inteiro, a fórmula de Moivre é applicavel ao segundo membro d'esta egualdade, que se torna em

$$\frac{1}{\rho^{n}(\cos n\alpha+i\operatorname{sen}n\alpha)}=\rho^{-n}.\frac{1}{\cos n\alpha+i\operatorname{sen}n\alpha};$$

multiplicando ambos os termos d'esta fracção por $\cos n\alpha-i\operatorname{sen}n\alpha$ e attendendo ao último theorema do n.º 72, acha-se finalmente

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{-n}&=\rho^{-n}(\cos n\alpha-i\operatorname{sen}n\alpha)\\&=\rho^{-n}[\cos(-n\alpha)+i\operatorname{sen}(-n\alpha)].\end{aligned}$$

D'este modo se vê que a fórmula de Moivre ainda é applicavel ao caso do expoente inteiro e negativo.

Por definição, a raiz do grau $n$ de um numero $\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ é o numero $r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ definido pela egualdade

$$[r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)]^{n}=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$$

ou, visto $n$ ser inteiro,

$$r^{n}(\cos n\varphi+i\operatorname{sen}n\varphi)=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha).$$

D'aqui resultam, pelas condições de egualdade de dois numeros complexos, as relações

$$r^{n}=\rho,\quad n\varphi=2k\pi+\alpha,$$

isto é

$$r=\sqrt[n]{\rho},\quad \varphi=\frac{2k\pi+\alpha}{n},$$

onde $k$ é um inteiro qualquer e $\sqrt[n]{\rho}$ exprime o numero determinado arithmeticamente pela extracção da raiz de grau $n$ do numero $\rho$.

A forma do argumento $\varphi$ mostra que a raiz de grau $n$

de um numero dado não tem um valor único. Usando do expoente fraccionario para indicar todos os valores possiveis da raiz, das expressões precedentes deduz-se

$$(5)\qquad [\rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi+\alpha}{n}\right)$$

ou, pela definição de multiplicação de complexos,

$$(6)\qquad [\rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Pondo $\rho = 1$ e $\alpha = 0$ em (5), teremos

$$(7)\qquad 1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

e esta expressão dará todas as raizes de grau $n$ da unidade. O numero d'ellas é $n$ e são todas *desegnaes*. Com effeito, quando se substituem por $k$ todos os numeros inteiros, os valores do segundo membro de (7) reproduzem-se indefinidamente em períodos de $n$ termos, os quaes correspondem a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; estes termos são todos differentes, porque desde 0 até 360° não se encontram dois angulos que tenham conjuntamente o mesmo seno e o mesmo coseno.

A presença do factor (7) em (6) mostra que a multiplicidade das raizes do grau $n$ de um numero é devida á multiplicidade das raizes da unidade. Para $k = 0$ viria

$$[\rho(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{n}\right).$$

Por conseguinte a fórmula de Moivre ainda tem logar para expoentes fraccionarios, quando nos limitamos á raiz correspondente a $\sqrt[n]{1} = 1$.

Dando a $k$ os valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$, os valores dos argumentos que correspondem em (5) a todas as raizes differentes do numero dado são

$$(8) \qquad \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{2\pi+\alpha}{n}, \quad \frac{2.2\pi+\alpha}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(n-1).2\pi+\alpha}{n};$$

e procedem numa progressão arithmetica, cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Estes argumentos só dão valores reaes para a raiz quando é

$$(9) \qquad \frac{2k\pi+\alpha}{n}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{2k\pi+\alpha}{n}=\pi.$$

A primeira d'estas condições só pode verificar-se com $\alpha=0$ e $k=0$; para ter logar a segunda pode ser $\alpha=0$ com $n=2k$, ou $\alpha=\pi$ com $n=2k+1$. D'aqui resultam as seguintes consequencias:

1.ª Se o numero dado é *imaginário*, não pode ser $\alpha=0$ nem $\alpha=\pi$ e as raizes são todas imaginárias.

2.ª Se o numero é real e positivo, é $\alpha=0$. No caso de $n$ ser par, ambas as condições (9) se verificam e ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa. No caso de $n$ ser impar, a segunda condição não se pode verificar e ha só uma raiz real, que é positiva. Em ambos os casos as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas porque, pondo de parte o primeiro termo da progressão (8), nos outros a somma de dois equidistantes dos extremos é egual á somma $2\pi$ dos mesmos extremos, visto ser agora $\alpha=0$; para $n$ par o termo médio é $\pi$, e dá a raiz negativa.

3.ª Se o numero dado fôr real e negativo, será $\alpha=\pi$ e neste caso não pode verificar-se a primeira condição (9). Para $n$ par não ha raiz real, e para $n$ impar ha uma raiz real negativa cujo argumento $\pi$ é o termo medio de (8). Em ambos os casos as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas.

*Exemplo:* seja $x = 8^{\frac{1}{3}}$, donde $\rho = 8$, $\sqrt[3]{\rho} = 2$ e $\alpha = 0$. Os argumentos (8) são agora

$$0, \quad 120^\circ, \quad 240^\circ;$$

mas sabemos que

$$\text{sen } 120^\circ = -\text{sen } 240^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 120^\circ = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Logo as tres raizes cúbicas de 8 serão 2 e $-1 \pm i\sqrt{3}$.

**74.** Gauss imaginou uma representação geometrica da variavel imaginária $z = x + iy$, considerando as variaveis reaes $x$ e $y$ como coordenadas orthogonaes de um ponto M do plano, que tem o nome de *affixo*. É claro que, dado este ponto, o imaginário fica determinado, e inversamente.

A distancia do affixo á *origem*, isto é, á intersecção dos eixos coordenados, chama-se *vector* e considera-se sempre positiva. Por outra parte esta distancia é egual a $\sqrt{x^2 + y^2}$, e portanto o vector do affixo é o módulo do imaginário.

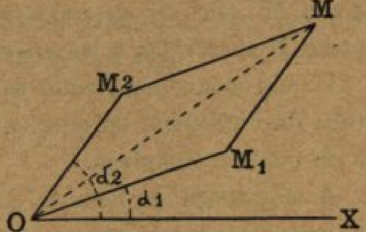
Alem d'isto, designando por $\varphi$ o angulo que faz o vector com o eixo dos $x$ e sendo o módulo $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$, teremos

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \text{ sen } \varphi;$$

portanto $\varphi$ será o argumento do imaginário $z$. Este angulo conta-se desde 0 até 360°, a partir do eixo dos $x$ positivos.

Os affixos de dois imaginários conjugados são pontos symetricos relativamente ao eixo dos $x$. Se em $\rho(\cos\varphi + i \text{sen}\varphi)$ fizermos $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ e $\rho = 1$, virá $z = \pm i$. Assim, $+i$ e $-i$ representam direcções oppostas, perpendiculares ao eixo dos $x$, do mesmo modo que os signaes + e —, applicados ás quantidades reaes, designam direcções oppostas, contadas sobre o mesmo eixo. As direcções intermédias são definidas pelo factor $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$, que desempenha o papel de um signal directivo.

A somma dos complexos




$$\rho_1(\cos\alpha_1 + i \operatorname{sen}\alpha_1),$$
$$\rho_2(\cos\alpha_2 + i \operatorname{sen}\alpha_2)$$

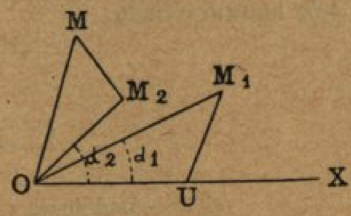
pode representar-se geometricamente do modo seguinte. Sejam $M_1$ e $M_2$ os affixos das duas parcellas, e tirem-se os vectores $OM_1$ e $OM_2$. Construam-se $M_1M$ e $M_2M$ respectivamente parallelas a $OM_2$ e $OM_1$. A intersecção $M$ das rectas $M_1M$ e $M_2M$ será o affixo da somma d'aquelles numeros, por isso que, sendo

$$(\rho_1 \cos\alpha_1,\ \rho_1 \operatorname{sen}\alpha_1) \quad \text{e} \quad (\rho_2 \cos\alpha_2,\ \rho_2 \operatorname{sen}\alpha_2)$$

as coordenadas dos pontos $M_1$ e $M_2$, as do ponto $M$ são evidentemente

$$(\rho_1 \cos\alpha_1 + \rho_2 \cos\alpha_2,\ \rho_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\alpha_2).$$

O vector $OM$ da somma é a *resultante* dos vectores das parcellas.




Consideremos ainda os numeros complexos cujos affixos são $M_1$ e $M_2$. Tome-se em $OX$ o comprimento $OU$ igual á unidade, e tirem-se as rectas $M_2M$ e $OM$ que fazem com $OM_2$ os angulos $MOM_2 = \alpha_1$, e $OM_2M = OUM_1$. A intersecção $M$ d'estas rectas é o affixo do producto d'aquelles dois numeros.

Com effeito, sendo $UOM_1 = \alpha_1$ e $UOM_2 = \alpha_2$, será $UOM = \alpha_1 + \alpha_2$

o argumento do producto. Da semelhança dos triangulos $OUM_1$ e $OM_2M$ resulta a proporção $OM : OM_2 = OM_1 : OU$ e, sendo $OM_1 = \rho_1$, $OM_2 = \rho_2$ e $OU = 1$, será $OM = \rho_1 \rho_2$ o modulo do producto. A troca dos pontos $M_1$ e $M_2$ conduziria ao mesmo ponto M, por ser $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ e $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$, e assim no ponto M se verifica a lei commutativa da multiplicação.

De um modo semelhante se obteria a representação geometrica da differença, do quociente, da potencia e da raiz de grau $n$ do numero complexo.

A *vizinhança* do numero $A = a + ib$ compõe-se de todos os numeros $z = x + iy$ que verificam a desigualdade

$$|z - A| < \delta,$$

sendo $\delta$ um numero positivo dado. Mas é

$$|z - A| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

e o segundo membro d'esta expressão representa, como é sabido, a distancia dos affixos dos numeros A e $z$. D'aqui resulta que aquella vizinhança se compõe de todos os pontos interiores ao circulo descripto com o centro no affixo de A e o raio $\delta$.

O campo de variabilidade da variavel imaginária $z$ é definido pelo mesmo círculo.

## X. — Limites.

### § 1.º — Definições e principios fundamentaes.

**75.** A succesão de uma infinidade de numeros

$$(1) \qquad u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

chama-se *determinada* quando, dado um valor do indice $n$, o elemento correspondente $u_n$ fica inteiramente determinado.

Diz-se que a successão determinada (1) admite um *limite* $a$, ou *tende* para o *limite* $a$, quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, é possivel determinar um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Isto mesmo se exprime escrevendo

$$\lim_{n=\infty} u_n = a,$$

ou simplesmente $\lim u_n = a$, subentendendo as palavras *para* $n = \infty$.

Exemplos: 1.° Os numeros

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots$$

decrescem indefinidamente e, dando a $n$ valores sufficientemente grandes, a differença entre $\frac{1}{n}$ e zero pode tornar-se tão pequena quanto se quizer. Logo:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.° Consideremos a succesão

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \ldots, \ \frac{1+n}{2+n} \ldots;$$

a differença

$$1 - \frac{1+n}{2+n} = \frac{1}{2+n}$$

pode tornar-se menor que qualquer quantidade assignavel para valores de $n$ sufficientemente grandes. Logo:

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{1+n}{2+n} = 1.$$

3.º Designemos por $x$ um numero tal, que seja $|x| < 1$. Pondo

$$|x| = \frac{1}{1+h},$$

será $h$ um numero positivo e teremos

$$|x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\ldots} < \frac{1}{1+nh}.$$

Dando a $n$ valores que satisfaçam á condição

$$\frac{1}{1+nh} < \varepsilon,$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena, ou

$$n > \frac{1-\varepsilon}{h\varepsilon},$$

virá $|x|^n < \varepsilon$. Logo:

$$\lim . |x|^n = 0$$

**76.** A variavel $u$ que passa successivamente pelos valores (1) não pode convergir conjunctamente para dois limites differentes $a$ e $b$.

Com effeito, se $u$ tende para o limite $a$, dada a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$ hade existir um numero $n_1$

tal, que seja

$$|u_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_1$. Mas, se a mesma variavel tende para o limite $b$, hade existir um numero $n_2$ tal, que seja

$$|u_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_2$. Logo a condição

$$|a-b| = |(a-u_n) + (u_n - b)| \overline{\gtrless} |u_n - a| + |u_n - b| < \varepsilon$$

seria satisfeita para todos os valores de $n$ superiores ao maior dos numeros $n_1$ e $n_2$; e esta desegualdade não pode verificar-se, sendo $a \gtrless b$, por isso que $|a-b|$ é uma quantidade constante e $\varepsilon$ é uma quantidade arbitrariamente pequena.

**77.** Se os valores da variavel $u$ estam sempre comprehendidos entre os valores correspondentes de duas variaveis $t$ e $v$ que tendem ambas para o mesmo limite $a$, existe para $u$ um limite que é o mesmo $a$.

Com effeito, tendendo $t$ e $v$ para o limite $a$, ao numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$ hade corresponder um numero $n_1$ tal, que será

$$|t_n - a| < \varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_1$; e outro numero $n_2$ tal, que será tambem

$$|v_n - a| < \varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_2$. Por conseguinte as duas últimas desigualdades hão de ser satisfeitas para todos os valores de $n$ superiores ao maior dos numeros $n_1$ e $n_2$; mas pela hypothese a differença $u_n - a$ está comprehendida entre $t_n - a$ e $v_n - a$, e d'aqui resulta que $|u_n - a|$ será inferior a um dos numeros $|t_n - a|$ e $|v_n - a|$. Logo será para aquelles valores de $n$

$$|u_n - a| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim u_n = a$.

**78.** Se os elementos da successão determinada (1) se conservam sempre inferiores a um numero dado $k$, a variavel $u$ não pode tender para um limite superior a $k$.

Com effeito, pela hypothese será

$$a - u_n > a - k;$$

por conseguinte, para $a > k$ não poderá verificar-se a desigualdade

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

quando dermos a $\varepsilon$ valores inferiores a $a - k$.

Do mesmo modo, se os elementos da successão (1) se conservam sempre superiores a um numero dado $k$, a variavel $u$ não pode tender para um limite inferior a $k$.

Com effeito, pela hypothese será

$$u_n - a > k - a;$$

por conseguinte, para $a < k$ não poderia verificar-se a desigualdade

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

quando dessemos a $\varepsilon$ valores inferiores a $k - a$.

**79.** Para ter um criterio por onde se possa reconhecer se a successão (1) admitte um limite, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. — *A condição necessária e sufficiente para que uma successão determinada de infinitos numeros*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

*admitta um limite é que, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena* $\varepsilon$, *exista um valor finito* $n_1$ *tal, que seja*

$$(2) \qquad |u_n - u_{n+k}| < \varepsilon$$

*para todos os valores de* $n > n_1$ *conjunctamente com todos os valores inteiros e positivos de* $k = 1, 2, 3 \ldots$

Em outros termos: a condição necessária e sufficiente para a existencia do limite é que, passada uma certa ordem, a differença entre um termo da successão e qualquer dos seguintes tenda para o limite zero. Começaremos por demonstrar que a condição é necessária, e depois veremos que ella tambem é sufficiente.

I. — Supponhamos que a variavel $u$ tende para um limite $a$. Neste caso, a um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$ hade corresponder um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$|u_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon;$$

e para os mesmos valores de $n$ será tambem

$$|u_{n+k} - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'estas duas desigualdades resulta a seguinte

$$|u_n - a| + |a - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

e portanto

$$|(u_n - a) + (a - u_{n+k})| \overline{\overline{<}} |u_n - a| + |a - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

isto é,

$$|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

que é a condição (2). Logo esta condição é necessária.

II. — Supponhamos que a cada quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$ corresponde um numero tal, que para todos os valores de $n$ superiores a este numero seja

$$|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Imaginemos uma successão de quantidades positivas, decrescentes e differentes de zero

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

de modo que seja $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$; esta condição pode realizar-se por muitos modos, e um d'elles seria, por exemplo, fazer $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Para qualquer d'estas quantidades $\varepsilon_i$ haverá um numero $n_i$ tal, que seja

$$(3) \qquad |u_{n_i+k} - u_{n_i}| < \varepsilon_i.$$

Assim teremos, em correspondencia com os numeros $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, ..., outros tantos numeros $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... com os quaes se verificam as desigualdades

$$\begin{aligned} &|u_{n_1+k} - u_{n_1}| < \varepsilon_1, \\ &|u_{n_2+k} - u_{n_2}| < \varepsilon_2, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \\ &|u_{n_3+k} - u_{n_3}| < \varepsilon_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posto isto, consideremos a classe formada com os numeros

$$u_{n_1} - \varepsilon_1, \quad u_{n_1} - \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad u_{n_i} - \varepsilon_i, \ldots$$

e a classe formada com os numeros

$$u_{n_1} + \varepsilon_1, \quad u_{n_2} + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad u_{n_i} + \varepsilon_i, \ldots$$

Para mostrar que estas duas classes determinam um numero $a$, devemos demonstrar em primeiro logar que, sendo $u_{n_i} - \varepsilon_i$ um elemento de primeira classe e $u_{n_j} + \varepsilon_j$ um elemento da segunda classe, será

$$u_{n_i} - \varepsilon_i < u_{n_j} + \varepsilon_j$$

ou, em outros termos,

$$u_{n_i} - u_{n_j} < \varepsilon_i + \varepsilon_j.$$

Ora de (3) resulta, no caso de ser $n_j > n_i$,

$$| u_{n_i} - u_{n_j} | < \varepsilon_i$$

e, no caso de ser $n_i > n_j$,

$$| u_{n_i} - u_{n_j} | < \varepsilon_j;$$

d'onde se conclue que em qualquer dos casos será

$$| u_{n_i} - u_{n_j} | < \varepsilon_i + \varepsilon_j$$

e, por maioria de razão,

$$u_{n_i} - u_{n_j} < \varepsilon_i + \varepsilon_j.$$

Em segundo logar temos de provar que a differença

$$(u_{n_j}+\varepsilon_j)-(u_{n_i}+\varepsilon_i)$$

se pode tornar tão pequena quanto se quizer para valores convenientes de $i$ e $j$. E com effeito, para isso bastará fazer $i=j$, pois que aquella differença se reduz então a $2\varepsilon_i$ e por definição esta quantidade pode-se tornar indefinidamente pequena para valores crescentes de $i$.

O numero $a$ determinado por aquellas duas classes é o limite da successão considerada, como vamos ver.

Este numero é maior que todos os da primeira classe e menor que todos os da segunda classe, ou

$$u_{n_i}-\varepsilon_i<a<u_{n_i}+\varepsilon_i.$$

Mudando os signaes a todos os membros d'estas desigualdades, teremos

$$-u_{n_i}+\varepsilon_i>-a>-u_{n_i}-\varepsilon_i.$$

Além d'isto, a desigualdade (3) desdobra-se, como é sabido (n.° 18), nas duas

$$u_{n_i}+\varepsilon_i>n_{n_i+k}>u_{n_i}-\varepsilon_i;$$

e sommando membro a membro estas desigualdades e as precedentes, acham-se as seguintes

$$2\varepsilon_i>u_{n_i+k}-a>-2\varepsilon_i,$$

isto é,

$$|u_{n_i+k}-a|<2\varepsilon_i$$

Bastará, pois, dar a $n$ um valor maior que $n_i$ para que seja

$$|u_n-a|<2\varepsilon_i$$

e esta condição exprime que $\lim\limits_{n=\infty} u_n=a$.

**80.** *Uma successão de infinitos numeros* $u_n$ *positivos e crescentes, mas que não podem tornar-se infinitamente grandes quando o índice* n *cresce indefinidamente, admitte sempre um limite determinado.*

Supponhamos que os elementos da successão (1) satisfazem ás condições

$$(4) \qquad u_1 \overline{\overline{<}} u_2 \overline{\overline{<}} u_3 \overline{\overline{<}} u_4 \ldots$$

Se estes numeros não podem tornar-se infinitamente grandes, haverá um numero positivo $k$ tal, que seja sempre

$$u_n < k$$

por maior que seja $n$.

Designemos por $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena e differente de zero, e imaginemos a progressão arithmetica

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots$$

Por meio d'esta progressão o intervallo de 0 a $k$ ficará dividido em outros mais pequenos, cujo numero é finito, sendo o primeiro de 0 a $\varepsilon$ e o último de $m\varepsilon$, por exemplo, a $k$. Supponhamos que é conhecido entre estes intervallos o último em que se podem encontrar elementos da successão dada; esse intervallo pode ser o último de todos, mas diremos de um modo geral que elle está comprehendido entre $\mu\varepsilon$ e $(\mu+1)\varepsilon$. Se $u_i$ fôr um elemento comprehendido entre estes extremos, pela hypothese todos os numeros $u_{i+1}$, $u_{i+2}, \ldots$ serão inferiores a $(\mu+1)\varepsilon$. Mas pela condição (4) estes numeros serão superiores ou pelo menos eguaes a $u_i$, e portanto todos elles estão contidos, assim como $u_i$, no intervallo de $\mu\varepsilon$ a $(\mu+1)\varepsilon$. D'aqui se conclue evidentemente que é

$$|u_i - u_{i+k}| < \varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

e assim fica verificada, pelo theorema do numero anterior, a condição necessária e sufficiente da existencia do limite.

**81.** Se, crescendo $n$ indefinidamente, o numero $u_n$ chega a tornar-se e se conserva maior que qualquer quantidade assignavel, diz-se que $u_n$ tende para o infinito e escreve-se

$$\lim_{n=\infty} u_n = \infty .$$

Além d'isto, se o numero $u_n$, crescendo $n$, acaba por conservar sempre o mesmo signal, positivo ou negativo, diz-se então que $u_n$ tende respectivamente para o infinito positivo ou negativo, e escreve-se no primeiro caso

$$\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$$

e no segundo caso

$$\lim_{n=\infty} u_n = -\infty .$$

### § 2.º — Operações com limites finitos.

**82.** Addição.—*Se as variaveis* $u_n$ *e* $v_n$ *tendem respectivamente para os limites finitos* a *e* b, *o limite da somma* $u_n + v_n$ *existe e é egual a* $a + b$.

Pela hypothese e segundo a definição de limite, á quantidade positiva e arbitrariamente pequena $\varepsilon$ corresponderá um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$| u_n - a | < \frac{1}{2} \varepsilon .$$

Ao mesmo valor de $\varepsilon$ corresponderá um numero $n_2$ tal, que para todos os valores de $n > n_2$ seja

$$|v_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon;$$

e portanto para todos os valores de $n$ superiores ao maior dos numeros $n_1$ e $n_2$ hão de verificar-se as duas últimas desegualdades, bem como a seguinte que d'ellas se deduz:

$$|u_n - a| + |v_n - b| < \varepsilon.$$

Mas

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \overline{\gtrless} |u_n - a| + |v_n - b|;$$

d'aqui resulta a desegualdade

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

que traduz o theorema enunciado. Por um raciocinio semelhante se provaria que $\lim (u_n - v_n) = a - b$.

**83.** Multiplicação. — *Se as variaveis* $u_n$ *e* $v_n$ *tendem respectivamente para os limites finitos* a *e* b, *o limite do producto* $u_n \times v_n$ *existe e é egual a* ab.

Pela hypothese e segundo a definição de limite, para valores de $n$ sufficientemente grandes será

$$|u_n - a| < \theta,$$
$$|v_n - b| < \theta,$$

por menor que seja a quantidade arbitraria e positiva $\theta$. Ora temos

$$|(u_n v_n) - (ab)| = |u_n (v_n - b) + b (u_n - a)|$$
$$\overline{\gtrless} |u_n| \cdot |v_n - b| + |b| \cdot |u_n - a|,$$

segundo os theoremas sobre o módulo da somma e do producto.

Por outra parte é

$$|u_n| = |a + (u_n - a)| \overline{\gtrless} |a| + |u_n - a|;$$

e assim a relação precedente, combinada com as duas desegualdades anteriores, torna-se em

$$|(u_n v_n) - (ab)| < \{ |a| + |b| \} \theta + \theta^2.$$

Dada a quantidade positiva e arbitrariamente pequena $\varepsilon$, pode-se determinar a arbitrária $\theta$ de modo que, para valores de $n$ sufficientemente grandes, o segundo membro d'esta desegualdade seja menor que $\varepsilon$. Bastará substituir $\theta$ pelo menor dos numeros

$$\theta < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|a| + |b|}, \quad \theta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

se $|a|$ e $|b|$ não são ambos nullos, ou simplesmente sujeitar $\theta$ á condição de ser

$$\theta < \sqrt{\varepsilon}$$

se fôr $|a| = |b| = 0$. De qualquer dos modos virá

$$|(u_n v_n) - (ab)| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim (u_n v_n) = ab.$$

Este resultado generalisa-se claramente para o caso de qualquer numero finito de factores, e por conseguinte para o caso da potencia de expoente inteiro e positivo.

**84.** Divisão. — *Se as quantidades* $u_n$ *e* $v_n$ *admittem res-*

*pectivamente os limites* a *e* $b \neq 0$, *o limite do quociente* $u_n : v_n$ *existe e é*

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}.$$

Começaremos por demonstrar que nestas circumstancias o limite do quociente $\frac{1}{v_n}$ existe e é $\frac{1}{b}$. Com effeito, sendo $b \neq 0$, é

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - b}{bv_n} = (v_n - b) \times \frac{1}{bv_n};$$

e pela definição de limite haverá um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja $|v_n - b| < \theta$, por menor que seja a quantidade positiva e arbitrariamente pequena $\theta$.

Mas o factor $\frac{1}{bv_n}$ conserva-se finito. Designando por M um numero superior ao maior dos valores que este factor possa ter, virá

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} \right| < M\theta$$

e por conseguinte, dada uma quantidade positiva e arbitrariamente pequena $\varepsilon$ e determinando $\theta$ pela condição de ser $M\theta < \varepsilon$, teremos

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} \right| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$.

Posto isto, de ser

$$\lim u_n = a, \quad \lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$$

conclue-se pelo theorema do numero anterior que é

$$\lim\left(u_n \times \frac{1}{v_n}\right) = a \times \frac{1}{b},$$

isto é, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

**85.** Potencias. — *Se fôr α um numero racional e* $u_n$ *uma variavel que tende para o limite* a, *o limite da potencia α de* $u_n$ *existe e é egual á potencia α de* a.

Consideremos em primeiro logar o caso de ser $\alpha = \frac{1}{q}$, $q$ um numero inteiro e $\lim u_n = 1$. Conforme o valor dado a $n$ poderá ser $u_n > 1$ ou $u_n < 1$. Será no primeiro caso

$$1 \overline{\overline{<}} \sqrt[q]{u_n} \overline{\overline{<}} u_n,$$

e no segundo caso

$$1 \overline{\overline{>}} \sqrt[q]{u_n} \overline{\overline{>}} u_n.$$

D'aqui se segue em qualquer caso que o numero $\sqrt[q]{u_n}$ está comprehendido entre os dois 1 e $u_n$, que teem o mesmo limite 1. Logo (n.º 77) será

$$\lim. \sqrt[q]{u_n} = 1.$$

Posto isto, sejam $p$ e $q$ dois numeros inteiros e $\alpha = \frac{p}{q}$: teremos

$$u_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \left(\frac{u_n}{a}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Mas, por ser

$$\lim \frac{u_n}{a} = 1,$$

é tambem, como acabamos de ver,

$$\lim\left(\frac{u_n}{a}\right)^{\frac{1}{q}}=1.$$

D'aqui resulta, pelos theoremas sobre limites do producto e da potencia de expoente inteiro e positivo, que é

$$\lim\left(\frac{u_n}{a}\right)^{\frac{p}{q}}=1$$

e, pela expressão precedente de $u_n^{\frac{p}{q}}$,

$$\lim u_n^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}}.$$

Se $a$ fosse negativo, recahiriamos no caso do expoente positivo por meio do theorema do quociente.

### § 3.º — Infinitamente pequenos.

**86.** Definição. — *Diz-se que* $u_n$ *é um* infinitamente pequeno *ou um* infinitesimo *quando, dada a quantidade positiva e arbitrariamente pequena* $\varepsilon$, *se pode determinar um numero* $n_1$ *tal, que para todos os valores de* $n > n_1$ *seja* $|u_n| < \varepsilon$.

Em outros termos: *infinitesimo* é a quantidade variavel que tende para o limite zero.

O infinitamente pequeno pode depender de outro, que se chama *principal*. Assim, $\lim\limits_{\alpha=0} \operatorname{sen}\alpha=0$; no limite, $\operatorname{sen}\alpha$ é um infinitamente pequeno e o infinitamente pequeno principal é o arco $\alpha$.

**87.** Supponhamos que $\alpha$ e $\beta$ são dois infinitamente pequenos que dependem do mesmo principal. Tres casos se podem dar:

1) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$: diz-se então que $\beta$ é um infinitamente pequeno de *ordem superior* a $\alpha$.

2) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k \neq 0$: o infinitamente pequeno $\beta$ é da *mesma ordem* que $\alpha$.

3) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$: o infinitamente pequeno $\beta$ é de *ordem inferior* a $\alpha$.

Quando $\beta$ e $\alpha$ são da mesma ordem, de ser $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k$ conclue-se que será

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon$$

ou $\beta = k\alpha + \alpha\varepsilon$, sendo $\varepsilon$ infinitamente pequeno com $\alpha$. Por aqui se vê que um infinitamente pequeno $\beta$ se compõe de duas partes: uma é $k\alpha$, que se chama termo *principal* e é da mesma ordem que $\alpha$ por ser $lim \frac{k\alpha}{\alpha} = k \neq 0$; a outra $\alpha\varepsilon$ é de ordem superior a $\alpha$, por ser $lim \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha} = lim\, \varepsilon = 0$.

**88.** Qualquer potencia de $\alpha$, de expoente inteiro e positivo $i > 1$, é um infinitamente pequeno de ordem superior a $\alpha$ por ser $lim \frac{\alpha^i}{\alpha} = lim\, \alpha^{i-1} = 0$.

Diremos que $\alpha^i$ é de ordem $i$ relativamente a $\alpha$; e $\beta$ será um infinitamente pequeno de ordem $n$ relativamente a $\alpha$ se fôr $\lim\limits_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha^n} = k \neq 0$, porque então $\beta$ é da mesma ordem que $\alpha^n$.

Se dois infinitamente pequenos $\beta$ e $\beta'$ são respectivamente de ordem $h$ e de ordem $n$ relativamente ao principal $\alpha$, o producto $\beta\beta'$ será de ordem $h+n$ relativamente ao mesmo $\alpha$. Com effeito, das condições

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^h} = k \neq 0, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = k' \neq 0$$

deduz-se que será

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{h+n}} = \lim \frac{\beta}{\alpha^h} \times \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = kk' \neq 0:$$

por onde se vê que $\beta\beta'$ é de ordem $h+n$.

O quociente dos mesmos infinitamente pequenos é de ordem $h-n$. Com effeito de

$$\beta = \alpha^h (k+\varepsilon), \quad \beta' = \alpha^n (k'+\varepsilon')$$

deduz-se

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha^{h-n} \cdot \frac{k+\varepsilon}{k'+\varepsilon'}$$

e portanto

$$\lim \frac{\frac{\beta}{\beta'}}{\alpha^{h-n}} = \frac{k}{k'} \neq 0.$$

Se fôr $\alpha$ o infinitamente pequeno principal, $\beta$ um infinitamente pequeno de ordem $h$ relativamente a $\beta'$ e $\beta'$ um infinitamente pequeno de ordem $n$ relativamente ao principal, $\beta$ será de ordem $hn$ relativamente a $\alpha$.

Com effeito, das condições

$$\lim \frac{\beta}{\beta'^h} = k \neq 0, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = k' \neq 0,$$

resulta que será

$$\beta = \beta'^h (k + \varepsilon), \quad \beta' = \alpha^n (k' + \varepsilon')$$

e portanto, visto que $h$ e $n$ são numeros inteiros e positivos,

$$\beta = \alpha^{nh} (k + \varepsilon)(k' + \varepsilon')^h = \alpha^{nh} (k k'^h + \delta),$$

sendo $\delta$ infinitamente pequeno com $\alpha$. Logo:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{nh}} = kk'^h \gtrless 0.$$

**89.** Se dois infinitamente pequenos $\alpha$ e $\beta$ estiverem ligados com outros dois $\alpha'$ e $\beta'$ de modo que seja

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1,$$

será

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

Com effeito, pela hypothese temos

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \varepsilon',$$

sendo $\varepsilon$ e $\varepsilon'$ quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que $\alpha$ e $\beta$. Logo será

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1 + \varepsilon'}{1 + \varepsilon}$$

e portanto

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

D'aqui se pode concluir que o limite da razão de dois infinitamente pequenos é egual ao limite da razão dos seus termos principaes. Sejam, com effeito, os dois infinitamente pequenos

$$\beta = \beta' + \varepsilon, \quad \alpha = \alpha' + \varepsilon';$$

teremos

$$\lim \frac{\beta' + \varepsilon}{\beta'} = \lim \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta'}\right) = 1,$$

visto que, por definição, $\varepsilon$ é de ordem superior a $\beta'$ ou $\lim \frac{\varepsilon}{\beta'} = 0$. Do mesmo modo será

$$\lim \frac{\alpha' + \varepsilon'}{\alpha'} = 1$$

e, pelo theorema que acabamos de demonstrar,

$$\lim \frac{\beta' + \varepsilon}{\alpha' + \varepsilon'} = \lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Se quizermos, por exemplo, determinar o limite de

$$\frac{x + x^2 + x^3}{x^2 + x^3}$$

para $x = 0$, teremos

$$\lim_{x=0} \frac{x + x^2 + x^3}{x^2 + x^3} = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{x} = \infty.$$

## § 4.º — Limites das funcções

**90.** Definição. — *Diz-se que a funcção* $y = f(x)$ *tende para o limite* A *ao mesmo tempo que a variavel independente* x *tende para o limite* a *quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno* $\varepsilon$, *é possivel determinar um numero positivo* $\delta$ *de modo que, para todos os valores de* x *que verifiquem a desegualdade*

$$|x-a|<\delta,$$

*seja*

$$|f(x)-A|<\varepsilon;$$

*e escreve-se*

$$\lim_{x=a} f(x)=A.$$

Limite á direita. — Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para os valores de $x$ *á direita* de $a$ quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, é possivel determinar um numero positivo $\delta$ tal, que para todos os valores de $x$, que verifiquem a desegualdade

$$x-a<\delta,$$

seja

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Limite á esquerda. — Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para os valores de $x$ *á esquerda* de $a$ quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, é possivel determinante um numero positivo $\delta$ tal, que para todos os valores de $x$ que verifiquem a desegualdade

$$a-x<\delta$$

seja

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Já tivemos occasião de observar (n.º 18) que a desegualdade

$$|x-a|<\delta$$

se desdobra nas duas

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

e que portanto os valores de $x$ que satisfazem á primeira estão comprehendidos no intervallo $(a-\delta,\ a+\delta)$.

Quando consideramos sómente o limite á direita, ou á esquerda, as desegualdades $x-a<\delta$, ou $a-x<\delta$, podem substituir-se respectivamente por

$$a+\delta>x,\quad a-\delta<x$$

e os valores de $x$ encontram-se no intervallo $(a,\ a+\delta)$, ou $(a-\delta,\ a)$, isto é, numa das partes em que se desdobrou a desegualdade primitiva.

**91.** Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para $x$ *infinito* quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, é possivel determinar um numero B tal, que para todos os valores de $x$ que satisfaçam a desegualdade $|x|>B$ seja

$$|f(x)-A|<\varepsilon;$$

e escreve-se

$$\lim_{x=\infty} f(x)=A.$$

Se aquella condição se verifica para valores positivos de $x$, escreve-se

$$\lim_{x=+\infty} f(x)=A,$$

e temos o limite á *direita;* se a condição se verifica para valores negativos de $x$, escreve-se

$$\lim_{x=-\infty} f(x)=A,$$

e temos o limite á *esquerda.*

Outro caso pode dar-se ainda. Se $f(x)$ cresce independentemente com a variavel, isto é, se, dado um numero A arbitrariamente grande, é possivel determinar um numero B tal, que para todos os valores de $x$ que satisfaçam á condição $|x| > B$ seja $|f(x)| > A$, diz-se que

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty .$$

Quando não se verifica hypothese alguma das que temos considerado, diz-se que $f(x)$ não admitte limite, nem finito nem infinito.

92. Aos limites das funcções são applicaveis as proposições que se demonstraram para os limites das successões determinadas.

Assim, se duas funcções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendem para limites determinados A e B quando $x$ tendo para $a$, existe conjunctamente um limite da somma $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ e esse limite é $C = A + B$.

Com effeito, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, será possivel, por definição de limite, determinar um numero $\delta'$ tal, que para todos os valores de $x$ que satisfaçam á condição de ser $|x-a| < \delta'$ seja

$$|f_1(x) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

e outro numero $\delta''$ tal, que para todos os valooes de $x$ que satisfaçam á condição de ser $|x-a| < \delta''$ seja

$$|f_2(x) - B| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Por conseguinte as duas últimas desegualdades hão de verificar-se para todos os valores de $x$ que satisfaçam á condição de ser $|x-a|<\delta$, representando por $\delta$ a menor das quantidades $\delta'$ e $\delta''$. D'aqui se conclue que para estes valores de $x$ será

$$|F(x)-C|=|(f_1(x)-A)+(f_2(x)-B)|$$
$$\overline{\gtrless}|f_1(x)-A|+|f_2(x)-B|<\varepsilon,$$

e $F(x)$ tende para o limite C.

Chegariamos a um resultado análogo no caso de qualquer numero finito de parcellas. Por uma forma semelhante se mostraria que:

A funcção $f(x)$ não pode tender para dois limites differentes quando $x$ tende para $a$; o producto de qualquer numero finito de funcções, que tendem cada uma para o seu limite quando $x$ tende para $a$, admitte um limite que é egual ao producto dos limites dos factores; etc.

**93.** Já vimos que a funcção $f(x)$ se diz contínua no ponto $a$ quando se verificam as seguintes condições:

1.ª Ser a funcção bem determinada naquelle ponto;

2.ª Dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, ser possivel determinar um numero positivo $\delta$ tal, que para todos os valores de $x$ que satisfaçam á condição de ser $|x-a|<\delta$ seja

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Ora esta desegualdade traduz tambem a condição necessaria para ser

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a),$$

ou antes

$$\lim_{x=a} f(x) = f(\lim x).$$

Assim, a continuidade da funcção de uma variavel pode-se definir pela condição de serem *invertiveis* os symbolos *lim.* e $f$.

## XI. — Derivadas.

### § 1.º — Funcções de uma variavel.

**94.** Seja $y=f(x)$ uma funcção analytica da variavel real $x$, e supponhamos que esta funcção é definida num intervallo $(a, b)$. Seja $x$ um ponto d'este intervallo para o qual a funcção é contínua e finita, e consideremos outro ponto $x \pm h$ na visinhança de $x$.

Em geral a funcção terá valores differentes nos pontos $x$ e $x \pm h$, e o valor da differença

$$k = f(x \pm h) - f(x)$$

é o *incremento* da funcção correspondente ao *incremento* $\pm h$ da variavel; por outra parte a quantidade $k$ tende para zero ao mesmo tempo que $h$, visto que a funcção é contínua. A fracção

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

chama-se *razão incremental*.

Ora, pode acontecer que a razão incremental tenda para um limite determinado quando o incremento da variavel tende para zero. Dão-nos um exemplo d'este caso as funcções inteiras que são contínuas em todos os seus pontos (n.º 22). Do desenvolvimento de $f(x+h)$ segundo a fórmula de Taylor, demonstrada para estas funcções (n.º 16), se tira

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade que se annulla com $h$; e d'aqui resulta que será neste caso

$$\lim_{h=0}.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

qualquer que seja o signal de $h$. Da funcção $f'(x)$, que se chamou *derivada* da funcção $f(x)$, podemos dar em todos os casos a seguinte:

DEFINIÇÃO. — *Derivada da funcção* f(x) *no ponto* x *é o limite para que tende a razão incremental da funcção nesse ponto quando o incremento* h *da variavel tende para zero; suppondo que o limite existe e, além d'isso, que elle é independente não só da maneira como* h *tende para zero mas ainda do signal de* h.

A este limite tambem se dá o nome de *quociente differencial*, pela razão que adeante se dirá.

Se o limite existe só á direita ou só á esquerda do ponto $x$, teremos a *derivada á direita* ou a *derivada á esquerda*. Quando ambas estas derivadas existem e são eguaes, diz-se simplesmente que a funcção tem *derivada* no ponto $x$.

Se num ponto $x$ a razão incremental tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* nesse ponto. Se ha pontos em que aquella razão não tende para um limite determinado, diz-se que a funcção não tem derivada nesses pontos. A funcção inteira tem derivada em todos os seus pontos.

Posto isto, da relação de definição

$$\lim_{h=0}.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

10

deduz-se que será

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade que se annulla com $h$; e d'aqui se conclue que a differença

$$f(x+h)-f(x)$$

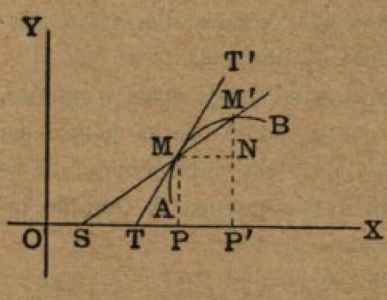
se torna infinitamente pequena com $h$ quando a funcção $f'(x)$ não é infinita. Logo:

*Toda a funcção é continua nos pontos em que admitte derivada finita.*

A recíproca não é verdadeira. Conhecem-se funcções que, sendo contínuas em todos os pontos de um intervallo, todavia não admittem derivada nesse intervallo.

Se uma funcção $f(x)$ tem derivada em todos os pontos de um intervallo $(a, b)$, o conjuncto dos infinitos valores da derivada nesses pontos constitue uma nova funcção, que se chama *primeira funcção derivada* de $f(x)$ e se representa, conforme a notação anterior, por $f'(x)$.

**95.** Supponhamos que a funcção $y=f(x)$ pode ser representada geometricamente por meio de uma curva como A M M', e vejamos o que exprime a derivada $y'=f'(x)$ num dado ponto M d'esta curva.




Se fôr $OP=x$ a abscissa do ponto M, a sua ordenada $PM=y$ representa o valor correspondente da funcção $f(x)$. Dando a $x$ um incremento $PP'=MN=h$, resultará para a ordenada o incremento $M'N=k$, visto ser $P'M'=PM+NM'$; e do triangulo M N M′ deduz-se a relação

$$\frac{k}{h} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{N\,M\,M'}}{\operatorname{sen} \mathrm{N\,M'M}} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{X\,S\,M}}{\operatorname{sen} \mathrm{N\,M'M}}.$$

Ora $\mathrm{XSM} = \alpha$ é o angulo que a secante S M′ faz com o sentido positivo do eixo dos $x$. Além d'isto N M′ M é o angulo que a mesma recta faz com o eixo dos $y$ parallelo a M′ P′ e, tirando em S a parallela a O Y, facilmente se veria que é $\mathrm{N\,M'M} = \omega - \alpha$, pondo $\mathrm{X\,O\,Y} = \omega$. A razão dos senos dos dois angulos chama-se *coefficiente angular* da recta M S.

Posto isto, á medida que o ponto P′ se aproxima de P, o incremento $h$ decresce, o ponto M′ aproxima-se de M e o angulo M′ M T′ converge para zero. No limite $h = 0$ a razão incremental torna-se na derivada $y' = f'(x)$, a secante torna-se na tangente M T, o angulo $\mathrm{X\,S\,M} = \alpha$ muda-se em $\mathrm{X\,T\,M} = \gamma$ e a egualdade precedente será agora

$$y' = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\omega - \gamma)} = m.$$

Se os eixos coordenados forem rectangulares, será $\omega = \frac{1}{2}\pi$ e $m = \operatorname{tang} \gamma$.

D'esta discussão resulta que:

*A derivada num ponto* x *de uma funcção representada por uma curva plana exprime o coefficiente angular da tangente á curva naquelle ponto.*

**96.** Nas primeiras questões que se apresentam no cálculo das derivadas considera-se uma funcção composta com outras funcções ligadas entre si por signaes de operações analyticas, e pede-se a derivada da primeira funcção expressa nas derivadas d'estas últimas, suppondo que todas ellas teem derivadas determinadas.

Em primeiro logar é evidente que *a derivada de uma constante é zero.* Depois tambem será facil ver que, se $f(x)$ é o producto de uma constante $c$ por uma funcção de $x$, ou $f(x) = c\,\varphi(x)$, da expressão

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c.\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

resulta que neste caso *a derivada se calcula multiplicando a constante pela derivada da funcção* $\varphi(x)$. Tratemos seguidamente das relações representadas por cada uma das operações fundamentaes da Algebra.

1.º Addição. — Se fôr dada a somma algebrica de um numero finito de funcções

$$f(x) \equiv \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots,$$

ao incremento $h$ de $x$ corresponderá a expressão

$$f(x+h) \equiv \varphi_1(x+h) \pm \varphi_2(x+h) \pm \ldots$$

Subtrahindo d'esta egualdade a precedente, teremos o incremento da funcção

$$k = \varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) \pm [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)] \pm \ldots;$$

dividindo ambos os membros por $h$ e passando ao limite para $h = 0$, acha-se finalmente

$$f'(x) = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \ldots$$

d'onde resulta o seguinte:

Theorema I. — *A derivada de uma somma de funcções é a somma das derivadas das parcellas,* isto é, *o signal de derivação é invertivel com o signal de somma.*

Corollario. — *Se duas funcções só differem numa constante, as suas derivadas são eguaes.*

2.º Multiplicação. — Seja

$$f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x),$$

e demos a $x$ o incremento $h$; teremos

$$f(x+h) = \varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x+h),$$

e portanto o incremento da funcção será

$$\begin{aligned} k &= \varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x+h) - \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) \\ &= [\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)]\,\varphi_2(x+h) + [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)]\,\varphi_1(x). \end{aligned}$$

Dividindo por $h$ e passando ao limite para $h=0$, acha-se

$$f'(x) = \varphi'_1(x)\,\varphi_2(x) + \varphi'_2(x)\,\varphi_1(x).$$

Logo: *a derivada do producto de duas funcções é egual á somma dos productos que se obteem multiplicando a derivada de cada funcção pela outra.*

Pela applicação successiva d'esta regra se chegaria ao seguinte:

Theorema II. — *A derivada do producto de* n *funcções é egual á somma dos productos que se obteem multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

Esta generalização, que é evidente, facilmente se provaria pelo methodo de *inducção mathematica.*

Pode-se obter a derivada do producto com a forma chamada *logarithmica*, dividindo

$$f'(x) = \varphi'_1(x)\cdot\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x) + \varphi'_2(x)\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x) + \ldots + \varphi'_n(x)\varphi_1(x)\ldots$$

por $f(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)$. D'este modo se acharia a fórmula

$$(1) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots + \frac{\varphi'_n(x)}{\varphi_n(x)},$$

de que faremos uso adeante.

3.º Divisão. — Seja a funcção

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)};$$

dando a $x$ o incremento $h$, virá

$$f(x+h) = \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)}$$

e portanto o incremento da funcção será

$$\begin{aligned} k &= \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \\ &= \frac{\varphi_1(x+h)\,\varphi_2(x) - \varphi_2(x+h)\,\varphi_1(x)}{\varphi_2(x+h)\,\varphi_2(x)} \\ &= \frac{[\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)]\,\varphi_2(x) - [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)]\,\varphi_1(x)}{\varphi_2(x+h)\,\varphi_2(x)} \end{aligned}$$

Dividindo por $h$ e passando ao limite para $h=0$, temos

$$f'(x) = \frac{\varphi_2(x)\,\varphi'_1(x) - \varphi_1(x)\,\varphi'_2(x)}{[\varphi_2(x)]^2},$$

e assim:

Theorema III. — *A derivada do quociente de duas funcções é a expressão que se obtem quando se divide pelo quadrado do divisor a differença do producto do divisor pela derivada do dividendo menos o producto do dividendo pela derivada do divisor.*

Se a funcção é expressa por uma fracção cujo numerador é constante, teremos a sua derivada multiplicando o numerador pela derivada do denominador, dividindo o producto pelo quadrado do denominador e mudando o signal ao quociente, visto ser zero a derivada de uma constante.

**97.** Dois casos nos falta considerar.

1.º Funcção de funcção. — Supponhamos que $y$ é funcção de uma variavel $u$, a qual por sua vez é funcção da variavel independente $x$; isto é, seja

$$y=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

Dando um accrescimo $h$ a $x$, resultará para $u$ um certo accrescimo $l$, em quanto que $y$ experimenta egualmente um accrescimo que designaremos por $k$. Mas temos identicamente

$$\frac{k}{h}=\frac{k}{l}\cdot\frac{l}{h}$$

e $k$ e $l$ convergem para zero com $h$; os limites das razões

$$\frac{k}{h}, \frac{k}{l}, \frac{l}{h}$$

são respectivamente a derivada de $y$ relativamente a $x$, de $y$ relativamente a $u$ e de $u$ relativamente a $x$, suppondo que estas derivadas existem. Portanto no limite será

$$(2) \qquad y'=f'_u(u).u',$$

isto é:

Theorema. — *Sendo* y *funcção de uma outra funcção da variavel* x, *a derivada de* y *relativamente a* x *é egual ao producto da derivada de* y *relativamente á variavel intermédia multiplicada pela derivada d'esta variavel relativamente a* x.

2.º Funcção inversa. — Seja $y=f(x)$ uma funcção que se possa *inverter*, isto é, uma funcção tal, que $x$ possa tambem considerar-se como funcção de $y$.

Designemos por $k$ o incremento de $y$ correspondente ao incremento $h$ de $x$. Se dermos inversamente o incremento $k$ a $y$, resultará para $x$ o incremento $h$; de modo que o limite da rasão $\frac{h}{k}$ é a derivada da funcção inversa, como o limite da razão $\frac{k}{h}$ é a derivada da funcção directa.

Mas temos identicamente

$$\frac{h}{k}=\frac{1}{\frac{k}{h}}$$

e passando ao limite, esta expressão mostra que:

Theorema. — *A derivada da funcção inversa é egual á inversa arithmetica da derivada da funcção directa.*

A inversão *analytica* da funcção reduz-se a uma inversão *arithmetica* da derivada. A derivada, que assim se obtem, não vem expressa na variavel independente, mas sim na funcção; para a exprimir na variavel independente, será ainda necessario effectuar a inversão analytica da funcção.

### § 2.° — Funcções simples.

**98.** As funcções explícitas de uma variavel são compostas de *funcções simples*, isto é, de funcções em que a variavel vem affectada unicamente com um dos signaes usados para exprimir operações ou combinações analyticas. Por meio dos theoremas precedentes se poderá obter a derivada de qualquer daquellas funcções, quando sejam conhecidas as leis da derivação das funcções simples.

Estas funcções são: $a \pm x$, $bx$, $x^m$, $e^x$, $\log x$, $\operatorname{sen} x$ e as outras funcções trigonometricas com as inversas respectivas.

**99.** Para obter a derivada da funcção exponencial havemos de recorrer ao principio seguinte.

Designando por $n$ um numero inteiro e positivo, da expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots$$

resulta que será

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots;$$

e portanto para $n$ infinitamente grande é

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$$

por ser

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Por outra parte, suppondo $x<1$, teremos

$$\frac{(1-x)^n-1}{(1-x)-1}=(1-x)^{n-1}+(1-x)^{n-2}+\ldots+(1-x)+1<n;$$

e d'aqui se tira

$$\frac{(1-x)^n-1}{x}>-n$$

ou $(1-x)^n>1-nx$. Por conseguinte, para $x=\frac{1}{n^2}$, virá

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n},$$

isto é,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n},$$

ou ainda

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Esta desegualdade mostra que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é uma quantidade que cresce indefinidamente com $n$; e visto que ella se conserva sempre menor que 3, hade tender para um limite quando $n$

tender para o infinito. Designando este limite por $e$, o numero

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é a base dos logarithmos neperianos.

**100.** A derivada de $y = a \pm x$ é $y' = \pm 1$. A funcção $y = bx$ está comprehendida num caso que já foi considerado, e a sua derivada é $y' = b$.

A derivada de $y = bu$, sendo $u$ funcção de $x$, é (2) $y' = bu'$.

A derivada de $y = e^x$ é

$$y' = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como $e^h$ tende para a unidade quando $h$ tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

fazendo tender $n$ para o infinito quando $h$ tende para zero; e tomando os logarithmos neperianos aos dois membros d'esta egualdade, virá

$$h = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

D'este modo a expressão da derivada $y'$ torna-se em

$$y' = e^x \lim_{n=\infty} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^x \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^x,$$

por ser, para $n = \infty$, $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1$;

Para $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$ teriamos (2)

(3) $$y' = e^u u'.$$

isto é:

*A derivada da exponencial de base e é egual ao producto da exponencial pela derivada do expoente.*

Para $y = a^u$ ou

$$y = e^{u \log a}$$

será (3)

$$y' = e^{u \log a} . u' \log a = a^u u' \log a ;$$

e assim:

THEOREMA. — *A derivada da exponencial de base a é egual ao producto da exponencial pela derivada do expoente e pelo logarithmo neperiano da base.*

**101.** Sendo $x$ positivo, de $y = \log x$ tira-se

$$x = e^y,$$

e pelo theorema da funcção inversa acha-se

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Para $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$ teremos (2)

$$y' = \frac{u'}{u};$$

e assim:

THEOREMA. — *A derivada do logarithmo neperiano de uma funcção é egual á derivada da funcção dividida pela mesma funcção.*

Sendo

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a},$$

teriamos a fórmula

$$y' = \frac{u'}{u \log a},$$

para exprimir a derivada do logarithmo de base $a$ da funcção $u$,

**102.** Consideremos a funcção

$$y=x^n.$$

Suppondo $x$ positivo e $n$ real, teremos

$$y=e^{n\log x};$$

e d'aqui se tira

$$y'=e^{n\log x}.\frac{n}{x}=\frac{n\,y}{x}=n\,x^{n-1}.$$

Para $y=u^n$ e $u=\varphi(x)$ viria

$$y'=n\,u^{n-1}\,u'.$$

No caso de ser $n$ real e $x$ negativo, pondo $x=-z$ teremos

$$y=(-1)^n.z^n$$

e portanto

$$y'=(-1)^n\,n\,z^{n-1}\,z'=(-1)^{n-1}\,n\,z^{n-1}=n\,x^{n-1},$$

como no caso anterior.

Se fôr $y=u^n$ e $u=\varphi(x)$, vem

$$y'=n\,u^{n-1}\,u'.$$

Logo:

Theorema. — *A derivada da potencia de grau* n *de uma funcção é egual ao producto do expoente* n *pela potencia de grau* n — 1 *da funcção e pela derivada da mesma funcção.*

Representando as raizes por expoentes fraccionarios, a derivada de

$$y=\sqrt[m]{u^n}$$

será

$$y'=\frac{n}{m}\,u^{\frac{n}{m}-1}\,u'.$$

Particularmente, pondo $m=2$ e $n=1$, a derivada de $\sqrt{x}$ é

$$\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Se o expoente é tambem funcção de $x$, ou $y=u^v$ com $u=\varphi(x)$ e $v=\psi(x)$, será

$$y=e^{v \log u}$$

e portanto

$$y'=u^v\left(v' \log u+v\frac{u'}{u}\right).$$

**103.** Funcções circulares. — 1.° Seja $y=\operatorname{sen} x$; o incremento da funcção correspondente ao incremento $h$ da variavel será

$$k=\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x,$$

e a razão incremental é

$$\frac{k}{h}=\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Passando ao limite para $h=0$, acha-se finalmente

$$\operatorname{sen}' x=\cos x;$$

e para $u=\varphi(x)$ teriamos

(4) $$\operatorname{sen}' u=u'\cos u,$$

isto é:

Theorema. — *A derivada do seno é egual ao producto do coseno pela derivada do arco.*

2.° Seja $y=\cos u=\operatorname{sen}(90^\circ-u)$. Segundo (4) teremos

(5) $$\cos' u=-u'\operatorname{sen} u.$$

3.° Seja $y = \operatorname{tang} u$ ou

$$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}.$$

Pelo theorema da derivada do quociente, e por (4) e (5), achariamos

$$\operatorname{tang}' u = \frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} . u' = (1 + \operatorname{tang}^2 u)\, u' = u' \sec^2 u.$$

4.° A derivada de

$$\operatorname{cotg} u = \operatorname{tang}(90^\circ - u)$$

será

$$\operatorname{cotg}' u = -(1 + \operatorname{cotg}^2 u)\, u' = -u' \operatorname{cosec}^2 u.$$

5.° Pela forma da derivada da fracção cujo numerador é constante (n.° 96), a derivada de

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}$$

será

$$\sec' u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} u' = u' \sec u \operatorname{tang} u.$$

A derivada de $\operatorname{cosec} u = \sec(90^\circ - u)$ é

$$\operatorname{cosec}' u = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u.$$

**104.** Funcções circulares inversas. — 1.° Começando pelo seno, vejamos em primeiro logar se é possivel, e como, considerar o arco como funcção do seu seno.

É sabido que existem infinitos arcos que teem todos o mesmo seno. Por conseguinte a um valor de seno não corresponde uma determinação unívoca do arco; mas se estabelecermos que o arco deva estar comprehendido entre os dois valores

$$\frac{2k+1}{2}\pi, \quad \frac{2k+3}{2}\pi,$$

onde $k$ é um numero *inteiro* qualquer, positivo ou negativo, é claro que ao seno dado corresponderá um arco único, pois que dentro d'aquelles limites não ha dois arcos que tenham o mesmo seno. Com o symbolo

$$y = \text{arc sen}\, x$$

se indicará a funcção assim considerada, entendendo-se que este symbolo exprime *o arco, comprehendido os ditos limites, cujo seno é $x$*. Inversamente será $x = \text{sen}\, y$.

Pelo theorema das funcções inversas podemos agora achar a derivada de $y$. A derivada da funcção directa $\text{sen}\, y$ é $\cos y$; e por conseguinte a derivada de $y$ relativamente a $x$, e expressa em $y$, será

$$\frac{1}{\cos y}.$$

Para ter esta derivada expressa na variavel $x$, de $x = \text{sen}\, y$ tira-se

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2};$$

e assim teremos

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ora, suppondo o arco $y$ comprehendido entre os limites considerados, o valor de $\cos y$ será positivo para $k$ impar e *vice-versa*. Por conseguinte na expressão da derivada $y'$ tomaremos o radical com o signal $+$ quando considerarmos algum ramo da funcção $y$ definido por um valor impar de $k$, e com o signal $-$ no caso contrário.

2.° Para a funcção *coseno* podem fazer-se considerações semelhantes. Se fosse $x = \cos y$, veriamos que $y$ se pode definir como funcção de $x$ no campo de variabilidade de $y$ comprehendido entre

$$k\pi, \quad (k+1)\pi,$$

sendo $k$ um numero *inteiro,* positivo ou negativo.

Designando a funcção assim considerada por

$$y = \text{arc}\cos x,$$

a sua derivada relativamente a $x$ será

$$-\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

e para resolver a indeterminação do signal do radical observaremos que no campo de variabilidade de $y$ a funcção $\operatorname{sen} y$ é positiva para $k$ par, e *vice-versa.*

Por aqui se vê que, abstrahindo do signal, *as derivadas das duas funcções*

$$\text{arc}\operatorname{sen} x, \quad \text{arc}\cos x$$

*são eguaes em valor absoluto.* Podia prever-se que assim seria, notando que, para o mesmo valor de $x$, ou a somma ou a differença d'aquellas duas funcções é uma constante da forma

$$(2t+1)\frac{\pi}{2},$$

onde $t$ é um numero inteiro.

3.º Para a funcção inversa de

$$x = \operatorname{tang} y$$

veriamos egualmente que esta funcção, que se representa por

$$y = \text{arc}\operatorname{tang} x,$$

é definida num campo de variabilidade cujos extremos são

$$k\pi, \quad (k+1)\pi.$$

D'este intervallo hade excluir-se o ponto medio

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

onde a variavel $x$ se torna infinita, e tem o signal $+$ ou $-$ conforme $y$ tende para aquelle valor pela direita ou pela esquerda.

Posto isto, pelo theorema das funcções inversas se acharia que *a derivada do arco cuja tangente é* $x$ é

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Do mesmo modo *a derivada do arco cuja cotangente é* $x$ será

$$y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

a derivada de $y = \operatorname{arc}\sec x$ é

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

e para $y = \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x$ teremos

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Note-se: *emquanto o logarithmo e as funcções circulares inversas são funcções transcendentes, as suas derivadas são funcções algebricas.*

### § 3.º — Estudo das funcções por meio das suas derivadas.

**105.** *Supponhamos que a funcção* $y = f(x)$ *é sempre finita e tem derivada determinada e finita num certo intervallo.*

Vamos tratar de algumas relações fundamentaes que teem logar entre os valores d'esta funcção e os da sua derivada.

1.º Consideremos no intervallo dado um ponto $x_0$ e dois pontos $x_0 - h$ e $x_0 + h$ na vizinhança de $x_0$, sendo $h$ uma quantidade positiva e arbitrariamente pequena. Diz-se que a funcção é *crescente* com a variavel no ponto $x_0$, quando as desigualdades

$$(6)\qquad \begin{cases} f(x_0 - h) - f(x_0) < 0, \\ f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \end{cases}$$

se verificam para um certo valor $h_1$ de $h$ e para todos os valores de $h$ menores que $h_1$.

Afim de substituir este criterio por outro que seja independente de $h$, divida-se a primeira desigualdade (6) por $-h$, mudando-lhe o sentido, e divida-se egualmente a segunda por $+h$. Teremos assim duas condições, que se reduzem á seguinte:

$$(7)\qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0,$$

para $h$ positivo e negativo.

A relação (7) hade subsistir por menor que seja $h$. Por conseguinte, fazendo convergir $h$ para zero, notando que o limite do primeiro membro de (7) para $h = 0$ é a primeira derivada da funcção $f(x)$ no ponto $x_0$, cuja existencia admittimos, e advertindo que não pode ser negativo o limite de uma quantidade que se conserva sempre positiva, conclue-se finalmente que:

THEOREMA I. — *Se a funcção* f(x) *fôr crescente no ponto* $x_0$, *a sua derivada não terá valor negativo neste ponto.*

Tambem podemos dizer que: *se a derivada é positiva, a funcção é crescente.* Em outros termos: esta condição é *sufficiente,* mas não se pode dizer que seja *necessaria*; falta considerar o caso de ser a derivada egual a zero no ponto $x_0$.

Diz-se que a funcção $f(x)$ é *decrescente, crescendo a variavel,* quando se verificam as condições que se traduzem invertendo os sentidos das desigualdades (6). Por um raciocinio análogo ao que se fez no caso anterior, veriamos que:

THEOREMA II. — *Se a funcção* f(x) *fôr decrescente no ponto* $x_0$, *a sua derivada não terá valor positivo neste ponto*; e, com as mesmas reservas que já fizemos, *se a derivada é negativa, a funcção é decrescente.*

Havemos de completar esta discussão sómente para o caso particular das funcções inteiras. Aqui acrescentaremos apenas que a funcção pode ser crescente, ou decrescente, só á esquerda ou só á direita do ponto considerado.

2.° Supponhamos que a funcção não é constante no intervallo cujos extremos designamos por $x_0$ e $x_0+X$. Em virtude da continuidade da funcção podemos admittir que, entre todos os valores que ella pode ter neste intervallo, haverá um *máximo;* isto é, que haverá no intervallo, incluindo os seus extremos, um ponto $x_1$ ao qual corresponda um valor da funcção que não pode ser excedido por algum outro valor que ella tenha no mesmo intervallo. Tendo supposto que a funcção é sempre *finita,* este máximo não pode ser o infinito.

Do mesmo modo hade haver um *mínimo.* A existencia do máximo e do mínimo, admittida por O. Bonnet como consequencia necessária da continuidade da funcção, foi demonstrada directamente por Weierstrass num dos theoremas conhecidos pelo seu nome.

Ora, tres casos se podem dar. Ou o máximo está num extremo, e o mínimo no outro extremo do intervallo; ou um d'elles está num extremo, e o outro num ponto intermédio; ou ambos se encontram em pontos intermédios.

Mas, se a funcção tiver valores eguaes, zero por exemplo, nos dois extremos, um pelo menos dos valores máximo e mínimo hade certamente corresponder a um ponto intermédio $x_1$ do intervallo: supponhamos que é o máximo.

É evidente que as duas differenças

$$f(x_1-h)-f(x_1),$$
$$f(x_1+h)-f(x_1)$$

hãode ser negativas ou zero, visto que $f(x_1)$ não pode ser excedido por nenhum outro valor da funcção. Dividindo a primeira por $-h$ e a segunda por $+h$, teremos duas razões que conservam sempre signaes contrarios emquanto $h$ tende para zero. Mas os seus limites tornam-se eguaes, porque devem representar a derivada da funcção no ponto $x_1$, e foi admittida a existencia d'essa derivada.

Logo esses limites não podem deixar de ser zero; com effeito, se o limite da primeira razão, por exemplo, fosse nm numero positivo, esse numero não podia ser limite da segunda razão, que nunca pode ser positiva em qualquer estado de grandeza de $h$.

Se no ponto $x_1$ o valor da funcção fosse mínimo, veriamos do mesmo modo que a derivada da funcção seria egual a zero nesse ponto.

Se a funcção fosse constante, a sua derivada seria egual a zero em todo o intervallo. E assim, concluiremos em todos os casos que:

THEOREMA III. — *Se uma funcção tem os mesmos valores nos extremos de um intervallo, no qual a funcção é sempre finita e tem derivada finita, existirá no interior do intervallo pelo menos um ponto em que a derivada da funcção é zero.*

Esta proposição é conhecida pelo nome de *theorema de Rolle* por ter sido este mathematico quem primeiro a enunciou para as funcções algebricas nos termos seguintes:

*Entre duas raizes de uma equação algebrica* f(x) = 0 *existe sempre pelo menos uma raiz da equação derivada* f′(x) = 0.

Da demonstração dada resulta que no ponto considerado $x_1$ ha verdadeiramente um *máximo* ou um *minimo* da funcção, isto é, que a funcção tem naquelle ponto um valor *maior*, ou *menor*, do que nos pontos vizinhos á esquerda e á direita de $x_1$; e que além d'isto a derivada *muda de signal* neste ponto. Podemos, pois, enunciar o theorema de Rolle nos termos seguintes:

*Dadas as mesmas condições, existe no interior do intervallo pelo menos um ponto em que a primeira derivada da funcção muda de signal.*

Se a funcção admitte representação geometrica por meio de uma curva, o theorema de Rolle exprime que:

*Entre dois pontos de uma curva continua, para os quaes a ordenada tem o mesmo valor, existe pelo menos um ponto em que a tangente á curva é parallela ao eixo dos $x$.*

3.° Consideremos o mesmo intervallo, pondo agora $X = x_0 + h$. A funcção

$$f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),$$

que é formada linearmente com a funcção dada e com a simples funcção linear $x - x_0$, goza das mesmas propriedades que a funcção $f(x)$: quer dizer, é finita e tem derivada finita no intervallo dado. Por outra parte, a mesma funcção annulla-se nos extremos do intervallo, isto é, para $x = x_0$ e $x = x_0 + h$.

D'aqui resulta pelo theorema de Rolle, que no interior do intervallo haverá um ponto $x_1$ para o qual a derivada da funcção é zero. Ora esta derivada é

$$f'(x) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h};$$

e representando por $\theta$ um numero comprehendido entre 0 e 1, $0<\theta<1$, a abscissa $x_1$ comprehendida entre $x_0$ e $x_0+h$ será da forma $x_1=x_0+\theta h$.

Por conseguinte, visto que a expressão precedente se annulla para $x=x_1$, teremos

$$f'(x_0+\theta h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0,$$

ou

$$(8) \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+h[f'(x_0+\theta h)].$$

Esta fórmula traduz a proposição conhecida pelo nome de *theorema do valor médio*. Vamos ver quaes são as principaes consequencias que d'ella se deduzem.

Imaginemos uma funcção cuja derivada é egual a zero em todos os pontos de um intervallo dado. Considerando neste intervallo dois pontos quaesquer $x_0$ e $x_0+h$, e applicando a fórmula (8), virá sempre

$$f(x_0)=f(x_0+h).$$

Assim:

THEOREMA IV.—*Se a derivada da funcção* $y=f(x)$ *fôr egual a zero em todos os pontos de um intervallo, a funcção é constante neste intervallo.*

Se duas funcções $f(x)$ e $\varphi(x)$ tiverem derivadas eguaes em todos os pontos de um intervallo, a derivada da sua differença será egual a zero e esta differença $f(x)-\varphi(x)$ será constante no intervallo. Assim, se a derivada da funcção $f(x)$ fôr sempre egual á constante A, será $f(x)=Ax+C$, sendo C uma constante: por isso que a derivada da funcção linear $Ax$ tambem é sempre egual a A.

Se não ha ponto do intervallo em que a derivada seja negativa, tambem não ha no intervallo dois pontos $x_0$ e $x_0+h$, sendo $h$ positivo, para os quaes possa ser $f(x_0)>f(x_0+h)$.

Com effeito a fórmula (8) mostra que, se esta desigualdade fosse possivel, haveria no mesmo intervallo um ponto em que $f'(x)$ seria negativa.

O theorema do valor médio exprime que num arco de uma curva contínua existe, pelo menos, um ponto em que a tangente á curva é parallela á corda do arco. O theorema de Rolle corresponde ao caso em que a corda é parallela ao eixo dos $x$, e é portanto menos geral.

**106.** Supponhamos presentemente que a funcção $y=f(x)$ é inteira. Sabemos que esta funcção tem sempre derivada e, se fôr

$$f'(x_0) \gtrless 0,$$

a funcção será respectivamente crescente ou decrescente no ponto $x_0$.

Se fôr, porém,

$$f'(x_0)=0,$$

pode acontecer que para este valor de $x$ ainda se annullem successivamente outras derivadas de $f(x)$, excepto a ultima que é uma constante. Designando por $m$ a ordem da primeira d'estas derivadas que é differente de zero naquelle ponto, pela fórmula de Taylor teremos

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^m}{m!}[f^{(m)}(x_0)+\varepsilon],$$

sendo $\varepsilon$ infinitamente pequeno com $h$.

D'aqui resulta que podemos sempre tornar $\varepsilon$ menor que $f^{(m)}(x_0)$, dando a $h$ valores sufficientemente pequenos. D'este modo o signal do segundo membro da ultima egualdade virá a depender do signal de $f^{(m)}(x_0)$ e ainda, se $m$ for ímpar, do signal de $h$. Consideremois, pois, os casos de $m$ ser par ou ímpar.

1.° caso: $m$ par. Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr negativa, da última expressão resultam as duas desigualdades:

$$f(x_0-h)-f(x_0)<0,$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0.$$

Logo, no ponto $x_0$ o valor de $f(x)$ é maior do que todos os valores que a funcção pode ter na vizinhança d'este ponto, tanto á sua esquerda como á sua direita; isto é, o valor de $f(x)$ é *máximo* nesse ponto.

Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr positiva, da mesma expressão resultam as duas desigualdades

$$f(x_0-h)-f(x_0)>0,$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0.$$

e $f(x_0)$ é um *mínimo*. O menor valor que pode ter $m$ é $m=2$.

2.° caso: $m$ ímpar. Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr positiva, acharemos do mesmo modo

$$f(x_0-h)-f(x_0)<0,$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0$$

e a funcção é crescente no ponto $x_0$. Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr negativa, teremos

$$f(x_0-h)-f(x_0)>0,$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0$$

e a funcção é decrescente. O menor valor que $m$ pode ter neste caso é $m=1$.

### § 4.° — Differenciaes.

**107**. O incremento de uma variavel pode exprimir-se antepondo a inicial $\Delta$ á letra que designa a variavel. Assim $\Delta x$ significa um incremento determinado e finito dado á variavel $x$, isto é, a differença de dois valores de $x$.

Do mesmo modo $\Delta y$ ou $\Delta f(x)$ indicará a differença dos valores correspondentes da funcção $y = f(x)$, de modo que a razão incremental será expressa por algum dos symbolos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

O limite d'esta razão para $\Delta x = 0$ é a derivada da funcção. Se a quizermos exprimir pelo quociente de duas quantidades, que designaremos respectivamente por $dy$ e $dx$, podemos considerar arbitrária uma d'estas quantidades, $dx$ por exemplo. Suppondo que $dx$ representa o incremento dado á variavel independente, isto é, o proprio $\Delta x$, daremos a $dx$ o nome de *differencial da variavel independente;* e $dy$ ficará então definido pela fórmula.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

ou ainda

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Por onde se vê que: *$dy$ é o producto da derivada da funcção pela differencial da variavel independente.*

A quantidade $dy$ chama-se *differencial da funcção,* advertindo que geralmente esta differencial não representa propriamente o incremento da funcção, como adeante se verá.

A derivada de $f(x)$, que era expressa por $f'(x)$ na notação de Lagrange, fica assim representada nesta notação, devida a Leibnitz, *pelo quociente*

$$\frac{dy}{dx}$$

*da divisão da differencial da funcção pela differencial da variavel independente.*

**108.** Como dissemos, a differencial da funcção não é propriamente o incremento da funcção devido ao incremento $dx$ da variavel $x$, mas tem uma relação íntima com aquelle incremento. Com effeito, de

$$\lim_{x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

se conclue que é

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \omega,$$

sendo $\omega$ infinitamente pequeno com $\Delta x$. Pondo $\Delta x = dx$, teremos pois

$$\Delta f(x) = f'(x)\, dx + \omega\, dx.$$

Pela natureza de $\omega$ o producto $\omega\, dx$ é um infinitamente pequeno de ordem superior á ordem de $dx$. Mas por definição é $f'(x)\, dx = dy$, e por conseguinte será finalmente

$$\Delta y = dy + \varepsilon,$$

sendo $\varepsilon$ um infinitamente pequeno de ordem superior relativamente a $dx$. Logo:

*A differencial da funcção não exprime o incremento que resulta para a funcção do incremento* dx *da variavel, mas differe d'aquelle incremento num infinitésimo de ordem superior a* dx.

Convem observar que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção linear, o incremento da funcção coincide com a sua differencial.

**109.** Se a primeira derivada $f'(x)$ de uma funcção $f(x)$ é ainda funcção contínua e tem derivada num ponto ou num intervallo, derivando-a teremos a segunda derivada de $f(x)$ que se representa por $f''(x)$; e assim por deante.

Com a noção de derivada de ordem superior está naturalmente relacionado o conceito de *differencial de ordem superior;* e em primeiro logar veremos como este conceito se applica á variavel independente.

Ora por differencial de primeira ordem d'esta variavel $x$ entende-se, como vimos, um incremento arbitrário dado a $x$. Mas para cada valor de $x$ podemos dar um valor determinado á differencial $dx$, que d'este modo se pode considerar como funcção de $x$. A differencial d'esta funcção será egual ao producto da sua derivada relativamente a $x$ multiplicada por $dx$, ou

$$d(dx) = d^2 x = \frac{d(dx)}{dx} dx.$$

Teremos assim a *differencial de 2.ª ordem de $x$.*

Ora, sendo arbitraria a escolha da differencial $dx$ para cada ponto $x$, podemos attribuir-lhe um valor constante em todos os pontos; neste caso a derivada de $dx$ relativamente a $x$ será egual a zero, ou $d^2 x = 0$.

Por differencial de segunda ordem da funcção entende-se a differencial da primeira differencial

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Designando-a por $d^2 y$, será $d^2 y$ egual ao producto da derivada de $dy$ relativamente a $x$ multiplicada por $dx$, isto é,

$$d^2 y = \left[f''(x)\, dx + f'(x) \frac{d(dx)}{dx}\right] dx = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x.$$

Por conseguinte, suppondo constante, como acima fizemos, a primeira differencial da variavel independente, ou $d^2x=0$, virá finalmente

$$d^2y=f''(x)\,dx^2,$$

donde se tira

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Pelo mesmo processo se acharia a expressão da terceira derivada, da quarta, etc.

### § 5.º — Funcções de duas variaveis.

**110.** Consideremos a funcção de duas variaveis independentes

$$z=f(x,y),$$

que supporemos contínua. Derivando-a relativamente a $x$ como se $y$ fosse constante, ou em ordem a $y$ como se $x$ fosse constante, teremos, como no caso das funcções inteiras, as *derivadas parciaes* de $z$ em ordem a $x$ e a $y$; e o mesmo diriamos se fosse maior o numero das variaveis independentes.

Suppondo estas derivadas contínuas e derivando-as do mesmo modo em ordem a $x$ e a $y$, teriamos as derivadas parciaes de segunda ordem, e assim por deante.

O resultado que se obtem, quando se deriva $p$ vezes consecutivas a funcção $f(x,y)$ em ordem á variavel $x$ sómente e depois se deriva ainda a última derivada $q$ vezes em ordem a $y$, é expresso na notação do n.º 16 por

$$f^{(r)}_{x^p y^q}(x,y),$$

sendo $r=p+q$. Esta mesma derivada se designa na notação de Jacobi pelo symbolo

$$\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q},$$

indicando pela forma particular da inicial $\partial$ que $\frac{\partial f}{\partial x}$, por exemplo, é uma derivada parcial e não a derivada de uma funcção $f$ de uma só variavel $x$.

Chama-se *differencial parcial* ao producto da differencial de uma variavel pela derivada parcial da funcção relativa á mesma variavel.

Chama-se *differencial total* á somma das differencias parciaes relativas a cada uma das variaveis independentes.

**111.** Applicando o theorema do valor médio á funcção $f(x+dx, y+dy)$ considerada como funcção de uma variavel $x$ sómente, teremos

$$f(x+dy, y+dy) = f(x, y+dy,) + dx f'_x(x+\theta\, dx, y, +dy).$$

Mas, considerando $f(x, y+dy)$ como funcção de $y$ sómente, será pelo mesmo theorema

$$f(x, y+dy) = f(x, y) + dy f'_y(x, y+\theta' dy)$$

e, substituindo na expressão precedente, acha-se

$$(9) \quad \begin{aligned} f(x+dx, y+dy) = f(x, y) + dx f'_x(x+\theta\, dx, y+dy) \\ + dy f'_y(x, y+\theta' dy). \end{aligned}$$

Nesta fórmula se contem o theorema do valor médio para o caso presente, e por ella teremos o incremento que a funcção experimenta em virtude dos incrementos $dx$ e $dy$ que receberam as variaveis. Mas, se as derivadas parciaes $f'_x$ e $f'_y$ forem ainda funcções contínuas de $x$ e $y$, sabemos que é

$$f'_x(x+\theta\,dy,\,y+dy)=f'_x(x,y)+\omega,$$
$$f'_y(x,\,y+\theta'\,dy)=f'_y(x,y)+\omega',$$

sendo $\omega$ e $\omega'$ quantidades que tendem para zero conjunctamente com $dx$ e $dy$. Por conseguinte $\omega\,dx$ e $\omega'\,dy$ são infinitésimos de ordem superior relativamente a $dx$ e $dy$ e, substituindo em (9) as duas últimas expressões, teremos finalmente

$$(10) \qquad \Delta z=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy+\omega\,dx+\omega'\,dy,$$

designando por $\Delta z=f(x+dx,y+dy)-f(x,y)$ o incremento da funcção $z=f(x,y)$.

A fórmula (10) exprime o *theorema da differencial total.* Por ella se vê que esta differencial differe do incremento da funcção em infinitésimos de ordem superior relativamente aos incrementos differenciaes $dx$ e $dy$ das variaveis independentes.

**112.** Chama-se *funcção composta* á funcção de um certo numero de variaveis que, não sendo independentes entre si, são por sua vez funcções de uma única variavel independente $x$.

Seja, por exemplo,

$$y=f(u,v),$$

sendo $u$ e $v$ funcções de $x$. Será $y$ uma funcção de $x$, *composta* por intermédio das funcções $u$ e $v$.

Admitindo que $y$ é funcção contínua de $u$ e $v$ e tem derivadas finitas, e que do mesmo modo $u$ e $v$ são funcções contínuas de $x$, é claro que $y$ tambem será funcção de $x$. A derivada d'esta funcção pode-se obter do modo seguinte.

Se dermos a $x$ o incremento $\Delta x$, resultarão para $u$ e $v$ determinados incrementos $\Delta u$ e $\Delta v$ e d'elles resultará ainda um incremento $\Delta y$ para $y$. Os incrementos $\Delta u$ e $\Delta v$ não são arbitrários, porque dependem do incremento $\Delta x$; só este é arbitrário.

Ora, considerando $y$ como funcção das duas variaveis $u$ e $v$, pela fórmula (10) teremos

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + \varepsilon,$$

sendo $\varepsilon$ um infinitésimo de ordem superior relativamente a $\Delta u$ e $\Delta v$. Dividindo esta egualdade por $\Delta x$, vem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\varepsilon}{\Delta x}.$$

Fazendo convergir $\Delta x$ para zero, $\Delta u$ e $\Delta v$ tambem convergem para zero, visto que $u$ e $v$, por hypothese, teem derivadas determinadas e finitas; os limites das razões $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ são precisamente estas derivadas. Portanto $\Delta u$ e $\Delta v$ são infinitésimos da mesma ordem que $\Delta x$, ou de ordem superior; d'aqui resulta que $\varepsilon$ é certamente um infinitésimo de ordem superior a $\Delta x$, isto é, que $\frac{\varepsilon}{\Delta x}$ converge para zero com $\Delta x$.

Logo, passando ao limite para $\Delta x = 0$, a última fórmula torna-se em

$$\text{(11)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx};$$

a mesma lei se observaria na formação da derivada quando as variaveis intermédias fossem mais de duas, e assim:

THEOREMA. — *A derivada da funcção composta é a somma dos productos que se formam multiplicando a derivada parcial da funcção relativa a cada variavel intermédia pela derivada d'esta variavel em ordem á independente.*

**113.** Seja $y$ uma funcção implícita de $x$ definida pela equação

$$f(x, y)=0.$$

Se conhecessemos um valor de $y=\varphi(x)$ que, substituido por $y$, satisfizesse a esta equação, o resultado d'esta substituição tornaria $f(x, y)$ numa funcção de $x$ que teria o valor zero em todos os pontos $x$ para os quaes se pode definir a funcção $y$; por conseguinte a derivada d'essa funcção de $x$ será zero.

Derivemos $f(x, y)$, considerando-a como funcção composta das duas $x$ e $y$. Pela fórmula (11) teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

ou antes

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0;$$

e d'aqui se tira

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

que é a expressão da derivada da funcção implícita.

Para a funcção inteira $f(x, y)$, cujas primeiras derivadas parciaes são expressas pelas fórmulas (4) do n.º 16, seria

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{by+cx+e}{ay+bx+d}.$$

Em geral:

Theorema. — *Forma-se a derivada da funcção implícita dividindo a sua derivada parcial em ordem a* x *pela derivada parcial em ordem a* y *e mudando o signal ao quociente.*

## § 6.º — Funcções homogeneas.

**114.** A funcção homogenea inteira toma o nome de *forma algébrica*. As formas dividem-se em *binárias, ternárias, quaternárias*, etc. conforme encerram duas, tres, quatro, etc. variaveis; e em *lineares, quadráticas, cúbicas, quárticas*, etc. conforme são do 1.º, 2.º, 3.º, 4.º grau, etc. O grau da forma é tambem o seu grau de homogeneidade.

Consideremos uma funcção homogenea qualquer das variaveis $x, y, \ldots$, e seja $i$ o seu grau de homogeneidade. Por definição (n.º 11) será

$$(12) \qquad f(kx, ky, \ldots) \equiv k^i f(x, y, \ldots).$$

Derivemos esta expressão relativamente a $k$, considerando as variaveis $x, y, \ldots$ como constantes. Pela fórmula (11) teremos

$$(13) \qquad \frac{\partial f}{\partial (kx)} \frac{d(kx)}{dk} + \frac{\partial f}{\partial (ky)} \frac{d(ky)}{dk} + \ldots \equiv ik^{i-1} f(x, y \ldots).$$

Ora

$$\frac{d(kx)}{dk} = x, \frac{d(ky)}{dk} = y, \ldots;$$

por outra parte a identidade (12) hade subsistir para qualquer valor de $k$, donde resulta que o mesmo se pode dizer de (13). Pondo $k = 1$, esta última fórmula torna-se em

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots \equiv i f(x, y, \ldots).$$

Logo:

Theorema. — *A somma dos productos que se formam, multiplicando as derivadas parciaes da funcção homogenea relativas a cada variavel por esta mesma variavel, é identicamente egual ao producto da funcção pelo respectivo grau de homogeneidade.*

Esta proposição é conhecida pelo nome de *theorema de Euler*.

Para a funcção inteira de grau $n$ é $i=n$. Seja, por exemplo,

$$(14) \quad f(x,y,z) \equiv cx^2 + ay^2 + gz^2 + 2bxy + 2dyz + 2ezx;$$

teremos

$$x f'_x(x,y,z) + y f'_y(x,y,z) + z f'_z(x,y,z) \equiv 2 f(x,y,z),$$

sendo $f'_x = 2\,cx + 2\,by + 2\,ez$, etc.

**115.** Chama-se *discriminante* de uma forma algébrica quadrática o eliminante das equações que se obteem egualando a zero cada uma das suas derivadas parciaes.

Para a fórma binária

$$ay^2 + 2\,bxy + cx^2,$$

cujas derivadas parciaes são

$$2\,by + 2\,cx, \quad 2\,ay + 2\,bx,$$

o discriminante será

$$\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = b^2 - ac.$$

Do mesmo modo para a forma ternária (14), cujas derivadas parciaes são

$$\begin{gathered} 2ay + 2bx + 2dz, \\ 2by + 2cx + 2ez, \\ 2dy + 2ex + 2gz, \end{gathered}$$

o discriminante será o determinante symétrico

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{vmatrix}.$$

Em qualquer dos casos podemos supprimir o factor 2, commum a todos os termos das equações $f'_x = 0$, etc.

## XII. — Composição das equações.

**116.** Se tivermos uma funcção inteira de grau $n$

$$f(x) = p_{n-1}x + p_{n-2}x^2 + \ldots + p_0 x^n$$

que se annulla para $x = 0$, designemos o módulo de $x$ por $\rho_1$ e o maior dos módulos dos coefficientes por $\rho_2$. Pois que o módulo da somma não pode ser maior que a somma dos módulos das parcellas, será

$$\operatorname{mod} f(x) \gtreqless \rho_2 (\rho_1 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_1^n) = \rho_2 \frac{\rho_1 - \rho_1^{n+1}}{1 - \rho_1},$$

segundo os theoremas sobre o módulo do producto e da potencia. Da última expressão se conclue *à fortiori*, para valores de $\rho_1 < 1$,

$$\operatorname{mod} f(x) < \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1}$$

Por conseguinte, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena $\delta$, podemos sempre tornar $\operatorname{mod} f(x) < \delta$, determinando $\rho_1$ pela condição

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1} < \delta \quad \text{ou} \quad \rho_1 < \frac{\delta}{\rho_2 + \delta}.$$

D'aqui se deduzem os seguintes corollarios:

1.º Ordenando o polynómio $f(x)$ segundo as potencias ascendentes da variavel $x$, podemos dar a $f(x)$ a forma

$$f(x) = x^k (p_{n-k} + \varepsilon);$$

nesta expressão $k$ será um numero inteiro e positivo, ou zero, e $\varepsilon$ é uma funcção inteira de $x$ que se annula para $x=0$. Por conseguinte é sempre possivel determinar uma quantidade positiva $r$ tal, que o módulo de $\varepsilon$ seja inferior ao de $p_{n-k}$ para todos os valores de $x$ cujos módulos estejam comprehendidos entre 0 e $r$.

2.° Ordenando segundo as potencias descendentes de $x$ tambem podemos dar a $f(x)$ a forma

$$f(x) = x^n (p_0 + \varepsilon),$$

sendo $n$ o grau de $f(x)$ e $\varepsilon$ uma funcção inteira de $\frac{1}{x}$ que se annulla para $\frac{1}{x}=0$. Por conseguinte é sempre possivel determinar uma quantidade positiva $r$ tal, que para todos os valores de $\frac{1}{x}$ cujos módulos sejam inferiores a $\frac{1}{r}$, ou antes, para todos os valores de $x$ cujos módulos sejam maiores que $r$, o módulo de $\varepsilon$ seja menor que o de $p_0$.

Ao mesmo tempo o módulo de $x^n$ cresce indefinidamente; isto é, *para valores sufficientemente grandes de* mod x *o* mod $f(x)$ *pode exceder qualquer numero positivo dado.*

3.° Supponhamos que são reaes a variavel $x$ e os coefficientes de um polynomio $f(x)$ ordenado no sentido crescente ou decrescente dos graus dos seus termos. É sempre possivel dar a $x$ um valor positivo $r$ tal, que o valor correspondente de $f(x)$ tenha o signal do seu primeiro termo. O mesmo terá logar para todos os valores de $x$ *menores* que $r$, ou *maiores* que $r$, conforme $f(x)$ está ordenada em ordem crescente ou decrescente.

4.° Dando a $x$ na funcção inteira $f(x)$ o incremento real ou imaginário $h$, será pela fórmula de Taylor

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} + \ldots$$

D'aqui resulta que será

$$\operatorname{mod}[f(x+h)-f(x)] \overline{\gtrless} \operatorname{mod} h \operatorname{mod} f'(x)$$
$$+(\operatorname{mod} h)^2 \operatorname{mod} \frac{f''(x)}{2}+\ldots;$$

e pois que o segundo membro se annulla para $\operatorname{mod} h = 0$, resulta que

$$\operatorname{mod}[f(x+h)-f(x)]$$

se pode tornar menor que qualquer quantidade positiva arbitrariamente pequena $\delta$ para valores sufficientemente pequenos de *mod h*.

**117.** Diz-se *algébrica, racional* e *inteira* a equação

$$(1) \qquad p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0,$$

cujo primeiro membro é um polynómio inteiro contendo a *incógnita x*. Já sabemos o que deve entender-se por *primeiro, segundo, último* termo d'este polynómio. O primeiro termo pode considerar-se sempre positivo porque, se fosse negativo, multiplicariamos a equação por $-1$. Chama-se *raiz* da equação o numero $\alpha$ que, substituido por $x$, torna $\operatorname{mod} f(\alpha)=0$.

Na demonstração do princípio fundamental da theoria das equações algébricas inteiras havemos de fazer uso do seguinte:

Lemma. — *Dada a funcção inteira* f(x), *existirá sempre pelo menos um valor* $\alpha$ *de* x, *para o qual o valor de* mod f(x) *é mínimo.*

Em outros termos: para qualquer valor de *mod x* será sempre

$$\operatorname{mod} f(x) \overline{\gtrless} \operatorname{mod} f(\alpha).$$

Na demonstração d'este lemma começaremos por provar que:

I *Existe necessariamente um numero determinado real e positivo* H *tal, que para todos os valores reaes ou imaginários de* x *seja sempre* $\operatorname{mod} f(x) \gtreqless H$; *e além d'isso tal, que haja sempre algum valor de* x *para o qual seja*

$$(2) \qquad \operatorname{mod} f(x) - H < \varepsilon,$$

*por menor que seja a quantidade positiva, differente de zero e arbitrariamente pequena* $\varepsilon$.

Imaginemos construida de qualquer modo uma successão indefinida de numeros positivos, differentes de zero e decrescentes

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \varepsilon_4, \ \ldots,$$

taes que seja

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Considerando a progressão

$$0, \ \varepsilon_1, \ 2\varepsilon_1, \ 3\varepsilon_1, \ \ldots,$$

cujos termos dividem todo o campo dos numeros positivos em pequenos intervallos de grandeza $\varepsilon$, é claro que algum d'estes intervallos será o primeiro em que se encontre um valor possivel de $\operatorname{mod} f(x)$. Designemos por $\mu\varepsilon_1$ e $(\mu+1)\varepsilon_1$ os dois extremos d'este intervallo; para todos os valores de $x$ será

$$\operatorname{mod} f(x) \gtreqless \mu\varepsilon_1,$$

e entre elles hade certamente existir um pelo menos para o qual seja

$$\operatorname{mod} f(x) \lesseqgtr (\mu+1)\varepsilon_1.$$

Dividindo este primeiro intervallo em outros mais pequenos, cuja amplitude não exceda $\varepsilon_2$, por meio da progressão

$$\mu\,\varepsilon_1 = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m = (\mu + 1)\,\varepsilon_1,$$

supponhamos que o primeiro dos novos intervallos em que se encontra um valor de $mod\, f(x)$ está comprehendido entre $a_i$ e $a_{i+1}$.

Divida-se ainda este último intervallo por meio de terceira progressão

$$b_1,\ \ b_2,\ \ b_3, \ldots$$

em outros cuja amplitude não exceda $\varepsilon_3$, e sejam $b_j$ e $b_{j+1}$ os extremos do primeiro d'estes intervallos em que se encontra um valor de $mod\, f(x)$.

Fazendo applicação indefinida do mesmo processo, concebe-se que cheguemos a formar duas classes de numeros taes como

$$a_1\,,\ \ a_i\,,\ \ b_j\,,\ \ c_h\,,\ \ldots$$
$$a_m\,,\ \ a_{i+1},\ \ b_{j+1},\ \ c_{h+1}, \ldots$$

Cada elemento da primeira d'estas classes é inferior aos elementos da segunda; uns e outros verificam as condições

$$a_m - a_1 = \varepsilon_1,\ a_{i+1} - a_i \overline{\overline{\gtrless}}\, \varepsilon_2,\ b_{j+1} - b_j \overline{\overline{\gtrless}}\, \varepsilon_3,\ c_{h+1} - c_h \overline{\overline{\gtrless}}\, \varepsilon_4,\ \text{etc.}$$

Logo, existe um numero perfeitamente determinado H, que é definido por estas duas classes; este numero gosa evidentemente das propriedades attribuidas a H no enunciado (I).

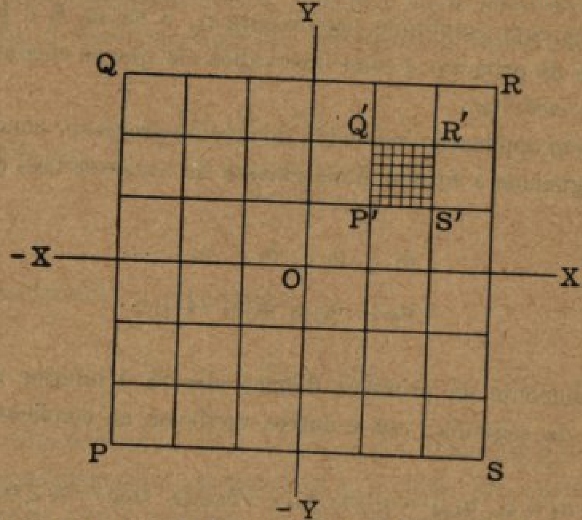
II.—*Existe pelo menos um valor determinado* $\alpha$ *de* x *para o qual será precisamente* mod f$(\alpha)$=H, *sendo* H *o mesmo numero a que se refere o enunciado* (I).

Em outros termos: não só existe um limite de que $mod\, f(x)$

se approxima indefinidamente, mas ha mesmo um valor determinado de *mod* $x$ que torna exactamente *mod* $f(x) = \mathrm{H}$, como vamos mostrar.

Ora, sendo $f(x)$ um polynómio inteiro, podemos sempre determinar um valor de *mod* $x$ que torne *mod* $f(x)$ maior do que qualquer grandeza dada (n.º 116, 2.º); isto é, segundo a representação geometrica dos imaginários de Gauss, podemos sempre achar um valor bastante grande de $r = mod\, x$ para que, descrevendo um circulo de raio $r$ com o centro na origem das coordenadas, seja $mod\, fx > \mathrm{H}$ para todos os pontos $x$ exteriores ao círculo.

Por conseguinte podemos tambem construir um quadrado




PQRS com o centro na origem e os lados parallelos aos eixos coordenados, de modo que para todos os pontos $x$ existentes no exterior do quadrado ou na sua periferia a differença

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{mod}\, f(x) - \mathrm{H}$$

se conserve sempre superior a um numero determinado, positivo e differente de zero.

D'aqui se segue que os pontos $x$, por meio dos quaes é possivel, conforme o enunciado (I), satisfazer á desegualdade (2), só devem ser procurados no *interior* do quadrado PQRS.

Designemos por $l$ o numero que exprime a medida do lado PQ e, por meio de rectas parallelas aos dois eixos coordenados, divida-se este quadrado noutros eguaes, em numero de $m^2$. A medida do lado de cada um dos novos quadrados será expressa por $\frac{l}{m}$ e entre elles haverá pelo menos um $P'Q'R'S'$ tal, que dentro d'elle ou na sua periferia se encontrem pontos em que a desegualdade (2) seja verificada. Se não houvesse nenhum, seria impossivel satisfazer a esta condição por meio de pontos contidos no quadrado PQRS, o que estaria em contradição com o que temos admittido.

Dividamos ainda $P'Q'R'S'$ no mesmo numero de quadrados eguaes, e segundo o mesmo processo; o lado de cada um dos novos quadrados será expresso por $\frac{l}{m^2}$, e com o mesmo raciocinio se mostraria que entre elles hade haver algum tal, que no seu interior ou na sua periferia se encontrem pontos que verifiquem a condição (2).

Continuando pelo mesmo processo, conclue-se que chegariamos a construir uma serie illimitada de quadrados, cujos lados

$$\frac{l}{m}, \frac{l}{m^2}, \frac{l}{m^3}, \ldots$$

decrescem indefinidamente. Designando por

$$(4) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$$

os valores absolutos das abscissas e por

$$(5) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots$$

os valores absolutos das ordenadas dos vértices

$$P', P'', P''', \ldots$$

de cada um d'estes quadrados, vê-se que cada uma das successões infinitas (4) e (5) tende para um limite determinado.

Com effeito será

$$|a_j - a_i| < \frac{l}{m^i}, \quad |b_j - b_i| < \frac{l}{m^i},$$

para cada valor de $i$ e para todos os valores de $j > i$; por conseguinte as successões (4) e (5) satisfazem á condição necessária e sufficiente para a existencia do limite (n.º 79). Pondo

$$\lim_{n=\infty} a_n = A, \quad \lim_{n=\infty} b_n = B,$$

no interior do quadrado PQRS existirá um ponto determinado M, que é o affixo do complexo $A + Bi$; este ponto encontra-se no interior de cada um dos quadrados successivos, que atraz considerámos.

Ora a funcção $f(x)$ é contínua no ponto M (n.º 116, 4.º); além d'isto os lados dos quadrados que conteem M são indefinidamente decrescentes, e tendem para zero. Por conseguinte é claro que, dado um numero $\delta$ positivo, arbitrariamente pequeno e differente de zero, poderá sempre determinar-se um quadrado $P^{(i)} Q^{(i)} R^{(i)} S^{(i)}$ muito pequeno e tal, que seja em valor absoluto

$$|\operatorname{mod} f(x) - \operatorname{mod} f(A + Bi)| < \delta$$

para todos os pontos $x$ contidos no mesmo quadrado.

Por outra para parte a differença (3) pode-se tornar arbitrariamente pequena por meio de pontos contidos no mesmo quadrado, como já se disse; e entre estes pontos deve existir *pelo* *menos um* $x_i$ para o qual seja

$$(6)\qquad |\operatorname{mod} f(x_i) - H| < \delta.$$

Mas este ponto $x_i$ encontra-se entre aquelles que devem satisfazer á desegualdade precedente, onde se pode substituir $x$ por $x_i$; e então d'essa desegualdade e de (6) se conclue *à fortiori* que será

$$(7)\qquad |\operatorname{mod} f(A + Bi) - H| < 2\delta.$$

Ora o primeiro membro de (7) é um numero determinado e constante, em quanto que a quantidade $\delta$ se pode tornar arbitrariamente pequena. Por conseguinte aquella relação só pode subsistir com a condição de ser o seu primeiro membro egual a zero, ou

$$\operatorname{mod} f(A + Bi) = H.$$

Fica assim completada a demonstração do lemma enunciado.

**118.** Theorema de Dalembert. — *Toda a equação algébrica racional e inteira tem pelo menos uma raiz real ou imaginária.*

São conhecidas muitas demonstrações d'este principio, que é o fundamento da theoria das equações. Adoptamos com ligeiras variantes a de Legendre, modificada por Cauchy.

Seja $f(x) = 0$ uma equação algébrica e inteira, de coefficientes reaes ou imaginários. Começaremos por provar que:

*Se a quantidade real ou imaginária* $x_0$ *substituida por* $x$ *em* $f(x)$ *não tornar* $\operatorname{mod} f(x_0) = 0$, *haverá um numero real ou imaginário* $h$ *differente de zero para o qual é*

$$(8)\qquad \operatorname{mod} f(x_0 + h) < \operatorname{mod} f(x_0).$$

No desenvolvimento de $f(x_0+h)$ pela fórmula de Taylor pode acontecer que para $x=x_0$ se annullem successivamente algumas derivadas de $f(x)$, incluindo a primeira. Não podem annullar-se todas pela razão que já dissemos (n.º 106) e, designando por $m$ a ordem da primeira que não se annulla, teremos

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Dividindo os dois membros d'esta identidade por $f(x_0)$, o que é permittido por ser $f(x_0)$ differente de zero, acha-se o quociente

$$Q=\frac{f(x_0+h)}{f(x_0)}=1+A_m h^m+\ldots+A_n h^n,$$

pondo por brevidade

$$A_i=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!f(x_0)},\quad i=m,\, m+1,\, \ldots,\, n.$$

Ora, dando ao coefficiente $A_m$ a forma

$$A_m=\rho_m(\cos\varphi_m+i\operatorname{sen}\varphi_m),$$

será $\rho_m \neq 0$ por ser $A_m \neq 0$. Por outra parte, sendo

$$h=\rho(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi),$$

será tambem

$$A_m h^m=\rho_m\rho^m[\cos(\varphi_m+m\varphi)+i\operatorname{sen}(\varphi_m+m\varphi)].$$

Posto isto, determinemos o argumento $\varphi$ da arbitrária $h$ pela condição de ser

$$\varphi_m + m\varphi = \pi, \text{ ou } \varphi = \frac{\pi - \varphi_m}{m};$$

virá

$$A_m h^m = -\rho_m \rho^m,$$

e o quociente Q torna-se em

$$(9) \quad Q = (1 - \rho_m \rho^m) + h^m (A_{m+1} h + A_{m+2} h^2 + \ldots + A_n h^{n-m}).$$

Determinemos tambem o módulo $\rho$ de $h$ pela condição de ser

$$\rho_m \rho^m < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \sqrt[m]{\frac{1}{\rho_m}};$$

a quantidade $1 - \rho_m \rho^m$ será positiva e *mod* $(1 - \rho_m \rho^m) = 1 - \rho_m \rho^m$.

Além d'isto, aos outros termos de (9) podemos dar a forma $Rh^m$, sendo R um polynómio inteiro em $h$, que se annulla para $h = 0$; e ainda podemos (n.º 116) sujeitar $\rho$ á condição de tornar

$$\text{mod}\, R < \rho_m \quad \text{ou} \quad \text{mod}\,(Rh^m) < \rho_m \rho^m.$$

Dando a $\rho$ o menor dos valores determinados pelas duas condições precedentes, virá finalmente

$$\text{mod}\, Q = \frac{\text{mod}\, f(x_0 + h)}{\text{mod}\, f(x_0)} < 1,$$

e por conseguinte

$$\text{mod}\, f(x_0 + h) < \text{mod}\, f(x_0),$$

como queriamos demonstrar.

Ora, se designarmos por $\alpha$ um dos valores de $x$ para os quaes $f(x)$ tem o valor mínimo, será (n.º 117) para todos os valores possiveis de $x$

$$(10) \qquad \operatorname{mod} f(x) \geqq \operatorname{mod} f(\alpha).$$

Por conseguinte será $\operatorname{mod} f(\alpha) = 0$; com effeito, se podesse ser

$$\operatorname{mod} f(\alpha) = A > 0,$$

haveria um numero $h$, como acabamos de demonstrar, que tornaria

$$\operatorname{mod} f(\alpha + h) < A,$$

e esta desegualdade é evidentemente incompativel com (10).

D'este modo fica demonstrado que a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz $\alpha$.

**119.** Designando por $a_1$ uma raiz da equação $f(x) = 0$ de grau $n$, o polynómio $f(x)$ será divisivel por $x - a_1$ (n.º 9, *Theor. I*); e o quociente d'esta divisão será um polynómio inteiro de grau $n - 1$, que designaremos por $f_1(x)$.

Mas a equação $f_1(x) = 0$ terá do mesmo modo uma raiz $a_2$; portanto $f_1(x)$ será divisivel por $x - a_2$, e o quociente da divisão será ainda uma funcção inteira $f_2(x)$ do grau $n - 2$.

Continuando pelo mesmo processo, facilmente se reconhece que tem logar em todos os casos a fórmula

$$(11) \qquad f(x) = p_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

que no n.º 9 ficou dependente da existencia das raizes $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$.

Todos estes numeros são raizes da equação $f(x) = 0$. Mas vimos naquelle numero que o polynómio de grau $n$ não pode annullar-se para mais de $n$ valores differentes de $x$, excepto se fôr identicamente $f(x)=0$, isto é, se os coefficientes de todos os termos de $f(x)$ forem zero. Logo, a equação de grau $n$ não tem mais de $n$ raizes.

Por outra parte podem ser eguaes alguns factores do segundo membro de (14). Se fôr, por exemplo, $a_1=a_2=\ldots=a_i$ $(i<n)$ diremos que a equação tem $i$ *raizes eguaes* a $a_1$, ou que $a_1$ é uma *raiz múltipla, do grau i de multiplicidade*. Com esta convenção a equação tambem não pode ter menos de $n$ raizes e portanto:

*A equação algébrica e inteira de grau* n *tem* n *raizes reaes ou imaginárias, eguaes ou deseguaes.*

Se houver só uma raiz egual a $a_1$, diz-se que $a_1$ é *raiz simples;* se houver duas, é *dupla,* etc. Em geral daremos a $f(x)$ a forma

$$(12) \qquad f(x)=p_0(x-a_1)^r(x-a_2)^s\ldots(x-a_k)^v,$$

sendo $r+s+\ldots+v=n$. Se fôr $r=s=\ldots=v=1$, a equação só tem raizes simples.

O grau da equação pode abaixar-se em tantas unidades, quantas sejam as raizes conhecidas da mesma equação. Bastará dividir o seu primeiro membro pelo producto dos factores binómios da forma $x-a$ formados com estas raizes.

**120**. Na equação inteira de *coefficientes reaes* as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas.

Com effeito, se $a+ib$ é uma raiz da equação $f(x)=0$, será

$$f(x)=[x-(a+ib)]\,Q$$

Mas, sendo reaes os coefficientes dos termos de $f(x)$, a quantidade $i$ deve desapparecer do segundo membro d'esta identidade quando se effectuarem as operações indicadas. Logo, no producto de $x-(a+ib)$ por Q só pode haver potencias pares de $i$ e a identidade precedente subsiste quando se muda $i$ em $-i$. Teremos, pois,

$$f(x) \equiv [x-(a-ib)]\,Q',$$

sendo ainda $Q'$ funcção inteira de $x$; por onde se vê que $a-ib$ é tambem raiz da equação $f(x)=0$.

O producto (n.º 72, 2.º)

$$[x-(a+ib)]\,[x-(a-ib)] = (x-a)^2+b^2$$

é positivo para qualquer valor real de $x$. Por conseguinte, se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ forem *todas* as raizes reaes da equação (1), na identidade

$$(13) \qquad f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)\,\varphi(x)$$

o factor $\varphi(x)$ é o producto dos factores binómios correspondentes ás raizes imaginárias sómente, e portanto conserva valores positivos para todos os valores reaes de $x$. O grau $n-m$ de $\varphi(x)$ será par, visto que a equação $\varphi(x)=0$ só tem raizes imaginárias, cujo numero é par.

**121.** Suppondo a $f(x)$ a forma (1) e designando por $a_1$, $a_2, \ldots, a_n$ as $n$ raizes da equação $f(x)=0$, teremos

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \equiv p_0 (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Attendendo á regra da multiplicação binomial e ao principio das identidades, d'esta egualdade se deduz que será

$$(14) \qquad p_i = (-1)^i p_0 S_i\,, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

designando por $S_i$ a somma dos productos distinctos formados com as raizes, tomadas $i$ a $i$. Assim teremos designadamente para o coefficiente do segundo termo da equação dada

$$p_1 = -p_0(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

e para o termo conhecido

$$p_n = (-1)^n p_0 a_1 a_2 \ldots a_n;$$

isto é:

*O coefficiente do segundo termo é egual ao producto do coefficiente do primeiro pela somma das raizes tomadas com signal contrário.*

*O termo conhecido é egual ao coefficiente do primeiro termo multiplicado pelo producto das raizes, com o mesmo signal ou com signal contrário conforme o grau da equação é par ou impar.*

**122.** Se tivermos a egualdade

$$(x-a_1)^r (x-a_2)^s \ldots (x-a_k)^v \equiv (x-a'_1)^{r'} (x-a'_2)^{s'} \ldots (x-a'_k)^{v'}$$

com $r+s+\ldots+v=r'+s'+\ldots+v'=n$, o binómio $x-a'_1$, que é factor do segundo membro, dividirá tambem o primeiro. Mas esta condição não se poderá realisar, sem que algum dos factores lineares do primeiro membro seja precisamente egual a $x-a'_1$; supponhamos que é $x-a_1=x-a'_1$. Do modo mesmo se mostraria que deverá ser $x-a'_2=x-a_2$, etc.

Assim a egualdade precedente tornava-se em

$$(x-a_1)^r (x-a_2)^s \ldots (x-a_k)^v \equiv (x-a_1)^{r'} (x-a_2)^{s'} \ldots (x-a_k)^{v'}.$$

Suppondo $r > r'$ e dividindo ambos os membro por $(x-a_1)^{r'}$, teriamos

$$(x-a_1)^{r-r'} (x-a_2)^s \ldots (x-a_k)^v \equiv (x-a_2)^{s'} \ldots (x-a_k)^{v'}.$$

Por conseguinte

$$(x - a_1)^{r-r'}$$

seria divisor do segundo membro, o que evidentemente só pode ter logar sendo $r - r' = 0$ ou $r = r'$, visto serem differentes os numeros $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Do mesmo modo se acharia $s = s'$, etc.; e d'aqui se conclue que a decomposição do polynomio $f(x)$ em factores lineares só se pode operar por uma forma única.

## XIII. — **Maximo divisor commum. Eliminação.**

**123.** Se as equações $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$ tiverem raizes communs, os polynómios $f(x)$ e $F(x)$ serão conjunctamente divisiveis pelo producto dos factores binómios formados com estas raizes. Reciprocamente, se o polynómio $D(x)$ dividir simultaneamente os dois $f(x)$ e $F(x)$, as raizes da equação $D(x) = 0$ convirão ás duas $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$. Em geral:

DEFINIÇÃO. — *Dá-se o nome de* máximo divisor commum *de dois polynómios ao polynómio de grau mais elevado que os divide ambos.*

O grau do maior divisor commum de dois polynómios $f(x)$ e $F(x)$ indica o numero de raizes communs ás equações $fx = 0$ e $F(x) = 0$.

Designemos por A e B dois polynómios, funcções inteiras de uma variavel $x$, e por C outro polynómio que é divisor de A e de B. O producto de C por um factor $h$ independente de $x$ tambem é divisor de A, porque da identidade $A \equiv CQ$, em que Q é um polynómio inteiro, se deduz

$$A \equiv h\,C.\left(\frac{Q}{h}\right)$$

e $\frac{Q}{h}$ é ainda um polynómio inteiro relativamente a $x$. Do mesmo modo se veria que $hC$ é divisor de B; e por este motivo não se consideram differentes dois divisores communs de A e B, que se distinguem sómente por um factor constante. Ambos admittirão os mesmos factores binómios da forma $x-a$, cuja existencia unicamente nos interessa.

Ordenem-se os polynómios A e B segundo as potencias decrescentes da variavel $x$, e proceda-se á divisão de um d'elles pelo outro. Suppondo que o grau de B não é maior que o de A, obteremos assim a identidade

$$A = BQ + R,$$

em que Q e R são polynómios inteiros e o grau de R é inferior ao de B. Se um polynómio inteiro C fôr divisor de A e de B, esse polynómio será tambem divisor de B e R; com effeito, das identidades $A = CA'$ e $B = CB'$, em que $A'$ e $B'$ são polynómios inteiros, deduz-se

$$R = A - BQ = C(A' - B'Q)$$

e $A' - B'Q$ é tambem um polynómio inteiro em $x$. Do mesmo modo se provaria que um polynómio divisor de B e de R tambem é divisor de A.

Além d'isto podemos notar que, se B fôr divisor de A, será B o maior divisor commum dos dois polynómios A e B. Com effeito, designando por $m$ o grau de B, não pode haver polynómio de grau superior a $m$ que seja divisor de B. Por outra parte um polynómio C de grau $m$, que divida ao mesmo tempo A e B, não pode neste caso distinguir-se de B senão por um factor constante; por isso que, se fôr $B = CB'$, a prática da divisão mostra que será $B' = \frac{b_0}{c_0}$, sendo $b_0$ e $c_0$ os coefficientes de $x^m$ em B e C.

**124.** Consideremos em geral dois polynómios inteiros

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \\ \mathrm{F}(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \end{cases}$$

ordenados segundo as potencias decrescentes da variavel. Suppomos que nenhum d'elles se reduz a uma simples constante e que o grau $n$ de $f(x)$ não é inferior ao grau $m$ de $\mathrm{F}(x)$, isto é, que

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad n \gtreqless m.$$

Applicando aos polynómios (1) o *algorithmo de Euclides*, empregado em Arithmetica na determinação do maior divisor commum de dois numeros, obteremos as identidades

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x) \equiv \mathrm{Q}_0(x)\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{R}_1(x), \\ \mathrm{F}(x) \equiv \mathrm{Q}_1(x)\,\mathrm{R}_1(x) + \mathrm{R}_2(x), \\ \mathrm{R}_1(x) \equiv \mathrm{Q}_2(x)\,\mathrm{R}_2(x) + \mathrm{R}_3(x), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathrm{R}_{s-1}(x) \equiv \mathrm{Q}_s(x)\,\mathrm{R}_s(x) + \mathrm{R}_{s+1}. \end{cases}$$

Os restos successivos R são polynómios de graus decrescentes, de modo que, passado um certo numero de divisões, havemos de chegar a um que não contenha $x$. É este último resto que designamos por $\mathrm{R}_{s+1}$.

Reflectindo no algorithmo (2), reconhece-se que qualquer divisor commum de $f(x)$ e $\mathrm{F}(x)$ é tambem divisor commum de $\mathrm{F}(x)$ e $\mathrm{R}_1(x)$, assim como de $\mathrm{R}_1(x)$ e $\mathrm{R}_2(x)$ e ainda de todos os restos seguintes. Do mesmo modo cada divisor de dois restos successivos será divisor de todos os restos antecedentes, e portanto tambem de $f(x)$ e $F(x)$. D'estas operações podem resultar os dois casos seguintes:

1.º $R_{s+1} \neq 0$. N'este caso nenhum polynómio inteiro em $x$ pode dividir $R_{s+1}$, porque este resto é independente de $x$, nem por conseguinte os polynómios dados. Diz-se então que $f(x)$ e $F(x)$ são *primos entre si*.

2.º $R_{s+1} = 0$. Então $R_s$ é o maior divisor commum de $R_s$ e $R_{s+1}$, e portanto tambem de $f(x)$ e $F(x)$. O polynómio $R_s$ é completamente determinado.

Convém simplificar a prática das operações (2), que são laboriosas. Para este effeito supprimem-se em cada divisor os factores communs aos respectivos coefficientes; além d'isto, se o coefficiente do primeiro termo de um dividendo parcial não é divisivel pelo coefficiente do primeiro termo do divisor respectivo, evita-se o apparecimento de coefficientes fraccionarios multiplicando esse dividendo por um numero que torne a divisão possivel. Na escolha d'este factor observa-se a regra seguinte, que resulta immediatamente do processo da divisão algébrica: sejam $h$ e $k$ respectivamente os coefficientes dos primeiros termos do dividendo e do divisor e $k = \alpha\beta$, designando por $\beta$ o factor de $k$ que não entra em $h$; multiplica-se o dividendo por $\beta$ se o seu grau é egual ao do divisor, por $\alpha\beta^2$ se o grau do dividendo excede o do divisor em uma unidade, e assim successivamente. Estas operações auxiliares não influem no resultado final, visto que na determinação do maior divisor commum de dois polynómios não se attende a factores constantes, como vimos.

Sejam, por exemplo, os polynómios

$$f(x) \equiv a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad a_0 \neq 0,$$

$$F(x) \equiv b_0 x^2 + b_1 x + b_2, \qquad b_0 \neq 0.$$

Multiplicando $f(x)$ por $b_0$ e dividindo o producto por $F(x)$, o resto da divisão será

$$R_1 = (a_1 b_0 - a_0 b_1) x + (a_2 b_0 - a_0 b_2).$$

Se fôr $a_1 b_0 - a_0 b_1 = 0$, a operação está concluida; se fôr simultaneamente $a_2 b_0 - b_0 a_2 \neq 0$, os dois polynómios são primos entre si, e reciprocamente.

Se fôr differente de zero o coefficiente de $x$ em $R_1$, multiplique-se $F(x)$ por $(a_1 b_0 - a_0 b_1)^2$ e divida-se o producto por $R_1$. Acharemos por último que o resto independente de $x$ é

$$R_2 = [(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)] b_0.$$

Dividindo $R_2$ por $b_0$, que suppozemos differente de zero, vê-se que a condição necessária e sufficiente para os dois polynómios serem primos entre si é

$$(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0,$$

na qual está contida a precedente.

Para ter o maior divisor commum de tres polynómios $f(x)$, $F(x)$ e $\varphi(x)$, procura-se primeiro o maior divisor commum $R_s(x)$ de dois d'elles e depois o maior divisor commum entre o terceiro e $R_s(x)$.

**125**. Pela primeira identidade (2) é

$$R_1(x) = f(x) - Q_0(x) F(x).$$

Da segunda tira-se $R_2(x) = F(x) - Q_1(x) R_1(x)$ ou, substituindo a expressão precedente de $R_1$,

$$R_2(x) = - Q_1(x) f(x) + [Q_0(x) Q_1(x) + 1] F(x).$$

Pela terceira achariamos, eliminando $R_1$ e $R_2$,

$$R_3(x) \equiv [Q_1(x)Q_2(x)+1]f(x) - \{[Q_0(x)Q_1(x)+1]Q_2(x)+Q_0(x)\}F(x),$$

e assim por deante.

Para determinar a forma geral dos restos usaremos da notação seguinte:

$$(3)\quad \begin{cases} [\ ] = 1, \\ [\alpha_1] = \alpha_1, \\ [\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1 \alpha_2 + 1 \\ [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2]\,\alpha_3 + [\alpha_1] \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}]\,\alpha_n + [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}]; \end{cases}$$

e vamos mostrar que, se o resto $R_k$ é formado segundo a lei indicada pela expressão de $R_3$ quando $k$ tem qualquer valor menor que $s+1$, a mesma lei se verifica para o resto $R_{s+1}$ e portanto é geral.

Supponhamos pois que é, simplificando a notação dos quocientes,

$$R_{s-1} \equiv (-1)^{s-2}[Q_1, \ldots, Q_{s-2}]f(x) + (-1)^{s-1}[Q_0, \ldots, Q_{s-2}]F(x),$$
$$R_s \equiv (-1)^{s-1}[Q_1, \ldots, Q_{s-1}]f(x) + (-1)^{s}[Q_0, \ldots, Q_{s-1}]F(x).$$

Da última identidade (2) tira-se $R_{s+1} \equiv R_{s-1}(x) - Q_s(x)\,R_s(x)$ ou, eliminando $R_s$ e $R_{s-1}$,

$$R_{s+1} \equiv (-1)^{s}[Q_1, Q_2, \ldots Q_s]f(x) + (-1)^{s+1}[Q_0, Q_1, \ldots, Q_s]F(x),$$

com a mesma forma dos outros restos.

Ora, se os polynómios (1) forem primos entre si, será $R_{s+1} \neq 0$. Dividindo a última expressão por $R_{s+1}$, teremos neste caso a identidade

$$(4) \qquad \varphi(x) f(x) + \psi(x) F(x) \equiv 1,$$

fazendo

$$(5) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &\equiv \frac{(-1)^s}{R_{s+1}} [Q_1(x), Q_2(x), \ldots Q_s(x)], \\ \psi(x) &\equiv \frac{(-1)^{s+1}}{R_{s+1}} [Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_s(x)]. \end{aligned}$$

Segundo as definições (3), vê-se que $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são polynómios inteiros em $x$. A existencia de dois polynómios $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ que verifiquem a identidade (4) é portanto condição necessária para serem primos entre si os polynómios $f(x)$ e $F(x)$. Esta condição é tambem sufficiente, porque da mesma identidade resulta que qualquer factor commum de $f(x)$ e $F(x)$ será tambem factor de 1, isto é, só pode ser uma constante.

Quanto aos graus de $\varphi$ e $\psi$ notaremos que, designando respectivamente por $k_1, \ldots, k_n$ os graus de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, as definições (3) mostram que o grau de $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ não pode ser superior a $k_1 + \ldots + k_n$. Ora, sendo $n$ o grau de $f(x)$, $m$ o de $F(x)$ e designando por $m_i$ o grau de qualquer resto $R_i(x)$, os graus de $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ serão respectivamente $n-m$, $m-m_1$, $m_1-m_2$, etc. Por conseguinte, segundo as fórmulas (5), os graus de $\varphi$ e $\psi$, respectivamente, não podem ser superiores a

$$(m-m_1)+(m_1-m_2)+\ldots+(m_{s-1}-m_s) = m-m_s\,,$$

$$(n-m)+(m-m_1)+(m_1-m_2)+\ldots+(m_{s-1}-m_s) = n-m_s\,;$$

e portanto será o grau de $\varphi$ menor que o de F e o grau de $\psi$ menor que o de $f$, visto ser $m_s > 0$. Em outros termos: o grau de $\varphi$ não pode exceder $m-1$ e o de $\psi$ não pode exceder $n-1$.

Por outra parte, se dois polynómios $\varphi_1$ e $\psi_1$, de graus respectivamente inferiores a $m$ e a $n$, verificam a identidade

$$\varphi_1(x) f(x) + \psi_1(x) F(x) \equiv 1,$$

subtrahindo esta identidade de (4) teremos a seguinte

$$(\varphi - \varphi_1) f \equiv (\psi_1 - \psi) F.$$

D'aqui resulta que deverá ser F um divisor de $\varphi - \varphi_1$ e $f$ um divisor de $\psi - \psi_1$, visto serem $f$ e F primos entre si; mas estas condições só podem verificar-se quando as differenças $\varphi - \varphi_1$ e $\psi_1 - \psi$ se annullam identicamente, visto que os seus graus são inferiores respectivamente a $m$ e a $n$. Logo, hade ser

$$\varphi \equiv \varphi_1 \ , \ \psi \equiv \psi_1 ;$$

isto é, ha só um par de polynómios que satisfaçam ás condições indicadas. Assim:

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para que dois polynómios* f (x) *e* F (x) *sejam primos entre si consiste na existencia de dois polynómios* $\varphi$ (x) *e* $\psi$ (x) *que verifiquem a identidade* (4).

THEOREMA II. (Bezout). — *Se forem primos entre si os polynómios* f(x) *de grau* n *e* F(x) *de grau* m, *sem que algum d'elles seja constante, existe um par e só um de polynómios* $\varphi$ (x) *e* $\psi$ (x), *o primeiro de grau inferior a* m *e o segundo de grau inferior a* n, *que verificam a identidade* (4).

THEOREMA III. (Euler).—*A condição necessária e sufficiente* *para que dois polynómios inteiros* $f(x)$ *e* $F(x)$ *de graus* $n$ *e* $m$ *tenham um divisor commum, que não seja constante, consiste na existencia de dois polynómios* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$, *cujos graus não sejam respectivamente maiores que* $m-1$ *e* $n-1$, *com os quaes seja verificada a identidade*

$$(6) \qquad \varphi(x) f(x) + \psi(x) F(x) \equiv 0.$$

Este último theorema pode-se demonstrar directamente do modo seguinte.

A condição referida é necessária. Com effeito, se $f$ e $F$ não são primos entre si, designando por $\Delta$ o seu maior divisor commum e por $q$ o grau de $\Delta$, teremos

$$f \equiv \Delta f_1 \ , \ F \equiv \Delta F_1$$

e os polynómios $f_1$ e $F_1$, primos entre si, são de graus $n-q$ e $m-q$. Mas, representando por $M$ um polynómio de grau $q-1$, será evidentemente

$$f F_1 M - F f_1 M \equiv 0;$$

pondo $\varphi = F_1 M$ e $\psi = -f_1 M$, os polynómios $\varphi$ e $\psi$ serão respectivamente de graus $m-1$ e $n-1$ e verificam a identidade (6).

A mesma condição é sufficiente. Sejam, com effeito, $\varphi$ e $\psi$ dois polynómios de graus $m-1$ e $n-1$ respectivamente, os quaes verificam a identidade (6). D'esta identidade deduz-se a seguinte

$$\varphi(x) f(x) \equiv -\psi(x) F(x);$$

e se $f$ e $F$ fossem primos entre si, o polynómio $f$ seria divisor de $\psi(x)$, e $F$ seria divisor de $\varphi(x)$. Mas nenhuma d'estas condições se pode verificar, visto que o grau de $\psi$ é inferior ao de $f$, e o grau de $\varphi$ é inferior ao de F. Logo, a identidade (6) só pode ter logar quando os polynómios $f$ e F admittem divisor commum.

**126.** A condição (*Theor. II*) para serem primos os polynómios (1) consiste na existencia de constantes $p_0, p_1 \dots, p_{m-1}$, $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ para as quaes seja

$$\begin{aligned}&(p_0 x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \dots + p_{m-1})(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)\\ &+ (q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \dots + q_{n-1})(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \equiv 1.\end{aligned}$$

Esta identidade é equalente ao seguinte systema de equações, que se obteem egualando os coefficientes das mesmas potencias de $x$ nos seus dois membros:

$$(7)\left\{\begin{array}{lll}
a_0 p_0 & + b_0 q_0 & = 0,\\
a_1 p_0 + a_0 p_1 & + b_1 q_0 + b_0 q_1 & = 0,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\
a_m p_0 + a_{m-1} p_1 + \dots + a_1 p_{m-1} & + b_m q_0 + b_{m-1} q_1 + \dots + b_0 q_m & = 0,\\
a_{m+1} p_0 + a_m p_1 + \dots + a_2 p_{m-1} & + b_m q_1 + \dots\dots\dots + b_0 q_{m+1} & = 0,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\
a_n p_0 + a_{n-1} p_1 + \dots + a_{n-m+1} p_{m-1} & + b_m q_{n-m} + \dots\dots + b_1 q_{n-1} & = 0,\\
\quad a_n p_1 + \dots + a_{n-m+2} p_{m-1} & + b_m q_{n-m+1} + \dots + b_2 q_{n-1} & = 0,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\
\qquad a_n p_{m-1} & + b_m q_{n-1} & = 1.
\end{array}\right.$$

Transpostas as linhas e columnas, e permutadas as últimas linhas, o determinante d'este systema de $m + n$ equações não homogeneas com $m+n$ incógnitas é

$$
\mathrm{R}\begin{pmatrix} a_0, \dots a_n \\ b_0, \dots b_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix}
a_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_n \; 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\
0 \; a_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_n \; 0 .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
0 \;.\;.\;.\;.\; .0 \; a_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_n \\
0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; .0 \; b_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; b_m \\
0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; .0 \; b_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; b_m \; 0 \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
b_0 .\;.\;.\;.\;.\;.\; b_m \; 0 .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0
\end{vmatrix}
$$

com $m+n$ linhas e columnas.

Se fôr $\mathrm{R} \neq 0$, as equações (7) teem uma solução única, dada pela regra de Cramer; e os polynómios (1) são primos entre si.

Se fôr $\mathrm{R}=0$, parece á primeira vista que dois casos são possiveis: ou o systema é incompativel, ou as equações teem uma infinidade de soluções. Mas esta última alternativa tem de ser posta de parte, por isso que *(Theor. II)* não ha mais de um par de polynómios $\varphi$ e $\psi$ que satisfaçam á identidade (4) e cujos graus não sejam superiores respectivamente a $m-1$ e $n-1$. Por conseguinte, se fôr $\mathrm{R}=0$, as equações (7) não teem solução, e $f$ e F teem um factor commum. R chama-se a *resultante* de $f$ e F.

O termo *resultante* fica assim definido no caso de $f$ e F serem pelo menos do primeiro grau. Consideremos, porém, o caso de ser $m=0$ e $n>0$. No determinante R, que se reduz ás ultimas $n$ linhas, só podem ser differentes de zero os elementos da segunda diagonal, que são todos eguaes a $b_0$. Assim teremos

$$
\mathrm{R}\begin{pmatrix} a_0, & \dots, & a_n \\ b_0 & & \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_0^n.
$$

Se fôr $b_0 \neq 0$, tambem será $R \neq 0$ e sem duvida $f$ e F são primos entre si, porque F reduz-se a uma constante e não admitte factores que não sejam constantes. Pelo contrário, se fôr $b_0 = 0$, será $R = 0$ e cada factor de $f$ é tambem factor de F, porque então F é identicamente nullo.

Se fôr $n = 0$ e $m > 0$, teremos semelhantemente

$$R\begin{pmatrix} a_0 & & \\ b_0, & \dots & b_m \end{pmatrix} = a_0^m,$$

e do mesmo modo se veria que a condição necessária e sufficiente para que $f$ e F sejam primos entre si é $R \neq 0$.

Finalmente, se fôr $m = n = 0$, designaremos ainda a resultante pelo symbolo

$$R\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

admittindo convencionalmente que elle representará a unidade quando os dois coefficientes $a_0$ e $b_0$ não são ambos nullos e zero quando é $a_0 = b_0 = 0$. D'este modo podemos estabelecer com toda a generalidade o seguinte

THEOREMA. — *A condição necessária e sufficiente para dois polynómios serem primos entre si é que a sua resultante seja differente de zero.*

**127**. *Subresultante* de ordem $i$ dos polynómios $f$ e $F$ é o determinante que se obtem quando na resultante d'estes polynómios supprimimos as primeiras $i$ e as últimas $i$ columnas, assim como as primeiras $i$ e as últimas $i$ linhas.

Consideremos, por exemplo, os dois polynómios seguintes, de graus 5 e 3:

$$(8)\qquad \begin{aligned} f(x) &\equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5, \\ F(x) &\equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3. \end{aligned}$$

A resultante R d'estes polynómios e as suas *primeira, segunda* e *terceira* subresultantes $R_1$, $R_2$ e $R_3$ são os determinantes, de ordens 8, 6, 4 e 2 respectivamente, que estam representados no quadro seguinte:

$$(9)\quad R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad R_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad R_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},\quad R_3=\begin{vmatrix} 0 & b_0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

Se os polynómios (8) admittem um divisor commum do primeiro grau $x-\alpha$, teremos

$$f(x) \equiv (x-\alpha) f_1(x), \quad F(x) \equiv (x-\alpha) F_1(x);$$

sendo $f_1$ e $F_1$ polynómios inteiros da fórma

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4, \\ F_1(x) &\equiv d_0 x^2 + d_1 x + d_2, \end{aligned}$$

cuja resultante é

$$r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c^2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Rufini (n.º 8) será

$$a_0 = c_0,\quad a_1 = c_1 - \alpha c_0,\quad a_2 = c_2 - \alpha c_1,\quad a_3 = c_3 - \alpha c_2$$
$$a_4 = c_4 - \alpha c_3,\quad a_5 = -\alpha c_4;$$
$$b_0 = d_0,\quad b_1 = d_1 - \alpha d_0,\quad b_2 = d_2 - \alpha d_1,\quad b_3 = -\alpha d_2,$$

visto serem nullos os restos das divisões de $f(x)$ e $F(x)$ por $x-\alpha$. Portanto, subtrahindo de cada uma das columnas 2, 3, 4, 5 e 6 de $r$ a precedente multiplicada por $\alpha$, acha-se que é $r = R_1$; e d'aqui resultaria tambem $r_1 = R_2$, etc. Estes resultados são geraes; logo:

THEOREMA I. — *«Se tiverem logar as identidades*

$$f(x) \equiv (x-\alpha) f_1(x),\quad F(x) \equiv (x-\alpha) F_1(x),$$

*a resultante e as subresultantes successivas de* $f_1$ *e* $F_1$ *serão eguaes respectivamente ás successivas subresultantes de* f *e* F.

COROLLARIO. — *O grau do maior divisor commum de* f(x) *e* F(x) *é o indice da primeira subresultante* $R_0 = R$, $R_1$, $R_2$, *etc. que não se annulla.*

THEOREMA II. — *«Se for* i *o grau do maior divisor commum* D *dos polynomios* f(x) *e* F(x), *pode-se obter* D *por meio da subresultante* i *de* f *e* F *substituindo nesta subresultante o último elemento da última linha de coefficientes de* f *por* f(x) *e os ele-*

*mentos precedentes da mesma columna por* $x f(x)$, $x^2 f(x)$, *etc. successivamente; e substituindo além d'isto o último elemento da primeira linha de coefficientes de* F *por* $F(x)$ *e os elementos seguintes da mesma columna por* $x F(x)$, $x^2 F(x)$, *etc.*

Com effeito o determinante assim formado é divisivel por D, visto que D é factor de todos os elementos da sua última columna; não admitte divisor de grau mais elevado, porque nas outras columnas todos os elementos são constantes; finalmente esse determinante é de grau $i$ porque, resolvendo-o na somma de determinantes de elementos simples, o termo de grau mais elevado neste desenvolvimento é de grau $i$ e o coefficiente de $x^i$ é precisamente a subresultante $R_i$ que suppomos differente de zero.

Para ver melhor como assim é, consideremos em particular os polynómios (8), suppondo que a sua resultante R se annulla e que a primeira subresultante $R_1$ é differente de zero. O maior divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$ é do primeiro grau, ou $x-\alpha$, e, segundo o *Theor. II*, será representado pelo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & f(x) \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & F(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & x F(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2 F(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & x^3 F(x) \end{vmatrix}$$

Com effeito, $x-\alpha$ é factor commum de $f(x)$ e $F(x)$, e portanto é factor de todos os elementos da última columna de D; d'onde se segue que tambem é factor de D. Por outra parte, se d'esta mesma columna subtrahirmos a somma das cinco primeiras depois de multiplicadas respectivamente por $x^6$, $x^5$, $x^4$,

$x^3$ e $x^2$, virá

(10)
$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 x \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 x + a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 x + b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 x \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

onde se vê que D é do primeiro grau em $x$. Finalmente, decompondo este último determinante na somma de dois de elementos simples, acha-se

(11)
$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} . x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

em que o coefficiente de $x$ é a subresultante $R_1$.

No caso que temos considerado os quocientes da divisão de $f(x)$ e $F(x)$ por $x-\alpha$ são os polynómios que anteriormente designámos por $f_1$ e $F_1$. Se elles ainda admittissem um divisor commum $x-\beta$ do primeiro grau, isto é, se fosse $R_1=0$ e $R_2 \neq 0$, esse divisor commum seria, segundo o mesmo theorema,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & f_1(x) \\ 0 & 0 & b_0 & F_1(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & x F_1(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x_2 F_1(x) \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a última columna d'este determinante por $x-\alpha$, isto é, mudando $f_1$ e $F_1$ respectivamente em $f$ e $F$, viria a expressão

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & f(x) \\ 0 & 0 & b_1 & F(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & x\,F(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x_2\,F(x) \end{vmatrix}$$

do maior divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$, que seria agora do segundo grau.

Como se vê, este maior divisor commum ainda se forma segundo os principios enunciados no *Theor. II.*

**128.** Eliminação. — Dadas duas equações a uma incógnita $x$, a eliminação de $x$ tem por objecto achar a *condição necessária e sufficiente* para que essas equações tenham raizes communs. O problema pode-se resolver sempre do modo que vamos indicar para um caso particular.

Sejam as equações

$$\begin{aligned} & f(x) \equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0, \\ (12) \qquad & F(x) \equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0, \\ & \text{com } a_0 \neq 0 \text{ e } b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Considerando as differentes potencias de $x$ como outras tantas incógnitas, teremos assim um systema de duas equações lineares não homogeneas com cinco incógnitas $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$, $x^5$.

Multipliquemos a equação $f(x)=0$ por $x$, e depois por $x^2$; multipliquemos tambem $F\,x=0$ successivamente por $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$. Teremos d'este modo o systema das oito equações lineares não homogeneas com sete incógnitas

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 &= 0,\\
a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x &= 0,\\
a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 &= 0,\\
b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 &= 0,\\
b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x &= 0,\\
b_0 x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 &= 0,\\
b_0 x^6 + b_1 x^5 + b_2 x^4 + b_3 x^3 &= 0,\\
b_0 x^7 + b_1 x^6 + b_2 x^5 + b_3 x^4 &= 0;
\end{aligned}
$$

e a matriz completa d'este systema é exactamente a matriz (9) da resultante R.

Se existir algum valor de $x$ que satisfaça ás equações (12), esse mesmo valor hade satisfazer a (13). Estas equações serão então compativeis, e para isso é necessário que a matriz do systema e a matriz completa tenham a mesma caracteristica, ou que se annulle o determinante caracteristico R.

Assim, a condição necessária para a existencia de raizes communs ás duas equações $f(x)=0$ e $F(x)=0$ é a mesma que para a existencia de um factor commum entre os polynómios $f$ e F, como já tinhamos visto.

Este méthodo de eliminação é conhecido pelo nome de *méthodo dialytico* ou *de Sylvester*.

O numero das raizes communs ás duas equações, assim como a equação para calcular essas raizes pode achar-se do modo que se disse no n.º 126. Assim, se for $R=0$ e $R_1 \neq 0$, as equações (12) teem só uma raiz commum, que se acha egualando a zero o determinante (10) ou a somma (11). Ora os complementos algebricos dos dois últimos elementos da primeira linha de R são

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_0 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B = -\begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_0 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Comparando com (11) e supprimindo o factor commum $b_0$ que suppomos differente de zero, a equação $D = 0$ daria

$$x = \frac{A}{B}$$

para valor da raiz commum das equações (12).

**129.** Convem notar que, segundo as definições que temos dado, o determinante

$$\begin{pmatrix} a_0, \ldots, a_n \\ b_0, \ldots, b_m \end{pmatrix}$$

será a resultante dos polynómios (1) sómente quando sejam $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Assim, por exemplo, a resultante dos polynómios.

$$f(x) \equiv a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$$\mathrm{F}(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

já não é o determinante de ordem $m+n$

$$\mathrm{R}\begin{pmatrix}0, a_1, \ldots, a_n \\ b_0, \quad \ldots, b_m\end{pmatrix},$$

mas sim, se fôr $a_1 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$, o determinante de ordem $m+n-1$

$$\mathrm{R}\begin{pmatrix}a_1, \ldots, a_n \\ b_0, \ldots, b_m\end{pmatrix};$$

ou, se fôr $a_1 = 0$ ou $b_0 = 0$, um determinante de ordem ainda menos elevada.

Designemos sempre por R o determinante de ordem $m+n$

$$\begin{pmatrix}a_0, \ldots, a_n \\ b_0, \ldots, b_m\end{pmatrix},$$

e por $r$ a resultante de $f$ e F. Se fôr $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$, podemos escrever

$$\mathrm{R} = (-1)^{m+n-1} b_0 r,$$

visto serem zero todos os elementos da primeira columna de R, menos o último. Do mesmo modo, se $n-i$ fôr o grau de $f$ e $b_0 \neq 0$, teremos

$$\mathrm{R} = \pm b_0^i r;$$

e se o grau de F fôr $m-i$ e $a_0 \neq 0$ será,

$$R = a_0^i r.$$

Por conseguinte, em qualquer d'estes casos R differe de $r$ unicamente num factor que é differente de zero. Logo:

THEOREMA. — «*Ainda que*

$$R\begin{pmatrix} a_0, \ldots, a_n \\ b_0, \ldots, b_m \end{pmatrix}$$

*seja a resultante de* f *e* F *unicamente quando é* $a_0 \neq 0$ *e* $b_0 \neq 0$, *todavia a condição necessária e sufficiente para que* f *e* F *admittam um factor commum é sempre* $R = 0$, *mesmo quando é* $a_0 = 0$ *ou* $b_0 = 0$, *comtanto que não seja* $a_0 = b_0 = 0$.

## XIV. — Transformação das equações.

**130.** O problema da *transformação das equações* tem por objecto, dada uma equação $f(x) = 0$, achar outra cujas raizes tenham com as raizes da primeira uma certa relação, que se chama *relação de transformação.*

São fundamentaes os seguintes casos, em que a relação de transformação é do primeiro grau ou *linear.*

1.° — *Transformar a equação* f (x) = 0 *noutra que tenha as mesmas raizes com signaes contrários.*

Segundo a expressão (14) do n.° 121, mudaremos o signal a todos os termos em que o expoente de $x$ seja de paridade differente do grau da equação. Com effeito, $p_i$ é o coefficiente do termo de grau $n-i$, e os dois numeros $n$ e $n-i$ são da mesma paridade quando $i$ é par, e *vice-versa.*

2.º — *Transformar a equação* f(x) = 0 *noutra cujas raizes sejam* h *vezes maiores.*

Da relação de transformação $y = hx$ tira-se $x = \frac{y}{h}$. Substituindo na equação (1) do n.º 117 e desembaraçando o resultado de denominadores, virá a transformada

$$p_0 y^n + p_1 h y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} h^{n-1} y + p_n h^n = 0.$$

Esta equação resulta da proposta mudando $x$ em $y$, e multiplicando cada termo por uma potencia de $h$ cujo expoente é complementar do expoente de $x$ no mesmo termo para o grau da equação dada. Se forem inteiros $h$ e os coefficientes d'esta equação, os coefficientes da transformada tambem serão inteiros.

Fazendo $h = p_0$ e dividindo por esta quantidade, a transformada torna-se em

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n p_0^{n-1} = 0,$$

e o expoente de $p_0$ em cada termo será complementar do expoente de $x$ nesse termo para $n-1$. Os coefficientes dos termos d'esta equação são numeros inteiros; logo:

*Podemos sempre transformar uma equação de coefficientes inteiros noutra em que o coefficiente do primeiro termo seja a unidade, sem deixarem de ser inteiros os coefficientes da transformada.*

3.º — *Transformar a equação* f(x) = 0 *noutra cujas raizes tenham menos que as da proposta uma quantidade* h.

A relação de transformação é $y = x - h$ ou $x = h + y$. Pela fórmula de Taylor a transformada é

$$f(h+y) = f(h) + y f'(h) + \frac{1}{2} y^2 f''(h) + \ldots = 0,$$

e os coefficientes d'esta equação obteem-se muito facilmente por meio da regra de Rufini. Com effeito, o resto da divisão de $f(x)$ por $x-h$ é $f(h)$ e o quociente, que se acharia dividindo $f(x)-f(h)$ por $x-h=y$, é

$$Q_1=f'(h)+\frac{1}{2}yf''(h)+\ldots$$

Dividindo agora $Q_1$ por $x-h$, acha-se o resto $f'(h)$ e o quociente

$$Q_2=\frac{1}{2}f''(h)+\ldots,$$

e assim por deante. Vê-se, pois, que os coefficientes da transformada são os restos d'estas divisões successivas, e tanto estes restos como os quocientes correspondentes se formariam pela regra de Rufini, como se verá melhor num exemplo.

Seja $f(x)=2x^4-2x^2+5x-4=0$ e procure-se a transformada em $y=x+2$. Neste caso é $h=-2$ e $p_1=0$; convém sempre dar ao cálculo a seguinte disposição:

| | |
|---|---|
| *Coef. da proposta...* | 2, 0, − 2, + 5, − 4 |
| 1.ª *divisão* | 2, − 4, + 6, − 7, + 10; |
| 2.ª » | 2, − 8, + 22, − 51; |
| 3.ª » | 2, − 12, + 46; |
| 4.ª » | 2, − 16; |

a transformada é $2y^4-16y^3+46y^2-51y+10$. Os coefficientes de $Q_1$ são $2, -4, 6, -7$.

4.° — *Transformar a equação* $f(x)=0$ *noutra cujas raizes sejam reciprocas das raizes da proposta.*

Mudando $x$ em $\frac{1}{y}$, desembaraçando de donominadores e ordenando em sentido decrescente, os coefficientes da transformada são os mesmos de $f(x)$, dispostos em ordem inversa.

**131.** Mudando $x$ em $y+h$ e ordenando, a equação (1) do n.º 117 torna-se em

$$p_0 y^n + (p_1 + n p_0 h) y^{n-1}$$
$$+ \left[p_2 + (n-1) p_1 h + \frac{n(n-1)}{2} p_0 h^2\right] y^{n-2} + \ldots = 0.$$

Determinando a arbitrária $h$ pela condição de ser

$$n p_0 h + p_1 = 0,$$

desapparece da equação o termo com a potencia de grau $n-1$ da incógnita; esta equação tem sempre uma solução finita e única

$$h = -\frac{p_1}{n p_0},$$

visto ser differente de zero o coefficiente $n p_0$ do primeiro termo. Logo:

*Podemos sempre desembaraçar uma equação do seu segundo termo.*

A somma das raizes da transformada será egual a zero (n.º 121). Para desembaraçar a equação do terceiro termo teriamos de resolver a equação do segundo grau

$$p_2 + (n-1) p_1 h + \frac{n(n-1)}{2} p_0 h^2 = 0;$$

as raizes d'esta equação podem ser imaginárias, e neste caso o problema não teria solução.

**132.** Se o último termo da equação $f(x) = 0$ fôr da forma $p_{n-k} x^k$, a equação terá $k$ raizes eguaes a zero.

Se o coefficiente $p_0$ do primeiro termo decrescer indefinidamente, tendendo para zero, uma das raizes da transformada em $\frac{1}{x}$ decresce do mesmo modo, pois que $p_0$ é o último termo d'esta equação. Mas neste caso $x$ cresce ao mesmo tempo em valor absoluto, podendo tornar-se maior que qualquer quantidade dada; e por este motivo se diz que, sendo $p_0=0$, a equação considerada tem uma raiz infinita.

Do mesmo modo, se os primeiros $k$ coefficientes de $f(x)$ ou os últimos $k$ da transformada em $\frac{1}{x}$ tendem para zero, $k$ raizes d'esta última equação tendem para zero. Por conseguinte tambem $k$ raizes da proposta crescem cada vez mais em valor absoluto, e assim diremos que a equação tem $k$ raizes infinitas.

Pode-se demonstrar directamente que, no caso de tenderem para zero os coefficientes dos $k$ primeiros termos de $f(x)$, algumas raizes da equação $f(x)=0$ tendem para o infinito; e que o numero d'estas raizes não pode ser maior nem menor que $k$, e é portanto egual a $k$.

## XV. — Limites das raizes.

**133.** *Limite superior* das raizes positivas de uma equação é qualquer numero maior que a maior d'ellas. Os méthodos dos limites teem por objecto determinar um criterio por onde se possa encontrar um numero que realise esta condição; vamos tratar dos principaes, começando pelas observações seguintes:

Se todos os termos forem positivos, zero é limite superior das raizes da equação. Se os termos com potencias pares da incógnita tiverem todos o mesmo signal, contrario ao dos termos com potencias ímpares de $x$, a equação não tem raizes negativas. Se houver só termos positivos e com potencias pares de $x$, a equação só tem raizes imaginárias ou nullas, e estas últimas serão em numero par. Se houver só termos positivos e com potencias ímpares de $x$, a equação tem um número ímpar de raizes nullas, uma pelo menos, e as restantes imaginárias.

**134.** Méthodo de Newton. — Mudando $x$ em $y+h$ na equação $f(x)=0$, e substituindo $h$ na equação transformada

$$f(y+h)=f(h)+yf'(h)+\ldots+\frac{y^n}{n!}f^{(n)}(h)=0$$

por um numero tal, que torne positivos os valores de

$$f(h),\ f'(h),\ldots,\ f^{(n)}(h),$$

esta última equação não pode dar raizes positivas para $y=x-h$. D'aqui resulta que não pode ser $x>h$, e por tanto:

*É limite superior das raizes positivas da equação* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *o numero que, substituido por* x *em* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *e em todas as suas derivadas, dá sempre resultados positivos.*

Para achar um numero que satisfaça a todas estas condições, começaremos por notar que o valor de $f^{(n)}(h)=n!p_0$ é sempre positivo, visto que suppomos $p_0$ positivo. A derivada $f^{(n-1)}(h)$ é do primeiro grau em $h$, de modo que facilmente se determinará o inteiro $h$ que torna $f^{(n-1)}(h)>0$. Verifica-se depois se o valor de $h$ assim achado torna tambem $f^{(n-2)}(h)>0$, e no caso contrário addicionam-se successivamente a este primeiro valor de $h$ tantas unidades, uma a uma, quantas sejam necessárias para dar áquella derivada um valor positivo. Procede-se do mesmo modo com a derivada $f^{(n-3)}(h)$, e assim por deante até chegar a $f(h)$.

Convém observar que, tendo verificado que $f^{(r)}(h)$ e todas as suas derivadas até $f^{(n)}(h)$ são positivas para um certo valor $l$ de $h$, o mesmo terá logar para qualquer valor de $h$ maior que $l$.

Com effeito, suppondo $k$ positivo, de

$$f^{(r)}(l+k)=f^{(r)}(l)+kf^{(r+1)}(l)+\ldots+\frac{k^{n-r}}{r!}f^{(n)}(l);$$

resulta que, sendo $f^{(r)}(l)>0$, $f^{(r+1)}(l)>0, \ldots, f^{(n)}(l)>0$, será tambem $f^{(r)}(l+k)>0$.

Por conseguinte, tendo reconhecido que um numero $h$ satisfaz ao criterio do limite até uma derivada $f^{(r)}(x)$, se as derivadas seguintes indicarem outro numero $l>h$, não teremos de verificar ainda o numero $l$ nas derivadas já ensaiadas.

**135**. Méthodo de Lagrange. — Divida-se a equação $f(x)=0$ pelo coefficiente do primeiro termo. Sendo $n-r$ o grau do seu primeiro termo negativo, $n-r-s$ o do segundo e assim por deante, teremos com os signaes em evidencia

$$f(x)\equiv x^n+\ldots-P_r x^{n-r}+\ldots-P_{r+s}x^{n-r-s}+\ldots\pm P_n=0.$$

Se o numero positivo $k$ tornar

$$(1) \qquad k^n>P_r k^{n-r}+P_{r+s}k^{n-r-s}+\ldots,$$

será tambem

$$1>\frac{P_r}{k^r}+\frac{P_{r+s}}{k^{r+s}}+\ldots,$$

e qualquer numero $l>k$ satisfará necessariamente a esta condição. Logo $k$ será limite superior das raizes positivas da proposta, pois que á expressão

$$k^n-P_r k^{n-n}-P_{r+s}k^{n-r-s}-\ldots$$

viriam addicionar-se os termos positivos da equação.

Ora, sendo P o maior coefficiente negativo de $f(x)$, a desegualdade (1) está contida na seguinte

$$k^n > P(k^{n-r} + k^{n-r-1} + \ldots + k + 1) = P\frac{k^{n-r+1} - 1}{k-1};$$

e esta última ainda está comprehendida successivamente nas seguintes

$$k^n > P\frac{k^{n-r+1}}{k-1}, \quad k^{r-1}(k-1) > P, \quad (k-1)^r \overline{\gtrless} P,$$

visto ser $k > 1$. Da última se tira

$$k \overline{\gtrless} 1 + \sqrt[r]{P},$$

e por conseguinte:

*É limite superior das raizes positivas da equação* $f(x) = 0$ *a somma da unidade com o numero que se obtem extrahindo ao maior coefficiente negativo de* $f(x)$, *depois de dividido pelo coefficiente do primeiro termo, a raiz cujo grau é a differença entre o grau da equação e o do seu primeiro termo negativo.*

Teriamos immediatamente um limite superior sommando a unidade com o maior coefficiente negativo; mas esse limite

$$l = 1 + P \quad \text{ou} \quad l = 1 + \frac{p}{p_0}.$$

pode afastar-se consideravelmente da maior das raizes.

**136.** Méthodo de Bret. — Seja a proposta, com os signaes de cada termo em evidencia,

$$p_0 x^n + \ldots - p_r x^{n-r} + \ldots - p_{r+s} x^{n-r-s} + \ldots \pm p_n = 0.$$

Substituam-se nos termos positivos as respectivas potencias de $x$, desenvolvidas segundo a fórmula geral

$$x^m = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) + 1;$$

incluindo o factor $x-1$ nos coefficientes e reduzindo depois com os termos negativos semelhantes, nos quaes se não faz a mesma transformação, os coefficientes das potencias $n-r$, $n-r-s$, etc. de $x$ serão

$$(p_0 + p_1 + \ldots + p_{r-1})(x-1) - p_r,$$
$$(p_0 + p_1 + \ldots + p_{r-1} + p_{r+1} + \ldots + p_{r+s-1})(x-1) - p_{r+s}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Na primeira d'estas expressões entram os coefficientes de todos os termos positivos que precedem $p_r$, na segunda todos os que precedem $p_{r+s}$, etc. Além d'isto, substituindo por $x$ qualquer numero $k > 1$, os coefficientes dos outros termos constam só de parcellas positivas; portanto o número que, substituido por $x$, tornar aquellas expressões positivas, isto é, o número determinado pelas condições de ser

$$x > \frac{p_r}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1}} + 1,$$

$$x > \frac{p_{r+s}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{r-1} + p_{r+1} + \cdots + p_{r+s-1}} + 1,$$

etc.

*será limite superior das raizes positivas da proposta.*

**137.** O méthodo de Newton dá, em geral, o limite mais próximo da maior das raizes. Quando ellas são todas reaes, este limite é o inteiro immediatamente superior á maior; ou esta mesma, quando ella é inteira.

Com effeito, representando por $h$ o menor numero inteiro superior á maior raiz positiva da equação $f(x)=0$, as raizes da transformada $f(y+h)=0$ serão todas reaes e negativas; designando-as por $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$, com os signaes em evidencia, a fórmula (14) do n.º 121 mostra que os coefficientes de $f(x+h)$ hão de ser todos positivos. Mas estes coefficientes são $f(h)$ e todas as suas derivadas. Por conseguinte $h$ é o limite dado pelo méthodo de Newton.

É evidente que entre os méthodos de Lagrange e de Bret se deve preferir o primeiro quando na equação ha muitos termos negativos; e o segundo quando o primeiro termo negativo é precedido por muitos negativos, e ainda quando os menores coefficientes negativos precedem os maiores.

**138.** O limite das raizes negativas da equação $f(x)=0$ é o limite superior das raizes positivas da transformada $f(-x)=0$. O limite inferior das raizes positivas da mesma equação é o limite superior das raizes da transformada $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Em geral, toma-se *zero* para limite commum das raizes positivas e negativas.

**139.** Designemos por $\alpha$ e $\rho$ o argumento e o módulo da incógnita, assim como por $\alpha_r$ e $\rho_r$ o argumento e o módulo do coefficiente $p_r$. Dividindo a equação pelo coefficiente $p_0$ do primeiro termo, o módulo d'este termo será $\rho^n$ e o do termo de ordem $r+1$ é

$$\frac{\rho_r}{\rho_0}\rho^{n-r}=\mathrm{R}_r\,\rho^{n-r}$$

O $mod f(x)$ não pode ser menor que

$$\rho^n-\mathrm{R}_1\,\rho^{n-1}-\mathrm{R}_2\,\rho^{n-2}-\ldots-\mathrm{R}_n.$$

Se acharmos para $\rho$ um valor $l$ que torne esta expressão positiva e tal, que o mesmo tenha logar para qualquer valor de $\rho > l$, será $l$ limite superior dos módulos das raizes da equação dada.

Ora aquella expressão é funcção de quantidades todas reaes, e tem todos os termos negativos com excepção do primeiro. Logo será (n.º 135)

$$l = 1 + R_r,$$

designando por $R_r$ o maior dos módulos R. Attendendo á relação entre $R_r$, $\rho_r$ e $\rho_0$, podemos dar ao limite a forma

$$l = \frac{\rho_0 + \rho_r}{\rho_0};$$

do mesmo modo se acharia o limite superior dos módulos das raizes da equação transformada $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, isto é, o limite inferior dos módulos das raizes da proposta.

## XVI. — Raizes eguaes.

**140.** Dando ao polynómio $f(x)$ a forma geral (12) do n.º 119, a sua derivada, segundo a fórmula (1) do n.º 96, será

$$f'(x) = r\frac{f(x)}{x - a_1} + s\frac{f(x)}{x - a_2} + \ldots + v\frac{f(x)}{x - a_k}.$$

D'aqui resulta que em $f'(x)$ entra como factor cada um dos factores binómios differentes de $f(x)$ com o expoente diminuido de uma unidade.

Por conseguinte o maior divisor commum entre $f(x)$ e $f'(x)$ será

$$(1) \qquad d_1 = (x - a_1)^{r-1}(x - a_2)^{s-1} \ldots (x - a_k)^{v-1}.$$

Se a equação $f(x)=0$ tiver só raizes simples, será $r=s=\ldots=v=1$ e $d_1=1$; pelo contrário, se algum d'estes expoentes fôr maior que 1, a equação tem raizes eguaes e $d_1$ é uma funcção de $x$. Logo:

*A condição necessária e sufficiente para que a equação* f(x)=0 *tenha raizes eguaes é que entre* f(x) *e a sua derivada haja um divisor commum.*

Se fôr $r>1$, a expressão (1) mostra que $a_1$ será tambem raiz da equação $f'(x)=0$, e que nesta equação o grau de multiplicidade da raiz $a_1$ é $r-1$. Se fosse $r>2$, $a_1$ seria egualmente raiz da equação $f''(x)=0$, onde teria o grau de multiplicidade $r-2$; e assim por deante. Por conseguinte, segundo a fórmula (3) do n.º 16, teremos neste caso

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^r}{r!}f^{(r)}(a_1)+\ldots+\frac{(x-a_1)^n}{n!}f^{(n)}(a_1),$$

visto ser $f(a_1)=f'(a_1)=\ldots=f^{(r-1)}(a_1)=0$ e $f^{(r)}(a_1)\gtrless 0$.

**141.** Se a equação $f(x)=0$ tiver $m$ raizes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ do mesmo grau de multiplicidade $r$, o seu primeiro membro $f(x)$ terá por divisor o producto

$$[(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)]^r=X_r^r,$$

e as quantidades $a_1, a_2, \ldots, a_m$ serão raizes simples da equação $X_r=0$, de grau $m$.

Para considerar de um modo geral os casos que podem resultar da existencia de raizes eguaes numa equação dada, bastará suppor que o maior grau de multiplicidade d'estas raizes é 4; e assim teremos

$$f(x)=X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4,$$

conforme a notação precedente.

Ora, segundo (1), o maior divisos commum entre $f(x)$ e $f'(x)$ será

$$d_1=X_2 X_3^2 X_4^3.$$

Do mesmo modo, representando por $d_2$, $d_3$ e $d_4$ respectivamente o maior divisor commum entre cada um dos polynómios $d_1$, $d_2$, $d_3$ e a derivada correspondente, teriamos

$$d_2 = X_3 X_4^2,$$
$$d_3 = X_4$$
$$d_4 = 1.$$

Por outra parte, designando por $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ os quocientes da divisão de $f(x)$ por $d_1$, de $d_1$, por $d_2$, de $d_2$ por $d_3$ e de $d_3$ por $d_4$, viria

$$q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4,$$
$$q_2 = X_2 X_3 X_4,$$
$$q_3 = X_3 X_4,$$
$$q_4 = X_4.$$

Finalmente uma nova serie de divisões fará conhecer os polynómios

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2},\ X_2 = \frac{q_2}{q_3},\ X_3 = \frac{q_3}{q_4},\ X_4 = \frac{q_4}{1},$$

que só teem factores simples; e pela resolução das equações $X_r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots)$ teremos as raizes de grau $r$ de multiplicidade da proposta. Por conseguinte:

*É sempre possivel reduzir a resolução de uma equação que tenha raizes multiplas á resolução de equações que só tenham raizes simples. Cada uma d'estas equações* $X_r = 0$ *dará todas as raizes do grau* r *de multiplicidade da proposta, e o grau de* $X_r$ *indicará o numero d'estas raizes.*

Se a equação não tiver raizes de grau de multiplicidade $r$, será $X_r = 1$, ou $q_r = q_{r+1}$.

Seja, por exemplo,

$$f(x) \equiv x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0;$$

a derivada $f'(x)$, depois de dividida pelo factor 6 commum aos seus termos, será

$$x^5-4x^3-2x^2+3x+2$$

e, procedendo á divisão de $f(x)$ por este polynómio, acharemos o primeiro resto que, depois de dividido por $-2$, é

$$d_1=x^4+x^3-3x^2-5x-2.$$

Continuando as operações, vê-se que este polynómio é o maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$; donde concluimos que a equação tem raizes eguaes. Seguindo o processo indicado, forma-se o quadro

$$\begin{array}{ll} f(x)\equiv x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4, & \\ \quad d_1\equiv x^4+x^3-3x^2-5x-2, & q_1=x^2-x-2, \\ \quad d_2\equiv x^2+2x+1, & q_2=x^2-x-2, \\ \quad d_3=x+1, & q_3=x+1, \\ \quad d_4=1 & q_4=x+1, \end{array}$$

donde se tira

$$X_1=\frac{q_1}{q_2}=1,\quad X_2=\frac{q_2}{q_3}=x-2,$$

$$X_3=\frac{q_3}{q_4}=1,\quad X_4=\frac{q_4}{1}=x+1.$$

Portanto é $f(x)\equiv(x-2)^2(x+1)^4$; a proposta não tem raizes simples nem triplas, tem a raiz dupla 2 e a raiz quádrupla $-1$.

**142.** Como se vê pelo exemplo do n.º anterior, este processo é laborioso; e por esse motivo não se applicará ao cálculo das raizes eguaes commensuraveis, cuja determinação é facil.

Ora, suppondo racionaes os coefficientes da proposta, egualmente o serão os coefficientes de cada uma das equações $X_r = 0$ e, se esta equação fôr do primeiro grau, a raiz correspondente é commensuravel.

Posto isto, se a proposta é do terceiro grau e tem raizes eguaes, ellas são commensuraveis, porque só pode haver *uma* dupla ou *uma* tripla. Se a equação é do quarto grau e tem raizes eguaes, estas raizes só poderão deixar de ser commensuraveis quando sejam *duas* duplas; neste caso a equação abaixa-se ao segundo grau pela extracção da raiz quadrada. Finalmente, se a proposta é do quinto grau, as raizes múltiplas, quando as ha, são tambem commensuraveis, excepto se forem *duas* duplas; mas neste caso haverá *uma* raiz simples que é commensuravel e, tendo determinado esta raiz, divide-se pelo binómio correspondente a equação proposta, que assim se abaixa ao quarto grau e se encontra no caso anterior.

Por conseguinte o *méthodo das raizes eguaes* só se applica ás raizes incommensuraveis das equações de grau superior ao quinto, quando os coefficientes são commensuráveis.

## XVII. — **Existencia das raizes.**

**143.** A equação $f(x) = 0$ pode suppor-se desembaraçada de raizes eguaes. Representando por $a_1, a_2, \ldots, a_m$ todas as suas raizes reaes, dispostas por ordem de grandezas crescentes, o polynómio $f(x)$ terá a forma (13) do n.° 120, sendo $\varphi(x)$, como se disse, um factor que se conserva positivo e differente de zero para todos os valores reaes de $x$.

Substituindo $x$ em $f(x)$ successivamente pelos numeros $x_1$ e $x_2 > x_1$, e dividindo um dos resultados pelo outro, virá

$$(1) \qquad \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1 - a_1}{x_2 - a_1} \cdot \frac{x_1 - a_2}{x_2 - a_2} \cdots \frac{x_1 - a_m}{x_2 - a_m} \cdot \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}.$$

Se houver uma raiz $a_k$ comprehendida entre $x_1$ e $x_2$, isto é, se fôr $x_1 < a_k < x_2$, o factor correspondente de (1) será negativo. Por consequencia, se entre $x_1$ e $x_2$ se encontrar um numero par de raizes reaes da proposta ou nenhuma, o producto (1) será positivo; donde se segue que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ terão o mesmo signal. Se entre $x_1$ e $x_2$ existir um numero ímpar de raizes, uma pelo menos, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ terão signaes contrários.

Reciprocamente: *se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem o mesmo signal, entre* $x_1$ *e* $x_2$ *ha um numero par de raizes reaes da equação* $f(x)=0$; por que, se este numero fosse ímpar, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teriam signaes contrários. *Se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *teem signaes contrários, entre* $x_1$ *e* $x_2$ *ha um numero impar de raizes reaes da proposta.*

Os termos *maior* e *menor* tomam-se aqui no sentido algebrico.

**144**. Suppondo independente da incógnita o último termo da equação, do theorema precedente deduzem-se os seguintes corollarios;

1.° *As equações de grau impar teem um numero impar de raizes reaes, uma pelo menos, de signal contrário ao do seu último termo.*

Seja primeiro, com o signal em evidência,

$$f(x) \equiv p_0 x^{2k+1} + \ldots - p_n = 0.$$

Designando por $l$ o limite superior das raizes positivas d'esta equação, será

$$f(0) < 0, \quad f(l) > 0$$

e entre 0 e $l$ haverá um numero ímpar de raizes, que são positivas.

Seja agora

$$f(x) \equiv p_0 x^{2k+1} + \ldots + p_n = 0.$$

O último termo da transformada em $-x$ será negativo (n.º 130, 1.º) e esta equação tem um numero ímpar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

2.º *As equações de grau par com o último termo negativo teem um numero impar de raizes positivas e um numero impar de raizes negativas.*

Neste caso será ainda

$$f(0) < 0, \quad f(l) > 0,$$

e a proposta tem um numero ímpar de raizes positivas. O último termo da transformada em $-x$ conserva-se agora negativo, e portanto esta equação tem um numero ímpar de raizes positivas que são raizes negativas da equação dada.

3.º *As equações de grau par com o último termo positivo teem um numero par de raizes positivas e um numero par de raizes negativas.*

Neste caso é

$$f(0) > 0, \quad f(l) > 0,$$

tanto na proposta como no transformada em $-x$. No último enunciado considera-se zero como caso particular dos numeros pares.

**145**. Dois termos consecutivos da equação $f(x) = 0$ dão logar a uma *permanencia* ou a uma *variação* conforme teem o mesmo ou differente signal. Entre dois termos do mesmo signal haverá um numero par de variações ou nenhuma, por isso que, se nos termos intermédios houver mudanças de signal, estas só poderão fazer-se aos pares.

Se a equação de grau $n$ fôr completa e forem $p$ e $v$ os numeros das suas permanencias e variações, será $p + v = n$. Neste caso, mudando $x$ em $-x$, as permanencias tornam-se em variações na transformada, e vice-versa.

A somma $v + v'$ das variacões da proposta e da sua transformada em $-x$ não pode exceder o grau d'aquella equação.

O último termo de uma equação que só tem raizes imaginárias é positivo (n.º 144), donde resulta que nesta equação haverá um numero par de variações.

**146.** Sendo $a$ positivo e multiplicando por $x-a$ a equação $f(x)=0$, a nova equação $(x-a)f(x)\equiv F(x)=0$ terá evidentemente mais uma raiz positiva do que a proposta, e terá tambem, como vamos ver, mais uma variação.

A primeira variação da equação primitiva tem logar no primeiro termo negativo de $f(x)$. Designando esse termo por $-p_r x^{n-r}$, com $p_r>0$, esta primeira parte de $f(x)$ será, com os signaes em evidencia,

$$(p_0 x^n+\ldots+p_{r-1}x^{n-r+1})-(p_r x^{n-r}+\ldots);$$

e d'aqui resultam para $F(x)$ os termos

$$p_0 x^{n+1}+\ldots-(ap_{r-1}+p_r)x^{n-r+1}.$$

O termo $p_0 x^{n+1}$ é positivo e irreductivel. Entre os termos seguintes alguns podem reduzir-se ou produzir variações, e poderá mesmo ser $r=1$ ou $p_{r-1}=0$. Em todos os casos subsistirá o termo negativo de grau $n-r+1$, e entre este termo e o primeiro haverá pelo menos uma variação.

A segunda variação de $f(x)$ apparece quando se chega novamente a um termo positivo $p_s x^{n-s}$, com $p_s>0$ e podendo ser $s \gtreqless r+1$. Mas dos termos

$$-p_{s-1}x^{n-s+1}+p_s x^{n-s}$$

de $f(x)$ resulta para $F(x)$ o seguinte

$$+(ap_{s-1}+p_s)x^{n-s+1},$$

que é positivo, irreductivel e cujo coefficiente em caso algum pode ser zero. Entre este termo e o termo negativo

$$-(ap_{r-1}+p_r)^{n-r+1},$$

cuja existencia se reconheceu já, haverá pelo menos uma variação.

Continuando do mesmo modo hade chegar-se finalmente a um termo $\pm p_{n-t}x^t$, depois do qual não haverá mais variações em $f(x)$. Até este termo, onde pode ser $t \gtreqless 0$, não se tem perdido variação alguma e só pode haver em $F(x)$ as mesmas ou mais variações do que em $f(x)$. Seja porém como fôr, em $F(x)$ o termo com $x^{t+1}$ tem o signal de $\pm p_{n-t}$, emquanto que o último $\mp ap_n$ tem o signal contrário. Por conseguinte em $F(x)$ ha pelo menos uma variação mais do que em $f(x)$.

Por outra parte, sendo $p_0 x^n$ e $\pm p_n$ os termos extremos de $f(x)$, os de $F(x)$ serão $p_0 x^{n+1}$ e $\mp ap_n$. Portanto os numeros $v$ e $V$ das variações de $f(x)$ e $F(x)$ são de paridade differente e, pois que é $V > v$, será

$$V-v=2k+1,$$

sendo o numero $k$ inteiro e positivo, ou zero.

**147.** Theorema de Descartes. — Designemos por $a_1$, $a_2, \ldots, a_m$ todas as raizes positivas da equação $f(x)=0$. Pondo

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)\,\varphi(x),$$

em $\varphi(x)=0$ estarão contidas as raizes negativas e as raizes imaginárias da proposta.

Designando por $v$ e $v_1$ os numeros de variações de $f(x)$ e $\varphi(x)$, a multiplicação de $\varphi(x)$ por cada factor binómio introduz no producto um numero ímpar de variações. Portanto será

$$v=v_1+(2k_1+1)+\ldots+(2k_m+1)=v_1+m+2k.$$

Ora a equação $\varphi(x)=0$ não tem raizes positivas, e por isso o seu último termo será positivo (n.º 144) como o primeiro; d'aqui resulta que $v_1$ será um numero par, e a expressão precedente terá a forma

$$v = m + 2l,$$

sendo $l$ um numero inteiro e positivo, ou zero.

Mudando $x$ em $-x$ e designando por $v'$ e $m'$ os numeros de variações e de raizes positivas da transformada, será do mesmo modo

$$v' = m' + 2l',$$

e aquellas raizes são raizes negativas da proposta. Logo:

*A equação* $f(x) = 0$ *não tem mais raizes positivas do que variações, nem mais raizes negativas do que as variações da sua transformada em* $-x$.

Esta proposição é conhecida pelo nome de *regra dos signaes de Descartes*. D'ella resultam os seguintes corollarios:

1.º O numero $m + m'$ das raizes reaes não pode exceder a somma $v + v'$ das variações de $f(x)$ e $f(-x)$; se os numeros $m + m'$ e $v + v'$ não forem eguaes, a sua differença será um numero par.

2.º Sendo positivos todos os termos da equação, é $v = 0$ e $m = 0$.

3.º Sendo todas as raizes reaes e positivas, é $m = n = v$ e $l = 0$. A equação, cujo grau designamos por $n$, é completa e só tem variações. A transformada em $-x$ só tem permanencias.

4.º Sendo $v = 1$, é $l = 0$ e $m = 1$; a equação tem só uma variação e só uma raiz positiva. Se fosse $v' = 1$, seria $l' = 0$, $m' = 1$ e a equação teria só uma raiz negativa.

5.º Sendo reaes todas as raizes, é $m + m' = n = v + v' - 2(l + l')$; e pois que não pode ser $v + v' > n$, será $l = l' = 0$, $m = v$ e $m' = v'$.

Se a equação fôr completa, o theorema de Descartes pode enunciar-se nos termos seguintes:

*A equação completa não tem mais raizes positivas do que variações, nem mais raizes negativas do que permanencias.*

**148.** Havendo faltas de termos, ou *lacunas*, será em geral $v+v'<n$. Supponhamos, em primeiro logar, que faltam $2k$ termos entre os dois

$$px^t, \quad qx^{t-2k-1},$$

O polynómio completo

$$F(x)=px^t+q_1x^{t-1}+q_2x^{t-2}+\ldots+qx^{t-2k-1},$$

onde $q_1$, $q_2$, etc. são coefficientes quaesquer, tem $2k+2$ termos; de modo que em $F(x)$ e $F(-x)$ haverá $2k+1$ variações. Por outra parte, os graus dos termos extremos são de differente paridade, e estes dois termos dão só uma variação para a proposta $f(x)=0$ e para a sua transformada $f(-x)=0$; portanto a falta dos termos intermédios faz perder $2k$ variações, e na equação dada faltam só por este facto $2k$ raizes reaes.

Se faltarem $2k+1$ termos entre os dois

$$px^t, \quad qx^{t-2k-2},$$

o polynómio completo

$$F(x)=px^t+q_1x^{t-1}+\ldots+qx^{t-2k-2}$$

tem $2k+3$ termos, e haverá $2k+2$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Mas agora os graus dos termos extremos são da mesma paridade, e estes termos podem ter o mesmo ou differente signal em $f(x)$. No primeiro caso não dão variação alguma na proposta e na transformada, e estas equações perderam $2k+2$ variações pela falta dos termos intermédios. No segundo caso aquelles termos dão duas variações em $f(x)$ e $f(-x)$, e estes polynómios veem a perder só $2k$ variações pela falta dos termos intermédios. Á proposta faltam num caso $2k+2$ raizes reaes, e no outro $2k$; e como pode ser $k=0$, se na equação faltar só um termo entre dois de signaes contrários será

$v+v'=n$, como na equação completa, e a proposta poderá ter ainda todas as raizes reaes.

## XVIII. — Equações reciprocas. Equações binómias.

**149.** Diz-se *recíproca* a equação $f(x)=0$ que tem as mesmas raizes que a sua transformada $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Assim, o primeiro membro d'esta última equação, desembaraçada de denominadores, só poderá distinguir-se de $f(x)$ por algum factor constante $\delta$; e continuando a designar por $n$ o grau da proposta, a equação recíproca será definida pela identidade

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\equiv\delta f(x).$$

Teremos, pois, suppondo que $f(x)$ é o polynómio (1) do n.º **117**,

$$\begin{gathered}p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1 x+p_0\\ \equiv\delta p_0 x^n+\delta p_1 x^{n-1}+\ldots+\delta p_{n-1}x+\delta p_n;\end{gathered}$$

e por conseguinte será

$$p_n=\delta p_0,\quad p_{n-1}=\delta p_1,\quad \ldots,\quad p_1=\delta p_{n-1},\quad p_0=\delta p_n.$$

Multiplicando a primeira d'estas egualdades pela última, e dividindo o producto por $p_0 p_n$ visto suppormos $p_0\neq 0$ e $p_n\neq 0$, vem

$$\delta^2=1,\quad \delta=\pm 1$$

e portanto

$$p_0=\pm p_n,\quad p_1=\pm p_{n-1},\quad \text{etc.}$$

Se fosse $n=2k$ haveria em $f(x)$ um termo médio $p_k x_k$, e entre as últimas relações havia de encontrar-se esta

$$p_k = \pm p_k.$$

Mas esta egualdade só pode subsistir com o signal inferior quando seja $p_k=0$; e portanto:

*Na equação recíproca os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos são eguaes, ou numéricamente eguaes e de signaes contrários com tanto que neste caso falte o termo médio se o grau da equação é par.*

**150.** A equação recíproca de grau impar tem a raiz $-1$ quando os termos equidistantes dos extremos teem o mesmo signal e tem a raiz $+1$ no caso contrário, porque em ambos os casos os termos se reduzem dois a dois para aquelles valores de $x$.

A equação recíproca de grau par tem pela mesma razão as duas raizes $\pm 1$ quando é $p_n = -p_0$, pois que neste caso lhe faltará o termo médio.

Da relação $z^2=1$ ou $z=\pm 1$ tira-se $z=\dfrac{1}{z}$; isto é, as raizes $+1$ e $-1$ são recíprocas de si mesmas, e os casos precedentes estam incluidos na definição d'estas equações. É facil reconhecer directamente a existencia d'aquellas raizes, que poremos de parte dividindo $f(x)$ por algum dos binómios $x-1$ e $x+1$, ou por ambos. Tendo effectuado estas divisões até encontrar um quociente $\varphi(x)$ que não seja divisivel por qualquer d'aquelles binómios, a equação $\varphi(x)=0$ será de grau par $2m$, por isso que as suas raizes são, duas a duas, recíprocas umas das outras e differentes da unidade.

Por outra parte, em $\varphi(x)$ os termos equidistantes dos extremos hão de ser numéricamente eguaes e do mesmo signal. Com effeito a relação

$$x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\delta\,\varphi(x)$$

torna-se para $x=\pm 1$ em

$$\varphi(\pm 1)=\delta\varphi(\pm 1),$$

donde se tira $\delta=1$ por ser $\varphi(\pm 1)\neq 0$.

Por conseguinte a resolução da equação recíproca virá sempre a depender da resolução de uma equação da forma

$$p_0 x^{2m}+p_1 x^{2m-1}+\ldots+p_1 x+p_0=0$$

com os termos equidistantes dos extremos eguaes em valor numérico e signal. Dividindo por $x^m$ e reduzindo os termos que teem o mesmo coefficiente, esta equação torna-se em

$$(1)\qquad p_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+p_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\ldots+p_m=0.$$

Ora, da relação

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)+\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

tira-se

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

Pondo

$$(2)\qquad x+\frac{1}{x}=y,$$

e fazendo successivamente $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots$, da expressão precedente resultam as seguintes:

$$x+\frac{1}{x}=y,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,$$

etc.

Substituindo estas expressões na equação (1), teremos a transformada de grau $m$ em $y$. Á relação de transformação (2) podemos dar a forma

$$x^2-yx+1=0; \tag{3}$$

substituindo $y$ successivamente por cada uma das raizes da transformada, determinaremos por (3) as duas raizes correspondentes da proposta. Logo:

*As equações reciprocas são susceptiveis de abaixamento. As de grau par em que os termos equidistantes dos extremos teem o mesmo signal abaixam-se ao grau subduplo.*

**151.** Chamam-se *binómias* as equações da forma

$$x^n \pm A=0. \tag{4}$$

Estas equações não teem raizes eguaes, porque entre $x^n \pm A$ e a sua derivada não ha outro divisor commum além da unidade.

Por conseguinte o numero A, positivo ou negativo, real ou imaginário, tem $n$ raizes *differentes* do grau $n$. Designando uma d'ellas por $a$ e pondo $x=ay$, a transformada de (4), depois de dividida por $a^n$, será

$$y^n \pm 1 = 0.$$

Se $n$ é impar, mudando $y$ em $-y$ na equação $y^n+1=0$ a transformada será $y^n-1=0$. Se fôr $n$ par e $k$ o expoente da maior potencia de 2 que se contem em $n$, ou $n=2^k r$, será $r$ impar; fazendo $2^k=s$ e $y^s=z$, ou $y^s-z=0$, a equação $y^n+1=0$ torna-se em $z^r+1=0$ e transforma-se, como já vimos, em $z^r-1=0$. Por outra parte a equação $y^s-z=0$ faz-se depender, como anteriormente, de outra da forma $t^s-1=0$.

D'esta discussão resulta que recahiremos sempre numa equação como

$$y^n-1=0, \tag{5}$$

que vem a ser a forma *normal* das equações binómias.

**152.** *As raizes communs ás duas equações*

$$y^m-1=0, \quad y^n-1=0$$

*são raizes de equação*

$$y^d-1=0,$$

*em que* d *é o maior divisor commum dos numeros* m *e* n.

Applicando ás equações dadas o algorithmo de Euclides, facilmente se conclue que $y^d-1$ é o maior divisor commum de $y^m-1$ e $y^n-1$. Se $m$ e $n$ forem primos entre si, as duas equações só tem a raiz commum $+1$.

Pelo theorema de Descartes se reconhece que a equação (5) tem só uma raiz real $+1$, no caso de $n$ ser impar; e tem duas $\pm 1$, no caso de $n$ ser par.

A equação (5) é recíproca, quer $n$ seja par ou ímpar, visto que lhe falta o termo médio.

**153.** Se $\alpha$ fôr uma raiz da equação (5), qualquer potencia de $\alpha$ será tambem raiz da mesma equação, visto que, sendo $\alpha^n = 1$, será $(\alpha^t)^n = (\alpha^n)^t = 1$.

Uma raiz da equação (5) diz-se *primitiva*, quando não é conjunctamente raiz de outra equação da mesma forma e de grau inferior. A raiz $+1$ nunca é primitiva; para $n = 2k$ a raiz $-1$ tambem o não é, excepto se fôr $n = 2$. Se $n$ fôr um numero primo, qualquer raiz imaginária da equação (5) é primitiva. Posto isto:

*Se $\alpha$ fôr uma raiz primitiva da equação* (5), *as potencias de $\alpha$ desde* 1 *até* n *serão todas as raizes da mesma equação.*

Em primeiro logar, na série de todas as potencias inteiras de $\alpha$

$$\ldots \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$$

não ha mais de $n$ termos differentes, que se reproduzem periodicamente. Com effeito, qualquer inteiro $t$, positivo ou negativo, será da forma

$$t = nq + r,$$

sendo $q$ um inteiro ou zero e $r$ positivo e menor que $n$. D'aqui resulta que será

$$\alpha^t = \alpha^r,$$

por ser $\alpha^{nq} = (\alpha^n)^q = 1$.

Por outra parte, os numeros

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$$

são todos differentes; porque, se entre elles houvesse dois eguaes, $\alpha^k = \alpha^h$ por exemplo, d'esta egualdade se tirava, suppondo $k > h$ e fazendo $k - h = m < n$,

$$\alpha^{k-h} = \alpha^m = 1.$$

D'aqui resultaria que $\alpha$ seria tambem raiz da equação $y^m - 1 = 0$, o que não pode ter logar quando $\alpha$ é raiz primitiva de (5).

**154.** A equação binómia (5) tem sempre raizes primitivas. Considerando os casos que podem dar-se relativamente á composição do numero $n$, vamos ver que a resolução d'esta equação se pode sempre fazer depender da resolução de uma equação binómia, cujo grau seja um numero primo.

1.° — *Se* n *é o producto de dois factores primos* r *e* s, *obteem-se todas as raizes da equação* $y^{rs} - 1 = 0$ *multiplicando as raizes da equação* $y^r - 1 = 0$ *pelas raizes da equação* $y^s - 1 = 0$.

As $r + s$ raizes das duas últimas equações são tambem raizes da proposta, mas não são primitivas. Neste numero conta-se a unidade duas vezes; contando-a uma vez só, acha-se que o numero das raizes não primitivas da equação (5) será $r + s - 1$ e portanto o das raizes primitivas é

$$\begin{aligned} rs - r - s + 1 &= (r-1)(s-1) \\ &= n\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

Se $\beta$ e $\gamma$ forem respectivamente raizes primitivas das equações $y^r - 1 = 0$ e $y^s - 1 = 0$, o producto $\beta\gamma = \alpha$ será raiz primitiva da proposta. Com effeito, de $\beta^r = 1$ e $\gamma^s = 1$ deduz-se

$$\beta^{rs} = 1, \quad \gamma^{rs} = 1, \quad (\beta\gamma)^{rs} = \alpha^n = 1,$$

por onde se vê que $\alpha$ é raiz da equação (5). E é primitiva, porque no caso contrário só poderia ser raiz de alguma das equações $y^r - 1 = 0$ ou $y^s - 1 = 0$; mas se $\alpha$ fosse raiz da primeira d'estas equações, seria $(\beta\gamma)^r = 1$, ou $\gamma^r = 1$ por ser $\beta^r = 1$. D'aqui resultaria que $\gamma$ seria raiz das duas equações $y^r - 1 = 0$ e $y^s - 1 = 0$, o que não pode ter logar porque os numeros $r$ e $s$ são primos entre si. Do mesmo modo se veria que $\alpha$ não pode ser raiz da equação $y^s - 1 = 0$.

Na formação das potencias

$$\beta\gamma, \quad (\beta\gamma)^2, \quad \ldots, \quad (\beta\gamma)^n,$$

que seriam todas as raizes da proposta, pode-se abaixar o expoente de cada factor de modo que o de $\beta$ não exceda $r$ e o de $\gamma$ não seja maior que $s$; por conseguinte formando as duas linhas

$$\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^r,$$
$$\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^s$$

com as raizes das equações $y^r-1=0$ e $y^s-1=0$, e multiplicando cada elemento da primeira linha por todos os termos da segunda, teremos obtido todas as raizes da equação $y^n-1=0$.

2.° — Do mesmo modo, se o grau da equação (5) fôr o producto de tres factores primos differentes, ou $n=rst$, as raizes das equações

$$(6)\qquad \begin{array}{lll} y_1^r-1=0, & y^s-1=0, & y^t-1=0, \\ y^{rs}-1=0, & y^{rt}-1=0, & y^{st}-1=0 \end{array}$$

verificam a proposta e não são primitivas. Ora, não contando a unidade, o numero das raizes das tres últimas equações é

$$rs+rt+st-3,$$

onde se encontra repetido o numero das raizes das tres primeiras. Portanto, subtrahindo d'aquelle numero a somma

$$r-1+s-1+t-1$$

e juntando á differença uma unidade, pois que não se attendeu á raíz 1, o numero das raizes não primitivas da equação (5) será

$$rs+rt+st-r-s-t+1.$$

D'aqui resulta que o numero das raizes primitivas da proposta é a differença d'este último para $n$, ou $rst-rs-rt-$ $-st+r+s+t-1$, isto é,

$$(r-1)(s-1)(t-1)=n\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{1}{t}\right).$$

Se $\beta$, $\gamma$ e $\delta$ são raizes primitivas das tres primeiras equações (6), o producto $\beta\gamma\delta=\alpha$ será raiz primitiva da equação (5). Com effeito, das identidades

$$\beta^r=1,\quad \gamma^s=1,\quad \delta^t=1$$

deduz-se

$$(\beta\gamma\delta)^{rst}=\alpha^n=1,$$

e portanto $\alpha$ é raiz daquella equação. Além d'isso esta raiz é primitiva, porque não pode ser raiz de nenhuma das equações (6); e estas são as únicas cujos graus são inferiores a $n$ e não são primos com $n$. Se $\beta\gamma\delta$ fosse raíz da equação $y^{rs}-1=0$, por exemplo, seria

$$(\beta\gamma\delta)^{rs}=\delta^{rs}=1$$

e $\delta$, que é raiz primitiva da equação $y^t-1=0$, seria tambem raiz da equação $y^{rs}-1=0$; mas isto não pode ter logar, porque os numeros $rs$ e $t$ são primos entre si. Do mesmo modo se veria que $\alpha$ não pode ser raiz de nenhuma das outras equações (6).

Multiplicando as raizes da equação $y^{rs}-1=0$, que se formariam do modo que anteriormente se disse, pelas raizes da equação $y^t-1=0$, teriamos todas as raizes da equação $y^n-1=0$.

Pelo mesmo processo se resolveria o caso em que $n$ fosse o producto de maior numero de factores primos differentes.

3.º — *Sendo* r *um numero primo, a equação*

$$y^{r^p}-1=0$$

*resolve-se por meio da equação* $y^r-1=0$.

As raizes não primitivas da equação proposta satisfazem a uma equação da mesma forma cujo grau seja um divisor de $r^p$, Qualquer numero nestas circunstancias, excepto o mesmo $r^p$, divide $r^{p-1}$; portanto as raizes não primitivas da proposta satisfazem á equação

$$(7) \qquad y^{r^{p-1}}-1=0,$$

e todas as raizes d'esta equação satisfazem evidentemente á primeira. Logo o numero das raizes primitivas d'esta última equação será

$$r^p-r^{p-1}=n\left(1-\frac{1}{r}\right).$$

Se fôr $\beta$ uma raiz imaginária da equação $y^r-1=0$, o numero

$$\alpha=\sqrt[r^{p-1}]{\beta}$$

é raiz da proposta, por ser $\alpha^{r^p}=\beta^r=1$. E é raiz primitiva, porque no caso contrário seria raiz da equação (7) e portanto

$$\alpha^{r^{p-1}}=\beta=1,$$

contra a hypothese feita a respeito de $\beta$.

Se a decomposição de $n$ em factores primos der

$$n=r^p s^q t^u,$$

veriamos, pelo que temos dito, que a resolução da proposta vem a depender finalmente das tres equações

$$y^r-1=0, \quad y^s-1=0, \quad y^t-1=0,$$

cujos graus são numeros primos.

**155.** Sendo $n$ um numero primo, á equação recíproca (5) é applicavel a transformação do n.° 150.

Dividindo a proposta pelo binómio $y-1$, que corresponde á raiz real $+1$, obtem-se a equação de grau par

$$y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+y+1=0.$$

Fazendo depois

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

a transformada da última equação será de grau $\frac{n-1}{2}$ e terá todas as raizes reaes e menores que 2. Com effeito, se uma das raizes de grau $n$ da unidade fôr

$$y=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi,$$

a sua recíproca será

$$\frac{1}{y}=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi,$$

visto ser $(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi)=1$; e das duas últimas expressões resulta $z=2\cos\varphi$.

D'este modo a relação de transformação será

$$y^2-2y\cos\varphi+1=0,$$

e esta equação dará os dois valores de $y$ correspondentes a cada raiz da equação transformada.

**Nota ao Cap. XV.**

É sufficiente conhecer os limites das raizes em numeros inteiros.

FIM

# ERRATA

| *Pag.* | *Lin.* | *Onde está:* | *Leia-se:* |
|---|---|---|---|
| 31 | 16 | THEOREMA | THEOREMA II. |
| 57 | 6 | $\beta_{h+}$ | $\beta_{h+1}$ |
| 64 | 2 | fórmula (9) | fórmula (10) |
| 82 | 23 | *collções* | *collecções* |
| 84 | 22 | $x_{c(c+1}$ | $x_{c(c+1)}$ |
| 97 | 25 | termo em $x^i$ | termo em $x_i$ |
| 105 | 2 | $< v_1 (v'_n - u_n) +$ | $< v_1 (v'_n - u'_n) +$ |
| 113 | 4 | *parallelas* | *parcellas* |
| 114 | 18 | e portanto | e portanto, pondo $k = 0$, |
| 145 | 19 | se dirá. | se dirá (n.º 107). |
| 157 | 2 | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 173 | 15 | $dx f' (x + \theta\, dx, y, + dy)$ | $dx f' (x + \theta\, dx, y + dy)$ |
| 174 | 20 | Será $y$ ums | Será $y$ uma |
| 207 | 2 | $c^2$ | $c_2$ |
| 210 | 7 | $x_2 \mathrm{F}(x)$ | $x^2 \mathrm{F}(x)$ |
| 212 | 14 | $b0$ | $b_0$ |
| 223 | 12 | muitos negativos | muitos positivos |

# INDICE

S. RODRIGUES

ALGEBRA