# ALGEBRA
# COMPLEMENTAR

# ALGEBRA COMPLEMENTAR

LIÇÕES PROFESSADAS NO ANNO ESCOLAR
DE 1914-1915



COIMBRA
FRANÇA & ARMENIO
LIVREIROS — EDITORES
1915

COIMBRA — IMPRENSA DA UNIVERSIDADE — 1915

# LIÇÕES

DE

# ALGEBRA COMPLEMENTAR

## I. — Preliminares

**1.** Dá-se o nome de *variavel* á grandeza que pode tomar diversos valores, em numero finito ou infinito. Pelo contrario chama-se *constante* a grandeza que conserva sempre o valor que uma vez lhe foi attribuido.

Convencionalmente designam-se as variaveis pelas ultimas letras do alphabeto. O conjuncto de todos os valores de que uma variavel é susceptivel constitue o seu *campo de variabilidade*.

Comparando uma grandeza com outra da mesma especie, arbitrariamente escolhida para unidade, a cada um dos seus valores se pode fazer corresponder um numero racional ou irracional, positivo ou negativo. Por outra parte, se numa recta invariavel ou *eixo* tomarmos um ponto fixo ou *origem* O, cada ponto do eixo ficará determinado pela sua distancia á origem, expressa numa certa unidade linear e tomada com o signal positivo ou negativo conforme o ponto considerado estiver á direita ou á esquerda de O; reciprocamente a cada numero dado corresponderá um ponto determinado do eixo.

É, pois, natural representar cada valor da variavel por um ponto d'esta recta; e diremos frequentemente, por exemplo, *ponto a* em vez de *valor a da variavel*.

D'este modo tambem um campo de variabilidade será expresso por um conjuncto de pontos da recta fixa. Estes pontos podem ser em numero finito ou infinito, constituindo um ou mais segmentos completos do eixo ou mesmo achando-se isolados.

Um segmento cujos pontos pertencem todos a um campo chama-se *intervallo*. Se os seus extremos forem $a$ e $b > a$, diz-se que $a$, $b$ e $b - a$ são respectivamente o *extremo inferior*, *extremo superior* e a *amplitude* do intervallo $ab$.

Se um ponto da recta fixa pertence a um campo de variabilidade e ao mesmo tempo a um intervalo cujos pontos pertencem *todos* ao mesmo campo, diz-se que a variavel é *continua* naquelle ponto. Se o intervallo fica todo á direita ou todo á esquerda do ponto considerado, diz-se que neste ponto a variavel é *continua á direita* ou *continua á esquerda* respectivamente.

A um intervallo $ab$ tambem se dá o nome de *grupo de pontos*. Seja $a$ um ponto da recta fixa, que pode pertencer ou não a um certo campo, e supponhamos que, tomando para a direita ou para a esquerda ou de ambos os lados de $a$ um segmento arbitrariamente pequeno de que $a$ seja um extremo, se encontra sempre dentro d'esse segmento, por mais pequeno que elle seja, um ponto que pertença ao campo considerado. Diremos então que $a$ representa um *limite dos valores da variavel*, ou um *ponto limite* do grupo. Assim, por exemplo, se o campo é composto dos infinitos pontos

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

é claro que, tomando á direita do ponto zero um segmento arbitrariamente pequeno, nelle se encontrarão sempre infinitos pontos d'esta especie. Portanto zero será o *ponto limite* d'este grupo.

Um caso particular convém considerar. Se um campo fôr tal que, tomando um ponto para a direita e a distancia arbitrariamente grande da origem, por maior que seja esta distancia existam sempre á direita d'esse ponto outros que pertençam ao mesmo campo, dizemos que o *extremo superior do campo é o ponto* $+\infty$. Se o mesmo tiver logar para a esquerda da origem, dizemos que o *extremo inferior do campo é o ponto* $-\infty$. Correspondentemente se pode dizer que *um limite dos valores da variavel é* $+\infty$ *no primeiro caso e* $-\infty$ no *segundo*, ou ainda que $+\infty$ *e* $-\infty$ *são respectivamente pontos limites do grupo de pontos.*

Do mesmo modo duas variaveis $x_1$ e $x_2$, independentes entre si, podem ser representadas por um ponto de um plano fundamental. Bastará traçar neste plano dois eixos concorrentes e, tomando para origem em cada uma d'estas rectas o seu ponto de intersecção, contar numa dellas a variavel $x_1$ e na outra a variavel $x_2$, como fica dito. A intersecção das parallelas aos eixos, tiradas pelos pontos $x_1$ e $x_2$, será o ponto do plano que representa o systema das duas variaveis.

Continuando pelo mesmo processo, um systema de tres variaveis independentes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ pode ser representado por um ponto do espaço. Tendo marcado no plano fundamental o ponto $(x_1, x_2)$, na perpendicular ao plano, tirada por esse ponto, se contará a terceira variavel $x_3$. Querendo generalisar este modo de representação, podemos admittir a noção de *espaços a* n *dimensões*, e um systema de valores de $n$ variaveis será designado por um ponto d'este espaço.

**2.** Duas variaveis $x$ e $y$ podem estar ligadas entre si por uma relação de dependencia tal que, dado um valor arbitrario a uma d'ellas que por este motivo se chama *independente*, fique inteiramente determinado um valor da outra. Imaginemos, por exemplo, todos os circulos que podem descrever-se em torno de um centro fixo. O raio d'estes circulos é variavel bem como a sua area, mas para cada valor do raio fica logo determinado o valor da area correspondente. Logo estas duas variaveis dependem uma da outra.

Esta dependencia pode ter logar por differentes formas. Pode acontecer que para certos valores da variavel independente, que supporemos ser $x$, resulte um só valor bem determinado de $y$; que para outros valores de $x$ venham para $y$ diversos valores determinados, e que para outros não haja valor algum bem determinado de $y$.

Mas imaginemos que se define o campo de variabilidade de $x$ e a dependencia entre $x$ e $y$ por modo tal, que para todos os pontos d'esse campo $y$ *seja determinado e tenha um valor único*. Diremos então que $y$ é *funcção* de $x$ no mesmo campo, o que se indicará por um symbolo tal como

$$y=f(x),$$

representando por $f$ ou por outra letra F, $\varphi$, $\Psi$, etc., o symbolo de *funcção*. O valor que toma $y$ para $x=a$ é representado por $f(a)$.

Se a dependencia entre as variaveis $x$ e $y$ fôr tal que, ao mesmo tempo que $y$ se considera funcção de $x$, tambem $x$ se pode considerar funcção de $y$, diz-se que a funcção $x$ é *inversa* da funcção $y$.

A representação analytica de que temos tratado é ordinariamente chamada *explicita*, por contraposição a outra que se chama *implicita*.

Imaginemos que é dada uma relação analytica entre as variaveis $x$ e $y$, isto é, uma relação expressa por uma serie de operações analyticas que devam executar-se simultaneamente sobre as duas variaveis; e supponhamos que deve ser zero o resultado final que se obtem depois de effectuadas estas operações sobre cada systema de valores de $x$ e $y$. Esta hypothese traduz-se na fórmula

$$f(x, y) = 0,$$

onde $f$ indica o conjuncto de todas as operações que devem executar-se sobre $x$ e $y$. Posto isto, se podermos definir um campo de variabilidade de $x$ de modo que a todos os valores de $x$ comprehendidos nesse campo corresponda um valor bem determinado de $y$ que convém á relação dada, diremos que $y$ é funcção implicita de $x$.

Convém observar aqui que ao conceito de funcção não anda inherente a possibilidade da sua representação geometrica ou analytica, isto é, a existencia de algum processo analytico ou geometrico que nos permitta, dado um valor de $x$, determinar o valor correspondente de $y$.

Se dermos a $x$ todos os valores para os quaes a funcção $y$ fica determinada, os systemas em numero infinito dos valores das duas variaveis definirão outros tantos pontos do plano, que na maior parte dos casos formam uma curva; e assim teremos uma representação geometrica da funcção $y$, pois que esta curva indicará a maneira como $y$ varia quando damos a $x$ todos os valores possiveis. Todavia este modo de representação nem sempre se pode verificar, e ha funcções para as quaes o conjuncto dos infinitos pontos $(x, y)$ não forma propriamente uma curva. Ha muitos exemplos d'este caso.

Quanto á representação analytica, qualquer das operações fundamentaes de addição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, applicada á variavel $x$ combinada com quantidades constantes, dá logar a uma nova variavel cujo valor depende em geral do valor de $x$ e que, por conseguinte, pode em geral dizer-se funcção de $x$. O mesmo succede quando á variavel $x$ se applica mais que uma d'aquellas operações ou a mesma repetida varias vezes. Teremos outros exemplos de funcções quando a variavel $y$ representa o seno, o coseno, a tangente, etc., de um arco $x$, ou ainda o logarithmo ou a exponencial de um numero $x$. Cada uma d'estas funcções corresponde a uma operação analytica bem determinada, que tem de praticar-se sobre a variavel; e de uma funcção, cujo valor pode calcular-se effectuando um certo numero d'estas operações sobre a variavel independente, se diz que é *capaz de uma representação analytica*. Entretanto casos ha em que entre $x$ e $y$ existe uma relação de dependencia, sem que todavia seja possivel exprimi-la por fórmulas analyticas em *todo* o campo de variabilidade de $x$.

**3.** O conceito de funcção, que definimos para o caso de uma variavel independente, pode generalisar-se para maior numero de variaveis. Se tivermos $h+1$ variaveis $y, x_1, \ldots, x_h$ taes que, dando a $x_1, \ldots, x_h$ certos valores comprehendidos em campos determinados, venha sempre para $y$ um valor determinado, diz-se que $y$ é *funcção* das variaveis $x_1, \ldots, x_h$ e escreve-se

$$y = f(x_1, \ldots, x_h).$$

Entre as funcções analyticas das variaveis $x_1, \ldots, x_h$, chamam-se *racionaes inteiras* ou simplemente *inteiras* aquellas que são representadas pela somma algebrica de um numero *finito* de termos da forma

$$\text{(1)} \qquad A x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\alpha_h},$$

em que A é constante e os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ são numeros inteiros e positivos ou zero. Por exemplo

$$y = x_1 x_2 - \frac{2}{3} x_3^2 + 4 x_1^3 x_3$$

é uma funcção inteira das variaveis $x_1, x_2, x_3$.

A funcção inteira é, pois, um polynomio que podemos representar pela notação

$$y = \Sigma \, A x_1^{\alpha_1} \dots x_h^{\alpha_h},$$

onde o symbolo *sommatorio* $\Sigma$ designa a somma algebrica de um numero finito de termos da forma do termo geral (1).

**4.** As funcções analyticas dividem-se em *algebricas* e *transcendentes*. Quanto entre as $h+1$ variaveis $y, x_1, \dots, x_h$ existe uma relação de dependencia que se traduz na equação

$$(2) \qquad f(y, x_1, \dots, x_h) = 0,$$

em que $f(y, x_1, \dots, x_h)$ é funcção inteira d'aquellas $h+1$ variaveis, diz-se que $y$ é *funcção algebrica* das variaveis independentes $x_1, \dots, x_h$.

As razões trigonometricas *seno, coseno*, etc., a exponencial $y = a^x$ e a funcção logarithmica $y = \log x$ são *funcções transcendentes*.

No caso de duas variaveis sómente a equação

$$f(x, y) = 0$$

mostra que, se $y$ é funcção algebrica de $x$, a inversa $x$, se existir, tambem é funcção algebrica de $y$.

Designando por $n$ um numero inteiro e positivo, á funcção algebrica pode-se dar a forma

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0,$$

e os coefficientes $A_i$ são funcções inteiras das variaveis $x_1, \dots, x_h$; podem alguns d'estes coefficientes ser constantes ou zero. Esta funcção diz-se *racional* quando é $n=1$ e reduz-se, pela definição anterior do symbolo sommatorio, a

$$\frac{\Sigma A x_1^{\alpha_1} \dots x_h^{\alpha_h}}{\Sigma B x_1^{\beta_1} \dots x_h^{\beta_h}}.$$

A funcção diz-se *irracional* quando é $n > 1$.

As funcções racionaes subdividem-se em *inteiras* e *fraccionarias* conforme é ou não constante o denominador da ultima expressão.

Resumindo: *As funcções analyticas dividem-se em algebricas e transcendentes; as algebricas subdividem-se em racionaes e irracionaes; ns racionaes podem ser inteiras ou fraccionarias.*

*As funcções inteiras exprimem-se effectuando com as variaveis independentes e um numero finito de constantes unicamente as operações de addição, subtracção e multiplicação.*

*Racionaes são as funcções que se exprimem effectuando com as variaveis independentes e um numero finito de constantes unicamente as operações de addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

*As funcções algebricas que não são inteiras nem racionaes chamam-se irracionaes.*

5. A *Algebra Complementar* é o ramo da analase que tem por objecto o estudo das funcções algebricas. O problema fundamental que a algebra trata de resolver é o seguinte:

*Dadas as equações algebricas*

$$f_1(x, y, z, \dots) = 0, \; f_2(x, y, z, \dots) = 0, \text{ etc.}$$

*achar o systema ou systemas dos valores das incógnitas $x, y, z, \dots$ que satisfazem a estas equações.*

Cada um d'estes systemas é uma *solução* das propostas e a sua determinação depende, em geral, da resolução dos dois problemas seguintes:

1.º Separar as incógnitas por processos de *eliminação,* de modo que a questão se reduza á resolução de uma só equação com uma incógnita.

2.° Resolver a equação final $f(x)=0$.

A quantidade $x$ pode ser considerada como funcção algebrica dos coefficientes $a, b, c, \ldots$ d'esta equação. A *resolução algebrica* tem por objecto determinar a natureza e formas possiveis d'esta funcção

$$x=\varphi(a, b, c, \ldots).$$

A *resolução numerica* limita-se á indagação de processos práticos, pelos quaes seja possivel, dados os valores numericos de $a, b, c, \ldots$ achar a *raiz* ou *raizes* da equação, isto é, os valores numericos de $x$ que a satisfazem.

## II. — Polynomios. Identidades.

**6.** Definições. — *Duas funcções* $\mathrm{f}_1$ *e* $\mathrm{f}_2$ *dizem-se* identicamente *eguaes, o que se exprime pela notação* $\mathrm{f}_1 \equiv \mathrm{f}_2$, *quando a egualdade* $\mathrm{f}_1=\mathrm{f}_2$ *subsiste para todos os valores das variaveis.*

*Diz-se que a funcção* $\mathrm{f}$ *é identicamente nulla, e escreve-se* $\mathrm{f}\equiv 0$, *quando é* $\mathrm{f}=0$ *para quaesquer valores das variaveis.*

**7.** Por definição, a funcção inteira de uma variavel é a somma algebrica

$$f(x)\equiv c_1 x^{\alpha_1}+c_2 x^{\alpha_2}+\ldots+c_k x^{\alpha_k},$$

em que os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são numeros inteiros e positivos ou zero. As constantes $c_1, \ldots, c_k$ são numeros reaes positivos, negativos ou zero, ou numeros imaginarios.

Suppondo feitas as reducções, como é sempre possivel, os expoentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ serão todos differentes uns dos outros.

Diremos então que $c_i x^{\alpha_i}$ é um *termo* de $f(x)$, $c_i$ o *coefficiente* d'este termo e $\alpha_i$ o seu *grau*. O maior grau dos differentes termos é o *grau* do polynomio, com tanto que o coefficiente do termo correspondente seja differente de zero. O polynomio cujos termos teem todos zero por coefficiente não tem grau. Se fôr $\alpha_k = 0$, o ultimo termo da expressão de $f(x)$ reduz-se a uma constante; d'aqui resulta que o termo constante se considera de grau zero, e o polynomio que se reduz sómente a este termo é tambem de grau zero.

O polynomio de grau $n$ diz-se completo quando nos seus termos se encontram todas as potencias do variavel $x$, desde a potencia de expoente $n$ até á de expoente zero inclusivè. Se o polynomio fôr incompleto, podem preencher-se as lacunas restituindo-lhe os termos que faltarem e dando a cada um o coefficiente zero. Assim o polynomio ordenado terá a forma

$$(1) \qquad f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-2} x^2 + p_{n-1} x + p_n;$$

e d'este modo fica esclarecido o que deva entender-se quando se fala em *primeiro termo, segundo termo,* etc., *último termo* de $f(x)$.

**8.** Como se disse, suppomos o polynomio (1) de grau $n$, isto é, $p_0 \gtrless 0$. Substituindo $x$ por $a$ e subtrahindo, vem a differença

$$f(x) - f(a) = p_0(x^n - a^n) + p_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + \\ + p_{n-2}(x^2 - a^2) + p_{n-1}(x - a).$$

Ora, sendo $i$ um numero inteiro, é

$$x^i - a^i = (x - a)(x^{i-1} + a x^{i-2} + \ldots + a^{i-2} x + a^{i-1});$$

pondo successivamente $i = n$, $n - 1$, etc. e substituindo os resultados na expressão precedente, virá

$$(2)\quad \begin{cases} f(x)-f(a)\equiv(x-a)\,[p_0(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a x^{n-2}+a^{n-1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +p_1(x^{n-2}+ax^{n-3}+\ldots+a^{n-2}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +p_{n-2}(x+a)+p_{n-1}]. \end{cases}$$

O factor que está multiplicando o binomio $x-a$ no segundo membro d'esta identidade é ainda uma funcção inteira de $x$, que designaremos por $f_1(x)$ e é do grau $n-1$. Assim teremos

$$f(x)-f(a)\equiv(x-a)\,f_1(x),$$

donde se tira

$$(3)\qquad f(x)\equiv(x-a)f_1(x)+f(a);$$

e o polynomio $f_1(x)$ será da forma

$$f_1(x)\equiv q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}.$$

A expressão (3) mostra que o resto da divisão de $f(x)$ por $x-a$ é $f(a)$. O quociente d'esta operação é $f_1(x)$, cujos coefficientes se vê por (2) que são:

$$(4)\quad \begin{cases} q_0=p_0, \\ q_1=p_0a+p_1=aq_0+p_1, \\ q_2=p_0a^2+p_1a+p_2=aq_1+p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1}=p_0a^{n-1}+p_1a^{n-2}+\ldots+p_{n-1}=aq_{n-2}+p_{n-1}; \end{cases}$$

o resto $f(a)$, que designaremos por $q_n$ para uniformisar a notação, é

$$q_n=p_0a^n+p_1a^{n-1}+\ldots+p_{n-1}a+p_n=aq_{n-1}+p_n.$$

Por conseguinte o primeiro termo do quociente tem o mesmo coefficiente que o primeiro termo do dividendo, como immediatamente resultaria de ser a unidade o coefficiente do primeiro termo do divisor. Os outros coefficientes do quociente e o resto são dados pela fórmula geral

$$q_i = aq_{i-1} + p_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

cujo enunciado, a que se chama *regra de Rufini*, é o seguinte:

*Na divisão de* f(x) *por* x — a *o coefficiente de cada termo do quociente e o resto é egual ao coefficiente do termo anterior do quociente multiplicado por* a, *mais o coefficiente do termo da mesma ordem no dividendo.*

Na applicação desta regra devemos completar o polynomio $f(x)$, se elle fôr incompleto, e attender ao signal de $a$. Seja, por exemplo,

$$f(x) \equiv 3x^6 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 7x - 4$$

e o divisor $x+1$; fazendo $a = -1$, teremos:

$$\begin{array}{ll}
\text{coef. de } f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3,\ 0,\ -3,\ 2,\ 2,\ -7,\ -4 \\
q_0 = & 3, \\
q_1 = 0 + 3.(-1) = & -3, \\
q_2 = -3 - 3.(-1) = & 0, \\
q_3 = 2 + 0.(-1) = & 2, \\
q_4 = 2 + 2.(-1) = & 0, \\
q_5 = -7 + 0.(-1) = & -7, \\
q_6 = -4 - 7.(-1) = & 3.
\end{array}$$

O quociente é pois

$$3x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7$$

e o resto é 3.

9. Continuando a designar por $f(x)$ o polynomio (1) onde suppomos $p_0 \neq 0$, seja $a_1$ uma raiz da equação $f(x)=0$. Por definição será $f(a_1)=0$ e de (3) resulta

$$f(x) \equiv (x-a_1) f_1(x),$$
$$f_1(x) \equiv p_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \ldots + q_{n-2} x + q_{n-1}.$$

Logo:

THEOREMA I — *Se* $a_1$ *fôr raiz da equação inteira* $f(x)=0$, *o polynomio* $f(x)$ *será divisivel por* $x-a_1$.

Se $a_2 \neq a_1$ fôr ainda raiz da equação $f(x)=0$, substituindo $x$ por $a_2$ na primeira das egualdades precedentes virá

$$0=(a_2-a_1) f_1(a_2);$$

e, pois que $a_2-a_1$ é differente de zero, será $f_1(a_2)=0$. Por conseguinte hade ser pelo *Theor. I*

$$f_1(x) \equiv (x-a_2) f_2(x),$$

e além d'isto

$$f_2(x) \equiv p_0 x^{n-2} + r_1 x^{n-3} + \ldots + r_{n-2};$$

donde resulta, pelas últimas expressões de $f(x)$ e $f_1(x)$,

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2) f_2(x).$$

Continuando pelo mesmo processo, é evidente que se chegaria á seguinte conclusão:

THEOREMA II. — *Se houver* k *constantes differentes* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \gtreqless n$) *que verifiquem as condições*

$$f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_k)=0,$$

*será*

$$f(x) \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)f_k(x),$$
$$f_k(x) \equiv p_0x^{n-k} + s_1x^{n-k-1} + \ldots + s_{n-k}.$$

No caso de ser $k = n$ reduz-se $f_k(x)$ a $p_0$ e é

$$f(x) \equiv p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Se o numero $a_{n+1}$ é differente de qualquer dos numeros $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, não pode ser $f(a_{n+1}) = 0$ em quanto seja $p_0 \neq 0$. Logo:

THEOREMA III. — *Um polynomio do grau* n *em* x *não pode annullar-se para mais de* n *valores differentes de* x.

**10.** Se o polynomio (1) se annullar para $n+1$ valores differentes de $x$, serão eguaes a zero os coefficientes de todos os seus termos.

Suppondo a proposição demonstrada para polynomios do grau $n-1$, vamos ver que ella tem logar para os polynomios do grau $n$; e visto que o mesmo principio está verificado para os polynomios de grau 2, concluimos que elle é geral.

Ora, se fôr $a$ um dos $n+1$ valores de $x$ que annullam o polynomio $f(x)$ de grau $n$, será

$$f(x) \equiv (x-a)f_1(x);$$

e o polynomio $f_1(x)$, de grau $n-1$, ha de annullar-se para os $n$ valores restantes de $x$. Assim, pela hypothese, os coefficientes de $f_1(x)$ são todos eguaes a zero; donde se conclue, pelas expressões (4), que os coefficientes de $f(x)$ são tambem todos eguaes a zero. Logo:

THEOREMA I. — *A condição necessaria e sufficiente para que um polynomio inteiro a uma variavel se annulle identicamente é que os coefficientes de todos os seus termos sejam eguaes a zero.*

Acabamos de ver que esta condição é *necessaria*, e é manifesto que ella é tambem *sufficiente*.

Se dois polynomios $f_1(x)$ e $f_2(x)$ a uma variavel $x$ forem identicamente eguaes, a sua differença $\varphi(x)$ será identicamente nulla e vice-versa. Supponhamos que $ax^k$ e $bx^k$ são os termos de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em que a variavel tem o mesmo espoente $k$; em

$$\varphi(x) \equiv f_1(x) - f_2(x)$$

haverá o termo

$$(a-b)\,x^k$$

e de ser $\varphi(x) \equiv 0$ resulta pelo *Theor. I* que será $a-b=0$, ou $a=b$. Logo:

Teorema II. — *A condição necessaria e sufficiente para serem identicamente eguaes duas funcções inteiras de uma variavel é que os termos homologos nas duas funcções tenham coefficientes eguaes.*

**11.** A funcção inteira de $h$ variaveis é do mesmo modo a somma algebrica

$$(5)\quad f(x_1, \ldots, x_h) \equiv c_1 x_1^{\alpha_1} \ldots x_h^{\theta_1} + c_2 x_1^{\alpha_2} \ldots x_h^{\theta_2} + \ldots + c_k x_1^{\alpha_k} \ldots x_h^{\theta_k},$$

em que os expoentes $\alpha_1, \ldots, \theta_k$ são numeros inteiros e positivos ou zero. As constantes $c_1 \ldots, c_k$ são numeros reaes positivos, negativos ou zero, ou numeros imaginarios.

Suppondo feitas as reducções, como no caso anterior, não haverá naquella somma duas parallelas em que todas as variaveis tenham os mesmos expoentes; isto é, se os expoentes forem $\alpha_i, \ldots, \eta_i, \theta_i$ numa parcella e $\alpha_j, \ldots, \eta_j, \theta_j$ na outra, pode ser

$$\alpha_i = \alpha_j, \ldots, \eta_i = \eta_j,$$

mas será $\theta_i \neq \theta_j$.

Diremos então que

$$c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} . x_h^{\theta_i}$$

é um *termo* da funcção; $c_i$ é o *coefficiente* d'este termo, $\alpha_i$ o seu *grau relativamente a* $x_1$, $\beta_i$ o seu *grau relativamente a* $x_2$, etc. e $\alpha_i+\beta_i+\ldots+\theta_i$ o seu *grau geral* ou simplesmente o *grau* d'este termo. A maior das sommas

$$\alpha_i+\beta_i+\ldots+\theta_i$$

é o *grau* do polynomio, comtanto que seja differente de zero o coefficiente do termo correspondente. O polynomio cujos termos teem todos zero por coefficiente não tem grau. Se fôr $\alpha_k=\beta_k=$ $=\ldots=\theta_k=0$, o ultimo termo da expressão de $f(x_1,\ldots,x_h)$ reduz-se a uma constante; d'aqui resulta que o termo constante se considera de grau zero, e o polynomio que se reduz sómente a este termo é tambem de grau zero.

O polynomio de uma só variavel e até uma constante podem considerar-se como casos particulares dos polynomios de $h$ variaveis, suppondo que são zero os expoentes de algumas destas variaveis ou de todas ellas.

Uma funcção $f(x, y, ..)$ diz-se *homogenea* quando satisfaz á condição

$$f(kx,\ ky, \ldots)\equiv k^i f(x, y, \ldots),$$

e diz-se que $i$ é o *grau de homogeneidade* d'esta funcção. Por exemplo

$$\frac{x^3-5y^3+2\sqrt{x^6+y^6}}{\sqrt{x^3-y^3}}$$

é uma funcção homogenea e o seu grau de homogeneidade é $\frac{3}{2}$. A funcção inteira do grau $n$ é homogenea quando todos os seus termos são do grau $n$ e $n$ é tambem o seu grau de homogeneidade.

Designando por $n$ o grau do polynomio (5) relativamente a $x_1$, e ordenando este polynomio segundo as potencias decrescentes de $x_1$, podemos dar-lhe a forma

$$(6)\quad \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_h) \equiv \varphi_0(x_2, \ldots, x_h)\, x_1^n \\ \qquad + \varphi_1(x_2, \ldots, x_h)\, x_1^{n-1} + \ldots \varphi_n(x_2, \ldots, x_h). \end{cases}$$

O coefficiente $\varphi_i$ de $x_1^{n-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é funcção inteira das outras $h-1$ variaveis, e pode ser constante ou zero.

**12.** Theorema I. — *A condição necessaria e sufficiente para que uma funcção inteira de* h *variaveis seja identicamente nulla é que se annullem os coefficientes de todos os seus termos.*

É manifesto que esta condição é *sufficiente*. Por outra parte, se ella fôr *necessaria* para funcções de $h-1$ variaveis, vamos demonstrar que tambem o será para polynomios de $h$ variaveis; e o theorema ficará demonstrado pelo methodo chamado de *inducção mathematica*, visto que já foi demonstrado para o caso de uma variavel só.

Com effeito, se a funcção $f(x_1, \ldots, x_h)$ fôr identicamente nulla, demos-lhe a forma (6). Dando ás variaveis $x_2, \ldots, x_h$ os valores $a_2, \ldots, a_h$ o polynomio ficará sómente com a variavel $x_1$ e hade annullar-se para todos os valores de $x_1$. Por conseguinte, n.º 10, *Theor. I,* serão nullos os coefficientes de todos os seus termos, ou

$$\varphi_i(a_2, \ldots, a_h) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mas isto mesmo terá logar para todos os systemas de valores que se attribuam ás variaveis $x_2, \ldots, x_h$, e os polynomios $\varphi_i$ de $h-1$ variaveis serão identicamente nullos. Logo, segundo a hypothese, são nullos todos os coefficientes d'estes polynomios; e como elles são precisamente os coefficientes de todos os termos de $f(x_1, \ldots, x_h)$, fica demonstrado o theorema.

Se dois polynomios $f_1$ e $f_2$ de $h$ variaveis forem identicamente eguaes, a sua differença $f_1 - f_2$ será identicamente nulla e vice-versa. D'aqui resulta, como no caso de uma variavel, que:

Theorema II. — *A condição necessaria e sufficiente para que* *duas funcções inteiras de qualquer numero de variaveis sejam identicamente eguaes é que os termos homólogos tenham em ambas coefficientes eguaes.*

**13.** Theorema I. — *Se* $n_1$ *e* $n_2$ *são os graus de dois polynomios* $f_1$ *e* $f_2$, *o grau do producto* $f_1\, f_2$ *será* $n_1+n_2$.

A proposição está demonstrada para os polynomios de uma variavel. Vamos ver que, se ella tiver logar para polynomios de $h-1$ variaveis, tambem hade verificar-se para polynomios de $h$ variaveis e portanto é geral.

Consideremos em primeiro logar dois polynomios homogeneos. Todos os termos que proveem da multiplicação de $f_1$ por $f_2$ serão de grau $n_1+n_2$, e o theorema ficará demonstrado para este caso quando se provar que no producto ha, pelo menos, um termo cujo coefficiente é differente de zero.

Ordenando os dois polynomios segundo as potencias de uma das variaveis, de $x_1$ por exemplo, teremos

$$f_1(x_1, \ldots, x_h) \equiv \varphi_0'(x_2, \ldots, x^h) \,.\, x_1^{k_1} + \varphi_1'(x_2, \ldots, x_h) \,.\, x_1^{k_1-1} + \ldots$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_h) \equiv \varphi_0''(x_2, \ldots, x_h) \,.\, x_1^{k_2} + \varphi_1''(x_2, \ldots, x_h) \,.\, x_1^{k_2-1} + \ldots$$

Os coefficientes dos termos de $f_1$ não são todos nullos, visto que, por hypothese, $f_1$ é do grau $n_1$; e por $k_1$ designamos o expoente mais elevado que a variavel $x_1$ tem nos termos de $f_1$ cujos coefficientes são differentes de zero. Portanto não pode ser $\varphi_0' = 0$. O mesmo se pode dizer de $\varphi_0''$, e além d'isto $\varphi_0'$ e $\varphi_0''$ são, como $f_1$ e $f_2$, polynomios homogeneos; os graus d'estes polynomios são respectivamente $n_1-k_1$ e $n_2-k_2$.

Posto isto, o termo do producto $f_1\, f_2$, em que $x_1$ tem grau mais elevado, será

$$\varphi_0'(x_2, \ldots, x_h) \,.\, \varphi_0''(x_2, \ldots, x_h)\, x_1^{k_1+k_2}.$$

Mas, sendo o theorema verdadeiro para polynomios homogeneos de $h-1$ variaveis, o producto $\varphi'_0 \cdot \varphi''_0$ será um polynomio homogeneo de grau $n_1-k_1+n_2-k_2$. Neste producto haverá um ou mais termos com coefficientes differentes de zero; os productos d'elles por $x_1^{k_1+k_2}$ darão para $f_1\, f_2$ outros tantos termos de grau

$$n_1-k_1+n_2-k_2+(k_1+k_2)=n_1+n_2,$$

com coefficientes differentes de zero como se queria demonstrar.

Consideremos agora dois polynomios não homogeneos $f_1$ e $f_2$, aos quaes será sempre possivel dar a forma

$$f_1(x_1,\ldots,x_h)\equiv\varphi'_{n_1}(x_1,\ldots,x_h)+\varphi'_{n_1-1}(x_1,\ldots,x_h)+\ldots$$
$$f_2(x_1,\ldots,x_h)\equiv\varphi''_{n_2}(x_1,\ldots,x_h)+\varphi''_{n_2-1}(x_1,\ldots,x_h)+\ldots$$

designando por $\varphi'_i$ e $\varphi''_j$ polynomios homogeneos dos graus $i$ e $j$ respectivamente, ou identicamente nullos. Ora, por hypothese, $f_1$ é do grau $n_1$ e portanto não pode ser $\varphi'_{n_1}\equiv 0$; e o mesmo se dirá de $\varphi''_{n_2}$. Mas os termos de grau mais elevado no producto $f_1\, f_2$ hão de provir do producto de $\varphi'_{n_1}$ por $\varphi''_{n_2}$; e como, pelo caso anterior, o producto d'estes factores homogeneos será de grau $n_1+n_2$, este será tambem o grau do producto $f_1\, f_2$.

COROLLARIO. — *O producto de* k *polynomios de graus* $\mathrm{n}_1$, $\mathrm{n}_2$, ..., $\mathrm{n}_k$ *é um polynomio de grau* $\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2+\ldots+\mathrm{n}_k$.

**14.** THEOREMA. — *Se o producto de dois ou mais polynomios se annulla identicamente, um dos factores pelo menos é identicamente nullo.*

Se assim não fosse, todos os polynomios teriam graus determinados e o producto teria tombem um certo grau, contra a hypothese.

D'aqui resulta que, na identidade

$$\varphi f_1\equiv\varphi f_2,$$

podemos supprimir o factor $\varphi$, commum aos dois membros, se $\varphi$ não fôr identicamente nullo. Com effeito d'aquella identidade resulta a seguinte

$$\varphi(f_1 - f_2) \equiv 0$$

e, não sendo $\varphi \equiv 0$, será $f_1 - f_2 \equiv 0$ ou

$$f_1 \equiv f_2,$$

como resultaria se tivessemos supprimido o factor $\varphi$.

## III. — Fórmula de Taylor.

**15.** Arranjos $k$ a $k$ de $n$ objectos distinctos

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

são todas as collecções que se podem formar dispondo em $k$ logares differentes ($k \overline{\gtrless} n$) e em todas as ordens possiveis outros tantos objectos arbitrariamente escolhidos entre os propostos. Uma d'estas collecções distingue-se de todas as outras por algum dos seus elementos, ou só pela ordem d'estes elementos, ou de ambos os modos.

Designaremos por $A_{n,k}$ o numero de todos os arranjos de $n$ objectos $k$ a $k$. É claro que o numero N dos arranjos em que um elemento $a_i$ occupa o primeiro logar será egual ao numero d'aquelles em que o elemento inicial é outro qualquer $a_j$. E pois que o numero dos elementos dados é $n$, teremos

$$A_{n,k} = n \cdot N.$$

Por outra parte, os arranjos cujo elemento inicial é $a_i$ poderiam obter-se conservando fixo este elemento e effectuando todos os arranjos $k-1$ a $k-1$ dos outros $n-1$ elementos. Por conseguínte será $N = A_{n-1,\,k-1}$ ou

$$A_{n,\,k} = n \,.\, A_{n-1,\,k-1}.$$

Diminuindo successivamente uma unidade a $n$ e a $k$ teremos do mesmo modo as egualdades

$$A_{n-1,\,k-1} = (n-1)\,A_{n-2,\,k-2},$$
$$A_{n-2,\,k-2} = (n-2)\,A_{n-3,\,k-3};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-k+2,\,2} = (n-k+2)\,.\,A_{n-k+1,\,1},$$
$$A_{n-k+1,\,1} = n-k+1;$$

e a ultima é evidente, porque para qualquer valor de $p$ hade ser $A_{p,\,1} = p$. Multiplicando membro a membro estas egualdades e a precedente, acha-se finalmente, depois de feitas as reducções,

$$(1) \qquad A_{n,\,k} = n\,(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Logo, *o numero de arranjos de* n *objectos* k *a* k *é o producto de* k *factores inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de* n.

Permutações de $n$ objectos são os arranjos d'estes objectos $n$ a $n$. Designando por $P_n$ o numero das permutações de $n$ elementos e pondo $k = n$ em (1) virá

$$(2) \qquad P_n = 1.2.3\ldots n.$$

Logo, *o numero das permutações de* n *elementos é o producto dos* n *primeiros numeros inteiros.*

Este producto pode ser expresso por algum dos symbolos

$$\underline{|n} \quad \text{ou} \quad n\,!,$$

que se lê *factorial n.*

Combinações de $n$ objectos $k$ a $k$ são os arranjos que se distinguem por algum dos seus elementos. Considerando estes elementos como factores numericos, ás combinações pode-se dar tambem o nome de *productos distinctos*.

Entre os seis arranjos 2 a 2

$$a_1 a_2,\ a_2 a_1;\quad a_1 a_3,\ a_3 a_1;\quad a_2 a_3,\ a_3 a_2$$

dos tres elementos $a_1$, $a_2$, $a_3$, os tres distinctos

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_2 a_3$$

são as combinações dos mesmos elementos 2 a 2. Comparando estes dois grupos de collecções vê-se logo que os arranjos podem deduzir-se das combinações permutando os elementos de cada uma d'ellas. Mas é evidente que esta consideração é applicavel a todos os casos e portanto, designando pos $C_{n,k}$ o numero de combinações de $n$ elementos $k$ a $k$, teremos

$$A_{n,k} = C_{n,k} P_k;$$

d'aqui se tira por (1) e (2)

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

A última fracção representa-se muitas vezes pelo symbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underline{|k}}$$

que se lê *n sobre k*. Multiplicando ambos os termos por $\underline{|n-k}$ viria

$$\binom{n}{k} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|k}\,\underline{|n-k}};$$

e mudando nesta expressão $k$ em $n-k$ resulta

$$\binom{n}{n-k} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k \cdot \lfloor k} = \binom{n}{k}.$$

Logo, *o numero das combinações de* n *objectos* k *a* k *é egual ao numero das combinações dos mesmos objectos* n — k *a* n — k.

Os coefficientes binomiaes de ordem $n$ são

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2}, \ldots\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n},$$

onde se vê, pelo principio antecedente, que dois equidistantes dos extremos são eguaes. Fazendo $a = b = 1$ em

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

acha-se

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Fazendo successivamente $x = 1, 2, \ldots, n$ na identidade

$$(1+x)^{k+1} - x^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} x + \binom{k+1}{2} x^2 + \ldots + \binom{k+1}{k} x^k,$$

sommando os resultados e representando por $S_{i,n}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ a somma $1^i + 2^i + \ldots + n^i$ das potencias $i$ dos $n$ primeiros numeros inteiros, virá

$$(1+n)^{k+1} = 1 + n + \binom{k+1}{1} S_{1,n} + \binom{k+1}{2} S_{2,n} + \ldots + \binom{k+1}{k} S_{k,n}.$$

Por esta fórmula teriamos $S_{k,n}$ expresso em $S_{1,n}$, $S_{2,n}$, etc., e se podiam calcular successivamente os numeros

$$S_{1,n} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_{2,n} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

$$S_{3,n} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2}.$$

A última d'estas expressões mostra que é $S_{3,n} = (S_{1,n})^2$.

**16.** Mudando $x$ em $x+h$ na funcção inteira (1) do n.º 7, desenvolvendo as potencias de $x+h$ e ordenando relativamente a $h$, acha-se

$$\begin{aligned} f(x+h) &\equiv p_0(x+h)^n + p_1(x+h)^{n-1} + \ldots + p_{n-2}(x+h)^2 + p_{n-1}(x+h) + p^n \\ &\equiv p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-2} x^2 + p_{n-1} x + p_n \\ &+ h[np_0 x^{n-1} + (n-1)p_1 x^{n-2} + \ldots + 2p_{n-2} x + p_{n-1}] + \varepsilon h^2. \end{aligned}$$

De $f(x+h) - f(x) = k$ resulta $f(x+h) = f(x) + k$; assim aquella differença representa o *incremento* que proveio para a funcção $f(x)$ do *incremento* $h$ dado á variavel independente $x$.

No desenvolvimento precedente de $f(x+h)$ a parte independente de $h$ é precisamente a mesma funcção $f(x)$ de grau $n$, e o coefficiente da primeira potencia de $h$ é uma funcção de $x$, de grau $n-1$, que se deduz de $f(x)$ pela seguinte lei, chamada *regra de derivação* : *multiplica-se cada termo de* f (x) *pelo expoente de* x *nesse termo e diminue-se uma unidade ao expoente.* A funcção assim formada chama-se *derivada* de $f(x)$, e designa-se por $f'(x)$; temos assim

$$f'(x) \equiv np_0 x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + \ldots + 2p_{n-2} x + p_{n-1}.$$

Applicando a regra de derivação a $p_n$, ou a uma constante qualquer, acha-se que a sua derivada é zero, por isso que a derivada de $c = c.x^0$ é $0.cx^{-1} = 0$.

A derivada de $f'(x)$ chama-se *segunda derivada* de $f(x)$, e é designada por $f''(x)$. Applicando a regra de derivação á expressão precedente de $f'(x)$ viria

$$f''(x) \equiv n(n-1)p_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_1 x^{n-3} + \ldots + 2p_{n-2},$$

que é uma funcção inteira de grau $n-2$.

Em geral, designando por $f^{(k)}(x)$ a *derivada de ordem* $k$ de $f(x)$, isto é, a funcção inteira de grau $n-k$ que se obteria applicando $k$ vezes successivas a regra de derivação a $f(x)$, seria

$$f^{(k)}(x) \equiv n(n-1)\ldots(n-k+1)p_0 x^{n-k} + (n-1)(n-2)\ldots(n-k)p_1 x^{n-k-1} + \ldots$$

O coefficiente numerico de cada termo de $f^{(k)}(x)$ é o producto de $k$ inteiros consecutivos; dividindo, pois, ambos os membros da ultima expressão por $k!$, viria mais simplesmente

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{n}{k} p_0 x^{n-k} + \binom{n-1}{k} p_1 x^{n-k-1} + \binom{n-2}{k} p_2 x^{n-k-2} + \ldots$$

Para $k = n$ teriamos a constante

$$f^{(n)}(x) \equiv n(n-1)\ldots 2p_0 = n!\, p_0,$$

e para $k > n$ seria sempre $f^{(k)}(x) = 0$.

Posto isto, desenvolvendo as potencias de $x+h$ que estam no segundo membro da expressão de $f(x+h)$, acha-se para coefficiente de $h^k$

$$\binom{n}{k} p_0 x^{n-k} + \binom{n-1}{k} p_1 x^{n-k-1} + \binom{n-2}{k} p_2 x^{n-k-2} + \ldots,$$

que é, como acabamos de ver, a expressão de $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$. Logo, o desenvolvimento de $f(x+h)$ será

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x);$$

e esta egualdade é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*.

Applicando esta fórmula ás funcções inteiras $f'(x)$, $f''(x)$, etc., viria

$$f'(x+h)=f'(x)+hf''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x),$$

$$f''(x+h)=f''(x)+hf'''(x)+\ldots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(x),$$

etc.

Mudando $x$ em $h$ e vice-versa, a fórmula de Taylor torna-se em

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h)+\frac{x^2}{2}f''(h)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(h),$$

onde $f(h)$, $f'(h)$, $\ldots$, $f^{(n)}(h)$ são os resultados obtidos quando se substitue $x$ por $h$ em $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$. Para $h=0$ temos a fórmula de Maclaurin, que é a seguinte:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Mudando $x$ em $x-h$ na penultima fórmula, obtem-se a seguinte:

$$(3) \qquad f(x)=f(h)+(x-h)f'(h)+\ldots+\frac{(x-h)^n}{n!}f^{(n)}(h).$$

Na funcção inteira $f(x, y)$ de duas variaveis independentes podemos dar a $x$ e a $y$ respectivamente incrementos quaesquer $h$ e $k$. Mudando primeiro $x$ em $x+h$, pela fórmula de Taylor teremos a expressão

$$f(x+h,y)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y)+\cdots$$

Designamos por $f^{(r)}_{x^r}(x,y)$ o resultado que se obtem applicando $r$ vezes successivamente a $f(x,y)$ a regra de derivação relativamente a $x$, como se $y$ fosse constante. Por isto a estas funcções se dá o nome de *derivadas parciaes*.

Mudando depois $y$ em $y+k$ na ultima egualdade, virá ainda

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+hf'_x(x,y+k)+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y+k)+\cdots$$

Mas $f^{(r)}_{x^r}(x,y)$ é em geral funcção inteira de $y$, e portanto será pela mesma fórmula de Taylor

$$f(x,y+k)=f(x,y)+kf'_y(x,y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x,y)+\cdots,$$

$$f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+kf''_{x,y}(x,y)+\frac{k^2}{2}f'''_{x,y^2}(x,y)+\cdots,$$

$$f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+kf'''_{x^2,y}(x,y)+\cdots$$

Designamos por $f^{(r)}_{y^r}(x,y)$ a derivada parcial da ordem $r$ de $f(x,y)$ relativamente só a $y$, e por $f^{(r)}_{x^p,y^q}(x,y)$ a funcção que se obtem derivando $p$ vezes relativamente a $x$ e $q$ vezes relativamente a $y$ a funcção $f(x,y)$. Nesta última expressão será $p+q=r$; é claro que nas funcções inteiras a ordem das derivações é arbitrária, e este principio é geral.

Das ultimas egualdades resulta o desenvolvimento

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+hf'_x(x,y)+kf'_y(x,y)$$
$$+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}(x,y)+hkf''_{x,y}(x,y)+\frac{k^2}{2}f''_{y^2}(x,y)+\text{etc.}$$

Se fôr, por exemplo,

$$f(x, y) \equiv ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + g,$$

as primeiras derivadas parciaes relativamente a $x$ e $y$ serão

$$(4) \qquad \begin{cases} f'_x(x, y) \equiv 2by + 2cx + 2e, \\ f'_y(x, y) \equiv 2ay + 2bx + 2d. \end{cases}$$

A segunda derivada relativamente a $x$ e $y$ obtem-se derivando a primeira d'estas funcções relativamente a $y$ ou a segunda relativamente a $x$, e de qualquer dos modos se achará

$$f''_{x,y}(x, y) = 2b.$$

Finalmente as segundas derivadas relativamente a $x$ e a $y$ sómente são respectivamente $2c$ e $2a$, d'onde resulta que

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) \equiv f(x, y) &+ 2h(by + cx + e) \\ &+ 2k(ay + bx + c) + h^2c + 2hkb + k^2a; \end{aligned}$$

ou, ordenando relativamente ás variaveis,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &\equiv ay^2 + 2bxy + cx^2 \\ &+ 2(ch + bk + e)x + 2(bh + ak + d)y + f(h, k), \end{aligned}$$

que é a mesma expressão precedente mudando $x$ em $h$, $y$ em $k$ e vice-versa.

## IV. — Continuidade.

**17.** O valor absoluto do numero real A exprime-se pelo symbolo

$$|A|,$$

que se lê *módulo de A*.

Segundo as regras do cálculo algebrico é evidente que

$$|A|+|B| \overline{\gtrless} |A+B|,$$
$$|A|\times|B|=|AB|.$$

**18.** Entende-se por *vizinhança* do ponto $a$ definida por um numero positivo dado $\alpha$ o conjuncto dos pontos $x$ para os quaes é

$$|x-a|<\alpha.$$

Esta desegualdade desdobra-se nas duas

$$-\alpha<x-a<\alpha,$$

ou

$$a-\alpha<x<a+\alpha;$$

por onde se vê que os pontos de que se trata estam contidos no intervallo cujos extremos são $a-\alpha$ e $a+\alpha$.

Do mesmo modo a *vizinhança* do ponto $(a, b)$ do plano, definida pelos numeros positivos $\alpha$ e $\beta$, comprehende todos os pontos do plano cujas coordenadas $(x, y)$ verificam as desigualdades

$$|x-a|<\alpha, \quad |y-b|<\beta.$$

Esta vizinhança compõe-se dos pontos internos de um rectângulo contido entre as parallelas ao eixo dos $y$ tirados pelos pontos $a-\alpha$ e $a+\alpha$ do eixo dos $x$, e as parallelas a este ultimo eixo tiradas pelos pontos $b-\beta$ e $b+\beta$ do eixo dos $y$.

A *vizinhança* do ponto $a$, $b$, $c$ compõe-se de todos os pontos $x$, $y$, $z$ que verificam as desigualdades

$$|x-a|<\alpha, \quad |y-b|<\beta, \quad |z-c|<\gamma,$$

sendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ numeros positivos.

Finalmente a *vizinhança* do ponto $a_1, a_2, \ldots, a_k$ compõe-se de todos os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ que verificam as desigualdades

$$|x_1-a_1|<\alpha_1, \quad |x_2-a_2|<\alpha_2, \ldots, \quad |x_k-a_k|<\alpha_k,$$

sendo tambem positivas as quantidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

**19.** Designando por $k_i$ o valor que a funcção $f_i(x_1, \ldots, x_k)$ tem no ponto $a_1, a_2, \ldots, a_k$, diz-se que a funcção $f_1$ é *continua* neste ponto quando, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$, é possivel determinar uma quantidade positiva $\delta$ tal, que para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i-a_i|<\delta, \quad i=1, 2, \ldots, h,$$

seja

$$|f_1-k_1|<\varepsilon.$$

**20.** Theorema I. — *Se duas funcções* $f_1(x_1, \ldots, x_k)$ *e* $f_2(x_1, \ldots, x_k)$ *forem continuas no ponto* $a_1, \ldots, a_k$, *a funcção* $\varphi=f_1+f_2$ *tambem é continua neste ponto.*

Segundo a hypothese, qualquer que seja a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$, haverá sempre dois numeros positivos $\delta_1$ e $\delta_2$ taes que seja

$$\left.\begin{array}{l} |f_1-k_1|<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_1, \\ |f_2-k_2|<\frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_2. \end{array}\right\} \quad i=1, 2, \ldots, h.$$

Portanto, se designarmos por $\delta$ o menor dos numeros $\delta_1$ e $\delta_2$, será

$$|f_1-k_1|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad |f_2-k_2|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i-a_i|<\delta,\quad i=1,2,\ldots,h.$$

Mas (n.º 17) é

$$|(f_1-k_1)+(f_2-k_2)|=|(f_1+f_2)-(k_1+k_2)|\leqq|f_1-k_1|+|f_2-k_2|;$$

donde se conclue que para os mesmos valores das variaveis será

$$|(f_1+f_2)-(k_1+k_2)|<\varepsilon,$$

que é a condição de continuidade da somma $f_1+f_2$.

COROLLARIO. — *Se as funcções* $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_i$, *em numero finito, são continuas num ponto, a somma* $\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_i$ *é continua no mesmo ponto.*

**21.** THEOREMA.—*Se duas funcções* $\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_h)$ *e* $\mathrm{f}_2(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_h)$ *forem continuas no ponto* $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$, *a funcção* $\varphi=\mathrm{f}_1\times\mathrm{f}_2$ *tambem é continua nesse ponto.*

Segundo a hypothese, qualquer que seja a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\theta$, será possivel determinar dois numeros positivos $\delta_1$ e $\delta_2$ tão pequenos que sejam

$$|f_1-k_1|<\theta \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_1,$$
$$|f_2-k_2|<\theta \quad \text{para} \quad |x_i-a_i|<\delta_2$$

ou, desigdando por $\delta$ o menor dos numeros $\delta_1$ e $\delta_2$,

$$|f_1-k_1|<\theta,\quad |f_2-k_2|<\theta$$

para todos os valores das variaveis que verifiquem as desigualdades

$$|x_i - a_i| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Por outra parte é $f_1 f_2 - k_1 k_2 = f_2 (f_1 - k_1) + k_1 (f_2 - k_2)$ e por conseguinte (n.º 17)

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| \leqq |f_2| . |f_1 - k_1| + |k_1| . |f_2 - k_2|,$$

donde resulta, substituindo $|f_1 - k_1|$ e $|f_2 - k_2|$ por $\theta$,

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \{ |f_2| + |k_1| \} . \theta.$$

Mas

$$|f_2| = |k_2 + (f_2 - k_2)| \overline{\gtrless} |k_2| + |f_2 - k_2|$$

ou

$$|f_2| < |k_2| + \theta;$$

e assim teremos

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \{ |k_1| + |k_2| \} \theta + \theta^2.$$

Posto isto, seja $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena. Se os numeros $|k_1|$ e $|k_2|$ não forem ambos nullos, determinaremos $\theta$ pela condição de verificar as desigualdades

$$\{ |k_1| + |k_2| \} \theta < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad \theta^2 < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

isto é,

$$\theta < \frac{\frac{1}{2} \varepsilon}{|k_1| + |k_2|}, \quad \theta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Se for $|k_1| = |k_2| = 0$, faremos simplesmente $\theta^2 < \varepsilon$ ou

$$\theta < \sqrt{\varepsilon}.$$

De qualquer dos modos ficará satisfeita a desigualdade

$$|f_1 f_2 - k_1 k_2| < \varepsilon,$$

que exprime a condição da continuidade do producto $f_1 f_2$ no ponto considerado.

Corollario. — *Se forem contínuas num ponto as funcções* $f_1, f_2, \ldots, f_i$ *em numero limitado, o producto* $f_1 f_2 \ldots f_i$ *será contínuo no mesmo ponto.*

**22.** A condição de continuidade é satisfeita em todos os pontos por uma constante, considerada como um caso particular das funcções de $h$ variaveis. O mesmo se dirá de cada variavel $x_i$.

D'aqui resulta, pelo corollario do último theorema, que a expressão

$$c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} \ldots x_h^{\theta_i},$$

em que os expoentes $\alpha_i$, $\beta_i$, ... $\theta_i$ são numeros inteiros e positivos, é contínua em todos os pontos. Pelo corollario do *Theor. I* a somma algebrica de um numero limitado de termos d'aquella forma, é egualmente contínua. Logo:

Theorema III. — *A funcção inteira de* h *variaveis é contínua em todos os pontos.*

## V. — Determinantes.

### § 1.º — Definições.

**23.** Chama-se *transposição*, e designa-se pelo symbolo $(\alpha, \beta)$ a troca de dois elementos $\alpha$, $\beta$ de uma permutação. De uma das permutações de $n$ elementos, escolhida arbitrariamente, podem deduzir-se todas as outras por transposições successivas; aquella permutação toma o nome de *principal*. Seja, por exemplo, 2413 a permutação principal dos quatro elementos 1, 2, 3, 4; fazendo a transposição (2, 4) dos dois primeiros elementos obtém-se outra permutação, e as duas são

$$2413, \quad 4213.$$

Transpondo successivamente o terceiro elemento com cada um dos precedentes, aquellas permutações e as que d'ellas se deduzem por esta forma são, ao todo, as $2.3$ seguintes:

$$\begin{matrix} 2413, & 1423, & 2143; \\ 4213, & 1243, & 4123. \end{matrix}$$

Transpondo afinal nestas permutações o último elemento successivamente com cada um dos tres primeiros, teremos obtido as $2.3.4$ permutações dos quatro elementos dados.

Dá-se uma *inversão* entre dois elementos de uma permutação quando elles se acham dispostos em ordem contrária áquella em que os mesmos elementos se succedem na permutação principal. Por commodidade adoptamos geralmente como principal a permutação cujos elementos procedem na ordem natural, excepto quando expressamente se diga o contrario; assim a permutação principal de quatro elementos seria 1234, e em 2431 haveria quatro inversões, a saber: *uma* de 2 com 1, *duas* de

4 com 3 e com 1, *uma* de 3 com 1. Em geral, conta-se o numero das inversões de uma dada permutação comparando cada um dos seus elementos com todos os seguintes.

As permutações de $n$ elementos dividem-se em duas classes. São de *primeira classe* ou *pares* a principal e aquellas em que ha um numero par de inversões. As outras são de *segunda classe* ou *impares*. O numero total das inversões em duas permutações $P$ e $P'$ dos mesmos elementos é par ou impar, conforme $P$ e $P'$ são da mesma ou de differentes classes.

**24.** Theorema de Bezout.—*Duas permutações dos mesmos elementos são de classes differentes quando uma d'ellas resulta da simples transposição de dois elementos da outra.*

Na demonstração d'este theorema temos a considerar os dois casos seguintes:

1.° Se os elementos transpostos $\alpha$, $\beta$ são contíguos, a permutação $P$ e a outra $P'$, que resulta simplesmente da transposição d'aquelles elementos de $P$, terão a forma

$$P = A\alpha\beta C, \quad P' = A\beta\alpha C.$$

$A$ e $C$ são os mesmos em $P$ e $P'$, e representam o grupo dos elementos que precedem e o d'aquelles que succedem aos dois elementos transpostos; se $\alpha$ fôr o elemento inicial ou $\beta$ o elemento final de $P$, faremos respectivamente $A = 1$ ou $C = 1$.

Ora é evidente que as inversões produzidas pelos elementos de $A$, comparados com os de $C$ e com $\alpha$ e $\beta$, são as mesmas em $P$ e $P'$. O mesmo se diria das inversões de $\alpha$ e $\beta$ com os elementos de $C$. Mas a transposição $(\alpha, \beta)$ ha de produzir ou desfazer uma inversão; portanto, designando por $v$ e $v'$ os numeros de inversões que ha em $P$ e $P'$, será $v' = v \pm 1$. Logo as permutações $P$ e $P'$ são de classes differentes, visto que os numeros $v$ e $v'$ são de *paridades differentes*, isto é, um é par e o outro é impar.

2.° Se entre $\alpha$ e $\beta$ ha um grupo B de $h$ elementos, as duas permutações podem ser representadas por

$$P = A\alpha B\beta C, \quad P' = A\beta B\alpha C$$

e a differença $v - v'$ ou $v' - v$ só pode provir da transposição $(\alpha, \beta)$.

Ora, transpondo $\alpha$ successivamente com cada um dos $h$ elementos de B e com $\beta$, da permutação P deduz-se a seguinte:

$$P'' = AB\beta\alpha C;$$

e transpondo $\beta$ successivamente com cada um dos $h$ elementos de B, de P″ se deduz a permutação considerada P′.

D'este modo se vê que P′ se pode deduzir de P por meio de $2h + 1$ transposições de elementos consecutivos; e pois que, pelo caso anterior, cada uma d'estas operações produz mudança de classe e o numero d'ellas é ímpar, segue-se que P e P′ são de classes differentes.

Corollario. — *O numero das permutações pares de* n *elementos é egual ao das impares.*

Com effeito, de cada permutação de uma classe resultará uma da outra classe pela transposição de dois elementos. Pode-se advertir que para qualquer valor de $n > 1$ o numero das permutações de $n$ elementos é par.

**25.** Invertendo a ordem dos elementos de uma permutação P, a permutação resultante diz-se *inversa* de P. Estam neste caso 1234 e 4321.

Entre as permutações dos mesmos elementos, a inversa da principal é aquella em que o numero de inversões é máximo, porque cada um dos seus $n$ elementos produz inversões com todos os seguintes. Assim, este numero será expresso por

$$V = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Designando por $i$ o quociente inteiro da divisão de $n$ por 4, o numero V será par quando $n$ tiver alguma das formas $4i$ ou $4i+1$, e ímpar quando fôr $n=4i+2$ ou $n=4i+3$. Exprime-se este resultado nos termos seguintes:

*A permutação inversa da principal de* n *elementos é par ou ímpar conforme seja dupla ou simplesmente par o maior numero par contido em* n.

**26.** Trocando successivamente o primeiro elemento de uma permutação P de ordem $n$ com cada um dos seguintes, obtém-se a permutação *circular* de P. As duas são da mesma classe quando $n$ é ímpar e vice-versa, porque se passa de uma para a outra por meio de $n-1$ transposições.

Assim, por exemplo, 4321 é a permutação circular de 1432. A primeira é par e a segunda é ímpar.

O nome de *circular* resulta da maneira como esta permutação se poderia obter, fazendo corresponder cada elemento da permutação dada P, que continuamos a suppor de ordem $n$, a uma das $n$ divisões eguaes de uma circumferência. Imprimindo a esta circumferência uma rotação de amplitude egual a uma das suas divisões e em sentido contrario áquelle em que ellas procedem, o logar da permutação P passaria a ser occupado pela correspondente permutação circular.

**27.** O numero $t$ das inversões que os primeiros $k$ elementos de uma permutação P de ordem $n$ produzem, quando se comparam sómente com os últimos $n-k$ elementos da mesma permutação, determina-se do modo seguinte.

Representemos pelos numeros $1, 2, 3, \ldots, n$ os elementos de P, e supponhamos que os da permutação principal procedem na ordem natural. Designemos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ os $k$ elementos considerados, dispostos em ordem ascendente. Um d'elles $\alpha_h$ só produz inversões com os $\alpha_h-1$ numeros $1, 2, \ldots, (\alpha_h-1)$ menores que $\alpha_h$; mas havemos de excluir d'estes os $h-1$ numeros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}$ que se encontram entre os $k$ primeiros elementos de P, e por conseguinte o numero das inversões que resultam da comparação de $\alpha_h$ com os ultimos $n-k$ elementos de P será

$$\alpha_h - 1 - (h-1) = \alpha_h - h.$$

Pondo successivamente $h = 1, 2, 3, \ldots, k$, sommando os resultados e fazendo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = s$, acha-se finalmente

$$t = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + \ldots + (\alpha_k - k) = s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Qualquer que seja a permutação $p$ dos elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, a somma $s$ tem sempre o mesmo valor. Se não houver inversões entre os primeiros $k$ nem entre os últimos $n-k$ elementos de P, o numero total das inversões de P será

$$(1) \qquad v = s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Se houver $u$ inversões nos primeiros $k$ e $u'$ nos ultimos $n-k$ elementos, o numero das inversões de P será

$$(2) \qquad v = u + u' + s - \frac{k(k+1)}{2}.$$

O numero $t$ sómente será zero quando fôr

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \ldots, \quad \alpha_k = k.$$

O numero de inversões que o elemento inicial $\alpha_1$ faz com as seguintes é evidentemente $\alpha_1 - 1$.

**28.** Chama-se *matriz* a figura formada com $np$ elementos dispostos em $n$ filas horizontaes, ou *linhas*, e $p$ filas verticaes, ou *columnas;* o rectangulo, a que esta disposição dá logar, encerra-se ordinariamente entre dois traços duplos verticaes. Contam-se as linhas de cima para baixo, e as columnas da esquerda para a direita.

Duas notações se tem adoptado para representar systematicamente e de um modo geral os elementos de uma matriz. Na notação de Leibnitz designam-se todos os elementos pela mesma letra affectada de dois índices, que podem ser sobrepostos como em $a_i^j$, ou consecutivos como em $a_{i,j}$. Dispondo os índices de cada systema na ordem natural, os inferiores ou do primeiro systema indicam a ordem da linha e os superiores ou do segundo systema indicam a ordem da columna em que se encontra o elemento considerado; assim o elemento $a_i^j$ está no cruzamento da linha $i$ e da columna $j$. Os dois numeros $i$ e $j$ definem a *posição* d'este elemento na matriz, o que se exprime pelo symbolo $(i, j)$. D'este modo a matriz, de $n$ linhas e $p$ columnas será:

$$\left\|\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^p \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^p \end{matrix}\right\|.$$

Na notação de Cauchy os elementos são representados por letras differentes affectadas de um índice só. Distinguem-se as columnas pelas letras e as linhas pelos índices, representando-se aquella mesma matriz pelo quadro seguinte:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & u_2 \\ . & . & . & . \\ a_n & b_n & \dots & u_n \end{matrix}\right\|.$$

As letras desempenham aqui o mesmo papel que os índices do segundo systema na notação de Leibnitz, e o que dissermos d'estes se applicará áquellas ou vice-versa.

Quando o numero das linhas é egual ao das columnas, ou $n=p$, a matriz diz-se *quadrada* e de *ordem* $n$. Chama-se *primeira diagonal* á que parte do vértice superior da esquerda e *segunda diagonal* á outra. O numero dos elementos d'esta matriz é $n^2$. Chama-se *transposição de linhas e columnas* a troca ordenada d'estas filas umas pelas outras, isto é, a troca effectuada de modo que a primeira linha passe a ser primeira columna, a segunda linha se mude em segunda columna, e assim por deante.

**29.** Consideremos o producto

(3) $$T = a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_n}^{\beta_n},$$

cujos factores são $n$ elementos de uma matriz quadrada de ordem $n$ escolhidos de modo que em T entre como factor um elemento, mas um só, de cada linha e um elemento, mas um só, de cada columna da matriz.

A collecção

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

dos índices inferiores dos factores de T será uma permutação dos numeros 1, 2, ..., $n$, por isso que nella entram $n$ elementos e que estes elementos são todos differentos. Com effeito, se fosse, por exemplo, $\alpha_i = \alpha_j$, em T encontravam-se dois elementos da linha $\alpha_i$, ou da linha $\alpha_j$, o que é contrário á hypóthese.

O mesmo se dirá da collecção

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$$

dos índices superiores. Para definir a classe d'estas permutações tomam-se para principaes nos dois systemas de índices aquellas que se encontram nos elementos da primeira diagonal e em ordem descendente. Quando os indices procedem segundo a ordem das linhas e das columnas, cada uma das permutações principaes tem os elementos dispostos na ordem natural.

Podemos agora dar a seguinte:

Definição.—Determinante *de* n² *elementos, dispostos numa matriz quadrada, é a somma algebrica dos productos distinctos de* n *elementos escolhidos de modo que em cada producto entre como factor um elemento, mas um só, de cada linha e um elemento, mas um só, de cada columna da matriz; dando a cada producto o signal* + *ou* —, *conforme são da mesma classe ou de classes differentes as permutações dos indices dos dois systemas nos elementos considerados.*

Designando por $v$ e $v'$ os numeros de inversões d'estas permutações, o numero $v+v'$ será par se elas forem da mesma classe e vice-versa. Por conseguinte, representando por $\Delta_n$ o determinante de $n^2$ elementos, que se diz *de ordem n* ou *de n linhas*, a definição precedente traduz-se na fórmula

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{\nu+\nu'} . a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n} . \tag{4}$$

Tambem se pode representar o determinante pela sua matriz encerrada entre dois traços verticaes, do modo seguinte:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} .$$

É, porém, necessario não confundir o conceito da matriz, que é simplesmente um systema de quantidades ao qual não corresponde um valor determinado, com o conceito de determinante, que é uma somma. Esta distincção se confirmará quando virmos que na matriz se podem effectuar transformações que, produzindo matrizes differentes, não influem no valor do determinante.

Se em (3) trocarmos dois factores, $a_{\alpha_i}^{\beta_i}$ e $a_{\alpha_j}^{\beta_j}$ por exemplo, o producto não muda de valor; e as permutações dos índices, que eram primeiro

$$\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n,$$
$$\beta_1 \dots \beta_i \dots \beta_j \dots \beta_n,$$

tornaram-se em

$$\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n,$$
$$\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_i \dots \beta_n,$$

e ambas mudam de classe pelas transposições $(\alpha_i, \alpha_j)$, $(\beta_i, \beta_j)$. Por conseguinte o signal do termo considerado tambem se não altera, e d'aqui se segue que em (4) podemos dispôr os factores do termo geral de modo que os índices de um systema sigam a ordem natural. Assim, a somma em que se resolve o determinante $\Delta_n$ pode ser expressa pela fórmula

$$(5) \qquad \Delta_n = \Sigma(-1)^{v'} . a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n},$$

dispondo os índices inferiores na ordem natural e notando que na permutação correspondente será $v = 0$.

A fórmula (5) mostra que, para ter o desenvolvimento do determinante, basta effectuar todas as permutações dos índices superiores e pela classe de cada uma d'ellas se determinará o signal do termo correspondente. D'aqui resulta que:

1.° O termo

$$a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n,$$

que corresponde á permutação principal d'aquelles índices, pertence ao determinante onde tem o signal $+$. Este termo chama-se *principal*, e é formado com os elementos da primeira diagonal; estes termos teem egualmente o nome de *principaes*.

2.° O termo

$$a_1^n a_2^{n-1} \ldots a_n^1,$$

que corresponde á permutação inversa da principal, pertence tambem ao determinante e o seu signal é dado pelo coefficiente (n.° 25),

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Este termo é formado com os elementos da segunda diagonal.

3.° O numero dos termos do determinante de ordem $n$ é $n!$ Metade são positivos e metade são negativos (n.° 24, *Corol.*)

O determinante pode representar-se simplesmente por

$$|\, a_i^j \,| \text{, ou } (a_1^1 \ldots a_n^n),$$

e ainda por

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ 1, 2, \ldots\ n \end{pmatrix}.$$

Na notação de Cauchy pode-se escrever, por exemplo, $\Delta_3 = |\, a\, b\, c \,|$.

**30.** Pela regra do numero anterior teremos o desenvolvimento de

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

effectuando as permutações 12, 21 dos indices 1,2. Conservando os indices inferiores na ordem natural e attendendo á regra dos signaes, teriamos $\Delta_2 = a_1^1\, a_2^2 - a_1^2\, a_2^1$.

Egualmente para

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

effectuam-se as permutações dos indices 1, 2, 3. Pela regra do n.º 23 teremos primeiro as duas

$$1\,2\,3,\ 2\,1\,3,$$

ás quaes depois se juntarão as seguintes:

$$3\,2\,1,\ 1\,3\,2,\ 3\,1\,2,\ 2\,3\,1.$$

Conservando os indices inferiores na ordem natural e attendendo á regra dos signaes, viria

$$\Delta_3 = a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 - a_1^2\, a_2^1\, a_3^3 + a_1^3\, a_2^1\, a_3^2 - a_1^1\, a_2^3\, a_3^2 + a_1^2\, a_2^3\, a_3^1 - a_1^3\, a_2^2\, a_3^1.$$

Este desenvolvimento tem 6 termos, 3 positivos e 3 negativos.

Do mesmo modo se obteria o desenvolvimento de determinantes de ordem mais elevada, mas o processo seria cada vez mais complicado e hade ser substituido por outros mais expeditos. Os determinantes de 3.ª ordem resolvem-se facilmente pela *regra de Sarrus,* de que principalmente convirá usar quando os elementos não estejam expressos em alguma das notações de Leibnitz ou de Cauchy. A regra é a seguinte:

Ligam-se os elementos que occupam as posições (1,2), (2,3) assim como (2,1), (3,2) por meio de parallelas á primeira diagonal e completam-se os triangulos cujos vértices são respectivamente (3,1) e (1,3). Os elementos da primeira diagonal e os que formam os vértices dos dois triangulos compõem os termos positivos do determinante. Para ter os termos negativos opéra-se de modo análogo relativamente á segunda diagonal.

**31.** Chamam-se *conjugados* dois elementos $a_\alpha^\beta$ e $a_\beta^\alpha$ que teem os mesmos índices, mas invertidos. Os elementos principaes são conjugados de si mesmos. Dois elementos conjugados estam situados symetricamente a respeito da primeira diagonal.

O determinante diz-se de *diagonal vazia* quando todos os elementos principaes são zero, *symetrico* quando os elementos conjugados são eguaes dois a dois, *contra symetrico* ou *pseudo symetrico* quando os elementos conjugados teem, dois a dois, o o mesmo valor numerico e signaes contrarios, *hemisymetrico* quando é contrasymetrico e de diagonal vazia.

Desenvolvendo pela regra de Sarrus o determinante symetrico

$$S = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{vmatrix},$$

acha-se $S = acg + 2bde - ae^2 - cd^2 - gb^2$. Para $a = c = g = 0$ seria $S = 2bde$.

Desenvolvendo o determinante contrasymetrico

$$S' = \begin{vmatrix} a & -b & d \\ b & c & -e \\ -d & e & g \end{vmatrix}$$

acha-se $S' = acg + ae^2 + cd^2 + gb^2$. Para $a = c = g = 0$ seria

$S' = 0$ e, em geral, o determinante hemisymetrica de ordem impar é nullo.

**32.** Combinando de todas as maneiras $i$ linhas e $i$ columnas de uma matriz de $np$ elementos, para todos os valores possiveis de $i$, os determinantes formados com os elementos communs a estas filas orthogonaes chamam-se *determinantes da matriz*. A ordem d'elles pode variar desde o menor dos numeros $n$ e $p$ até á unidade, considerando cada elemento como um determinante de *primeira ordem*.

Entre os determinantes de uma matriz alguns poderão annullar-se, e em muitos casos convirá especificar a ordem mais elevada dos que podem ser differentes de zero. Este numero chama-se *caracteristica*.

Assim, quando dissermos que $c$ é a caracteristica de uma matriz, queremos significar que na matriz há, pelo menos, um determinante de ordem $c$ que é differente de zero e todos os determinantes de ordem superior a $c$ se annullam.

O menor valor de $c$ será a unidade, porque não teremos de considerar matrizes compostas só de elementos zero. O maior valor possivel de $c$ é o menor dos numeros $n$ e $p$.

## § 2.º — Propriedades fundamentaes.

**33.** A transposição das linhas e columnas de um determinante $\Delta$ corresponde a uma rotação de 180° executada pelo plano de $\Delta$ em torno da sua primeira diagonal; e cada elemento de $\Delta$ irá ocupar no novo determinante $\Delta'$ a posição que o seu conjugado tinha em $\Delta$.

Ora um termo

$$T = \pm a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n}$$

de $\Delta$ hade encontrar-se, abstrahindo do signal, em $\Delta'$ e vice-versa; por isso que em T se encontra um elemento, e um só, de cada linha e de cada columna de $\Delta'$.

O signal é tambem o mesmo. Com effeito as permutações dos índices das linhas e das columnas de $\Delta$, em que se encontram os elementos de T, são respectivamente

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n;$$

e as permutações dos índices das linhas e das columnas de $\Delta'$ em que se encontram os mesmos elementos de T são, em virtude da transposição,

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n, \quad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

isto é, as mesmas. Além d'isto os elementos principaes, sendo conjugados de si proprios, são os mesmos em $\Delta$ e $\Delta'$, e d'aqui se segue que as permutações principaes são as mesmas nos dois determinantes. Logo o signal do termo considerado é tambem o mesmo em ambos, e portanto:

I. *O valor de um determinante não se altera quando se mudam ordenadamente as linhas em columnas e as columnas em linhas.*

**34.** Se no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^h & \ldots & a_1^k & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_h^1 & \ldots & a_h^h & \ldots & a_h^k & \ldots & a_h^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^1 & \ldots & a_k^h & \ldots & a_k^k & \ldots & a_k^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^h & \ldots & a_n^k & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

trocarmos duas columnas $h$ e $k$, é evidente que, abstrahindo do signal, os termos dos desenvolvimentos de $\Delta$ e do determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^k & \ldots & a_1^h & \ldots & a_1^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_h^1 & \ldots & a_h^k & \ldots & a_h^h & \ldots & a_h^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_k^1 & \ldots & a_k^k & \ldots & a_k^h & \ldots & a_k^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_n^1 & \ldots & a_n^k & \ldots & a_n^h & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

serão os mesmos.

Quanto aos signaes, os termos principaes de $\Delta$ e $\Delta'$ são respectivamente

$$T = + a_1^1 \ldots a_h^h \ldots a_k^k \ldots a_n^n,$$

$$T' = + a_1^1 \ldots a_h^k \ldots a_k^h \ldots a_n^n.$$

Este último tem o signal — em $\Delta$, porque as permutações dos índices inferiores são as mesmas em T e T', emquanto que as dos índices superiores são de classes differentes pelo theorema de Bezout.

Por outra parte as linhas teem os mesmos indices em $\Delta$ e $\Delta'$, e nos termos positivos de cada determinante a permutação dos índices superiores hade ser da mesma classe da respectiva permutação principal e vice-versa. Logo será $\Delta' = -\Delta$; e como da propriedade I resulta que o mesmo succederia quando se trocassem duas linhas, segue-se que:

II. *Um determinante muda de signal pela troca de duas filas parallelas.*

Corollario. — *Trocando* p *filas parallelas do determinante* $\Delta$, *o novo determinante será* $\Delta' = (-1)^p . \Delta$.

Uma permutação circular de $p$ linhas ou columnas é equivalente á troca de $p-1$ filas parallelas ou á multiplicação do determinante por $(-1)^{p-1}$.

**35.** Em todos os termos do determinante entra como factor um elemento, e um só, de cada linha e de cada columna, e d'aqui se segue que, multiplicando todos os elementos de uma fila por um numero, cada termo do determinante fica multiplicado por esse numero. Logo:

III. *Se multiplicarmos ou dividirmos todos os elementos de uma fila por um numero, o determinante fica multiplicado ou dividido pelo mesmo numero.*

Corollario I. — *Se forem zero todos os elementos de uma fila de $\Delta$, será $\Delta = 0$.*

Corollario II. — *Mudando os signaes a todos os elementos de uma fila o determinante muda tambem de signal. Mudar os signaes aos elementos de* p *filas equivale a multiplicar a determinante por $(-1)^p$. Mudando os signaes a todos os elementos de um determinante de ordem* n, *o determinante muda ou não de signal conforme* n *é impar ou par.*

**36.** Pela propriedade III pode-se operar no determinante uma transformação, que em geral simplificará o seu desenvolvimento. Seja

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Multipliquem-se primeiro as columnas respectivamente por $bc$, $ca$ e $ab$, como na reducção de fracções ao mesmo denominador, e divida-se o determinante por $a^2b^2c^2$. Divida-se depois a primeira linha por $abc$, e multiplique-se o determinante por este factor. Teremos assim

$$\Delta=\frac{1}{a^2b^2c^2}\cdot\begin{vmatrix} abc & bca & cab \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix}.$$

Se fôsse $a=0$, por exemplo, multiplicariamos sómente as duas ultimas columnas de $\Delta$ por $c$ e $b$. Em geral é sempre possivel reduzir á unidade todos os elementos de uma fila que sejam differentes de zero, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}=x^2y^2z^2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{z}{xy} & \frac{y}{zx} \\ 1 & \frac{z}{xy} & 0 & \frac{x}{yz} \\ 1 & \frac{y}{xz} & \frac{x}{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ xyz & z^2 & 0 & x^2 \\ xyz & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Obtem-se o segundo determinante dividindo por $x$ a segunda linha e a segunda columna do proposto, por $y$ a terceira linha e a terceira columna, por $z$ a quarta linha e a quarta columna e multiplicando o resultado por $x^2y^2z^2$. As outras transformações não offerecem difficuldade.

**37.** Se forem eguaes os elementos correspondentes de duas filas parallelas, o determinante annulla-se. Com effeito, trocando essas filas, o determinante muda de signal (II); mas o seu valor não se altera porque a matriz se conserva exactamente a mesma, e por conseguinte será $\Delta = -\Delta$ ou $2\Delta = 0$, isto é, $\Delta = 0$.

Se os elementos correspondentes de duas filas parallelas são proporcionaes, o determinante annulla-se. Assim teremos, por exemplo, em virtude da propriedade III,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & pb & b \\ a' & pb' & b' \\ a'' & pb'' & b'' \end{vmatrix} = p . \begin{vmatrix} a & b & b \\ a' & b' & b' \\ a'' & b'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

Este resultado é evidentemente geral e portanto:

IV. *Sendo proporcionaes os elementos correspondentes de duas filas parallelas, o determinante annulla-se.*

Assim, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 9 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2.2 & 5 \\ -1 & 2.(-1) & 9 \\ 3 & 2.3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

como se poderia ver effectuando o desenvolvimento pela regra de Sarrus.

**38.** Um determinante da forma

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4+\beta_4+\gamma_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

resolve-se na somma dos tres

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \beta_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \beta_4 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & \gamma_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Com effeito a expressão

$$a_1 b_2 (\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) c_4 = a_1 b_2 \alpha_3 c_4 + a_1 b_2 \beta_3 c_4 + a_1 b_2 \gamma_3 c_4$$

mostra que o termo principal de $\Delta$ é egual á somma dos termos principaes dos tres determinantes em que $\Delta$ se resolveu; e do mesmo modo cada termo de $\Delta$ será egual á somma dos termos *homólogos* d'estes tres últimos determinantes. O principio traduzido na penúltima egualdade é geral; logo:

V. *Se os elementos de uma columna (ou linha) forem expressos por sommas de* i *parcellas ou polynomios, o determinante resolve-se na somma dos* i *determinantes que se obteem quando no determinante dado todos os polynomios se substituem successivamente pelo primeiro termo, segundo termo, etc., de cada um.*

Teriamos uma applicação d'esta propriedade fazendo inversamente

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & b \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0,$$

por onde se veria que os primeiros dois determinantes são numericamente eguaes e de signaes contrários.

**39.** Pela propriedade V é

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+pc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & pc_1 & c_1 \\ a_2 & pc_2 & c_2 \\ a_3 & pc_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ou, pois que o ultimo d'estes determinantes é zero, IV,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1+pc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+pc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+pc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

É evidente a generalização d'este principio a determinantes de ordem mais elevada e á somma de mais columnas. O mesmo se dizia das linhas, e portanto:

VI. *Um determinante não se altera quando aos elementos de uma columna, ou linha, se juntam os elementos correspondentes de outras columnas, ou linhas, respectivamente multiplicados por factores constantes.*

Por esta propriedade, a que se chama *principio da addição* *das linhas*, teriamos, por exemplo,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \times \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix},$$

e este ultimo determinante resultou de dividir por 4 a primeira columna e por 5 a segunda linha de $\Delta$, multiplicando depois $\Delta$ por $4 \times 5$. Depois, subtrahindo da 1.ª, 3.ª e 4.ª linha a 2.ª multiplicada respectivamente por 3, 5 e 7, acha-se

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

D'este modo se pode fazer depender um determinante de outro, em que os elementos de uma fila, menos um, sejam eguaes a zero.

### § 3.º — Determinantes menores.

**40.** *Menor de classe h* de um determinante $\Delta$ de ordem $n$ é o determinante de ordem $n-h$ que se obtém quando se supprimem $h$ linhas e $h$ columnas de $\Delta$.

O numero de menores de 1.ª classe do determinante $\Delta$ é egual ao numero dos elementos de $\Delta$, ou $n^2$, porque são distinctos os systemas de duas filas orthogonaes que se cruzam sobre dois elementos differentes.

Cada um d'estes menores é um determinante de ordem

$n-1$, que terá $(n-1)^2$ menores de 1.ª classe. Todos elles são menores de 2.ª classe de $\Delta$, mas não são distinctos porque duas linhas e duas columnas dadas cruzam-se sobre $2^2$ elementos. Por conseguinte em $\Delta$ haverá

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2}$$

menores distinctos de 2.ª classe. Do mesmo modo se veria tambem que no mesmo determinante ha

$$\frac{n^2}{1^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{2^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{3^2}$$

menores distinctos de 3.ª classe, e assim por deante.

**41.** Os elementos de um determinante podem considerar-se como menores de classe $n-1$ de $\Delta$, e a cada um d'elles corresponde um menor de 1.ª classe.

Em geral, a um menor M de ordem $h$ de um determinante de ordem $n$ corresponde outro menor M′ de ordem $n-h$, que se obteria supprimindo as $h$ linhas e as $h$ columnas representadas em M. Um d'estes menores diz-se *complementar* do outro.

Assim no determinante de 5.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$$

os menores

$$\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_4^2 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^2 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$$

são complementares. N'um d'elles faltam os índices que se encontram no outro.

Chamam-se *menores principaes de* $\Delta$ aquelles cujos elementos principaes são tambem elementos principaes em $\Delta$, isto é, aquelles que estão contidos em linhas e columnas dos mesmos índices. *Primeiro menor principal* de ordem $h$ de $\Delta$ é o que se contém nas primeiras $h$ linhas e nas primeiras $h$ columnas de $\Delta$. Se um menor é principal, o seu complementar tambem é menor principal.

Num determinante de ordem $n$ haverá tantos menores principaes de ordem $h$ quantas são as combinações de $n$ elementos $h$ a $h$, ou $\binom{n}{h}$.

**42.** Seja M um menor de ordem $h$ do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

e M' o menor complementar de M.

Um termo de M será da forma, (5),

$$t = (-1)^u a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots a_{\alpha_h}^{\beta_h}$$

com os índices inferiores na ordem natural e designando por $u$ o numero de inversões da permutação $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_h$. Do mesmo modo um termo de M′ será da fórma

$$t' = (-1)^{u'} \cdot a_{\alpha_{h+1}}^{\beta_{h+1}} a_{\alpha_{h+2}}^{\beta_{h+2}} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n},$$

tambem com os índices inferiores na ordem natural e designando por $u'$ o numero de inversões da permutação $\beta_{h+1}$ $\beta_{h+2} \ldots \beta_n$.

Por outra parte, ao termo geral (3) do determinante $\Delta_n$ tambem se pode dar a forma

$$T = (-1)^{v+v'} \cdot a_{\alpha_1}^{\beta_1} a_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots a_{\alpha_h}^{\beta_h} a_{\alpha_{h+1}}^{\beta_{h+1}} \ldots a_{\alpha_n}^{\beta_n}$$

sendo $v$ e $v'$ respectivamente os numeros de inversões das permutações $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h \alpha_{h+1} \ldots \alpha_n$ e $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_h \beta_{h+1} \ldots \beta_n$. Ora, pondo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = s_1$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_h = s_2$ e $s_1 + s_2 = s$, será por (1) e (2)

$$v = s_1 - \frac{h(h+1)}{2}, \quad v' = u + u' + s_2 - \frac{h(h+1)}{2},$$

e portanto $v + v' = u + u' + s - h(h+1)$; d'aqui resulta, por ser par o numero $h(h+1)$, que

$$(-1)^{v+v'} = (-1)^{u+u'} \cdot (-1)^s.$$

Logo será

$$T = (-1)^s\, tt'.$$

Mas $t$ e $t'$ são dois termos quaesquer de M e M′. Além d'isto $s$ é, por definição, a somma dos índices das linhas e das columnas de $\Delta$ representadas em M, e portanto conserva o mesmo valor para todos os termos de M. D'aqui se conclue que todos os termos do producto

$$(-1)^s \, MM'$$

pertencem ao desenvolvimento de $\Delta$. Estes termos são distinctos por corresponderem a termos distinctos de M, ou de M', ou de ambos estes factores.

O factor $(-1)^s \, M'$ chama-se *complemento algebrico de M,* e assim teremos por definição

$$(6) \qquad c.a.M = (-1)^s [m.c.M];$$

designamos por $c.a.M$ o *complemento algebrico* de M, por $m.c.M$ o *menor complementar* de M e por $s$ a somma dos índices das linhas e columnas representadas em M.

Na indicação do signal é indifferente empregar a potencia $s$ ou $s'$ de $-1$, sendo $s'$ a somma dos índices das linhas e das columnas representadas em M'. Com effeito a somma dos índices de todas as linhas e columnas de $\Delta$ é por um lado $s+s'$ e por outra parte $2(1+2+\ldots+n)$. Por aqui se vê, sendo eguaes estas sommas, que $s+s'$ é um numero par e portanto

$$(-1)^s = (-1)^{s'}.$$

Por conseguinte será tambem

$$c.a.M' = (-1)^s \, [m.c.M'],$$

e por este motivo se dizem *reciprocos* os menores M e M'.

Pois que as linhas e as columnas representadas num menor principal teem os mesmos índices, para estes menores o numero $s$ é par. Logo, se o menor M fôr principal, será

$$c.a.M = m.c.M. \tag{7}$$

**43.** O menor complementar do elemento $a_i^j$ do determinante $\Delta$ de ordem $n$ é o determinante de ordem $n-1$ que se obtém supprimindo em $\Delta$ a linha $i$ e a columna $j$ e, designando por $A_i^j$ o complemento algebrico d'aquelle elemento, será

$$A_i^j = (-1)^{i+j}.[m.c.a_i^j].$$

Os $(n-1)!$ termos do producto $a_i^j A_i^j$ fazem parte, como se viu, do desenvolvimento de $\Delta$.

O elemento $a_i^j$ diz-se *par* quando os indices $i$ e $j$ são ambos pares ou ambos impares. O complemento algebrico de um elemento par é o respectivo menor complementar, e o de um elemento impar é o seu menor complementar com signal contrário.

O signal tambem se pode determinar pela regra seguinte, chamada *do percurso orthogonal:*

*Percorre-se a primeira linha do determinante desde o primeiro elemento até á columna em que se encontra o elemento considerado. Desce-se depois por esta columna até chegar ao mesmo elemento. Enunciando o signal + no ponto de partida e mudando de signal em cada elemento percorrido, o ultimo signal enunciado é o que se deve empregar.*

Facilmente se justifica esta regra, por isso que o primeiro elemento do determinante é par e em cada fila um dos indices conserva-se constante e o outro procede na ordem natural.

**44.** Nas $h$ columnas de $\Delta$ representadas no menor M conteem-se $\binom{n}{h}$ menores de ordem $h$, que se obteriam praticando todas as combinações $h$ a $h$ das $n$ linhas do determinante.

Designando por $c$ este numero, por $M_1, M_2, \ldots M_c$ aquelles menores e por $(M'_1)$, $(M'_2)$, ..., $(M'_c)$ os respectivos complementos algebricos, será

$$(8) \qquad \Delta = M_1(M'_1) + M_2(M'_2) + \ldots + M_c(M'_c).$$

Com effeito os termos em que se resolve o segundo membro de (8) são distinctos pelo factor $M_i$, ou por $(M'_i)$, ou por ambos. O numero de termos de $M_i$ é $\lfloor h$, o de $(M'_i)$ é $\lfloor n-h$ e portanto o da somma (8) será

$$\binom{n}{h} \cdot \lfloor h \cdot \lfloor n-h = \lfloor n \,,$$

que é exactamente o numero de termos de $\Delta$.

Á expressão (8) dá-se o nome de *desenvolvimento de Laplace.*

**45**. Applicando a fórmula (8) ao caso em que os menores $M_1, \ldots, M_c$ se reduzem aos elementos de uma linha ou de uma columna e designando por $A_i^j$, como anteriormente se fez, o complemento algebrico do elemento $a_i^j$, teremos para o desenvolvimento do determinante $\Delta$ as duas expressões:

$$\Delta = A_i^1\, a_i^1 + A_i^2\, a_i^2 + \ldots + A_i^n\, a_i^n,$$

$$\Delta = A_1^j\, a_1^j + A_2^j\, a_2^j + \ldots + A_n^j\, a_n^j.$$

Visto que, abstrahindo do signal, $A_i^j$ é um determinante de ordem $n-1$, estas fórmulas mostram como um determinante $\Delta$ se pode fazer depender de outros cuja ordem vae diminuindo successivamente de uma unidade.

Supponhamos agora que no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^j \dots a_1^k \dots a_1^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \dots a_n^j \dots a_n^k \dots a_n^n \end{vmatrix} = A_1^j a_1^j + A_2^j a_2^j + \dots + A_n^j a_n^j$$

é $a_i^j = a_i^k$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Neste caso é $\Delta = 0$ pela propriedade IV e, mudando $a_i^j$ em $a_i^k$ no segundo membro da ultima egualdade viria

$$A_1^j a_1^k + A_2^j a_2^k + \dots + A_n^j a_n^k = 0.$$

Para as linhas teremos uma relação semelhante e portanto:

*É egual a zero a somma dos productos que se obteem quando se multiplicam os elementos de uma fila pelos complementos algebricos dos elementos homólogos de outra fila parallela á primeira.*

Estes resultados e os precedentes estão comprehendidos nas seguintes fórmulas:

$$(9) \qquad \begin{cases} A_i^1 a_h^1 + A_i^2 a_h^2 + \dots + A_i^n a_h^n = \delta, \\ (i = h, \delta = \Delta;\ i \neq h, \delta = 0); \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} A_1^j a_1^k + A_2^j a_2^k + \dots + A_n^j a_n^k = \delta, \\ (j = k, \delta = \Delta;\ j \neq k, \delta = 0). \end{cases}$$

A applicação das fórmulas (9) e (10) ao determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

dá, para $i=h$ e $j=k$, as relações seguintes

$$\Delta = A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3,$$
$$= A_2a_2 + B_2b_2 + C_2c_2 = B_1b_1 + B_2b_2 + B_3b_3,$$
$$= A_3a_3 + B_3b_3 + C_3c_3 = C_1c_1 + C_2c_2 + C_3c_3,$$

sendo os complementos algebricos dos elementos de $\Delta$:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Applicando as mesmas fórmulas ao caso $i \neq h$ e $j \neq k$ teremos as doze relações

$$A_1a_2 + B_1b_2 + C_1c_2 = A_1a_3 + B_1b_3 + C_1c_3 = 0,$$
$$A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c_1 = A_2a_3 + B_2b_3 + C_2c_3 = 0,$$
$$A_3a_1 + B_3b_1 + C_3c_1 = A_3a_2 + B_3b_2 + C_3c_2 = 0;$$
$$A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 = A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 = 0,$$
$$B_1a_1 + B_2a_2 + B_3a_3 = B_1c_1 + B_2c_2 + B_3c_3 = 0,$$
$$C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 = C_1b_1 + C_2b_2 + C_3b_3 = 0.$$

Por estas fórmulas se acharia que o determinante do n.º 39, desenvolvido pelos elementos da primeira columna, daria

$$\Delta = 20 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}$$

Por este processo se pode abaixar em uma unidade a ordem do determinante, quando são nullos todos os elementos de uma fila menos um. Esta disposição pode obter-se pela propriedade VI, do modo que se viu no mesmo exemplo; e assim tambem, subtrahindo respectivamente da 2.ª e da 3.ª columna do ultimo determinante a 1.ª multiplicada por 3 e a segunda multiplicada por 2, virá

$$\Delta = -20. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -7 & 11 \end{vmatrix} = 20. \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -20.$$

Inversamente pode-se elevar em uma unidade a ordem do determinante pela addição de duas filas orthogonaes. O elemento em que estas filas se cruzam será $+1$ ou $-1$, conforme a sua posição seja par ou impar no novo determinante. Os restantes elementos de uma das filas serão zeros, e os da outra podem ser quaesquer. Assim teremos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ -1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

sendo arbitrários $\beta_1$, $\beta_2$ e $\beta_3$.

Desenvolvendo cada um dos determinantes successivos pelos elementos da primeira columna segundo a fórmula (9), teremos

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

É claro que, fazendo o desenvolvimento pelas linhas segundo a fórmula (9), se chegaria ao mesmo resultado quando fossem nullos os elementos para o outro lado da primeira diagonal; e que o determinante se simplificaria do mesmo modo, ainda mesmo que fosse de ordem mais elevada. Logo:

*O determinante reduz-se ao termo principal quando são nullos todos os elementos para um lado da primeira diagonal.*

Se forem nullos todos os elementos para um lado da segunda diagonal, o determinante de ordem $n$ reduz-se a este termo com o signal determinado (n.º 25) pelo coefficiente $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**46.** Theorema. — *Um determinante de ordem* n, *em que são nullos os elementos communs ás primeiras* h *linhas e ás ultimas* n — h *columnas, é egual ao producto dos dois determinantes adjacentes á matriz de elementos zero. Os elementos que completam a matriz do determinante podem ser quaesquer.*

Com effeito, desenvolvendo o determinante pelos menores de ordem $h$ contidos nas suas primeiras $h$ columnas, o primeiro termo do desenvolvimento de Laplace é o segundo membro da egualdade

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots a_1^h & 0 & \dots 0 \\ . & . & . & . \\ a_h^1 & \dots a_h^h & 0 & \dots 0 \\ a_{h+1}^1 & \dots a_{h+1}^h & a_{h+1}^{h+1} & \dots a_{h+1}^n \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & \dots a_n^h & a_n^{h+1} & \dots a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^h \\ . & . & . \\ a_h^1 & \dots & a_h^h \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\ . & . & . \\ a_n^{h+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \tag{11}$$

porque ambos os seus factores são menores principaes de $\Delta$. Os outros termos do desenvolvimento annullam-se, porque em cada um entra como factor um determinante que tem uma linha de zeros pelo menos.

*Se forem nullos os elementos communs ás primeiras* $h+1$ *linhas e ás ultimas* $n-h$ *columnas de* $\Delta$, *será* $\Delta=0$.

Neste caso o último determinante do segundo membro de (11) teria uma linha de zeros.

Corollario. — *Um determinante de ordem* $n$ *pode elevar-se directamente á ordem* $n+p$.

Viu-se no n.° 45 como este resultado se obteria, elevando a ordem do determinante em uma unidade de cada vez; mas será preferivel proceder do modo seguinte. Construa-se um determinante R de ordem $p$ que seja egual á unidade, fazendo por exemplo

$$R=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Disponha-se a primeira diagonal de R no prolongamento da primeira diagonal do determinante considerado, e complete-se a matriz quadrada de ordem $n+p$ preenchendo as linhas com zeros e as columnas com elementos arbitrarios, ou vice-versa. O determinante assim obtido será, do mesmo modo que (11), o producto de dois factores, um dos quaes é o determinante dado e o outro é $R=1$.

**47.** O último theorema pode enunciar-se com mais generalidade nos termos seguintes, e a demonstração seria a mesma:

THEOREMA. — *Se no determinante* $\Delta$ *de ordem* n *forem nullos os elementos de* h *columnas, com excepção sómente dos que pertencem a* h *linhas differentes,* $\Delta$ *reduz-se ao producto da multiplicação do menor de ordem* h *contido nestas linhas e columnas pelo respectivo complemento algebrico.*

Este theorema tem uma applicação importante no desenvolvimento do determinante cujos elementos principaes são da forma $a+x$. Resolvendo este determinante segundo a 1.ª columna, pela propriedade V teremos

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1+x & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 0 & a_2^2+x & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_n^2 & \dots & a_n^n+x \end{vmatrix}.$$

Cada um dos dois últimos determinantes ainda se decompõe em dois pelo mesmo processo e assim seguidamente, de modo que $\Delta$ resolve-se afinal na somma de $2^n$ determinantes de elementos simples.

Dois d'estes determinantes serão

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}=x^n;$$

e um dos restantes será, por exemplo,

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_1^{h+1} & \dots & a_1^n \\ 0 & x & \dots & 0 & a_2^{h+1} & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x & a_h^{h+1} & \dots & a_h^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^{h+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{h+1}^{h+1} & \dots & a_{h+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{h+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix} . x^h,$$

onde o factor de $x^h$ é um menor principal de ordem $n-h$ de $\Delta_0$.

Designemos em geral por $\Delta'$ um dos outros determinantes em que $\Delta$ ficou resolvido. Se a variavel $x$ se encontrar na columna $\alpha_i$ de $\Delta'$, o indice da linha que cruza esta columna sobre o elemento $x$ será o mesmo $\alpha_i$, porque $x$ entra só nos elementos principaes de $\Delta$. Além d'isto os restantes elementos d'aquella columna $\alpha_i$ serão zero.

Por conseguinte se $x$ se encontrar em $h$ columnas de $\Delta'$, nestas columnas só se encontrará um menor de ordem $h$ que seja differente de zero, o qual se reduz a $x^h$ e é um menor principal de $\Delta'$. O complemento algebrico $\delta$ d'este menor é o respectivo menor complementar, que será um menor principal de ordem $n-h$ de $\Delta_0$; e assim teremos

$$\Delta' = \delta x^h.$$

No termo (12) o menor $\delta$ está contido nas últimas $n-h$ linhas e columnas de $\Delta_0$.

Mas a mesma disposição se verificará com todas as combinações $h$ a $h$ das $n$ columnas de $\Delta$, visto que *todos* os elementos principaes de $\Delta$ são da forma $a+x$. Logo, designando por $S_{n-h}$

a somma de todos os menores principaes de ordem $n-h$ de $\Delta_0$, os termos do desenvolvimento de $\Delta$ em que entra a potencia $h$ de $x$ são dados pela expressão

$$S_{n-h}x^h,$$

e o numero d'elles é $\binom{n}{n-h}$.

Fazendo succesivamente $h=1, 2, \ldots, n-1$, teremos assim

$$\Delta=\Delta_0+S_{n-1}x+S_{n-2}x^2+\ldots+S_1x^{n-1}+x^n.$$

Sommando os numeros de parcellas em que se pode resolver cada termo d'este desenvolvimento, acha-se o numero total (n.º 15)

$$1+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{1}+1=2^n,$$

que é com effeito, como já vimos, o numero dos determinantes de elementos simples em que $\Delta$ se resolve.

A chamada *equação em s* da Geometria Analytica no espaço é

$$\Delta=\begin{vmatrix} a-s & b'' & b' \\ b'' & a'-s & b \\ b' & b & a''-s \end{vmatrix}=0.$$

Applicando o desenvolvimento precedente ao seu primeiro membro, temos de fazer $x=-s$ e portanto mudaremos o signal dos termos em que entram potencias impares de $x$. O termo independente de $s$ é o determinante symetrico

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

Designando por $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ os menores principaes de 2.ª ordem de $\Delta_0$ teremos

$$\delta = aa' - b''^2, \quad \delta' = aa' - b'^2, \quad \delta'' = a'a'' - b^2;$$

os de 1.ª ordem são

$$a, \quad a', \quad a'',$$

e por conseguinte

$$\Delta = \Delta_0 - (\delta + \delta' + \delta'')s + (a + a' + a'')s^2 - s^3$$

será o desenvolvimento pedido.

### § 4.º — Producto de determinantes. Determinante adjunto.

**48**. O producto de dois determinantes, um de ordem $n$ e outro de ordem $p$, exprime-se num determinante de ordem $n+p$ pelo theorema do n.º 46. Se os determinantes forem ambos de ordem $n$, o producto pode ser expresso por um determinante da mesma ordem $n$, como vamos ver.

Sejam os determinantes dados

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Transponham-se as linhas e columnas de $\Delta_1$; segundo aquelle theorema, o producto será

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & \beta_1^1 & \ldots & \beta_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n & \beta_n^1 & \ldots & \beta_n^n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

e os elementos $\beta_1^1$, .., $\beta_n^n$ são arbitrários. Substituindo o determinante d'estes elementos pelo seguinte

$$S=\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^n,$$

o producto toma a forma

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & -1 & \dots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Juntem-se á columna $i$ d'este determinante as $n$ últimas respectivamente multiplicadas por $a_i^1$, $a_i^2$, ..., $a_i^n$. Fazendo successivamente $i=1, 2, \dots, n$, virá

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ m_1^1 & m_1^2 & \dots & m_1^n & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ m_2^1 & m_2^2 & \dots & m_2^n & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ m_n^1 & m_n^2 & \dots & m_n^n & \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

onde se fez

$$m_i^j = a_j^1 \alpha_i^1 + a_j^2 \alpha_i^2 + \ldots + a_j^n \alpha_i^n.$$

Posto isto, permutem-se em $\Delta$ as columnas $j$ e $n+j$ ($j=1$, $2, \ldots, n$); o determinante virá multiplicado por $(-1)^n$, e teremos

$$(-1)^n.\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n & m_1^1 & m_1^2 & \ldots & m_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n & m_2^1 & m_2^2 & \ldots & m_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n & m_n^1 & m_n^2 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix}$$

D'esta expressão resulta pelo theorema do n.º 46

$$(-1)^n.\Delta = S \begin{vmatrix} m_1^1 & \ldots & m_1^n \\ . & . & . \\ m_n^1 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix},$$

ou, supprimindo o factor commum $S = (-1)^n$,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ . & . & . \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ . & . & . \\ \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^1 & \ldots & m_1^n \\ . & . & . \\ m_n^1 & \ldots & m_n^n \end{vmatrix}.$$

Os elementos do último determinante são a somma dos productos que se obteem multiplicando os elementos de cada linha de um dos factores pelos elementos homólogos de todas as linhas do outro factor.

D'este modo se acharia, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Em geral o quadrado de um determinante é expresso por um determinante symetrico.

Da mesma forma se acharia

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ a_1b_2+b_1a_2 & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix},$$

donde se deduz a expressão

$$(13) \qquad (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2)^2=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2).$$

Transpondo as linhas e as columnas no factor $\Delta_1$ e depois em $\Delta_2$, vê-se que o producto de dois determinantes pode tomar quatro formas que resultam:

1.° da multiplicação de linhas por linhas,

2.° da multiplicação de linhas por columnas,

3.° da multiplicação de columnas por linhas,

4.° da multiplicação de columnas por columnas.

**49.** Designando por $A_i^j$ o complemento algebrico do elemento $a_i^j$ do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

o determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ . & . & . \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

chama-se *adjunto* de $\Delta$.

Effectuemos o producto $P = \Delta \times \Delta'$, multiplicando successivamente cada linha $h$ de $\Delta'$ por todas as linhas de $\Delta$. O elemento $m_i^j$ de P será a somma dos productos dos elementos da linha $i$ de $\Delta'$ pelos elementos homólogos da linha $j$ de $\Delta$, ou

$$m_i^j = A_i^1 a_j^1 + A_i^2 a_j^2 + \dots + A_i^n a_j^n.$$

Esta expressão mostra, (9), que é

$$\text{para } \quad i = j, \quad m_i^i = \Delta,$$
$$\text{para } \quad i \neq j, \quad m_i^j = 0;$$

portanto os elementos de cada linha de P são zero, com excepção apenas do elemento principal que é $\Delta$. Logo será

$$\Delta \times \Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n.$$

Esta expressão é uma identidade, porque subsiste quaesquer que sejam os elementos de $\Delta$; e pois que o factor $\Delta$ não é identicamente nullo, é permittido (n.° 14) supprimir nos seus dois membros este factor commum. D'aqui resulta a egualdade

$$\Delta' = \Delta^{n-1}. \tag{14}$$

**50.** Designemos por $\alpha_i^j$ o complemento algebrico do elemento $A_i^j$ de $\Delta'$. Por definição será

$$\alpha_i^j = (-1)^{i+j}.[m.c.A_i^j]. \tag{15}$$

Elevemos á ordem $n$ este menor de $\Delta'$, que é um determinante de ordem $n-1$. Para o conseguir podemos fazer (n.º 45)

$$\alpha_i^j = (-1)^{i+j}. \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^{j-1} & A_1^j & A_1^{j+1} & \dots & A_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i-1}^1 & \dots & A_{i-1}^{j-1} & A_{i-1}^j & A_{i-1}^{j+1} & \dots & A_{i-1}^n \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^{i+j} & 0 & \dots & 0 \\ A_{i+1}^1 & \dots & A_{i+1}^{j-1} & A_{i+1}^j & A_{i+1}^{j+1} & \dots & A_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & \dots & A_n^{j-1} & A_n^j & A_n^{j+1} & \dots & A_n^n \end{vmatrix};$$

e multiplicando a linha $i$ por $(-1)^{i+j}$, virá finalmente

$$\alpha_i^j = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^{j-1} & A_1^j & A_1^{j+1} & \dots & A_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i-1}^1 & \dots & A_{i-1}^{j-1} & A_{i-1}^j & A_{i-1}^{j+1} & \dots & A_{i-1}^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_{i+1}^1 & \dots & A_{i+1}^{j-1} & A_{i+1}^j & A_{i+1}^{j+1} & \dots & A_{i+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & \dots & A_n^{j-1} & A_n^j & A_n^{j+1} & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Formemos o producto $\alpha_i^j \times \Delta$ multiplicando successivamente cada linha de $\alpha_i^j$ por todas as linhas de $\Delta$. Teremos, como anteriormente,

$$\alpha_i^j \times \Delta = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^j & a_2^j & \dots & a_{i-1}^j & a_i^j & a_{i+1}^j & \dots & a_n^j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix},$$

e neste determinante todos os elementos principaes são eguaes a $\Delta$, menos o da columna $i$ que é $a_i^j$.

Permutemos no mesmo determinante a linha $i$ e a columna $i$ com cada uma das precedentes. Teremos effectuado assim um numero par $2(i-1)$ de trocas de filas parallelas e d'estas permutações, que por este motivo não produzem mudança de signal, resultará para aquelle producto a forma

$$\alpha_i^j \Delta = \begin{vmatrix} a_i^j & a_1^j & a_2^j & \dots & a_{i-1}^j & a_{i+1}^j & \dots & a_n^j \\ 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \Delta \end{vmatrix} = a_i^j \Delta^{n-1}.$$

Nesta egualdade podemos supprimir o factor commum $\Delta$, como anteriormente fizemos e pelo mesmo motivo. Assim teremos finalmente

$$(16) \qquad \alpha_i^j = a_i^j \Delta^{n-2}.$$

**51.** Em dois determinantes da mesma ordem dizem-se *correspondentes* dois menores contidos respectivamente nas mesmas linhas e nas mesmas columnas.

Sejam M e M' dois menores correspondentes de ordem $h$ do determinante $\Delta$ e do seu adjunto $\Delta'$; será

$$(17) \qquad c.a.\mathrm{M}' = \mathrm{M}\,\Delta^{n-h-1},$$

como vamos demonstrar.

Supponhamos em primeiro logar que

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^h \\ . & . & . \\ a_h^1 & \dots & a_h^h \end{vmatrix}, \quad \mathrm{M}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1^1 & \dots & \mathrm{A}_1^h \\ . & . & . \\ \mathrm{A}_h^1 & \dots & \mathrm{A}_h^h \end{vmatrix}$$

são os primeiros menores principaes de ordem $h$ de $\Delta$ e $\Delta'$.

Neste caso o complemento algebrico $\mu$ de M' é simplesmente o menor complementar de M', que é o determinante de ordem $n-h$

$$\mu = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{h+1}^{h+1} & \mathrm{A}_{h+1}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{h+1}^{n} \\ \mathrm{A}_{h+2}^{h+1} & \mathrm{A}_{h+2}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{h+2}^{n} \\ . & . & . & . \\ \mathrm{A}_{n}^{h+1} & \mathrm{A}_{n}^{h+2} & \dots & \mathrm{A}_{n}^{n} \end{vmatrix}.$$

Eleve-se este determinante á ordem $n$, pondo (n.° 46, *Cor.*)

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A^1_{h+1} & A^2_{h+1} & \ldots & A^h_{h+1} & A^{h+1}_{h+1} & A^{h+2}_{h+1} & \ldots & A^n_{h+1} \\ A^1_{h+2} & A^2_{h+2} & \ldots & A^h_{h+2} & A^{h+1}_{h+2} & A^{h+2}_{h+2} & \ldots & A^n_{h+2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A^1_n & A^2_n & \ldots & A^h_n & A^{h+1}_n & A^{h+2}_n & \ldots & A^n_n \end{vmatrix},$$

como é permittido, por isso que os elementos communs ás primeiras $h$ columnas e ás últimas $n-h$ linhas podem ser quaesquer.

Effectuando o producto de $\mu$ por $\Delta$ pela multiplicação de linhas por linhas e attendendo a (9), virá

$$\mu\,\Delta = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_h & a^1_{h+1} & a^1_{h+2} & \ldots & a^1_n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a^h_1 & a^h_2 & \ldots & a^h_h & a^h_{h+1} & a^h_{h+2} & \ldots & a^h_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{vmatrix},$$

ou
$$\mu\,\Delta = \mathrm{M}\,\Delta^{n-h}$$

por isso que o primeiro menor principal de ordem $h$ do último determinante é o menor M, depois de transpostas as linhas e columnas. Supprimindo nesta egualdade o factor commum $\Delta$, resulta a expressão (17).

Consideremos agora um menor qualquer M contido nas linhas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ e nas columnas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ de $\Delta$, assim como o menor M' contido nas mesmas linhas e columnas de $\Delta'$.

Transportem-se as linhas representadas em M de modo que se mude a linha $\alpha_1$ para o primeiro logar de $\Delta$, a linha $\alpha_2$ para o segundo logar e, em geral, a linha

$$\alpha_i \quad (i=1, 2, \ldots, h)$$

para o logar $i$. Para esta linha a mudança depende de

$$\alpha_i - i$$

trocas de linhas adjacentes.

Opere-se de modo semelhante com as columnas $\beta_1, \ldots, \beta_h$. Designando por $\Delta_1$ o determinante assim obtido, o seu primeiro menor principal de ordem $h$ será $M_1 = M$. Por outra parte, o numero de trocas de filas parallelas adjacentes, que foi necessario effectuar para levar M á posição $M_1$, é

$$r=(\alpha_1-1)+(\alpha_2-2)+\ldots+(\alpha_h-h)+(\beta_1-1)+(\beta_2-2)+\ldots+(\beta_h-h)$$

ou, designando por $s$ a somma dos índices das linhas e das columnas representadas em M,

$$r=s-2\,(1+2+\ldots+h);$$

e por ser $(-1)^r=(-1)^s$ segue-se que será

$$\Delta_1=(-1)^s.\Delta. \tag{18}$$

O adjunto $\Delta_1'$ de $\Delta_1$ terá a mesma disposição de linhas e columnas que $\Delta_1$. Mas cada elemento $A_i^j$ de $\Delta$, torna-se para $\Delta_1'$ em

$$(-1)^s.A_i^j,$$

por isso que a troca de duas linhas ou de duas columnas adjacentes produz mudança de signal nos complementos algebricos de todos os elementos do determinante. Por conseguinte, representando por $M_1'$ o primeiro menor principal de ordem $h$ de $\Delta_1'$, será

$$m.c.M_1' = (-1)^{(n-h)s}.[m.c.M'],$$

visto que $m.c.M'$ é um determinante de ordem $n-h$.

Além d'isto o complemento algebrico do menor principal $M_1'$ é simplesmente o seu menor complementar, e por conseguinte

$$c.a.M_1' = (-1)^{(n-h)s}.[m.c.M'].$$

Ora, por difinição, é

$$c.a.M' = (-1)^s [m.c.M'];$$

d'esta expressão e da precedente resulta que

$$(19) \qquad c.a.M_1' = (-1)^{(n-h-1)s}.[c.a.M'].$$

Mas pelo caso que se tratou primeiro é

$$c.a.M_1' = M_1.\Delta_1^{n-h-1}$$

ou, attendendo a (18) e visto ser $M_1 = M$,

$$c.a.M_1' = (-1)^{(n-h-1)s}.M.\Delta^{n-h-1}$$

D'esta egualdade e da (19) se deduz a (17), que assim fica demonstrada no caso geral. De (17) se pode deduzir (16), pondo $h=1$.

Sendo $\Delta = 0$, annullam-se $\Delta'$ e os complementos algebricos de todos os menores de $\Delta'$. Os que correspondem aos menores de 2.ª ordem são da forma

$$\text{c.a.}\begin{vmatrix} A_i^j & A_i^l \\ A_k^j & A_k^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i^j & a_i^l \\ a_k^j & a_k^l \end{vmatrix} \Delta^{n-3};$$

e se fosse $\Delta = 0$, seria

$$A_i^j \; A_k^l = A_k^j \; A_i^l$$

isto é,

$$A_i^j : A_i^l :: A_k^j : A_k^l, \quad A_i^j : A_k^j :: A_i^l : A_k^l.$$

Logo:

*Se for $\Delta = 0$, os complementos algebricos dos elementos homólogos de duas columnas ou de duas linhas de $\Delta$ são proporcionaes entre si.*

## VI. — **Dependencia linear.**

**52.** Duas collecções de constantes, como (1, 2, 3, 4) e (2, 4, 6, 8) por exemplo, dizem-se proporcionaes entre si quando os elementos de uma se podem obter multiplicando os elementos correspondentes da outra por um factor constante.

Ordinariamente entende-se que *cada uma* das duas collecções se pode obter operando d'este modo sobre a outra. Mas no caso das collecções (1, 2, 3, 4) e (0, 0, 0, 0), por exemplo, se é possivel passar da primeira para a segunda multiplicando os seus elementos por zero, não ha factor com que se possa passar da segunda para a primeira.

Para definir a proporcionalidade em termos que convenham a todos os casos, adopta-se a seguinte:

Definição I. — *Duas collecções de constantes*

$$x_1', \; x_2', \; \ldots, \; x_p',$$
$$x_1'', \; x_2'', \; \ldots, \; x_p''$$

*dizem-se proporcionaes quando existem dois factores constantes* $k_1$, $k_2$, *que não são ambos nullos e verificam as egualdades.*

$$k_1 x_i' + k_2 x_i'' = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Para $k_1 \neq 0$ teremos

$$x_i' = -\frac{k_2}{k_1} x_i'',$$

e para $k_2 \neq 0$ teriamos egualmente

$$x_i'' = -\frac{k_1}{k_2} x_i'.$$

Por conseguinte a definição I é conforme com a noção anterior de proporcionalidade; e além d'isso abrange evidentemente o caso das collecções.

$$\begin{array}{cccc} x_1', & x_2', & \ldots, & x_h', \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, \end{array}$$

para as quaes bastaria fazer $k_1 = 0$ e dar a $k_2 \neq 0$ um valor qualquer.

O conceito de proporcionalidade generalisado para maior numero de collecções toma o nome de *dependencia linear,* e assim temos a seguinte:

Definição II. — *Diz-se que são* linearmente dependentes n *collecções de* p *constantes cada uma*

$$x_1^{(i)}, \; x_2^{(i)}, \; \ldots, \; x_p^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

*quando existem* n *constantes* $k_1$, $k_2$ ..., $k_n$, *que não são conjunctamente nullas e verificam as egualdades*

$$k_1 x_j' + k_2 x_j'' + \ldots + k_n x_j^{(n)} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

*Quando não existe um systema de factores que satisfaçam a estas condições, as collecções dizem-se* linearmente independentes.

Do mesmo modo o conceito de proporcionalidade generalisa-se para os polynómios com a seguinte:

DEFINIÇÃO III. — *Os* n *polynómios* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *com qualquer numero de variaveis dizem-se* linearmente dependentes *quando existem* n *constantes* $k_1, k_2, \ldots, k_n$, *que não são conjunctamente nullas e verificam a identidade*

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_n f_n = 0.$$

*Quando não existem estes factores os polynómios são* linearmente independentes.

A theoria da *dependencia linear* assenta nos seguintes principios elementares:

THEOREMA I. — *Se* n *grupos de constantes,* ou n *polynómios, são linearmente dependentes, é sempre possivel exprimir linearmente um d'elles nos restantes, mas não necessariamente* um qualquer.

Com effeito, sendo differente de zero pelo menos um factor $k_i$, podemos dividir por $k_i$ a relação ou relações em que entrar este factor.

THEOREMA II. — *Se entre* n *collecções, ou entre* n *polynómios, houver um certo numero* $l < n$ *que sejam linearmente dependentes todas as collecções, ou todos os polynómios, o são egualmente.*

Para ver que assim é bastaria adoptar para factores da dependencia linear as $l$ constantes que correspondem ás $l$ collecções, ou aos $l$ polynómios, e que não são conjunctamente nullas, e mais $n-l$ zeros.

THEOREMA III. — *Se uma das* n *collecções se compõe unicamente de zeros, ou se um dos* n *polynómios é* identicamente nullo, *todas as collecções, ou todos os polynómios, são linearmente dependentes.*

É o que se pode reconhecer adoptando um factor $k \neq 0$ para a collecção de zeros, ou para o polynómio identicamente nullo, e $n-1$ zeros para as collecções restantes, ou para os outros polynómios.

**53.** Dadas $n$ collecções de $p$ constantes, consideremos separadamente os casos de ser $n \leq p$ e $n > p$.

1.° CASO. Designando por $\alpha$ a matriz das $np$ quantidades que formam as collecções dadas, ou

$$\alpha = \left\| \begin{array}{cccc} x_1' & x_2' & \dots & x_p' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_p'' \\ . & . & . & . \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_p^{(n)} \end{array} \right\|,$$

vamos demonstrar o seguinte

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para serem linearmente dependentes* n *collecções de* p *constantes cada uma*

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_p^{(i)}, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

*quando* $n \leq p$, *é que se annullem todos os determinantes de ordem* n *contidos na matriz* $\alpha$.

A condição é evidentemente necessária por isso que, sendo as collecções linearmente dependentes, em cada um d'esses determinantes haverá uma linha que pode ser expressa por uma combinação linear das outras e portanto todos elles se annullam.

Para provar que a mesma condição é sufficiente, supponhamos que todos aquelles determinantes se annullam e designemos por c a caracteristica da matriz $\alpha$. Consideramos $c > 0$ porque, se fosse $c = 0$, todos os elementos de $\alpha$ se annullariam e é evidente que não teremos de considerar collecções compostas de zeros sómente. Na maior parte dos casos será $c=n-1$, mas pela hypothese só podemos dizer que é $c<n$.

Segundo a definição de *caracteristica*, em $\alpha$ haverá pelo menos um determinante de ordem $c$ que é differente de zero, e supporemos que esse determinante $\delta$ se encontra nas primeiras $c$ linhas e nas primeiras $c$ columnas de $\alpha$. Não se prejudica d'este modo a generalidade da demonstração, porque aquella disposição se pode sempre obter ordenando convenientemente as collecções e as quantidades que as compõem; é evidente que a ordem de umas e outras é indifferente para a questão de que se trata. O determinante $\delta$ será, pois,

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1' & \dots & x_c' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(c)} & \dots & x_c^{(c)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Em $\alpha$ ha, pelo menos, mais uma linha do que em $\delta$. Seja $\delta'$ um determinante de $\alpha$ formado com as primeiras $c+1$ linhas e com as primeiras $c$ columnas e mais uma das seguintes. Pela definição de *caracteristica* será

$$\delta' = \begin{vmatrix} x_1' & \dots & x_c' & x_j' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(c)} & \dots & x_c^{(c)} & x_j^{(c)} \\ x_1^{(c+1)} & \dots & x_c^{(c+1)} & x_j^{(c+1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Designemos por $k_1, k_2, \dots k_{c+1}$, os complementos algebricos dos elementos da ultima columna de $\delta'$. Estes complementos conservam os mesmos valores e os mesmos signaes para qualquer outra columna $j$ de $\alpha$ que esteja representada em $\delta'$, porque são independentes dos elementos d'esta columna e a posição de cada um d'estes elementos é a mesma em todos os determinantes de ordem $c+1$ assim formados. Entre aquelles complementos, o último pelo menos é differente de zero por ser

$$k_{c+1} = \delta.$$

Além d'isto, pelas fórmulas (10), a somma

$$k_1 x'_j + k_2 x''_j + \ldots + k_{c+1} x_j^{(c+1)}, \quad (j = c+1, c+2, \ldots, p)$$

representa o desenvolvimento de qualquer dos determinantes $\delta'$, e é zero porque em todos os casos é $\delta' = 0$. Para os outros valores de $i = 1, 2, \ldots, c$ a mesma expressão é a somma dos productos da multiplicação dos elementos de uma columna pelos complementos algebricos dos elementos correspondentes de outra columna de $\delta'$, e esta somma é ainda egual a zero segundo aquellas fórmulas. Logo será

$$k_1 x'_j + k_2 x''_j + \ldots + k_{c+1} x_j^{(c+1)} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

por conseguinte as primeiras $c+1$ das collecções dadas são linearmente dependentes. D'aqui se segue que todas o são tambem, pelo *Theor.* II do n.º 52.

2.º CASO. O caso de ser $n > p$ reduz-se ao precedente juntando $n-p$ zeros a cada collecção de $p$ constantes. Temos assim $n$ collecções de $n$ constantes cada uma, e na matriz quadrada $\alpha$ ha só um determinante de ordem $n$; este determinante é egual a zero, por ter pelo menos uma columna de zeros. As $n$ collecções são pois linearmente dependentes pelo *Theor.* I, e d'aqui resulta evidentemente que tambem o serão as collecções dadas. Logo:

THEOREMA II. — *São linearmente dependentes* n *collecções de* p *constantes quando é* $n > p$.

**54.** Se forem dados $n$ polynómios $f_1, f_2, \ldots, f_n$ com um numero qualquer de variaveis independentes, a condição necessária e sufficiente da sua dependencia linear consiste em serem linearmente dependentes as $n$ collecções dos seus coefficientes.

Por conseguinte os theoremas demonstrados no n.º anterior são applicaveis áquelles polynómios.

## VII. — **Systemas lineares não homogeneos.**

**55.** Consideremos em primeiro logar o systema linear

$$(1)\quad \begin{cases} F_1 \equiv a_1^1\, x_1 + a_1^2\, x_2 + \ldots + a_1^j\, x_j + \ldots + a_1^n\, x_n - b_1 = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ F_i \equiv a_i^1\, x_1 + a_i^2\, x_2 + \ldots + a_i^j\, x_j + \ldots + a_i^n\, x_n - b_i = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ F_n \equiv a_n^1\, x_1 + a_n^2\, x_2 + \ldots + a_n^j\, x_j + \ldots + a_n^n\, x_n - b_n = 0, \end{cases}$$

em que o numero das equações é egual ao das incógnitas.

Se fôr differente de zero o *determinante do systema*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

isto é, o determinante dos coefficientes das incógnitas, não se annullarão conjunctamente os complementos algebricos $A_1^j, \ldots, A_n^j$ dos elementos da columna $j$ de $\Delta$. Multipliquem-se as equações (1) respectivamente por estes factores, e designe-se por $S_j$ a somma dos productos; será

$$(2)\qquad S_j \equiv A_1^j\, F_1 + A_2^j\, F_2 + \ldots + A_n^j\, F_n = 0,$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Substituindo $F_1, \ldots, F_n$ pelos desenvolvimentos (1) e praticando as reducções, virá

$$S_j = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n - (A_1^j b_1 + A_2^j b_2 + \ldots + A_n^j b_n) = 0$$

e o coefficiente do termo geral $m_i x_i$ será

$$m_i = A_1^j a_1^i + A_2^j a_2^i + \ldots + A_n^j a_n^i.$$

Esta ultima expressão mostra, (10), que é

$$\text{para } i = j, \quad m_j = \Delta,$$
$$\text{para } i \neq j, \quad m_i = 0.$$

Por outra parte

$$A_1^j b_1 + A_2^j b_2 + \ldots + A_n^j b_n$$

é o desenvolvimento de um determinante $\Delta_j$, que se obteria substituindo em $\Delta$ os elementos da columna $j$ pelos termos conhecidos das equações (1), depois de transpostos para o segundo membro.

D'estas considerações se conclue que a equação (2) se reduz a

$$S_j = \Delta x_j - \Delta_j = 0 ;$$

e pondo successivamente $j = 1, 2, \ldots, n$, teremos as $n$ equações

(3) $$\Delta x_1 - \Delta_1 = 0, \ \Delta x_2 - \Delta_2 = 0, \ \ldots, \ \Delta x_n - \Delta_n = 0,$$

das quaes se tira

(4) $$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

por ser $\Delta \neq 0$.

**56.** Dois systemas de equações dizem-se *equivalentes* quando as soluções de cada um d'elles conveem ao outro.

Os systemas (1) e (3) são equivalentes. Com effeito uma solução do systema (1) torna

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0$$

e por conseguinte satifaz a (2) ou, o que é a mesma coisa, a (3).

Reciprocamente, representando por $R_i$ o resultado que se obtem quando na equação $F_i = 0$ se substituem as incógnitas pelos valores (3), teremos a egualdade

$$R_i = a_i^1 \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_i^2 \frac{\Delta_2}{\Delta} + \ldots + a_i^n \frac{\Delta_n}{\Delta} - b_i.$$

Multiplicando ambos os membros por $\Delta$, como é permittido por ser $\Delta \neq 0$, vem

$$\Delta R_i = a_i^1 \Delta_1 + a_i^2 \Delta_2 + \ldots + a_i^n \Delta_n - b_i \Delta.$$

Desenvolvendo agora cada determinante $\Delta_j$ pelos elementos da columna $j$, que são os termos conhecidos das equações (1) depois de transpostos, e praticando as reducções relativamente a estes elementos, teremos

$$\Delta R_i = m_1 b_1 + m_2 b_2 + \ldots + m_n b_n - b_i \Delta.$$

Mas o cofficiente do termo geral $m_j b_j$ d'este desenvolvimento será

$$m_j = a_i^1 A_j^1 + a_i^2 A_j^2 + \ldots + a_i^n A_j^n$$

e esta expressão mostra, (9), que é

$$\text{para } j = i, \; m_i = \Delta,$$

$$\text{para } j \neq i, \; m_j = 0.$$

Por conseguinte o mesmo desenvolvimento reduz-se a

$$\Delta R_i = b_i \Delta - b_i \Delta = 0$$

ou, visto ser $\Delta \neq 0$,

$$R_i = 0$$

e cada uma das equações $F_i = 0$ é satisfeita pela solução (4).

Logo os systemas (1) e (3) são equivalentes e assim:

*Se fôr differente de zero o determinante de um systema de* n *equações do primeiro grau com* n *incógnitas, este systema admitte uma solução e uma só; o valor de cada incógnita será dado por uma fracção, cujo denominador é o determinante do systema e cujo numerador se obtem substituindo no denominador os coefficiente d'essa incógnita pelos termos conhecidos das equações respectivas depois de transpostos.*

A este enunciado dá-se o nome de *regra de Cramer.*

**57.** A equivalencia dos systemas (1) e (3) foi demonstrada para o caso de ser $\Delta \neq 0$. Um exemplo bastará para mostrar que os dois systemas podem deixar de ser equivalentes quando é $\Delta = 0$.

Consideremos as equações

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = 2,$$

$$x + y + z = 3.$$

O determinante d'este systema é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e os determinantes $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ são neste caso

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

As equações (3) tornam-se agora em

$$0.x = 0, \quad 0.y = 0, \quad 0.z = 0$$

e admittem uma infinidade de soluções, emquanto que o systema proposto não admitte, manifestamente, solução alguma.

O caso de ser $\Delta = 0$ está comprehendido no caso geral, que vamos considerar.

**58.** Supponhamos que é dado um systema

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1 \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^p x_p - b_1 = 0, \\ F_2 \equiv a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^p x_p - b_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n \equiv a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^p x_p - b_n = 0 \end{cases}$$

de $n$ equações do primeiro grau com $p$ incógnitas, sendo $n$ e $p$ dois numeros quaesquer inteiros e positivos. Tres casos se podem dar, a saber:

1.° As equações não admittem solução: o systema diz-se *incompativel*.

2.° As equações teem uma solução unica: o systema diz-se *determinado*.

3.° As equações admittem infinitas soluções: o systema diz-se *indeterminado*.

No reconhecimento d'estes casos recorre-se ás matrizes:

$$\alpha = \left\| \begin{matrix} a_1^1 \, a_1^2 \, \ldots \, a_1^p \\ a_2^1 \, a_2^2 \, \ldots \, a_2^p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \, a_n^2 \, \ldots \, a_n^p \end{matrix} \right\|, \quad \beta = \left\| \begin{matrix} a_1^1 \, a_1^2 \, \ldots \, a_1^p \, b_1 \\ a_2^1 \, a_2^2 \, \ldots \, a_2^p \, b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 \, a_n^2 \, \ldots \, a_n^p \, b_n \end{matrix} \right\|.$$

A matriz $\alpha$ é formada com os coefficientes das incognitas, e chama-se *matriz do systema*. A matriz $\beta$ é formada com os mesmos coefficientes e os termos conhecidos das equações (5), e chama-se *matriz completa*. Designando por $f_1, f_2, \ldots, f_n$ os polynomios a que se reduzem os primeiros membros das equações (5) quando se omittem os termos conhecidos, teremos as $n$ identidades:

$$(6) \qquad F_i \equiv f_i - b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

É evidente que a caracteristica de $\alpha$ não pode ser superior á caracteristica $c$ de $\beta$, porque todos os determinantes de $\alpha$ se encontram egualmente em $\beta$. Assim teremos a considerar os dois casos seguintes:

1.° Caracteristica de $\alpha$ menor que $c$;

2.° Caracteristica de $\alpha$ egual a $c$.

1.° Caso. Em $\beta$ hade haver, pelo menos, um determinante $\delta$ de ordem $c$ que seja differente de zero; e em $\delta$ haverá uma columna dos termos conhecidos $b_i$, aliás o mesmo determinante se encontraria em $\alpha$ e a caracteristica de $\alpha$ não seria menor que $c$, contra a hypothese.

Supponhamos que o determinante $\delta$ se encontra nas primeiras $c$ linhas e nas últimas $c$ columnas de $\beta$, isto é, no canto superior da direita d'esta matriz. Não se prejudica d'este modo a generalidade dos resultados, porque aquella disposição se pode sempre obter ordenando convenientemente as equações e as incógnitas que nellas figuram; é evidente que a ordem de umas e outras é indifferente para a questão de que se trata. Os polynómios $f_1, f_2, \ldots, f_c$ serão linearmente dependentes, pois que a caracteristica de $\alpha$ é menor que $c$; e haverá $c$ factores $k_1, k_2, \ldots, k_c$, que não são conjunctamente nullos e verificam a identidade

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_c f_c \equiv 0.$$

D'aqui resulta, por (6), a identidade:

$$k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots + k_c F_c \equiv -(k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_c b_c) = C.$$

Mas, por ser $c$ a caracteristica de $\beta$, os polynomios $F_1, F_2, \ldots, F_c$ são linearmente independentes: donde se conclue que será $C \neq 0$.

Por conseguinte as equações (5) são incompativeis. Se houvesse um systema de valores das incógnitas para o qual se annullassem todas as funcções $F_i$, substituindo esses valores na ultima identidade viria

$$0 = C \neq 0.$$

2.º Caso. Os determinantes da matriz $\beta$, em que entra uma columna de termos conhecidos $b_i$, tomam o nome de *caracteristicos*. Para que as duas matrizes tenham a mesma caracteristica é necessário e sufficiente que se annullem todos os determinantes caracteristicos.

Ora, se fôr $c$ a caracteristica commum de $\alpha$ e de $\beta$, em ambas as matrizes haverá um determinante $\delta$ de ordem $c$ que é differente de zero. Supponhamos, e já se viu que é lícita a hypothese, que $\delta$ é o determinante que occupa o canto superior da esquerda das duas matrizes: á direita da ultima columna de $\delta$ haverá em $\beta$ outras columnas, pelo menos a dos termos conhecidos $b_i$.

Posto isto, junte-se a $\delta$ uma das columnas seguintes de $\beta$ e uma linha qualquer $c+h$; teremos assim um determinante, que é egual a zero por ser de ordem $c+1$. Por conseguinte os polynómios $F_1, \ldots, F_c, F_{c+h}$ são linearmente dependentes, e entre elles existe uma relação da forma

$$k_1 F_1 + k_2 F_2 + \ldots + k_c F_c + k_{c+h} F_{c+h} \equiv 0.$$

Mas os polynómios $F_1, F_2, \ldots, F_c$ são linearmente independentes, porque nas primeiras $c$ linhas de $\beta$ ha pelo menos um determinante differente de zero; por conseguinte será

$$k_1 F_1 + \ldots + k_c F_c \not\equiv 0,$$

e por aqui se vê que hade ser $k_{c+h} \not\equiv 0$, para se poder verificar a última identidade. Podemos portanto dividi-la por esta constante, e assim teremos

$$F_{c+h} \equiv k_1^{(h)} F_1 + k_2^{(h)} F_2 + \ldots + k_c^{(h)} F_c\,, \quad (h=1, 2, \ldots, n-c).$$

Estas identidades mostram que uma solução das $c$ primeiras equações (5) satisfaz neste caso ás restantes $n-c$; consideremos sómente aquellas $c$ equações. Transpondo para o segundo membro os termos conhecidos, bem como os termos que envolvem as incógnitas $x_{c+1}, \ldots, x_p$, demos a estas incógnitas valores arbitrários $x'_{c+1}, \ldots, x'_p$. Os segundos membros das equações

$$(7) \quad \begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_1^c x_c = b_1 - a_1^{c+1} x'_{c+1} - \ldots - a_1^p x'_p, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_c^1 x_1 + \ldots + a_c^c x_c = b_c - a_c^{c+1} x'_{c+1} - \ldots - a_c^p x'_p \end{cases}$$

podem considerar-se conhecidos, e o determinante d'este systema de $c$ equações a $c$ incognitas é, por hypothese, differente de zero.

Por conseguinte a regra de Cramer é applicavel ás equações (7). Assim se achariam para $x_1, \ldots, x_c$ os valores $x'_1, \ldots, x'_c$, os quaes, juntos aos que attribuimos ás outras incógnitas, dão uma solução das $c$ primeiras equações (5) e portanto de todo o systema.

Convém notar que não pode ser $c > p$. Para $c = p$ haverá uma solução ùnica. Para $c < p$ haverá infinitas soluções, visto serem arbitrários os valores attribuidos a $x_{c+1}, \ldots, x_p$.

Da discussão precedente resulta:

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para ser compativel um systema de equações lineares não homogeneas é que a matriz do systema e a matriz completa tenham a mesma caracteristica,* ou *que os determinantes caracteristicos sejam todos eguaes a zero.*

THEOREMA II. — *Dado um systema de equações lineares não homogeneas com* p *incógnitas e tendo a matriz do systema e a matriz completa a mesma caracteristica* c, *podemos dar valores arbitrários a* p — c *incógnitas e as outras ficarão determinadas de um modo único. As* p — c *incógnitas podem ser escolhidas como se quizer, comtanto que seja* c *a caracteristica da matriz dos coefficientes das outras incógnitas.*

**59.** Entre o numero $p$ das incógnitas e o numero $n$ das equações podem dar-se as tres relações seguintes:

1.° $p > n$. Se as duas matrizes teem a mesma caracteristica $c$, hade ser $c = n$ ou $c < n$; em qualquer dos casos podem dar-se valores arbitrários a $p - c$ incógnitas, e o systema é indeterminado.

2.° $p = n$. Se fôr $c = n$, o determinante do systema é differente de zero, a regra de Cramer é applicavel e o systema é determinado. Se fôr $c < n$, o determinante do systema é egual a zero e as equações admittem infinitas soluções quando as duas matrizes teem a mesma caracteristica.

3.° $p < n$. Se as duas matrizes teem a mesma caracteristica $c$, pode ser $c < p$ ou $c = p$. No primeiro caso o systema é indeterminado. No segundo caso, suppondo que a caracteristica da matriz das $c$ primeiras equações é $c$, os valores que estas equações derem para as incógnitas satisfazem ás outras equações e todas ellas teem uma solução única: o systema é determinado.

Em todos os casos o systema é incompativel se as duas matrizes não teem a mesma caracteristica, e esta condição é a primeira que se deve examinar. No exemplo do n.° 57 a caracteristica da matriz do systema é 1 e a da matriz completa é 2, pois que é, por exemplo, o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

O caso $\Delta = 0$ (n.° 57) fica assim esclarecido: o systema é indeterminado quando as duas matrizes teem a mesma caracteristica, e incompativel quando esta condição se não verifica.

Sendo $p < n$, pode acontecer que seja $n = p + 1$ e $c = p$. A caracteristica da matriz completa só poderá ser maior que $p$, se fôr differente de zero o determinante R dos coefficientes das incógnitas e dos termos conhecidos. Por conseguinte, neste caso

$$R = 0$$

será a condição de compatibilidade do systema.

## VIII. — Systemas lineares homogeneos.

**60.** Dizem-se *homogeneas* as equações

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1 \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^p x_p = 0, \\ f_2 \equiv a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^p x_p = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n \equiv a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^p x_p = 0, \end{cases}$$

em que faltam os termos conhecidos. A matriz d'este systema e a matriz completa só differem por uma columna de zeros, e portanto teem a mesma caracteristica que se chama *caracteristica do systema.*

N'este caso os enunciados dos theoremas I e II do n.° 58 teem de ser modificados nos termos seguintes:

THEOREMA I. — *Um systema de equações lineares homogeneas é sempre compativel.*

THEOREMA II. — *Sendo* c *a caracteristica de um systema linear homogeneo com* p *incógnitas, podem-se dar quaesquer valores a* p — c *incógnitas e as outras* c *ficarão determinadas de um modo único.*

Estas $c$ incógnitas hão de ser escolhidas de modo que seja $c$ a caracteristica da matriz dos seus coefficientes. Se fôr $c = p$, o systema só admitte a solução $x_1=x_2=\ldots=x_p=0$. Visto não poder ser $c>p$, temos que:

Theorema III. — *A condição necessária e sufficiente para que um systema de equações lineares homogeneas com* p *incógnitas tenha outra solução além de* $x_1=\ldots=x_p=0$ *é que a sua caracteristica seja menor que* p.

Corollario I. — *Se o numero das equações for menor que o das incógnitas, haverá sempre solução differente de zero.*

Corollario II. — *Se o numero das equações for egual ao das incógnitas, a condição necessária e sufficiente para haver soluções differentes de zero é que o determinante dos coefficientes das incógnitas seja egual a zero.*

**61**. No caso em que o numero das incógnitas excede em uma unidade o numero das equações a matriz do systema (8) é

$$\alpha=\begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^p \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \ldots & a_{p-1}^p \end{Vmatrix},$$

em que o numero das columas excede em uma unidade o numero das linhas. Designemos por $\delta_i$ o determinante de ordem $p-1$, cuja matriz resulta de $\alpha$ pela suppressão da columna $i$. Se as equações consideradas são linearmente independentes, um dos determinantes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ será differente de zero, por ser a caracteristica $c=p-1$.

Seja $\delta_i \neq 0$. Transpondo para o segundo membro em todas as equações o termo em $x^i$ e dando a esta incógnita um valor arbitrário $x_i'$, teremos o systema:

$$a_1^1 x_1+\cdots+a_1^{i-1}x_{i-1}+a_1^{i+1}x_{i+1}+\cdots+a_1^p x_p=-a_1^i x_i',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{p-1}^1 x_1+\cdots+a_{p-1}^{i-1}x_{i-1}+a_{p-1}^{i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{p-1}^p x_p=-a_{p-1}^i x_i'.$$

O determinante d'este systema é differente de zero, e o numero das equações é egual ao das incógnitas. Resolvendo-as pela regra de Cramer, achava-se para cada uma das incógnitas $x_k$ o valor expresso pela fracção

$$x_k = \frac{A}{\delta_i},$$

cujo numerador se forma substituindo em $\delta_i$ os coefficientes de $x_k$, isto é, os elementos da columna $k$ de $a$, pelos termos conhecidos das equações respectivas. Será, pois,

$$A = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{k-1} & -a_1^i x_i' & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{i-1} & a_1^{i+1} & \dots & a_1^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \dots & a_{p-1}^{k-1} & -a_{p-1}^i x_i' & a_{p-1}^{k+1} & \dots & a_{p-1}^{i-1} & a_{p-1}^{i+1} & \dots & a_{p-1}^p \end{vmatrix}.$$

Levando neste determinante a columna $k$ para o logar da columna que falta em $\delta_i$, por meio de $i-k-1$ trocas de columnas, e pondo em evidencia o factor $-x_i'$, commum a todos os elementos da columna $k$, virá

$$A = (-1)^{i-k} x_i' \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{i-1} & a_1^i & a_1^{i+1} & \dots & a_1^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1}^1 & \dots & a_{p-1}^{k-1} & a_{p-1}^{k+1} & \dots & a_{p-1}^{i-1} & a_{p-1}^i & a_{p-1}^{i+1} & \dots & a_{p-1}^p \end{vmatrix}.$$

Este determinante é aquelle mesmo que designámos por $\delta_k$; por conseguinte teremos

$$x_k = \frac{(-1)^{i-k} . x_i' \delta_k}{\delta_i},$$

d'onde se conclue evidentemente que $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ são proporcionaes aos determinantes $[\delta_1, -\delta_2, \ldots, (-1)^{p-1}\delta_p]$.

Se as equações fossem linearmente dependentes, todos estes determinantes seriam eguaes a zero e o caso não offerecia interesse.

## IX. — Numeros incommensuraveis, negativos e complexos.

### § 1.º — Numeros incommensuraveis.

**62.** A arithmetica define as operações ou combinações que se podem praticar com os numeros racionaes positivos, e estuda as propriedades d'estas operações. A classe dos numeros *racionaes* é formada pelos numeros inteiros e pelas fracções cujos termos são numeros inteiros; estes numeros podem ser positivos ou negativos.

A Algebra representa os numeros por letras afim de generalisar os resultados, e define as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas do seguinte modo:

1.º Addição dos numeros representados pelas letras $a$ e $b$ é a combinação *unívoca* d'estes numeros, representada pela notação $a+b$, cujas leis fundamentaes são:

$\alpha$) $a+b=b+a$, *(lei commutativa)*;
$\beta$) $(a+b)+c=(a+c)+b$, *(lei associativa)*;
$\gamma$) $a+0=a$, *(o modulo da somma é zero)*.

2.º Subtracção é a operação inversa da addição.

3.º Multiplicação dos numeros $a$ e $b$ é a combinação unívoca d'estes numeros representada pela notação $a \times b$, ou simplesmente $ab$, e regida pelas seguintes leis fundamentaes:

α) $ab = ba$, *(lei commutativa)*;

β) $(ab)\,c = (ac)\,b$, *(lei associativa)*;

γ) $(a + b)\,c = ac + bc$, *(lei distributiva)*;

δ) $a + 0 = 0$, $a \times 1 = a$, *(o modulo da multiplicação é a unidade)*.

4.° Divisão é a operação inversa da multiplicação.

5.° Potenciação é a multiplicação de factores eguaes.

6.° Radiciação é a operação inversa da potenciação.

O cálculo arithmetico funda-se principalmente nestas leis fundamentaes, na propriedade que teem as operações de darem resultados eguaes quando $a$ e $b$ são substituidos por quantidades eguaes e nas leis fundamentaes das egualdades, a saber: $a = a$; $a = b$, $\therefore b = a$; $a = b$, $b = c$, $\therefore a = c$.

As operações de subtracção e radiciação não são sempre possiveis, emquanto se empregam sómente os numeros racionaes positivos. Para não separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novas classes de numeros e generalisam-se as definições das operações: tendo em vista que se observem as propriedades fundamentaes acima indicadas, e que as novas definições conduzam aos mesmos resultados que as anteriores quando se applicam a numeros racionaes e positivos. É o mesmo que se fez na Arithmetica, quando se generalisou a definição de multiplicação para a tornar applicavel aos numeros fraccionarios. Os numeros *irracionaes* appareceram ainda na Arithmetica, onde foram introduzidos pela operação de radiciação; na Algebra appareceram primeiro os numeros *negativos*, e depois os *imaginários* que occorrem na radiciação dos numeros negativos.

**63.** Antes de definir as operações com os numeros incommensuraveis, vejamos como elles podem ser representados.

Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

e outro grupo de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots;$$

supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores que os do segundo grupo, e que a differença

$$v_n - u_n$$

se pode tornar tão pequena quanto se queira para valores de $n$ sufficientemente grandes.

Se existir um numero racional A maior que todos os numeros do primeiro grupo e menor que os do segundo, esse numero será completamente determinado pelos dois grupos. Com effeito, se houvesse outro numero B naquellas condições, os dois numeros estariam comprehendidos entre $u_n$ e $v_n$, por maior que fosse $n$, e portanto seria

$$|B - A| < v_n - u_n;$$

mas esta desegualdade é incompativel com a condição de se poder tornar a differença $v_n - u_n$ menor que qualquer quantidade assignavel, pois que A e B são dois numeros invariaveis.

Se não existir numero algum racional que satisfaça áquellas condições, diremos, por definição, que os dois grupos estão separados por um numero *irracional*. Como neste caso qualquer numero racional differente dos que formam os dois grupos ha-de ser maior do que um valor de $u_n$ ou menor do que um valor de $v_n$, vê-se que cada numero irracional divide todos os numeros racionaes em dois grupos taes, que os numeros do primeiro grupo são todos menores que os do segundo grupo. Os numeros do primeiro grupo dizem-se *menores* e os do segundo grupo *maiores* do que o numero irracional considerado.

Os dois grupos são denominados *classes contiguas ou de Dedekind*. Dois numeros irracionaes A e B dizem-se *eguaes*, quando todos os numeros racionaes menores que A são tambem menores que B e todos os numeros racionaes maiores que A são tambem maiores que B.

Diz-se que é $A > B$ quando existe algum numero racional menor que A e maior que B.

**64.** Addição. — Sejam A e B dois numeros, racionaes ou irracionaes, determinados pelas classes

$$A \quad \begin{cases} u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \\ v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots, \end{cases}$$

$$B \quad \begin{cases} u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots \\ v'_1, v'_2, \ldots, v'_n, \ldots . \end{cases}$$

Forme-se o grupo de numeros crescentes

$$u_1 + u'_1,\ u_2 + u'_2,\ \ldots.\ u_n + u'_n,\ \ldots$$

e o dos numeros decrescentes

$$v_1 + v'_1,\ v_2 + v'_2,\ \ldots,\ v_n + v'_n,\ \ldots$$

Os numeros do primeiro d'estes grupos são menores que os do segundo, e a differença $(v_n + v'_n) - (u_n + u'_n) = (v_n - u_n) + (v'_n - u'_n)$ pode tornar-se indefinidamente pequena para valores sufficientemente grandes de $n$. Por conseguinte os dois últimos grupos determinam um numero racional ou irracional que os separa, e este numero será a *somma* dos dois A e B.

Esta definição satisfaz aos requisitos exigidos no n.º 62, como vamos ver. Em primeiro logar, se os numeros A e B forem racionaes, aquelles grupos definem o numero racional $A+B$, que os separa.

Depois, por ser

$$u_n + v_n = v_n + u_n\,, \quad u'_n + v'_n = v'_n + u'_n\,,$$

os grupos de numeros que definem $A+B$ são os mesmos que definem $B+A$, donde resulta $A+B=B+A$.

Finalmente tambem seria evidentemente $A+0=A$ e, se forem

$$u''_1\,,\ u''_2\,,\ \ldots,\ u''_n\,,\ \ldots$$
$$v''_1\,,\ v''_2\,,\ \ldots,\ v''_n\,,\ \ldots$$

as classes que definem um terceiro numero C, de

$$(u_n + u'_n) + u''_n = (u_n + u''_n) + u'_n\,,$$
$$(v_n + v'_n) + v''_n = (v_n + v''_n) + v'_n$$

se conclue que será $(A+B)+C=(A+C)+B$.

**65.** Subtracção. — Consideremos os mesmos numeros A e B e supponhamos que é $A>B$. Facilmente se provaria como no caso anterior que as classes

$$\begin{array}{l} u_n - v'_n\,, \\ v_n - u'_n\,, \end{array} \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

determinam um numero racional ou irracional. Digo que este numero é a *differença* $A-B$, isto é, segundo a definição de subtração, a somma do mesmo numero com B é egual a A. Com effeito esta somma é representada pelas duas classes

$$\begin{array}{l} u_n - v_n' + u_n' , \\ v_n - u_n' + v_n' , \end{array} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots);$$

e, sendo $\alpha$ um numero racional qualquer menor do que o numero representado por estas classes, para valores de $n$ sufficientemente grandes teremos

$$\alpha \overline{\overline{<}} u_n - v_n' + u_n' < u_n < A.$$

Do mesmo modo para qualquer numero racional $\beta$ maior do que o numero representado pelas mesmas classes, teremos

$$\beta \overline{\overline{>}} v_n - u_n' + v_n' > v_n > A.$$

Logo pela definição de *egualdade*, as duas classes anteriores ás ultimas duas representam um numero tal, que a somma d'este numero com B é egual a A, ou $(A-B)+B=A$.

**66.** Multiplicação. — Chama-se *producto* da *multiplicação* de A por B ao numero definido pelas duas classes contiguas

$$(u_n \times u_n') , \; (v_n \times v_n') , \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Para justificar esta definição temos de mostrar em primeiro logar que estas duas classes representam um numero racional ou irracional. Com effeito os productos $u_n \times u_n'$ crescem e os productos $v_n \times v_n'$ decrescem quando $n$ cresce indefinidamente. Por outra parte é $v_n v_n' > u_m u_m'$, quaesquer que sejam os numeros $n$ e $m$, e da desegualdade

$$v_n v'_n - u_n u'_n = v_n (v'_n - u'_n) + u'_n (v_n - u_n) < v_1 (v'_n - u_n) + v'_1 (v_n - u_n)$$

resulta que a differença $v_n v'_n - u_n u'_n$ se pode tornar indefinidamente pequena para valores de $n$ sufficientemente grandes.

Seria facil mostrar que o producto, definido d'este modo, satisfaz ás leis fundamentaes da multiplicação.

**67.** Divisão. — Dados os mesmos numeros A e B, é facil ver que os numeros $\frac{u_n}{v'_n}$ crescem com $n$, os numeros $\frac{v_n}{u'_n}$ decrescem nas mesmas circumstancias conservando-se sempre superiores aos primeiros, e finalmente da desegualdade

$$\frac{v_n}{u'_n} - \frac{u_n}{v'_n} = \frac{v_n v'_n - u_n u'_n}{u'_n v'_n} < \frac{v_n v'_n - u_n u'_n}{(u'_1)^2}$$

e da desegualdade anterior resulta que a differença

$$\frac{v_n}{u'_n} - \frac{u_n}{v'_n}$$

se pode tornar indefinidamente pequena para valores sufficientemente grandes de $n$. Logo as duas classes contiguas

$$\begin{matrix} \dfrac{u_n}{v'_n} \\ \dfrac{v_n}{u'_n} \end{matrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

definem um numero racional ou irracional que se chama *quociente* dos numeros A e B.

Com effeito, para justificar esta definição bastará mostrar, segundo a definição da divisão, que o producto d'aquelle numero por B é um numero egual a A. Ora este producto é definido pelas duas classes

$$\left(\frac{u_n}{v'_n} \times u'_n\right), \left(\frac{v_n}{u'_n} \times v'^n\right), \qquad (n=1, 2, 3, \ldots);$$

sendo $\alpha$ um numero racional qualquer menor que o numero representado por estas duas classes, para valores sufficientemente grandes de $n$ teremos

$$\alpha \overline{\overline{<}} \frac{u_n}{v'_n} \times u'_n < u_n < A$$

e, sendo $\beta$ um numero racional qualquer maior que aquelle mesmo numero, teremos para valores sufficientemente grandes de $n$

$$\beta \geqq \frac{v_n}{u'_n} \times v'_n > v_n > A .$$

Logo, pela definição de egualdade, será $\frac{A}{B} \times B = A$.

Da potenciação e radiciação não será necessario tratar especificadamente. A primeira é um caso particular da multiplicação e a segunda é a inversa d'aquella.

As leis fundamentaes das egualdades podem considerar-se axiomaticas, bem como o principio da conservação dos resultados das operações executadas sobre os numeros $a$ e $b$ quando os substituimos por outros eguaes respectivamente a $a$ e a $b$.

**68.** Esta doutrina abrange os numeros irracionaes que se encontraram na Arithmetica por occasião da radiciação dos numeros inteiros.

Assim $\sqrt{A}$, por exemplo, quando não é expressa por um numero racional, representa um numero irracional que separa o grupo de numeros racionaes obtidos quando, na extracção da raiz quadrada pelos processos ensinados na Arithmetica, se leva a approximação successivamente até decimas, centesimas, etc., formando os numeros

$$\frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \ldots, \frac{m_n}{10^n}, \ldots,$$

do grupo de numeros

$$\frac{m_1+1}{10}, \frac{m_2+1}{10^2}, \ldots, \frac{m_n+1}{10^n}, \ldots.$$

Os quadrados dos numeros do primeiro grupo e dos numeros racionaes inferiores a estes são menores que A, e os quadrados dos numeros do segundo grupo e dos numeros racionaes superiores a estes são maiores que A. Por isso $\sqrt{A}$ separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores que A d'aquelles cujos quadrados são maiores que A.

Os grupos de numeros

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \cdots$$

$$\frac{4}{10}, \frac{34}{100}, \frac{334}{1000}, \cdots$$

dão-nos um exemplo de duas classes contíguas separadas por um numero racional, que é neste caso o quebrado $\frac{1}{3}$.

### § 2.º — Numeros negativos.

**69.** A differença $a-b$ é definida na Arithmetica quando é $a>b$. Se fôr $b>a$, aquella subtracção é impraticavel com os numeros considerados no sentido arithmetico; por este motivo se considera aquella differença neste caso como definição de uma nova classe de numeros, a que se dá o nome de *numeros negativos*.

Quando é $a>b$ e $c>d$, os numeros $a-b$ e $c-d$ são eguaes se é

$$a+d=b+c.$$

No caso de ser $a<b$ e $c>d$, os mesmos numeros dizem-se eguaes, por definição, quando esta condição tem lugar.

Diz-se que é $a-b>c-d$ quando se verifica a condição

$$a+d>b+c$$

D'aqui resulta, pondo $a=c=0$, que será $-b>-d$ quando fôr $d>b$; isto é, um numero negativo é tanto menor quanto maior é o seu valor absoluto.

As operações effectuadas com os numeros d'esta nova classe definem-se do modo seguinte:

1.º Chama-se *addição* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)+(c-d)=a+c-(b+d).$$

2.º Chama-se *multiplicação* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)(c-d)=ac+bd-(bc+ad).$$

No caso de ser $a=c=0$ é $-b\times(-d)=bd$.

*Subtracção* e *divisão* são as operações inversas da addição e da multiplicação. *Potenciação* é a multiplicação de factores eguaes.

### § 3.º — Numeros complexos.

**70.** A extracção de raizes de grau par dos numeros negativos é impraticavel com os numeros estudados até agora, e d'aqui vem a necessidade de introduzir no cálculo uma nova classe de numeros para representar aquellas raizes; estes numeros, que se chamam *imaginários* ou *complexos,* são da forma geral $a+bi$, sendo por definição

$$i^2=-1.$$

D'esta expressão resulta que as potencias inteiras de $i$ se reproduzem indefinidamente em periodos de quatro termos differentes, a saber:

$$i^{4n}=+1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$$

Dois imaginarios *puros* $ai$ e $bi$ dizem-se eguaes quando é $a=b$, e reciprocamente. A somma d'estes numeros é definida pela egualdade

$$ai+bi=(a+b)i.$$

Em $a+bi$ o signal $+$ não representa propriamente uma *somma,* porque não é possivel sommar um numero real $a$ com o imaginário $bi$; alguns auctores substituem aquelle signal por um symbolo, que exprime unicamente que o numero é composto de duas partes de especie differente. Por este motivo se dá ao numero $a+bi$ o nome de *complexo.*

Por definição dizem-se eguaes dois numeros complexos $a+bi$ e $c+di$ quando é

$$a=c, \quad b=d;$$

e reciprocamente. As egualdades entre numeros complexos reduzem-se a egualdades entre numeros reaes, e as combinações que se podem fazer com umas tambem se poderão fazer com as outras.

COROLLARIO I. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=\mathrm{c}$, *será* $\mathrm{a}=\mathrm{c}$ *e* $\mathrm{b}=0$. *Aos numeros reaes pode-se dar a forma de complexos.*

COROLLARIO II. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=\mathrm{di}$, *será* $\mathrm{a}=0$ *e* $\mathrm{b}=\mathrm{d}$. *Aos imaginários puros pode-se dar a forma de complexos e* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}$ *é a forma mais geral de todos os numeros.*

COROLLARIO III. — *Se for* $\mathrm{a}+\mathrm{bi}=0$, *será* $\mathrm{a}=\mathrm{b}=0$; *e inversamente.*

**71.** Chama-se *módulo* do complexo $a+bi$ o valor arithmetico de $\sqrt{a^2+b^2}$; portanto o módulo é sempre um numero positivo, e pode, como para os recursos reaes, ser representado pelo symbolo

$$|a+bi| = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dois complexos eguaes teem evidentemente o mesmo módulo. A inversa não é verdadeira; os numeros $3+4i$ e $4+3i$, por exemplo, teem o mesmo módulo e não são eguaes.

Dois complexos da forma $a+bi$ e $a-bi$ dizem-se conjugados e teem módulos eguaes.

Fazendo, como é permittido,

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} = \cos^2 \alpha,$$

teriamos tambem

$$1-\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2}=\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Pondo

$$\rho^2=a^2+b^2,$$

das relações precedentes tira-se

$$(1)\qquad a=\rho\cos\alpha,\quad b=\rho\operatorname{sen}\alpha,$$

e portanto

$$a+bi=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha),$$

que é a *forma trigonometrica* do numero complexo. O angulo $\alpha$ chama-se *argumento* e $\rho$ é, como dissemos, o módulo.

As equações (1) dão para $\alpha$ um só valor menor que $2\pi$. Designando este valor por $\alpha_1$, o argumento pode ter uma infinídade de valores da forma $2k\pi+\alpha_1$, sendo $k$ um numero inteiro, positivo ou negativo. D'aqui resulta, pelas condições de egualdade de dois complexos, que complexos eguaes teem o mesmo módulo, como já se disse; e sendo

$$\rho(\cos\alpha_1+i\operatorname{sen}\alpha_1)=\rho(\cos\alpha_2+i\operatorname{sen}\alpha_2),$$

os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ hão de satisfazer ás condições

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2,\quad \operatorname{sen}\alpha_1=\operatorname{sen}\alpha_2.$$

A recíproca é egualmente verdadeira, e por conseguinte:

*As condições necessarias e sufficientes para dois numeros complexos serem eguaes é que tenham módulos eguaes e que a differença dos argumentos seja um multiplo inteiro de $2\pi$.*

Os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ de dois complexos conjugados hão de satisfazer ás condições

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2, \quad \operatorname{sen}\alpha_1 = -\operatorname{sen}\alpha_2,$$

d'onde resulta $\alpha_2 = 2k\pi - \alpha_1$; por conseguinte:

*Dois complexos conjugados teem o mesmo módulo e a somma dos seus argumentos é um multiplo inteiro de $2\pi$.*

**72.** As operações fundamentaes com numeros complexos definem-se nos termos seguintes:

1.° Addição. — A addição de complexos é definida pela egualdade

$$(2) \qquad (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

O resultado da operação depende unicamente das sommas $a_1 + a_2$ e $b_1 + b_2$ de numeros reaes. Por conseguinte as leis que regem a addição d'estes numeros são applicaveis aos numeros complexos, quando a addição é definida pela egualdade (2).

Se representarmos por $\rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ a somma dos complexos $\rho_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)$ e $\rho_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2)$, por aquella definição teremos

$$\rho\cos\alpha = \rho_1\cos\alpha_1 + \rho_2\cos\alpha_2,$$
$$\rho\operatorname{sen}\alpha = \rho_1\operatorname{sen}\alpha_1 + \rho_2\operatorname{sen}\alpha_2.$$

Elevando estas expressões ao quadrado e sommando os resultados, acha-se

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

D'aqui resulta, auppondo $\rho_1 > \rho_2$, que será

$$\rho = \rho_1 \pm \rho_2$$

quando fôr $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 1$; em todos os outros casos é $\rho < \rho_1 + \rho_2$ e $\rho > \rho_1 - \rho_2$. Logo:

*O módulo da somma não pode ser maior que a somma dos módulos das parallelas.*

Subtracção é a operação inversa da addição, e portanto é

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Com effeito, sommando o segundo membro d'esta egualdade com $a_2 + ib_2$, a somma será $a_1 + ib_1$.

2.° Multiplicação. — A multiplicação de complexos é definida pela egualdade

$$(3) \quad (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Facilmente se veria que neste producto se verificam as leis commutativa, associativa e distributiva da multiplicação, visto que elle depende unicamente do producto de numeros reaes; e bem assim que a unidade é o módulo d'esta operação.

Por outra parte, se um dos factores se annullar, $a_1 + ib_1$ por exemplo, será $a_1 = b_1 = 0$ e o producto tambem é zero. Inversamente, se o producto fôr zero, teremos

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 = 0$$

ou, n.° 48, (13),

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0.$$

D'aqui resulta que hade ser $a_1^2 + b_1^2 = 0$ ou $a_2^2 + b_2^2 = 0$, isto é, um dos factores do producto será nullo.

Se fôr $\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ o producto dos dois numeros complexos

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1), \quad \rho_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2),$$

pela definição (3) e pelas condições de egualdade de complexos teremos

$$\rho \cos \alpha = \rho_1\rho_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) = \rho_1\rho_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$\rho \operatorname{sen} \alpha = \rho_1\rho_2 (\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1) = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2).$$

D'aqui resulta que será

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2;$$

para maior numero de factores, cujos módulos fossem $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ e os argumentos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ teriamos do mesmo modo que o módulo $\rho$ e o argumento $\alpha$ po producto seriam

$$(4) \qquad \rho = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_i, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i.$$

Logo:

*O módulo e o argumento do producto são respectivamente o producto dos módulos e a somma dos argumentos dos factores.*

No caso de dois imaginários conjugados, que tenham o módulo commum $\rho_1$ e os argumentos $\alpha_1$ e $\alpha_2$, será (n.º 71) $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ e portanto

$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) \times \rho_1 (\cos \alpha_1 - i \operatorname{sen} \alpha_1) = \rho_1^2.$$

*O producto de dois imaginários conjugados é egual ao quadrado do módulo commum.*

**73.** A potencia do expoente inteiro e positivo $n$ é o caso particular do producto quando são eguaes os factores. Logo (4)

$$[\rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \rho^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha).$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de *fórmula de Moivre.*

Por definição de expoente negativo é

$$[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{-n}=\frac{1}{[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{n}}.$$

Sendo $n$ inteiro, a fórmula de Moivre é applicavel ao segundo membro d'esta egualdade, que se torna em

$$\frac{1}{\rho^{n}(\cos n\alpha+i\operatorname{sen}n\alpha)}=\rho^{-n}\cdot\frac{1}{\cos n\alpha+i\operatorname{sen}n\alpha};$$

multiplicando ambos os termos d'esta fracção por $\cos n\alpha-i\operatorname{sen}n\alpha$ e attendendo ao último theorema do n.° 72, acha-se finalmente

$$\begin{aligned}[\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)]^{-n}&=\rho^{-n}(\cos n\alpha-i\operatorname{sen}n\alpha)\\&=\rho^{-n}[\cos(-n\alpha)+i\operatorname{sen}(-n\alpha)].\end{aligned}$$

D'este modo se vê que a fórmula de Moivre ainda é applicavel ao caso do expoente inteiro e negativo.

Por definição, a raiz do grau $n$ de um numero $\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ é o numero $r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ definido pela egualdade

$$[r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)]^{n}=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$$

ou, visto $n$ ser inteiro,

$$r^{n}(\cos n\varphi+i\operatorname{sen}n\varphi)=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha).$$

D'aqui resultam, pelas condições de egualdade de dois numeros complexos, as relações

$$r^{n}=\rho,\quad n\varphi=2k\pi+\alpha,$$

isto é

$$r=\sqrt[n]{\rho},\quad \varphi=\frac{2k\pi+\alpha}{n},$$

onde $k$ é um inteiro qualquer e $\sqrt[n]{\rho}$ exprime o numero determinado arithmeticamente pela extracção da raiz de grau $n$ do numero $\rho$.

A forma do argumento $\varphi$ mostra que a raiz de grau $n$

de um numero dado não tem um valor único. Usando do expoente fraccionario para indicar todos os valores possiveis da raiz, das expressões precedentes deduz-se

$$(5)\qquad [\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi+\alpha}{n}\right)$$

ou, pela definição de multiplicação de complexos,

$$(6)\qquad [\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Pondo $\rho = 1$ e $\alpha = 0$ em (5), teremos

$$(7)\qquad 1^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

e esta expressão dará todas as raizes de grau $n$ da unidade. O numero d'ellas é $n$ e são todas *deseguaes*. Com effeito, quando se substituem por $k$ todos os numeros inteiros, os valores do segundo membro de (7) reproduzem-se indefinidamente em períodos de $n$ termos, os quaes correspondem a $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; estes termos são todos differentes, porque desde 0 até 360° não se encontram dois angulos que tenham conjuntamente o mesmo seno e o mesmo coseno.

A presença do factor (7) em (6) mostra que a multiplicidade das raizes do grau $n$ de um numero é devida á multiplicidade das raizes da unidade. Para $k = 0$ viria

$$[\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}\right).$$

Por conseguinte a fórmula de Moivre ainda tem logar para expoentes fraccionarios, quando nos limitamos á raiz correspondente a $\sqrt[n]{1} = 1$.

Dando a $k$ os valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$, os valores dos argumentos que correspondem em (5) a todas as raizes differentes do numero dado são

$$(8) \qquad \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{2\pi+\alpha}{n}, \quad \frac{2.2\pi+\alpha}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(n-1).2\pi+\alpha}{n};$$

e procedem numa progressão arithmetica, cuja razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Estes argumentos só dão valores reaes para a raiz quando é

$$(9) \qquad \frac{2k\pi+\alpha}{n}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{2k\pi+\alpha}{n}=\pi.$$

A primeira d'estas condições só pode verificar-se com $\alpha=0$ e $k=0$; para ter logar a segunda pode ser $\alpha=0$ com $n=2k$, ou $\alpha=\pi$ com $n=2k+1$. D'aqui resultam as seguintes consequencias:

1.ª Se o numero dado é *imaginário*, não pode ser $\alpha=0$ nem $\alpha=\pi$ e as raizes são todas imaginárias.

2.ª Se o numero é real e positivo, é $\alpha=0$. No caso de $n$ ser par, ambas as condições (9) se verificam e ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa. No caso de $n$ ser ímpar, a segunda condição não se pode verificar e ha só uma raiz real, que é positiva. Em ambos os casos as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas porque, pondo de parte o primeiro termo da progressão (8), nos outros a somma de dois equidistantes dos extremos é egual á somma $2\pi$ dos mesmos extremos, visto ser agora $\alpha=0$; para $n$ par o termo médio é $\pi$, e dá a raiz negativa.

3.ª Se o numero dado fôr real e negativo, será $\alpha=\pi$ e neste caso não pode verificar-se a primeira condição (9). Para $n$ par não ha raiz real, e para $n$ ímpar ha uma raiz real negativa cujo argumento $\pi$ é o termo medio de (8). Em ambos os casos as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas.

*Exemplo:* seja $x=8^{\frac{1}{3}}$, donde $\rho=8$, $\sqrt[3]{\rho}=2$ e $\alpha=0$. Os argumentos (8) são agora

$$0, \quad 120^\circ, \quad 240^\circ;$$

mas sabemos que

$$\operatorname{sen} 120^\circ = -\operatorname{sen} 240^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 120^\circ = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Logo as tres raizes cúbicas de 8 serão 2 e $-1 \pm i\sqrt{3}$.

**74.** Gauss imaginou uma representação geometrica da variavel imaginária $z=x+iy$, considerando as variaveis reaes $x$ e $y$ como coordenadas orthogonaes de um ponto M do plano, que tem o nome de *affixo*. É claro que, dado este ponto, o imaginário fica determinado, e inversamente.

A distancia do affixo á *origem*, isto é, á intersecção dos eixos coordenados, chama-se *vector* e considera-se sempre positiva. Por outra parte esta distancia é egual a $\sqrt{x^2+y^2}$, e portanto o vector do affixo é o módulo do imaginário.

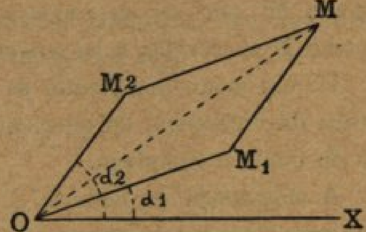
Alem d'isto, designando por $\varphi$ o angulo que faz o vector com o eixo dos $x$ e sendo o módulo $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$, teremos

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\operatorname{sen}\varphi;$$

portanto $\varphi$ será o argumento do imaginário $z$. Este angulo conta-se desde 0 até 360°, a partir do eixo dos $x$ positivos.

Os affixos de dois imaginários conjugados são pontos symetricos relativamente ao eixo dos $x$. Se em $\rho(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$ fizermos $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ou $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ e $\rho=1$, virá $z=\pm i$. Assim, $+i$ e $-i$ representam direcções oppostas, perpendiculares ao eixo dos $x$, do mesmo modo que os signaes + e —, applicados ás quantidades reaes, designam direcções oppostas, contadas sobre o mesmo eixo. As direcções intermédias são definidas pelo factor $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$, que desempenha o papel de um signal directivo.

A somma dos complexos




$$\rho_1 (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1),$$
$$\rho_2 (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$$

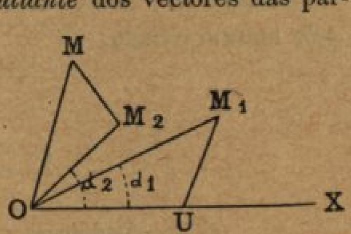
pode representar-se geometricamente do modo seguinte. Sejam $M_1$ e $M_2$ os affixos das duas parcellas, e tirem-se os vectores $OM_1$ e $OM_2$. Construam-se $M_1M$ e $M_2M$ respectivamente parallelas a $OM_2$ e $OM_1$. A intersecção M das rectas $M_1M$ e $M_2M$ será o affixo da somma d'aquelles numeros, por isso que, sendo

$$(\rho_1 \cos \alpha_1, \ \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1) \quad \text{e} \quad (\rho_2 \cos \alpha_2, \ \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2)$$

as coordenadas dos pontos $M_1$ e $M_2$, as do ponto M são evidentemente

$$(\rho_1 \cos \alpha_1 + \rho_2 \cos \alpha_2, \ \rho_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{sen} \alpha_2).$$

O vector OM da somma é a *resultante* dos vectores das parcellas.




Consideremos ainda os numeros complexos cujos affixos são $M_1$ e $M_2$. Tome-se em OX o comprimento OU igual á unidade, e tirem-se as rectas $M_2M$ e OM que fazem com $OM_2$ os angulos $MOM_2 = \alpha_1$, e $OM_2M = OUM_1$. A intersecção M d'estas rectas é o affixo do producto d'aquelles dois numeros.

Com effeito, sendo $UOM_1 = \alpha_1$ e $UOM_2 = \alpha_2$, será $UOM = \alpha_1 + \alpha_2$

o argumento do producto. Da semelhança dos triangulos $OUM_1$ e $OM_2M$ resulta a proporção $OM : OM_2 = OM_1 : OU$ e, sendo $OM_1 = \rho_1$, $OM_2 = \rho_2$ e $OU = 1$, será $OM = \rho_1\rho_2$ o modulo do producto. A troca dos pontos $M_1$ e $M_2$ conduziria ao mesmo ponto M, por ser $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1$ e $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$, e assim no ponto M se verifica a lei commutativa da multiplicação.

De um modo semelhante se obteria a representação geometrica da differença, do quociente, da potencia e da raiz de grau $n$ do numero complexo.

A *vizinhança* do numero $A = a + ib$ compõe-se de todos os numeros $z = x + iy$ que verificam a desigualdade

$$|z - A| < \delta,$$

sendo $\delta$ um numero positivo dado. Mas é

$$|z - A| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

e o segundo membro d'esta expressão representa, como é sabido, a distancia dos affixos dos numeros A e $z$. D'aqui resulta que aquella vizinhança se compõe de todos os pontos interiores ao circulo descripto com o centro no affixo de A e o raio $\delta$.

O campo de variabilidade da variavel imaginária $z$ é definido pelo mesmo circulo.

## X. — Limites.

### § 1.º — Definições e principios fundamentaes.

**75.** A successão de uma infinidade de numeros

(1) $$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

chama-se *determinada* quando, dado um valor do indice $n$, o elemento correspondente $u_n$ fica inteiramente determinado.

Diz-se que a successão determinada (1) admite um *limite* $a$, ou *tende* para o *limite* $a$, quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$, é possivel determinar um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Isto mesmo se exprime escrevendo

$$\lim_{n=\infty} u_n = a,$$

ou simplesmente $\lim u_n = a$, subentendendo as palavras *para* $n = \infty$.

EXEMPLOS: 1.º Os numeros

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ldots$$

decrescem indefinidamente e, dando a $n$ valores sufficientemente grandes, a differença entre $\frac{1}{n}$ e zero pode tornar-se tão pequena quanto se quizer. Logo:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.º Consideremos a succesão

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \ldots, \ \frac{1+n}{2+n} \ldots;$$

a differença

$$1 - \frac{1+n}{2+n} = \frac{1}{2+n}$$

pode tornar-se menor que qualquer quantidade assignavel para valores de $n$ sufficientemente grandes. Logo:

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{1+n}{2+n} = 1.$$

3.º Designemos por $x$ um numero tal, que seja $|x| < 1$. Pondo

$$|x| = \frac{1}{1+h},$$

será $h$ um numero positivo e teremos

$$|x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\ldots} < \frac{1}{1+nh}.$$

Dando a $n$ valores que satisfaçam á condição

$$\frac{1}{1+nh} < \varepsilon,$$

sendo $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena, ou

$$n > \frac{1-\varepsilon}{h\varepsilon},$$

virá $|x|^n < \varepsilon$. Logo:

$$\lim . |x|^n = 0$$

**76**. A variavel $u$ que passa successivamente pelos valores (1) não pode convergir conjunctamente para dois limites differentes $a$ e $b$.

Com effeito, se $u$ tende para o limite $a$, dada a quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$ hade existir um numero $n_1$

tal, que seja

$$|u_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_1$. Mas, se a mesma variavel tende para o limite $b$, hade existir um numero $n_2$ tal, que seja

$$|u_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_2$. Logo a condição

$$|a-b| = |(a-u_n)+(u_n-b)| \overline{\gtreqless} |u_n - a| + |u_n - b| < \varepsilon$$

seria satisfeita para todos os valores de $n$ superiores ao maior dos numeros $n_1$ e $n_2$; e esta desegualdade não pode verificar-se, sendo $a \gtrless b$, por isso que $|a-b|$ é uma quantidade constante e $\varepsilon$ é uma quantidade arbitrariamente pequena.

**77.** Se os valores da variavel $u$ estam sempre comprehendidos entre os valores correspondentes de duas variaveis $t$ e $v$ que tendem ambas para o mesmo limite $a$, existe para $u$ um limite que é o mesmo $a$.

Com effeito, tendendo $t$ e $v$ para o limite $a$, ao numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$ hade corresponder um numero $n_1$ tal, que será

$$|t_n - a| < \varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_1$; e outro numero $n_2$ tal, que será tambem

$$|v_n - a| < \varepsilon$$

para todos os valores de $n > n_2$. Por conseguinte as duas últimas desigualdades hão de ser satisfeitas para todos os valores de $n$ superiores ao maior dos numeros $n_1$ e $n_2$; mas pela hypothese a differença $u_n - a$ está comprehendida entre $t_n - a$ e $v_n - a$, e d'aqui resulta que $|u_n - a|$ será inferior a um dos numeros $|t_n - a|$ e $|v_n - a|$. Logo será para aquelles valores de $n$

$$|u_n - a| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim u_n = a$.

**78.** Se os elementos da succession determinada (1) se conservam sempre inferiores a um numero dado $k$, a variavel $u$ não pode tender para um limite superior a $k$.

Com effeito, pela hypothese será

$$a - u_n > a - k;$$

por conseguinte, para $a > k$ não poderá verificar-se a desigualdade

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

quando dermos a $\varepsilon$ valores inferiores a $a - k$.

Do mesmo modo, se os elementos da successão (1) se conservam sempre superiores a um numero dado $k$, a variavel $u$ não pode tender para um limite inferior a $k$.

Com effeito, pela hypothese será

$$u_n - a > k - a;$$

por conseguinte, para $a < k$ não poderia verificar-se a desigualdade

$$|u_n - a| < \varepsilon$$

quando dessemos a $\varepsilon$ valores inferiores a $k - a$.

**79.** Para ter um criterio por onde se possa reconhecer se a successão (1) admitte um limite, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. — *A condição necessária e sufficiente para que uma successão determinada de infinitos numeros*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

*admitta um limite é que, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena* $\varepsilon$, *exista um valor finito* $n_1$ *tal, que seja*

$$|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon \tag{2}$$

*para todos os valores de* $n > n_1$ *conjunctamente com todos os valores inteiros e positivos de* $k = 1, 2, 3 \ldots$

Em outros termos: a condição necessária e sufficiente para a existencia do limite é que, passada uma certa ordem, a differença entre um termo da successão e qualquer dos seguintes tenda para o limite zero. Começaremos por demonstrar que a condição é necessária, e depois veremos que ella tambem é sufficiente.

I. — Supponhamos que a variavel $u$ tende para um limite $a$. Neste caso, a um numero positivo arbitrariamente pequeno $\varepsilon$ hade corresponder um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$|u_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon;$$

e para os mesmos valores de $n$ será tambem

$$|u_{n+k} - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'estas duas desigualdades resulta a seguinte

$$|u_n - a| + |a - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

e portanto

$$|(u_n - a) + (a - u_{n+k})| \overline{\overline{<}} |u_n - a| + |a - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

isto é,

$$|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon,$$

que é a condição (2). Logo esta condição é necessária.

II. — Supponhamos que a cada quantidade positiva arbitrariamente pequena $\varepsilon$ corresponde um numero tal, que para todos os valores de $n$ superiores a este numero seja

$$|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Imaginemos uma successão de quantidades positivas, decrescentes e differentes de zero

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

de modo que seja $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$; esta condição pode realizar-se por muitos modos, e um d'elles seria, por exemplo, fazer $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

Para qualquer d'estas quantidades $\varepsilon_i$ haverá um numero $n_i$ tal, que seja

$$(3) \qquad |u_{n_i+k} - u_{n_i}| < \varepsilon_i.$$

Assim teremos, em correspondencia com os numeros $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3, \ldots$, outros tantos numeros $n_1, n_2, n_3, \ldots$ com os quaes se verificam as desigualdades

$$\begin{array}{ll} |u_{n_1+k} - u_{n_1}| < \varepsilon_1, & \\ |u_{n_2+k} - u_{n_2}| < \varepsilon_2, & (k = 1, 2, 3, \ldots). \\ |u_{n_3+k} - u_{n_3}| < \varepsilon_3, & \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

Posto isto, consideremos a classe formada com os numeros

$$u_{n_1}-\varepsilon_1,\quad u_{n_2}-\varepsilon_2,\ \ldots,\quad u_{n_i}-\varepsilon_i,\ \ldots$$

e a classe formada com os numeros

$$u_{n_1}+\varepsilon_1,\quad u_{n_2}+\varepsilon_2,\quad \ldots,\quad u_{n_i}+\varepsilon_i,\ \ldots$$

Para mostrar que estas duas classes determinam um numero $a$, devemos demonstrar em primeiro logar que, sendo $u_{n_i}-\varepsilon_i$ um elemento de primeira classe e $u_{n_j}+\varepsilon_j$ um elemento da segunda classe, será

$$u_{n_i}-\varepsilon_i<u_{n_j}+\varepsilon_j$$

ou, em outros termos,

$$u_{n_i}-u_{n_j}<\varepsilon_i+\varepsilon_j.$$

Ora de (3) resulta, no caso de ser $n_j>n_i$,

$$|u_{n_i}-u_{n_j}|<\varepsilon_i$$

e, no caso de ser $n_i>n_j$,

$$|u_{n_i}-u_{n_j}|<\varepsilon_j;$$

d'onde se conclue que em qualquer dos casos será

$$|u_{n_i}-u_{n_j}|<\varepsilon_i+\varepsilon_j$$

e, por maioria de razão,

$$u_{n_i}-u_{n_j}<\varepsilon_i+\varepsilon_j.$$

Em segundo logar temos de provar que a differença

$$(u_{n_j} + \varepsilon_j) - (u_{n_i} + \varepsilon_i)$$

se pode tornar tão pequena quanto se quizer para valores convenientes de $i$ e $j$. E com effeito, para isso bastará fazer $i=j$, pois que aquella differença se reduz então a $2\varepsilon_i$ e por definição esta quantidade pode-se tornar indefinidamente pequena para valores crescentes de $i$.

O numero $a$ determinado por aquellas duas classes é o limite da successão considerada, como vamos ver.

Este numero é maior que todos os da primeira classe e menor que todos os da segunda classe, ou

$$u_{n_i} - \varepsilon_i < a < u_{n_i} + \varepsilon_i.$$

Mudando os signaes a todos os membros d'estas desigualdades, teremos

$$-u_{n_i} + \varepsilon_i > -a > -u_{n_i} - \varepsilon_i.$$

Além d'isto, a desigualdade (3) desdobra-se, como é sabido (n.º 18), nas duas

$$u_{n_i} + \varepsilon_i > u_{n_i+k} > u_{n_i} - \varepsilon_i;$$

e sommando membro a membro estas desigualdades e as precedentes, acham-se as seguintes

$$2\varepsilon_i > u_{n_i+k} - a > -2\varepsilon_i,$$

isto é,

$$|u_{n_i+k} - a| < 2\varepsilon_i$$

Bastará, pois, dar a $n$ um valor maior que $n_i$ para que seja

$$|u_n - a| < 2\varepsilon_i$$

e esta condição exprime que $\lim\limits_{n=\infty} u_n = a$.

**80.** *Uma successão de infinitos numeros* $u_n$ *positivos e crescentes, mas que não podem tornar-se infinitamente grandes quando o índice* n *cresce indefinidamente, admitte sempre um limite determinado.*

Supponhamos que os elementos da successão (1) satisfazem ás condições

$$(4) \qquad u_1 \overline{\overline{<}} u_2 \overline{\overline{<}} u_3 \overline{\overline{<}} u_4 \ldots$$

Se estes numeros não podem tornar-se infinitamente grandes, haverá um numero positivo $k$ tal, que seja sempre

$$u_n < k$$

por maior que seja $n$.

Designemos por $\varepsilon$ uma quantidade positiva arbitrariamente pequena e differente de zero, e imaginemos a progressão arithmetica

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots$$

Por meio d'esta progressão o intervallo de 0 a $k$ ficará dividido em outros mais pequenos, cujo numero é finito, sendo o primeiro de 0 a $\varepsilon$ e o último de $m\varepsilon$, por exemplo, a $k$. Supponhamos que é conhecido entre estes intervallos o último em que se podem encontrar elementos da successão dada; esse intervallo pode ser o último de todos, mas diremos de um modo geral que elle está comprehendido entre $\mu\varepsilon$ e $(\mu+1)\varepsilon$. Se $u_i$ fôr um elemento comprehendido entre estes extremos, pela hypothese todos os numeros $u_{i+1}$, $u_{i+2}, \ldots$ serão inferiores a $(\mu+1)\varepsilon$. Mas pela condição (4) estes numeros serão superiores ou pelo menos eguaes a $u_i$, e portanto todos elles estão contidos, assim como $u_i$, no intervallo de $\mu\varepsilon$ a $(\mu+1)\varepsilon$. D'aqui se conclue evidentemente que é

$$|u_i - u_{i+k}| < \varepsilon, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

e assim fica verificada, pelo theorema do numero anterior, a condição necessária e sufficiente da existencia do limite.

**81.** Se, crescendo $n$ indefinidamente, o numero $u_n$ chega a tornar-se e se conserva maior que qualquer quantidade assignavel, diz-se que $u_n$ tende para o infinito e escreve-se

$$\lim_{n=\infty} u_n = \infty .$$

Além d'isto, se o numero $u_n$, crescendo $n$, acaba por conservar sempre o mesmo signal, positivo ou negativo, diz-se então que $u_n$ tende respectivamente para o infinito positivo ou negativo, e escreve-se no primeiro caso

$$\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$$

e no segundo caso

$$\lim_{n=\infty} u_n = -\infty .$$

### § 2.º — Operações com limites finitos.

**82.** ADDIÇÃO.— *Se as variaveis* $u_n$ *e* $v_n$ *tendem respectivamente para os limites finitos* a *e* b, *o limite da somma* $u_n + v_n$ *existe e é egual a* $a + b$.

Pela hypothese e segundo a definição de limite, á quantidade positiva e arbitrariamente pequena $\varepsilon$ corresponderá um numero $n_1$ tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja

$$| u_n - a | < \frac{1}{2} \varepsilon .$$

Ao mesmo valor de $\varepsilon$ corresponderá um numero $n_2$ tal, que