

para todos os valores de $n > n_2$ seja

$$|v_n - b| < \frac{1}{2} \varepsilon;$$

e portanto para todos os valores de n superiores ao maior dos numeros n_1 e n_2 hão de verificar-se as duas últimas desigualdades, bem como a seguinte que d'ellas se deduz:

$$|u_n - a| + |v_n - b| < \varepsilon.$$

Mas

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| = |(u_n - a) + (v_n - b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b|;$$

d'aqui resulta a desigualdade

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

que traduz o theorema enunciado. Por um raciocinio semelhante se provaria que $\lim (u_n - v_n) = a - b$.

83. MULTIPLICAÇÃO. — *Se as variaveis u_n e v_n tendem respectivamente para os limites finitos a e b , o limite do producto $u_n \times v_n$ existe e é igual a ab .*

Pela hypothese e segundo a definição de limite, para valores de n sufficientemente grandes será

$$\begin{aligned} |u_n - a| &< \theta, \\ |v_n - b| &< \theta, \end{aligned}$$

por menor que seja a quantidade arbitraria e positiva θ . Ora temos

$$\begin{aligned} |(u_n v_n) - (ab)| &= |u_n(v_n - b) + b(u_n - a)| \\ &\leq |u_n| \cdot |v_n - b| + |b| \cdot |u_n - a|, \end{aligned}$$

segundo os theoremas sobre o módulo da somma e do producto.

Por outra parte é

$$|u_n| = |a + (u_n - a)| \leq |a| + |u_n - a|;$$

e assim a relação precedente, combinada com as duas desigualdades anteriores, torna-se em

$$|(u_n v_n) - (ab)| < (|a| + |b|) \theta + \theta^2.$$

Dada a quantidade positiva e arbitrariamente pequena ε , pode-se determinar a arbitrária θ de modo que, para valores de n sufficientemente grandes, o segundo membro d'esta desigualdade seja menor que ε . Bastará substituir θ pelo menor dos numeros

$$\theta < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|a| + |b|}, \quad \theta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

se $|a|$ e $|b|$ não são ambos nullos, ou simplesmente sujeitar θ á condição de ser

$$\theta < \sqrt{\varepsilon}$$

se fôr $|a| = |b| = 0$. De qualquer dos modos virá

$$|(u_n v_n) - (ab)| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim (u_n v_n) = ab.$$

Este resultado generalisa-se claramente para o caso de qualquer numero finito de factores, e por conseguinte para o caso da potencia de expoente inteiro e positivo.

84. DIVISÃO. — *Se as quantidades u_n e v_n admitem res-*

pectivamente os limites a e $b \neq 0$, o limite do quociente $u_n : v_n$ existe e é

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}.$$

Começaremos por demonstrar que nestas circumstancias o limite do quociente $\frac{1}{v_n}$ existe e é $\frac{1}{b}$. Com effeito, sendo $b \neq 0$, é

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - b}{bv_n} = (v_n - b) \times \frac{1}{bv_n};$$

e pela definição de limite haverá um numero n_1 tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja $|v_n - b| < \theta$, por menor que seja a quantidade positiva e arbitrariamente pequena θ .

Mas o factor $\frac{1}{bv_n}$ conserva-se finito. Designando por M um numero superior ao maior dos valores que este factor possa ter, virá

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} \right| < M\theta$$

e por conseguinte, dada uma quantidade positiva e arbitrariamente pequena ε e determinando θ pela condição de ser $M\theta < \varepsilon$, teremos

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{v_n} \right| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$.

Posto isto, de ser

$$\lim u_n = a, \quad \lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$$

conclue-se pelo theorema do numero anterior que é

$$\lim \left(u_n \times \frac{1}{v_n} \right) = a \times \frac{1}{b},$$

isto é, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

85. POTENCIAS. — *Se fôr a um numero racional e u_n uma variavel que tende para o limite a , o limite da potencia a de u_n existe e é igual á potencia a de a .*

Consideremos em primeiro logar o caso de ser $a = \frac{1}{q}$, q um numero inteiro e $\lim u_n = 1$. Conforme o valor dado a n poderá ser $u_n > 1$ ou $u_n < 1$. Será no primeiro caso

$$1 \leq \sqrt[q]{u_n} \leq u_n,$$

e no segundo caso

$$1 \geq \sqrt[q]{u_n} \geq u_n.$$

D'aqui se segue em qualquer caso que o numero $\sqrt[q]{u_n}$ está comprehendido entre os dois 1 e u_n , que teem o mesmo limite 1. Logo (n.º 77) será

$$\lim \sqrt[q]{u_n} = 1.$$

Posto isto, sejam p e q dois numeros inteiros e $a = \frac{p}{q}$: teremos

$$u_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \left(\frac{u_n}{a} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Mas, por ser

$$\lim \frac{u_n}{a} = 1,$$

é também, como acabamos de ver,

$$\lim \left(\frac{u_n}{a} \right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

D'aqui resulta, pelos theoremas sobre limites do producto e da potencia de expoente inteiro e positivo, que é

$$\lim \left(\frac{u_n}{a} \right)^{\frac{p}{q}} = 1$$

e, pela expressão precedente de $u_n^{\frac{p}{q}}$,

$$\lim u_n^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Se a fosse negativo, recahiriamos no caso do expoente positivo por meio do theorema do quociente.

§ 2.º — Infinitamente pequenos.

86. DEFINIÇÃO. — Diz-se que u_n é um infinitamente pequeno ou um infinitesimo quando, dada a quantidade positiva e arbitrariamente pequena ε , se pode determinar um numero n_1 tal, que para todos os valores de $n > n_1$ seja $|u_n| < \varepsilon$.

Em outros termos: *infinitesimo* é a quantidade variavel que tende para o limite zero.

O infinitamente pequeno pode depender de outro, que se chama *principal*. Assim, $\lim_{\alpha=0} \operatorname{sen} \alpha = 0$; no limite, $\operatorname{sen} \alpha$ é um infinitamente pequeno e o infinitamente pequeno principal é o arco α .

87. Supponhamos que α e β são dois infinitamente pequenos que dependem do mesmo principal. Tres casos se podem dar:

1) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$: diz-se então que β é um infinitamente pequeno de *ordem superior* a α .

2) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k \neq 0$: o infinitamente pequeno β é da *mesma ordem* que α .

3) $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$: o infinitamente pequeno β é de *ordem inferior* a α .

Quando β e α são da mesma ordem, de ser $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k$ conclue-se que será

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon$$

ou $\beta = k\alpha + \alpha\varepsilon$, sendo ε infinitamente pequeno com α . Por aqui se vê que um infinitamente pequeno β se compõe de duas partes: uma é $k\alpha$, que se chama termo *principal* e é da mesma ordem que α por ser $\lim \frac{k\alpha}{\alpha} = k \neq 0$; a outra $\alpha\varepsilon$ é de ordem superior a α , por ser $\lim \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha} = \lim \varepsilon = 0$.

88: Qualquer potencia de α , de expoente inteiro e positivo $i > 1$, é um infinitamente pequeno de ordem superior a α por ser $\lim \frac{\alpha^i}{\alpha} = \lim \alpha^{i-1} = 0$.

Diremos que α^i é de ordem i relativamente a α ; e β será um infinitamente pequeno de ordem n relativamente a α se fôr

$\lim_{\alpha=0} \frac{\beta}{\alpha^n} = k \neq 0$, porque então β é da mesma ordem que α^n .

Se dois infinitamente pequenos β e β' são respectivamente de

ordem h e de ordem n relativamente ao principal α , o producto $\beta \beta'$ será de ordem $h + n$ relativamente ao mesmo α . Com effeito, das condições

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^h} = k \neq 0, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = k' \neq 0$$

deduz-se que será

$$\lim \frac{\beta \beta'}{\alpha^{h+n}} = \lim \frac{\beta}{\alpha^h} \times \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = kk' \neq 0:$$

por onde se vê que $\beta \beta'$ é de ordem $h + n$.

O quociente dos mesmos infinitamente pequenos é de ordem $h - n$. Com effeito de

$$\beta = \alpha^h (k + \varepsilon), \quad \beta' = \alpha^n (k' + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\frac{\beta}{\beta'} = \alpha^{h-n} \cdot \frac{k + \varepsilon}{k' + \varepsilon'}$$

e portanto

$$\lim \frac{\beta}{\beta'} = \frac{k}{k'} \neq 0.$$

Se fôr α o infinitamente pequeno principal, β um infinitamente pequeno de ordem h relativamente a β' e β' um infinitamente pequeno de ordem n relativamente ao principal, β será de ordem hn relativamente a α .

Com effeito, das condições

$$\lim \frac{\beta}{\beta'^h} = k \neq 0, \quad \lim \frac{\beta'}{\alpha^n} = k' \neq 0,$$

resulta que será

$$\beta = \beta'^h (k + \varepsilon), \quad \beta' = \alpha^n (k' + \varepsilon')$$

e portanto, visto que h e n são numeros inteiros e positivos,

$$\beta = \alpha^{nh} (k + \varepsilon) (k' + \varepsilon')^h = \alpha^{nh} (k k'^h + \delta),$$

sendo δ infinitamente pequeno com α . Logo:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{nh}} = k k'^h \neq 0.$$

89. Se dois infinitamente pequenos α e β estiverem ligados com outros dois α' e β' de modo que seja

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \quad \lim \frac{\beta'}{\beta} = 1,$$

será

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

Com effeito, pela hypothese temos

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\beta'}{\beta} = 1 + \varepsilon',$$

sendo ε e ε' quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α e β . Logo será

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1 + \varepsilon'}{1 + \varepsilon}$$

e portanto

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta}{\alpha}.$$

D'aqui se pode concluir que o limite da razão de dois infinitamente pequenos é igual ao limite da razão dos seus termos principaes. Sejam, com effeito, os dois infinitamente pequenos

$$\beta = \beta' + \varepsilon, \quad \alpha = \alpha' + \varepsilon';$$

teremos

$$\lim \frac{\beta' + \varepsilon}{\beta'} = \lim \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta'} \right) = 1,$$

visto que, por definição, ε é de ordem superior a β' ou $\lim \frac{\varepsilon}{\beta'} = 0$.
Do mesmo modo será

$$\lim \frac{\alpha' + \varepsilon'}{\alpha'} = 1$$

e, pelo theorema que acabamos de demonstrar,

$$\lim \frac{\beta' + \varepsilon}{\alpha' + \varepsilon'} = \lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Se quizermos, por exemplo, determinar o limite de

$$\frac{x + x^2 + x^3}{x^2 + x^3}$$

para $x = 0$, teremos

$$\lim_{x=0} \frac{x + x^2 + x^3}{x^2 + x^3} = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{x} = \infty.$$

§ 4.º — Limites das funcções

90. DEFINIÇÃO. — Diz-se que a funcção $y = f(x)$ tende para o limite A ao mesmo tempo que a variavel independente

x tende para o limite a quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ε , é possível determinar um numero positivo δ de modo que, para todos os valores de x que verifiquem a desigualdade

$$|x - a| < \delta,$$

seja

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

LIMITE Á DIREITA. — Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para os valores de x á direita de a quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ε , é possível determinar um numero positivo δ tal, que para todos os valores de x , que verifiquem a desigualdade

$$x - a < \delta,$$

seja

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

LIMITE Á ESQUERDA. — Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para os valores de x á esquerda de a quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ε , é possível determinar um numero positivo δ tal, que para todos os valores de x que verifiquem a desigualdade

$$a - x < \delta$$

seja

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Já tivemos occasião de observar (n.º 18) que a desigualdade

$$|x - a| < \delta$$

se desdobra nas duas

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

e que portanto os valores de x que satisfazem á primeira estão comprehendidos no intervallo $(a - \delta, a + \delta)$.

Quando consideramos sómente o limite á direita, ou á esquerda, as desigualdades $x - a < \delta$, ou $a - x < \delta$, podem substituir-se respectivamente por

$$a + \delta > x, \quad a - \delta < x$$

e os valores de x encontram-se no intervallo $(a, a + \delta)$, ou $(a - \delta, a)$, isto é, numa das partes em que se desdobrou a desigualdade primitiva.

91. Diz-se que $f(x)$ tem por limite A para x infinito quando, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ε , é possível determinar um numero B tal, que para todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade $|x| > B$ seja

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

e escreve-se

$$\lim_{x=\infty} f(x) = A.$$

Se aquella condição se verifica para valores positivos de x , escreve-se

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = A,$$

e temos o limite á direita; se a condição se verifica para valores negativos de x , escreve-se

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = A,$$

e temos o limite á esquerda.

Outro caso pode dar-se ainda. Se $f(x)$ cresce independentemente com a variavel, isto é, se, dado um numero A arbitrariamente grande, é possível determinar um numero B tal, que para todos os valores de x que satisfaçam á condição $|x| > B$ seja $|f(x)| > A$, diz-se que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Quando não se verifica hypothese alguma das que temos considerado, diz-se que $f(x)$ não admite limite, nem finito nem infinito.

92. Aos limites das funcções são applicaveis as proposições que se demonstraram para os limites das successões determinadas.

Assim, se duas funcções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ tendem para limites determinados A e B quando x tendo para a , existe conjunctamente um limite da somma $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ e esse limite é $C = A + B$.

Com effeito, dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ϵ , será possível, por definição de limite, determinar um numero δ' tal, que para todos os valores de x que satisfaçam á condição de ser $|x - a| < \delta'$ seja

$$|f_1(x) - A| < \frac{1}{2} \epsilon,$$

e outro numero δ'' tal, que para todos os valores de x que satisfaçam á condição de ser $|x - a| < \delta''$ seja

$$|f_2(x) - B| < \frac{1}{2} \epsilon.$$

Por conseguinte as duas últimas desigualdades hão de verificar-se para todos os valores de x que satisfaçam á condição de ser $|x - a| < \delta$, representando por δ a menor das quantidades δ' e δ'' . D'aqui se conclue que para estes valores de x será

$$|F(x) - C| = |(f_1(x) - A) + (f_2(x) - B)| \\ \leq |f_1(x) - A| + |f_2(x) - B| < \varepsilon,$$

e $F(x)$ tende para o limite C .

Chegaríamos a um resultado análogo no caso de qualquer numero finito de parcellas. Por uma forma semelhante se mostraria que:

A funcção $f(x)$ não pode tender para dois limites diferentes quando x tende para a ; o producto de qualquer numero finito de funcções, que tendem cada uma para o seu limite quando x tende para a , admite um limite que é egual ao producto dos limites dos factores; etc.

93. Já vimos que a funcção $f(x)$ se diz contínua no ponto a quando se verificam as seguintes condições:

1.^a Ser a funcção bem determinada naquelle ponto;

2.^a Dado um numero positivo arbitrariamente pequeno ε , ser possível determinar um numero positivo δ tal, que para todos os valores de x que satisfaçam á condição de ser $|x - a| < \delta$ seja

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ora esta desigualdade traduz tambem a condição necessaria para ser

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ou antes

$$\lim_{x=a} f(x) = f(\lim x).$$

Assim, a continuidade da função de uma variavel pode-se definir pela condição de serem *invertiveis* os symbolos *lim.* e *f.*

XI. — Derivadas.

§ 1.º — Funções de uma variavel.

94. Seja $y = f(x)$ uma função analytica da variavel real x , e supponhamos que esta função é definida num intervallo (a, b) . Seja x um ponto d'este intervallo para o qual a função é continua e finita, e consideremos outro ponto $x \pm h$ na vizinhança de x .

Em geral a função terá valores diferentes nos pontos x e $x \pm h$, e o valor da differença

$$k = f(x \pm h) - f(x)$$

é o *incremento* da função correspondente ao *incremento* $\pm h$ da variavel; por outra parte a quantidade k tende para zero ao mesmo tempo que h , visto que a função é continua. A fracção

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}$$

chama-se *razão incremental*.

Ora, pode acontecer que a razão incremental tenda para um limite determinado quando o incremento da variavel tende para zero. Dão-nos um exemplo d'este caso as funções inteiras

que são contínuas em todos os seus pontos (n.º 22). Do desenvolvimento de $f(x+h)$ segundo a fórmula de Taylor, demonstra-se para estas funcções (n.º 16), se tira

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

sendo ε uma quantidade que se annulla com h ; e d'aqui resulta que será neste caso

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

qualquer que seja o signal de h . Da funcção $f'(x)$, que se chamou *derivada* da funcção $f(x)$, podemos dar em todos os casos a seguinte:

DEFINIÇÃO. — *Derivada da funcção $f(x)$ no ponto x é o limite para que tende a razão incremental da funcção nesse ponto quando o incremento h da variavel tende para zero; suppondo que o limite existe e, além d'isso, que elle é independente não só da maneira como h tende para zero mas ainda do signal de h .*

A este limite tambem se dá o nome de *quociente differencial*, pela razão que adeante se dirá.

Se o limite existe só á direita ou só á esquerda do ponto x , teremos a *derivada á direita* ou a *derivada á esquerda*. Quando ambas estas derivadas existem e são eguaes, diz-se simplesmente que a funcção tem *derivada* no ponto x .

Se num ponto x a razão incremental tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* nesse ponto. Se ha pontos em que aquella razão não tende para um limite determinado, diz-se que a funcção não tem derivada nesses pontos. A funcção inteira tem derivada em todos os seus pontos.

Posto isto, da relação de definição

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

deduz-se que será

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \varepsilon],$$

sendo ε uma quantidade que se annulla com h ; e d'aqui se conclue que a differença

$$f(x+h) - f(x)$$

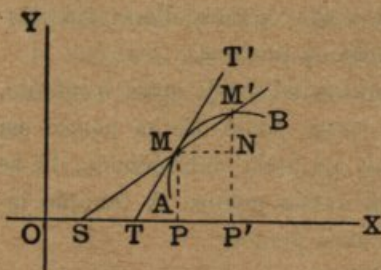
se torna infinitamente pequena com h quando a funcção $f'(x)$ não é infinita. Logo:

Toda a funcção é continua nos pontos em que admite derivada finita.

A recíproca não é verdadeira. Conhecem-se funcções que, sendo continuas em todos os pontos de um intervallo, todavia não admittem derivada nesse intervallo.

Se uma funcção $f(x)$ tem derivada em todos os pontos de um intervallo (a, b) , o conjuncto dos infinitos valores da derivada nesses pontos constitue uma nova funcção, que se chama *primeira funcção derivada* de $f(x)$ e se representa, conforme a notação anterior, por $f'(x)$.

95. Supponhamos que a funcção $y = f(x)$ pode ser repre-



sentada geometricamente por meio de uma curva como $\Delta MM'$, e vejamos o que exprime a derivada $y' = f'(x)$ num dado ponto M d'esta curva.

Se fôr $OP = x$ a abscissa do ponto M , a sua ordenada

$PM = y$ representa o valor correspondente da funcção $f(x)$. Dando a x um incremento $PP' = MN = h$, resultará para a ordenada o incremento $M'N = k$, visto ser $P'M' = PM + NM'$; e

do triangulo MNM' deduz-se a relação

$$\frac{k}{h} = \frac{\text{sen } NMM'}{\text{sen } NM'M} = \frac{\text{sen } XSM}{\text{sen } NM'M}.$$

Ora $XSM = \alpha$ é o angulo que a secante SM' faz com o sentido positivo do eixo dos x . Além d'isto $NM'M$ é o angulo que a mesma recta faz com o eixo dos y paralelo a $M'P'$ e, tirando em S a parallela a OY , facilmente se veria que é $NM'M = \omega - \alpha$, pondo $XOY = \omega$. A razão dos senos dos dois angulos chama-se *coeficiente angular* da recta MS .

Posto isto, á medida que o ponto P' se aproxima de P , o incremento h decresce, o ponto M' aproxima-se de M e o angulo $M'MT'$ converge para zero. No limite $h = 0$ a razão incremental torna-se na derivada $y' = f'(x)$, a secante torna-se na tangente MT , o angulo $XSM = \alpha$ muda-se em $XTM = \gamma$ e a egualdade precedente será agora

$$y' = \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } (\omega - \gamma)} = m.$$

Se os eixos coordenados forem rectangulares, será $\omega = \frac{1}{2} \pi$ e $m = \text{tang } \gamma$.

D'esta discussão resulta que:

A derivada num ponto x de uma funcção representada por uma curva plana exprime o coeficiente angular da tangente á curva naquelle ponto.

96. Nas primeiras questões que se apresentam no cálculo das derivadas considera-se uma funcção composta com outras funcções ligadas entre si por signaes de operações analyticas, e pede-se a derivada da primeira funcção expressa nas derivadas d'estas últimas, suppondo que todas ellas teem derivadas determinadas.

Em primeiro logar é evidente que a derivada de uma constante é zero. Depois tambem será facil ver que, se $f(x)$ é o producto de uma constante c por uma funcção de x , ou $f(x) = c \varphi(x)$, da expressão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

resulta que neste caso a derivada se calcula multiplicando a constante pela derivada da funcção $\varphi(x)$. Tratemos seguidamente das relações representadas por cada uma das operações fundamentaes da Algebra.

1.º ADDIÇÃO. — Se fôr dada a somma algebraica de um numero finito de funcções

$$f(x) \equiv \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \dots,$$

ao incremento h de x corresponderá a expressão

$$f(x+h) \equiv \varphi_1(x+h) \pm \varphi_2(x+h) \pm \dots$$

Subtrahindo d'esta egualdade a precedente, teremos o incremento da funcção

$$k = \varphi_1(x+h) - \varphi_1(x) \pm [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)] \pm \dots;$$

dividindo ambos os membros por h e passando ao limite para $h=0$, acha-se finalmente

$$f'(x) = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \dots$$

d'onde resulta o seguinte:

THEOREMA I. — A derivada de uma somma de funcções é a somma das derivadas das parcelas, isto é, o signal de derivação é invertivel com o signal de somma.

COROLLARIO. — Se duas funcções só differem numa constante, as suas derivadas são eguaes.

2.º MULTIPLICAÇÃO. — Seja

$$f(x) \equiv \varphi_1(x) \varphi_2(x),$$

e demos a x o incremento h ; teremos

$$f(x+h) \equiv \varphi_1(x+h) \varphi_2(x+h),$$

e portanto o incremento da funcção será

$$\begin{aligned} k &= \varphi_1(x+h) \varphi_2(x+h) - \varphi_1(x) \varphi_2(x) \\ &= [\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)] \varphi_2(x+h) + [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)] \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Dividindo por h e passando ao limite para $h=0$, acha-se

$$f'(x) = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) + \varphi_2'(x) \varphi_1(x).$$

Logo: a derivada do producto de duas funcções é igual á somma dos productos que se obteem multiplicando a derivada de cada funcção pela outra.

Pela applicação successiva d'esta regra se chegaria ao seguinte:

THEOREMA II. — A derivada do producto de n funcções é igual á somma dos productos que se obteem multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.

Esta generalização, que é evidente, facilmente se provaria pelo methodo de *inducção mathematica*.

Pode-se obter a derivada do producto com a forma chamada *logarithmica*, dividindo

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) + \varphi_1'(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) + \dots + \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n'(x)$$

por $f(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x)$. D'este modo se acharia a fórmula

$$(1) \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots + \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)},$$

de que faremos uso adiante.

3.º Divisão. — Seja a função

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)};$$

dando a x o incremento h , virá

$$f(x+h) = \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)}$$

e portanto o incremento da função será

$$\begin{aligned} k &= \frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \\ &= \frac{\varphi_1(x+h)\varphi_2(x) - \varphi_2(x+h)\varphi_1(x)}{\varphi_2(x+h)\varphi_2(x)} \\ &= \frac{[\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)]\varphi_2(x) - [\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)]\varphi_1(x)}{\varphi_2(x+h)\varphi_2(x)} \end{aligned}$$

Dividindo por h e passando ao limite para $h=0$, temos

$$f'(x) = \frac{\varphi_2(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{[\varphi_2(x)]^2},$$

e assim:

THEOREMA III. — *A derivada do quociente de duas funções é a expressão que se obtém quando se divide pelo quadrado do divisor a diferença do producto do divisor pela derivada do dividendo menos o producto do dividendo pela derivada do divisor.*

Se a função é expressa por uma fracção cujo numerador é constante, teremos a sua derivada multiplicando o numerador pela derivada do denominador, dividindo o producto pelo quadrado do denominador e mudando o signal ao quociente, visto ser zero a derivada de uma constante.

97. Dois casos nos falta considerar.

1.º FUNÇÃO DE FUNÇÃO. — Supponhamos que y é função de uma variavel u , a qual por sua vez é função da variavel independente x ; isto é, seja

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x).$$

Dando um accrescimo h a x , resultará para u um certo accrescimo l , em quanto que y experimenta egualmente um accrescimo que designaremos por k . Mas temos identicamente

$$\frac{k}{h} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{h}$$

e k e l convergem para zero com h ; os limites das razões

$$\frac{k}{h}, \frac{k}{l}, \frac{l}{h}$$

são respectivamente a derivada de y relativamente a x , de y relativamente a u e de u relativamente a x , suppondo que estas derivadas existem. Portanto no limite será

$$(2) \quad y' = f'_u(u) \cdot u',$$

isto é:

THEOREMA. — *Sendo y função de uma outra função da variavel x , a derivada de y relativamente a x é equal ao producto da derivada de y relativamente á variavel intermédia multiplicada pela derivada d'esta variavel relativamente a x .*

2.º FUNÇÃO INVERSA. — Seja $y = f(x)$ uma função que se possa inverter, isto é, uma função tal, que x possa tambem considerar-se como função de y .

Designemos por k o incremento de y correspondente ao incremento h de x . Se dermos inversamente o incremento k a y , resultará para x o incremento h ; de modo que o limite da

razão $\frac{h}{k}$ é a derivada da função inversa, como o limite da razão $\frac{k}{h}$ é a derivada da função directa.

Mas temos identicamente

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{\frac{k}{h}}$$

e passando ao limite, esta expressão mostra que :

THEOREMA. — *A derivada da função inversa é igual á inversa arithmetica da derivada da função directa.*

A inversão *analytica* da função reduz-se a uma inversão *arithmetica* da derivada. A derivada, que assim se obtém, não vem expressa na variavel independente, mas sim na função; para a exprimir na variavel independente, será ainda necessario effectuar a inversão *analytica* da função.

§ 2.º — Funções simples.

98. As funções explicitas de uma variavel são compostas de *funções simples*, isto é, de funções em que a variavel vem affectada unicamente com um dos signaes usados para exprimir operações ou combinações *analyticas*. Por meio dos theoremas precedentes se poderá obter a derivada de qualquer daquellas funções, quando sejam conhecidas as leis da derivação das funções simples.

Estas funções são: $a \pm x$, bx , x^m , e^x , $\log x$, $\text{sen } x$ e as outras funções trigonometricas com as inversas respectivas.

99. Para obter a derivada da função exponencial havemos de recorrer ao principio seguinte.

Designando por n um numero inteiro e positivo, da expressão

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

resulta que será

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots;$$

e portanto para n infinitamente grande é

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

por ser

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Por outra parte, suppondo $x < 1$, teremos

$$\frac{(1-x)^n - 1}{(1-x) - 1} = (1-x)^{n-1} + (1-x)^{n-2} + \dots + (1-x) + 1 < n;$$

e d'aqui se tira

$$\frac{(1-x)^n - 1}{x} > -n$$

ou $(1-x)^n > 1 - nx$. Por conseguinte, para $x = \frac{1}{n^2}$, virá

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

isto é,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n}$$

ou ainda

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Esta desigualdade mostra que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é uma quantidade que cresce indefinidamente com n ; e visto que ella se conserva sempre menor que 3, hade tender para um limite quando n

tender para o infinito. Designando este limite por e , o numero

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é a base dos logarithmos neperianos.

100. A derivada de $y = a \pm x$ é $y' = \pm 1$. A funcção $y = b x$ está comprehendida num caso que já foi considerado, e a sua derivada é $y' = b$.

A derivada de $y = b u$, sendo u funcção de x , é (2) $y' = b u'$.

A derivada de $y = e^x$ é

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como e^h tende para a unidade quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

fazendo tender n para o infinito quando h tende para zero; e tomando os logarithmos neperianos aos dois membros d'esta egualdade, virá

$$h = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

D'este modo a expressão da derivada y' torna-se em

$$y' = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = e^x,$$

por ser, para $n = \infty$, $\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1$;

Para $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$ teriamos (2)

$$(3) \quad y' = e^u u'.$$

isto é:

A derivada da exponencial de base e é igual ao producto da exponencial pela derivada do expoente.

Para $y = a^u$ ou

$$y = e^{u \log a}$$

será (3)

$$y' = e^{u \log a} \cdot u' \log a = a^u u' \log a;$$

e assim:

THEOREMA. — *A derivada da exponencial de base a é igual ao producto da exponencial pela derivada do expoente e pelo logarithmo neperiano da base.*

101. Sendo x positivo, de $y = \log x$ tira-se

$$x = e^y,$$

e pelo theorema da funcção inversa acha-se

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Para $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$ teremos (2)

$$y' = \frac{u'}{u};$$

e assim:

THEOREMA. — *A derivada do logarithmo neperiano de uma funcção é igual á derivada da funcção dividida pela mesma funcção.*

Sendo

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a},$$

teriamos a fórmula

$$y' = \frac{u'}{u \log a},$$

para exprimir a derivada do logarithmo de base a da funcção u .

102. Consideremos a função

$$y = x^n.$$

Suppondo x positivo e n real, teremos

$$y = e^{n \log x};$$

e d'aqui se tira

$$y' = e^{n \log x} \cdot \frac{n}{x} = \frac{n y}{x} = n x^{n-1}.$$

Para $y = u^n$ e $u = \varphi(x)$ viria

$$y' = n u^{n-1} u'.$$

No caso de ser n real e x negativo, pondo $x = -z$ teremos

$$y = (-1)^n \cdot z^n$$

e portanto

$$y' = (-1)^n n z^{n-1} z' = (-1)^{n-1} n z^{n-1} = n x^{n-1},$$

como no caso anterior.

Se fôr $y = u^n$ e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = n u^{n-1} u'.$$

Logo:

THEOREMA. — *A derivada da potencia de grau n de uma função é igual ao producto do expoente n pela potencia de grau $n-1$ da função e pela derivada da mesma função.*

Representando as raizes por expoentes fraccionarios, a derivada de

$$y = \sqrt[m]{u^n}$$

será

$$y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} u'.$$

Particularmente, pondo $m=2$ e $n=1$, a derivada de \sqrt{x} é

$$\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Se o expoente é também função de x , ou $y = u^v$ com $u = \varphi(x)$ e $v = \psi(x)$, será

$$y = e^{v \log u}$$

e portanto

$$y' = u^v \left(v' \log u + v \frac{u'}{u} \right).$$

103. FUNÇÕES CIRCULARES. — 1.º Seja $y = \text{sen } x$; o incremento da função correspondente ao incremento h da variável será

$$k = \text{sen}(x+h) - \text{sen } x,$$

e a razão incremental é

$$\frac{k}{h} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{sen } \frac{h}{2}}{h} = \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Passando ao limite para $h=0$, acha-se finalmente

$$\text{sen}' x = \cos x;$$

e para $u = \varphi(x)$ teríamos

$$(4) \quad \text{sen}' u = u' \cos u,$$

isto é:

THEOREMA. — *A derivada do seno é igual ao producto do coseno pela derivada do arco.*

2.º Seja $y = \cos u = \text{sen}(90^\circ - u)$. Segundo (4) teremos

$$(5) \quad \cos' u = -u' \text{sen } u.$$

3.º Seja $y = \text{tang } u$ ou

$$y = \frac{\text{sen } u}{\text{cos } u}.$$

Pelo theorema da derivada do quociente, e por (4) e (5), acharemos

$$\text{tang}' u = \frac{\text{cos}^2 u + \text{sen}^2 u}{\text{cos}^2 u} \cdot u' = (1 + \text{tang}^2 u) u' = u' \text{sec}^2 u.$$

4.º A derivada de

$$\text{cotg } u = \text{tang } (90^\circ - u)$$

será

$$\text{cotg}' u = -(1 + \text{cotg}^2 u) u' = -u' \text{cosec}^2 u.$$

5.º Pela forma da derivada da fracção cujo numerador é constante (n.º 96), a derivada de

$$\text{sec } u = \frac{1}{\text{cos } u}$$

será

$$\text{sec}' u = \frac{\text{sen } u}{\text{cos}^2 u} u' = u' \text{sec } u \text{ tang } u.$$

A derivada de $\text{cosec } u = \text{sec } (90^\circ - u)$ é

$$\text{cosec}' u = -u' \text{cosec } u \text{ cotg } u.$$

104. FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS. — 1.º Começando pelo seno, vejamos em primeiro logar se é possível, e como, considerar o arco como função do seu seno.

É sabido que existem infinitos arcos que teem todos o mesmo seno. Por conseguinte a um valor de seno não corresponde uma determinação unívoca do arco; mas se estabelecermos que o arco deva estar comprehendido entre os dois valores

$$\frac{2k+1}{2} \pi, \quad \frac{2k+3}{2} \pi,$$

onde k é um numero *inteiro* qualquer, positivo ou negativo, é claro que ao seno dado corresponderá um arco único, pois que dentro d'aquelles limites não ha dois arcos que tenham o mesmo seno. Com o symbolo

$$y = \text{arc sen } x$$

se indicará a funcção assim considerada, entendendo-se que este symbolo exprime o *arco, comprehendido os ditos limites, cujo seno é x* . Inversamente será $x = \text{sen } y$.

Pelo theorema das funcções inversas podemos agora achar a derivada de y . A derivada da funcção directa $\text{sen } y$ é $\cos y$; e por conseguinte a derivada de y relativamente a x , e expressa em y , será

$$\frac{1}{\cos y}.$$

Para ter esta derivada expressa na variavel x , de $x = \text{sen } y$ tira-se

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2};$$

e assim teremos

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ora, suppondo o arco y comprehendido entre os limites considerados, o valor de $\cos y$ será positivo para k ímpar e *vice-versa*. Por conseguinte na expressão da derivada y' tomaremos o radical com o signal $+$ quando considerarmos algum ramo da funcção y definido por um valor ímpar de k , e com o signal $-$ no caso contrário.

2.º Para a funcção *coseno* podem fazer-se considerações semelhantes. Se fosse $x = \cos y$, veriamos que y se pode definir como funcção de x no campo de variabilidade de y comprehen-

dido entre

$$k\pi, \quad (k+1)\pi,$$

sendo k um numero *inteiro*, positivo ou negativo.

Designando a funcção assim considerada por

$$y = \text{arc cos } x,$$

a sua derivada relativamente a x será

$$-\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

e para resolver a indeterminação do signal do radical observaremos que no campo de variabilidade de y a funcção $\text{sen } y$ é positiva para k par, e *vice-versa*.

Por aqui se vê que, abstrahindo do signal, *as derivadas das duas funcções*

$$\text{arc sen } x, \quad \text{arc cos } x$$

são *eguaes em valor absoluto*. Podia prever-se que assim seria, notando que, para o mesmo valor de x , ou a somma ou a differença d'aquellas duas funcções é uma constante da forma

$$(2t+1)\frac{\pi}{2},$$

onde t é um numero inteiro.

3.º Para a funcção inversa de

$$x = \text{tang } y$$

veriamos egualmente que esta funcção, que se representa por

$$y = \text{arc tang } x,$$

é definida num campo de variabilidade cujos extremos são

$$k\pi, \quad (k+1)\pi.$$

D'este intervallo hade excluir-se o ponto medio

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

onde a variavel x se torna infinita, e tem o signal $+$ ou $-$ conforme y tende para aquelle valor pela direita ou pela esquerda.

Posto isto, pelo theorema das funcções inversas se acharia que a derivada do arco cuja tangente é x é

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Do mesmo modo a derivada do arco cuja cotangente é x será

$$y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

a derivada de $y = \text{arc sec } x$ é

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

e para $y = \text{arc cosec } x$ teremos

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Note-se: emquanto o logarithmo e as funcções circulares inversas são funcções transcendentés, as suas derivadas são funcções algebraicas.

§ 3.º — Estudo das funcções por meio das suas derivadas.

105. Supponhamos que a funcção $y = f(x)$ é sempre finita e tem derivada determinada e finita num certo intervallo.

Vamos tratar de algumas relações fundamentaes que teem logar entre os valores d'esta funcção e os da sua derivada.

1.º Consideremos no intervallo dado um ponto x_0 e dois pontos $x_0 - h$ e $x_0 + h$ na vizinhança de x_0 , sendo h uma quantidade positiva e arbitrariamente pequena. Diz-se que a funcção é *crescente* com a variavel no ponto x_0 , quando as desigualdades

$$(6) \quad \begin{cases} f(x_0 - h) - f(x_0) < 0, \\ f(x_0 + h) - f(x_0) > 0 \end{cases}$$

se verificam para um certo valor h_1 de h e para todos os valores de h menores que h_1 .

Afim de substituir este criterio por outro que seja independente de h , divide-se a primeira desigualdade (6) por $-h$, mudando-lhe o sentido, e divide-se igualmente a segunda por $+h$. Teremos assim duas condições, que se reduzem á seguinte:

$$(7) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0,$$

para h positivo e negativo.

A relação (7) hade subsistir por menor que seja h . Por conseguinte, fazendo convergir h para zero, notando que o limite do primeiro membro de (7) para $h = 0$ é a primeira derivada da funcção $f(x)$ no ponto x_0 , cuja existencia admittimos, e advertindo que não pode ser negativo o limite de uma quanti-

dade que se conserva sempre positiva, conclue-se finalmente que:

THEOREMA I. — *Se a funcção $f(x)$ fôr crescente no ponto x_0 , a sua derivada não terá valor negativo neste ponto.*

Tambem podemos dizer que: *se a derivada é positiva, a funcção é crescente.* Em outros termos: esta condição é *sufficiente*, mas não se pode dizer que seja *necessaria*; falta considerar o caso de ser a derivada igual a zero no ponto x_0 .

Diz-se que a funcção $f(x)$ é *decrecente*, *crescendo a variavel*, quando se verificam as condições que se traduzem invertendo os sentidos das desigualdades (6). Por um raciocinio análogo ao que se fez no caso anterior, veriamos que:

THEOREMA II. — *Se a funcção $f(x)$ fôr decrecente no ponto x_0 , a sua derivada não terá valor positivo neste ponto; e, com as mesmas reservas que já fizemos, se a derivada é negativa, a funcção é decrecente.*

Havemos de completar esta discussão sómente para o caso particular das funcções inteiras. Aqui acrescentaremos apenas que a funcção pode ser crescente, ou decrecente, só á esquerda ou só á direita do ponto considerado.

2.º Supponhamos que a funcção não é constante no intervallo cujos extremos designamos por x_0 e $x_0 + X$. Em virtude da continuidade da funcção podemos admittir que, entre todos os valores que ella pode ter neste intervallo, haverá um *máximo*; isto é, que haverá no intervallo, incluindo os seus extremos, um ponto x_1 ao qual corresponda um valor da funcção que não pode ser excedido por algum outro valor que ella tenha no mesmo intervallo. Tendo supposto que a funcção é sempre *finita*, este máximo não pode ser o infinito.

Do mesmo modo hade haver um *mínimo*. A existencia do máximo e do mínimo, admittida por O. Bonnet como consequencia necessária da continuidade da funcção, foi demonstrada directamente por Weierstrass num dos theoremas conhecidos pelo seu nome.

Ora, tres casos se podem dar. Ou o máximo está num extremo, e o mínimo no outro extremo do intervallo; ou um d'elles está num extremo, e o outro num ponto intermédio; ou ambos se encontram em pontos intermédios.

Mas, se a funcção tiver valores eguaes, zero por exemplo, nos dois extremos, um pelo menos dos valores máximo e mínimo hade certamente corresponder a um ponto intermédio x_1 do intervallo: supponhamos que é o máximo.

É evidente que as duas diferenças

$$\begin{aligned} f(x_1 - h) - f(x_1), \\ f(x_1 + h) - f(x_1) \end{aligned}$$

hãode ser negativas ou zero, visto que $f(x_1)$ não pode ser excedido por nenhum outro valor da funcção. Dividindo a primeira por $-h$ e a segunda por $+h$, teremos duas razões que conservam sempre signaes contrarios emquanto h tende para zero. Mas os seus limites tornam-se eguaes, porque devem representar a derivada da funcção no ponto x_1 , e foi admittida a existencia d'essa derivada.

Logo esses limites não podem deixar de ser zero; com effeito, se o limite da primeira razão, por exemplo, fosse nm numero positivo, esse numero não podia ser limite da segunda razão, que nunca pode ser positiva em qualquer estado de grandeza de h .

Se no ponto x_1 o valor da funcção fosse mínimo, veriamos do mesmo modo que a derivada da funcção seria egual a zero nesse ponto.

Se a funcção fosse constante, a sua derivada seria egual a zero em todo o intervallo. E assim, concluiremos em todos os casos que:

THEOREMA III. — *Se uma funcção tem os mesmos valores nos extremos de um intercallo, no qual a funcção é sempre finita e tem derivada finita, existirá no interior do intervallo pelo menos um ponto em que a derivada da funcção é zero.*

Esta proposição é conhecida pelo nome de *theorem de Rolle* por ter sido este mathematico quem primeiro a enunciou para as funcções algebraicas nos termos seguintes:

Entre duas raizes de uma equação algebraica $f(x)=0$ existe sempre pelo menos uma raiz da equação derivada $f'(x)=0$.

Da demonstração dada resulta que no ponto considerado x_1 ha verdadeiramente um *máximo* ou um *mínimo* da funcção, isto é, que a funcção tem naquelle ponto um valor *maior*, ou *menor*, do que nos pontos vizinhos á esquerda e á direita de x_1 ; e que além d'isto a derivada *muda de signal* neste ponto. Podemos, pois, enunciar o theorem de Rolle nos termos seguintes:

Dadas as mesmas condições, existe no interior do intervallo pelo menos um ponto em que a primeira derivada da funcção muda de signal.

Se a funcção admite representação geometrica por meio de uma curva, o theorem de Rolle exprime que:

Entre dois pontos de uma curva continua, para os quaes a ordenada tem o mesmo valor, existe pelo menos um ponto em que a tangente á curva é parallela ao eixo dos x .

3.º Consideremos o mesmo intervallo, pondo agora $X=x_0+h$.
A funcção

$$f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),$$

que é formada linearmente com a funcção dada e com a simples funcção linear $x - x_0$, goza das mesmas propriedades que a funcção $f(x)$: quer dizer, é finita e tem derivada finita no intervallo dado. Por outra parte, a mesma funcção annulla-se nos extremos do intervallo, isto é, para $x = x_0$ e $x = x_0 + h$.

D'aqui resulta pelo theorem de Rolle, que no interior do intervallo haverá um ponto x_1 para o qual a derivada da funcção é zero. Ora esta derivada é

$$f'(x) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h};$$

e representando por θ um numero comprehendido entre 0 e 1, $0 < \theta < 1$, a abscissa x_1 comprehendida entre x_0 e $x_0 + h$ será da forma $x_1 = x_0 + \theta h$.

Por conseguinte, visto que a expressão precedente se annulla para $x = x_1$, teremos

$$f'(x_0 + \theta h) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0,$$

ou

$$(8) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + h [f'(x_0 + \theta h)].$$

Esta fórmula traduz a proposição conhecida pelo nome de *theorem do valor médio*. Vamos ver quaes são as principaes consequencias que d'ella se deduzem.

Imaginemos uma funcção cuja derivada é igual a zero em todos os pontos de um intervallo dado. Considerando neste intervallo dois pontos quaesquer x_0 e $x_0 + h$, e applicando a fórmula (8), virá sempre

$$f(x_0) = f(x_0 + h).$$

Assim :

THEOREMA IV. — *Se a derivada da funcção $y = f(x)$ fôr igual a zero em todos os pontos de um intervallo, a funcção é constante neste intervallo.*

Se duas funcções $f(x)$ e $\varphi(x)$ tiverem derivadas eguaes em todos os pontos de um intervallo, a derivada da sua differença será igual a zero e esta differença $f(x) - \varphi(x)$ será constante no intervallo. Assim, se a derivada da funcção $f(x)$ fôr sempre igual á constante A , será $f(x) = Ax + C$, sendo C uma constante: por isso que a derivada da funcção linear Ax tambem é sempre igual a A .

Se não ha ponto do intervallo em que a derivada seja negativa, tambem não ha no intervallo dois pontos x_0 e $x_0 + h$, sendo h positivo, para os quaes possa ser $f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Com effeito a fórmula (8) mostra que, se esta desigualdade fosse possível, haveria no mesmo intervallo um ponto em que $f'(x)$ seria negativa.

O theorema do valor médio exprime que num arco de uma curva contínua existe, pelo menos, um ponto em que a tangente á curva é paralela á corda do arco. O theorema de Rolle corresponde ao caso em que a corda é paralela ao eixo dos x , e é portanto menos geral.

106. Supponhamos presentemente que a funcção $y=f(x)$ é inteira. Sabemos que esta funcção tem sempre derivada e, se fôr

$$f'(x_0) \geq 0,$$

a funcção será respectivamente crescente ou decrescente no ponto x_0 .

Se fôr, porém,

$$f'(x_0) = 0,$$

pode acontecer que para este valor de x ainda se annullem successivamente outras derivadas de $f(x)$, excepto a ultima que é uma constante. Designando por m a ordem da primeira d'estas derivadas que é diferente de zero naquelle ponto, pela fórmula de Taylor teremos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^m}{m!} [f^{(m)}(x_0) + \epsilon],$$

sendo ϵ infinitamente pequeno com h .

D'aqui resulta que podemos sempre tornar ϵ menor que $f^{(m)}(x_0)$, dando a h valores sufficientemente pequenos. D'este modo o signal do segundo membro da ultima egualdade virá a depender do signal de $f^{(m)}(x_0)$ e ainda, se m for ímpar, do signal de h . Consideremois, pois, os casos de m ser par ou ímpar.

1.º caso: m par. Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr negativa, da última expressão resultam as duas desigualdades:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0,$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0.$$

Logo, no ponto x_0 o valor de $f(x)$ é maior do que todos os valores que a função pode ter na vizinhança d'este ponto, tanto á sua esquerda como á sua direita; isto é, o valor de $f(x)$ é *máximo* nesse ponto.

Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr positiva, da mesma expressão resultam as duas desigualdades

$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0,$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0.$$

e $f(x_0)$ é um *mínimo*. O menor valor que pode ter m é $m=2$.

2.º caso: m ímpar. Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr positiva, acharemos do mesmo modo

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0,$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

e a função é crescente no ponto x_0 . Se $f^{(m)}(x_0)$ fôr negativa, teremos

$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0,$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$$

e a função é decrescente. O menor valor que m pode ter neste caso é $m=1$.

§ 4.º — Diferenciaes.

107. O incremento de uma variavel pode exprimir-se antepondo a inicial Δ á letra que designa a variavel. Assim Δx significa um incremento determinado e finito dado á variavel x , isto é, a differença de dois valores de x .

Do mesmo modo Δy ou $\Delta f(x)$ indicará a differença dos valores correspondentes da funcção $y = f(x)$, de modo que a razão incremental será expressa por algum dos symbolos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

O limite d'esta razão para $\Delta x = 0$ é a derivada da funcção. Se a quizermos exprimir pelo quociente de duas quantidades, que designaremos respectivamente por dy e dx , podemos considerar arbitrária uma d'estas quantidades, dx por exemplo. Suppondo que dx representa o incremento dado á variavel independente, isto é, o proprio Δx , daremos a dx o nome de *differencial da variavel independente*; e dy ficará então definido pela fórmula.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

ou ainda

$$dy = f'(x) dx.$$

Por onde se vê que: *dy é o producto da derivada da funcção pela differencial da variavel independente.*

A quantidade dy chama-se *differencial da funcção*, advertindo que geralmente esta differencial não representa propriamente o incremento da funcção, como adeante se verá.

A derivada de $f(x)$, que era expressa por $f'(x)$ na notação

de Lagrange, fica assim representada nesta notação, devida a Leibnitz, *pelo quociente*

$$\frac{dy}{dx}$$

da divisão da differencial da função pela differencial da variavel independente.

108. Como dissemos, a differencial da função não é propriamente o incremento da função devido ao incremento dx da variavel x , mas tem uma relação íntima com aquelle incremento. Com effeito, de

$$\lim_{x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

se conclue que é

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \omega,$$

sendo ω infinitamente pequeno com Δx . Pondo $\Delta x = dx$, teremos pois

$$\Delta f(x) = f'(x) dx + \omega dx.$$

Pela natureza de ω o producto ωdx é um infinitamente pequeno de ordem superior á ordem de dx . Mas por definição é $f'(x) dx = dy$, e por conseguinte será finalmente

$$\Delta y = dy + \varepsilon,$$

sendo ε um infinitamente pequeno de ordem superior relativamente a dx . Logo:

A differencial da função não exprime o incremento que resulta para a função do incremento dx da variavel, mas differe d'aquelle incremento num infinitésimo de ordem superior a dx .

Convem observar que, no caso de $f(x)$ ser uma função linear, o incremento da função coincide com a sua diferencial.

109. Se a primeira derivada $f'(x)$ de uma função $f(x)$ é ainda função contínua e tem derivada num ponto ou num intervalo, derivando-a teremos a segunda derivada de $f(x)$ que se representa por $f''(x)$; e assim por diante.

Com a noção de derivada de ordem superior está naturalmente relacionado o conceito de *diferencial de ordem superior*; e em primeiro logar veremos como este conceito se applica á variavel independente.

Ora por diferencial de primeira ordem d'esta variavel x entende-se, como vimos, um incremento arbitrário dado a x . Mas para cada valor de x podemos dar um valor determinado á diferencial dx , que d'este modo se pode considerar como função de x . A diferencial d'esta função será igual ao producto da sua derivada relativamente a x multiplicada por dx , ou

$$d(dx) = d^2x = \frac{d(dx)}{dx} dx.$$

Teremos assim a *diferencial de 2.^a ordem de x* .

Ora, sendo arbitraria a escolha da diferencial dx para cada ponto x , podemos attribuir-lhe um valor constante em todos os pontos; neste caso a derivada de dx relativamente a x será igual a zero, ou $d^2x = 0$.

Por diferencial de segunda ordem da função entende-se a diferencial da primeira diferencial

$$dy = f'(x) dx.$$

Designando-a por d^2y , será d^2y igual ao producto da derivada de dy relativamente a x multiplicada por dx , isto é,

$$d^2y = \left[f''(x) dx + f'(x) \frac{d(dx)}{dx} \right] dx = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x,$$

Por conseguinte, suppondo constante, como acima fizemos, a primeira diferencial da variavel independente, ou $d^2 x = 0$, virá finalmente

$$d^2 y = f''(x) dx^2,$$

donde se tira

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Pelo mesmo processo se acharia a expressão da terceira derivada, da quarta, etc.

§ 5.º — Funções de duas variaveis.

110. Consideremos a função de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y),$$

que suppremos contínua. Derivando-a relativamente a x como se y fosse constante, ou em ordem a y como se x fosse constante, teremos, como no caso das funções inteiras, as *derivadas parciaes* de z em ordem a x e a y ; e o mesmo diríamos se fosse maior o numero das variaveis independentes.

Suppondo estas derivadas contínuas e derivando-as do mesmo modo em ordem a x e a y , teríamos as derivadas parciaes de segunda ordem, e assim por deante.

O resultado que se obtem, quando se deriva p vezes consecutivas a função $f(x, y)$ em ordem á variavel x sómente e depois se deriva ainda a última derivada q vezes em ordem a y , é expresso na notação do n.º 16 por

$$f_{x^p y^q}^{(r)}(x, y),$$

sendo $r = p + q$. Esta mesma derivada se designa na notação

de Jacobi pelo symbolo

$$\frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q},$$

indicando pela forma particular da inicial ∂ que $\frac{\partial f}{\partial x}$, por exemplo, é uma derivada parcial e não a derivada de uma função f de uma só variavel x .

Chama-se *differencial parcial* ao producto da differencial de uma variavel pela derivada parcial da função relativa á mesma variavel.

Chama-se *differencial total* á somma das differencias parciaes relativas a cada uma das variaveis independentes.

111. Applicando o theorema do valor médio á função $f(x + dx, y + dy)$ considerada como função de uma variavel x sómente, teremos

$$f(x + dx, y + dy) \equiv f(x, y + dy) + dx f'_x(x + \theta dx, y + dy).$$

Mas, considerando $f(x, y + dy)$ como função de y sómente, será pelo mesmo theorema

$$f(x, y + dy) \equiv f(x, y) + dy f'_y(x, y + \theta' dy)$$

e, substituindo na expressão precedente, acha-se

$$(9) \quad f(x + dx, y + dy) \equiv f(x, y) + dx f'_x(x + \theta dx, y + dy) + dy f'_y(x, y + \theta' dy).$$

Nesta fórmula se contem o theorema do valor médio para o caso presente, e por ella teremos o incremento que a função experimenta em virtude dos incrementos dx e dy que receberam as variaveis. Mas, se as derivadas parciaes f'_x e f'_y forem ainda

funções contínuas de x e y , sabemos que é

$$f'_x(x + \theta dx, y + dy) = f'_x(x, y) + \omega,$$

$$f'_y(x, y + \theta' dy) = f'_y(x, y) + \omega',$$

sendo ω e ω' quantidades que tendem para zero conjuntamente com dx e dy . Por conseguinte ωdx e $\omega' dy$ são infinitésimos de ordem superior relativamente a dx e dy e, substituindo em (9) as duas últimas expressões, teremos finalmente

$$(10) \quad \Delta z = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy + \omega dx + \omega' dy,$$

designando por $\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$ o incremento da função $z = f(x, y)$.

A fórmula (10) exprime o *theorema da differencial total*. Por ella se vê que esta differencial differe do incremento da função em infinitésimos de ordem superior relativamente aos incrementos differenciaes dx e dy das variaveis independentes.

112. Chama-se *função composta* á função de um certo numero de variaveis que, não sendo independentes entre si, são por sua vez funções de uma única variavel independente x .

Seja, por exemplo,

$$y = f(u, v),$$

sendo u e v funções de x . Será y uma função de x , *composta* por intermédio das funções u e v .

Admitindo que y é função continua de u e v e tem derivadas finitas, e que do mesmo modo u e v são funções contínuas de x , é claro que y tambem será função de x . A derivada d'esta função pode-se obter do modo seguinte.

Se dermos a x o incremento Δx , resultarão para u e v determinados incrementos Δu e Δv e d'elles resultará ainda um

incremento Δy para y . Os incrementos Δu e Δv não são arbitrários, porque dependem do incremento Δx ; só este é arbitrário.

Ora, considerando y como função das duas variáveis u e v , pela fórmula (10) teremos

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v + \varepsilon,$$

sendo ε um infinitésimo de ordem superior relativamente a Δu e Δv . Dividindo esta igualdade por Δx , vem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\varepsilon}{\Delta x}.$$

Fazendo convergir Δx para zero, Δu e Δv também convergem para zero, visto que u e v , por hypothese, teem derivadas determinadas e finitas; os limites das razões $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ são precisamente estas derivadas. Portanto Δu e Δv são infinitésimos da mesma ordem que Δx , ou de ordem superior; d'aqui resulta que ε é certamente um infinitésimo de ordem superior a Δx , isto é, que $\frac{\varepsilon}{\Delta x}$ converge para zero com Δx .

Logo, passando ao limite para $\Delta x = 0$, a última fórmula torna-se em

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx};$$

a mesma lei se observaria na formação da derivada quando as variáveis intermédias fossem mais de duas, e assim:

THEOREMA. — *A derivada da função composta é a somma dos productos que se formam multiplicando a derivada parcial da função relativa a cada variavel intermédia pela derivada d'esta variavel em ordem á independente.*

113. Seja y uma função implícita de x definida pela equação

$$f(x, y) = 0.$$

Se conhecessemos um valor de $y = \varphi(x)$ que, substituído por y , satisfizesse a esta equação, o resultado d'esta substituição tornaria $f(x, y)$ numa função de x que teria o valor zero em todos os pontos x para os quaes se pode definir a função y ; por conseguinte a derivada d'essa função de x será zero.

Derivemos $f(x, y)$, considerando-a como função composta das duas x e y . Pela fórmula (11) teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

ou antes

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0;$$

e d'aqui se tira

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

que é a expressão da derivada da função implícita.

Para a função inteira $f(x, y)$, cujas primeiras derivadas parciais são expressas pelas fórmulas (4) do n.º 16, seria

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{by + cx + e}{ay + bx + d}.$$

Em geral:

THEOREMA. — *Forma-se a derivada da função implícita dividindo a sua derivada parcial em ordem a x pela derivada parcial em ordem a y e mudando o signal ao quociente.*

§ 6.º — Funções homogêneas.

114. A função homogênea inteira toma o nome de *forma algébrica*. As formas dividem-se em *binárias*, *ternárias*, *quaternárias*, etc. conforme encerram duas, tres, quatro, etc. variáveis; e em *lineares*, *quadráticas*, *cúbicas*, *quárticas*, etc. conforme são do 1.º, 2.º, 3.º, 4.º grau, etc. O grau da forma é também o seu grau de homogeneidade.

Consideremos uma função homogênea qualquer das variáveis x, y, \dots , e seja i o seu grau de homogeneidade. Por definição (n.º 11) será

$$(12) \quad f(kx, ky, \dots) \equiv k^i f(x, y, \dots).$$

Derivemos esta expressão relativamente a k , considerando as variáveis x, y, \dots como constantes. Pela fórmula (11) teremos

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial (kx)} \frac{d(kx)}{dk} + \frac{\partial f}{\partial (ky)} \frac{d(ky)}{dk} + \dots \equiv ik^{i-1} f(x, y, \dots).$$

Ora

$$\frac{d(kx)}{dk} = x, \quad \frac{d(ky)}{dk} = y, \dots;$$

por outra parte a identidade (12) hade subsistir para qualquer valor de k , donde resulta que o mesmo se pode dizer de (13). Pondo $k=1$, esta última fórmula torna-se em

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots \equiv i f(x, y, \dots).$$

Logo:

THEOREMA. — *A somma dos productos que se formam, multiplicando as derivadas parciaes da função homogênea relativas a cada variavel por esta mesma variavel, é identicamente igual ao producto da função pelo respectivo grau de homogeneidade.*

Esta proposição é conhecida pelo nome de *theorem de Euler*.

Para a função inteira de grau n é $i = n$. Seja, por exemplo,

$$(14) \quad f(x, y, z) \equiv cx^2 + ay^2 + gz^2 + 2bxy + 2dyz + 2ezx;$$

teremos

$$x f'_x(x, y, z) + y f'_y(x, y, z) + z f'_z(x, y, z) \equiv 2f(x, y, z),$$

sendo $f'_x = 2cx + 2by + 2ez$, etc.

115. Chama-se *discriminante* de uma forma algébrica quadrática o eliminante das equações que se obtêm egualando a zero cada uma das suas derivadas parciais.

Para a forma binária

$$ay^2 + 2bxy + cx^2,$$

cujas derivadas parciais são

$$2by + 2cx, \quad 2ay + 2bx,$$

o discriminante será

$$\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = b^2 - ac.$$

Do mesmo modo para a forma ternária (14), cujas derivadas parciais são

$$2ay + 2bx + 2dz,$$

$$2by + 2cx + 2ez,$$

$$2dy + 2ex + 2gz,$$

o discriminante será o determinante symétrico

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & g \end{vmatrix}.$$

Em qualquer dos casos podemos supprimir o factor 2, comum a todos os termos das equações $f'_x = 0$, etc.

XII. — Composição das equações.

116. Se tivermos uma funcção inteira de grau n

$$f(x) \equiv p_{n-1}x + p_{n-2}x^2 + \dots + p_0x^n$$

que se annulla para $x=0$, designemos o módulo de x por ρ_1 e o maior dos módulos dos coefficients por ρ_2 . Pois que o módulo da somma não pode ser maior que a somma dos módulos das parcellas, será

$$\text{mod } f(x) \leq \rho_2 (\rho_1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_1^n) = \rho_2 \frac{\rho_1 - \rho_1^{n+1}}{1 - \rho_1},$$

segundo os theoremas sobre o módulo do producto e da potencia. Da última expressão se conclue *à fortiori*, para valores de $\rho_1 < 1$,

$$\text{mod } f(x) < \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1}$$

Por conseguinte, dada uma quantidade positiva arbitrariamente pequena δ , podemos sempre tornar $\text{mod } f(x) < \delta$, determinando ρ_1 pela condição

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1} < \delta \quad \text{ou} \quad \rho_1 < \frac{\delta}{\rho_2 + \delta}.$$

D'aqui se deduzem os seguintes corollarios:

1.º Ordenando o polynómio $f(x)$ segundo as potencias ascendentes da variavel x , podemos dar a $f(x)$ a forma

$$f(x) \equiv x^k (p_{n-k} + \epsilon);$$

nesta expressão k será um numero inteiro e positivo, ou zero,

e ε é uma função inteira de x que se annulla para $x = 0$. Por conseguinte é sempre possível determinar uma quantidade positiva r tal, que o módulo de ε seja inferior ao de p_{n-t} para todos os valores de x cujos módulos estejam compreendidos entre 0 e r .

2.º Ordenando segundo as potencias descendentes de x tambem podemos dar a $f(x)$ a forma

$$f(x) \equiv x^n (p_0 + \varepsilon),$$

sendo n o grau de $f(x)$ e ε uma função inteira de $\frac{1}{x}$ que se annulla para $\frac{1}{x} = 0$. Por conseguinte é sempre possível determinar uma quantidade positiva r tal, que para todos os valores de $\frac{1}{x}$ cujos módulos sejam inferiores a $\frac{1}{r}$, ou antes, para todos os valores de x cujos módulos sejam maiores que r , o módulo de ε seja menor que o de p_0 .

Ao mesmo tempo o módulo de x^n cresce indefinidamente; isto é, *para valores sufficientemente grandes de mod x o mod f(x) pode exceder qualquer numero positivo dado.*

3.º Supponhamos que são reaes a variavel x e os coefficients de um polynomio $f(x)$ ordenado no sentido crescente ou decrescente dos graus dos seus termos. É sempre possível dar a x um valor positivo r tal, que o valor correspondente de $f(x)$ tenha o signal do seu primeiro termo. O mesmo terá logar para todos os valores de x *menores* que r , ou *maiores* que r , conforme $f(x)$ está ordenada em ordem crescente ou decrescente.

4.º Dando a x na função inteira $f(x)$ o incremento real ou imaginário h , será pela fórmula de Taylor

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} + \dots$$

D'aqui resulta que será

$$\begin{aligned} \text{mod } [f(x+h) - f(x)] &\equiv \text{mod } h \text{ mod } f'(x) \\ &+ (\text{mod } h)^2 \text{ mod } \frac{f''(x)}{2} + \dots; \end{aligned}$$

e pois que o segundo membro se annulla para $\text{mod } h = 0$, resulta que

$$\text{mod } [f(x+h) - f(x)]$$

se pode tornar menor que qualquer quantidade positiva arbitrariamente pequena δ para valores sufficientemente pequenos de $\text{mod } h$.

117. Diz-se *algébrica, racional e inteira* a equação

$$(1) \quad p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0,$$

cujo primeiro membro é um polynómio inteiro contendo a *incógnita* x . Já sabemos o que deve entender-se por *primeiro, segundo, último* termo d'este polynómio. O primeiro termo pode considerar-se sempre positivo porque, se fosse negativo, multiplicariamos a equação por -1 . Chama-se *raiz* da equação o numero α que, substituído por x , torna $\text{mod } f(\alpha) = 0$.

Na demonstração do principio fundamental da theoria das equações algébricas inteiras havemos de fazer uso do seguinte:

LEMMA. — *Dada a função inteira* $f(x)$, *existirá sempre pelo menos um valor* α *de* x , *para o qual o valor de* $\text{mod } f(x)$ *é mínimo.*

Em outros termos: para qualquer valor de $\text{mod } x$ será sempre

$$\text{mod } f(x) \geq \text{mod } f(\alpha).$$

Na demonstração d'este lemma começaremos por provar que:

I *Existe necessariamente um numero determinado real e positivo H tal, que para todos os valores reaes ou imaginários de x seja sempre $\text{mod } f(x) \geq H$; e além d'isso tal, que haja sempre algum valor de x para o qual seja*

$$(2) \quad \text{mod } f(x) - H < \varepsilon,$$

por menor que seja a quantidade positiva, diferente de zero e arbitrariamente pequena ε .

Imaginemos construida de qualquer modo uma successão indefinida de numeros positivos, diferentes de zero e decrescentes

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots,$$

taes que seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Considerando a progressão

$$0, \varepsilon_1, 2\varepsilon_1, 3\varepsilon_1, \dots,$$

cujos termos dividem todo o campo dos numeros positivos em pequenos intervallos de grandeza ε , é claro que algum d'estes intervallos será o primeiro em que se encontre um valor positivo de $\text{mod } f(x)$. Designemos por $\mu\varepsilon_1$ e $(\mu+1)\varepsilon_1$ os dois extremos d'este intervallo; para todos os valores de x será

$$\text{mod } f(x) \geq \mu\varepsilon_1,$$

e entre elles hade certamente existir um pelo menos para o qual seja

$$\text{mod } f(x) \leq (\mu+1)\varepsilon_1.$$

Dividindo este primeiro intervallo em outros mais pequenos, cuja amplitude não exceda ε_2 , por meio da progressão

$$\mu \varepsilon_1 = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m = (\mu + 1) \varepsilon_1,$$

supponhamos que o primeiro dos novos intervallos em que se encontra um valor de $\text{mod } f(x)$ está comprehendido entre a_i e a_{i+1} .

Divida-se ainda este último intervallo por meio de terceira progressão

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

em outros cuja amplitude não exceda ε_3 , e sejam b_j e b_{j+1} os extremos do primeiro d'estes intervallos em que se encontra um valor de $\text{mod } f(x)$.

Fazendo applicação indefinida do mesmo processo, concebe-se que chegemos a formar duas classes de numeros taes como

$$a_1, a_i, b_j, c_h, \dots$$

$$a_m, a_{i+1}, b_{j+1}, c_{h+1}, \dots$$

Cada elemento da primeira d'estas classes é inferior aos elementos da segunda; uns e outros verificam as condições

$$a_m - a_1 = \varepsilon_1, a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon_2, b_{j+1} - b_j \leq \varepsilon_3, c_{h+1} - c_h \leq \varepsilon_4, \text{ etc.}$$

Logo, existe um numero perfeitamente determinado H , que é definido por estas duas classes; este numero gosa evidentemente das propriedades attribuidas a H no enunciado (I).

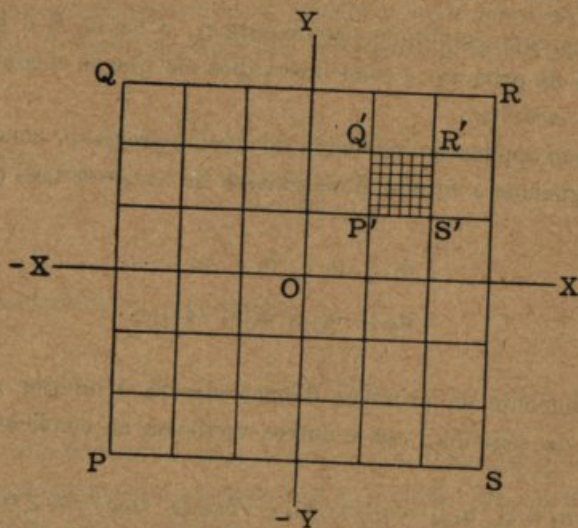
II.— *Existe pelo menos um valor determinado a de x para o qual será precisamente $\text{mod } f(x) = H$, sendo H o mesmo numero a que se refere o enunciado (I).*

Em outros termos: não só existe um limite de que $\text{mod } f(x)$

se aproxima indefinidamente, mas ha mesmo um valor determinado de $\text{mod } x$ que torna exactamente $\text{mod } f(x) = H$, como vamos mostrar.

Ora, sendo $f(x)$ um polynómio inteiro, podemos sempre determinar um valor de $\text{mod } x$ que torne $\text{mod } f(x)$ maior do que qualquer grandeza dada (n.º 116, 2.º); isto é, segundo a representação geometrica dos imaginários de Gauss, podemos sempre achar um valor bastante grande de $r = \text{mod } x$ para que, descrevendo um circulo de raio r com o centro na origem das coordenadas, seja $\text{mod } f(x) > H$ para todos os pontos x exteriores ao circulo.

Por conseguinte podemos tambem construir um quadrado



PQRS com o centro na origem e os lados paralelos aos eixos coordenados, de modo que para todos os pontos x existentes no exterior do quadrado ou na sua periferia a diferença

$$(3) \quad \text{mod } f(x) - H$$

se conserve sempre superior a um numero determinado, positivo e diferente de zero.

D'aqui se segue que os pontos x , por meio dos quaes é possível, conforme o enunciado (I), satisfazer á desigualdade (2), só devem ser procurados no *interior* do quadrado PQRS.

Designemos por l o numero que exprime a medida do lado PQ e, por meio de rectas parallelas aos dois eixos coordenados, divida-se este quadrado noutros eguaes, em numero de m^2 . A medida do lado de cada um dos novos quadrados será expressa por $\frac{l}{m}$ e entre elles haverá pelo menos um P' Q' R' S' tal, que dentro d'elle ou na sua periferia se encontrem pontos em que a desigualdade (2) seja verificada. Se não houvesse nenhum, seria impossivel satisfazer a esta condição por meio de pontos contidos no quadrado PQRS, o que estaria em contração com o que temos admittido.

Dividamos ainda P' Q' R' S' no mesmo numero de quadrados eguaes, e segundo o mesmo processo; o lado de cada um dos novos quadrados será expresso por $\frac{l}{m^2}$, e com o mesmo raciocinio se mostraria que entre elles hade haver algum tal, que no seu interior ou na sua periferia se encontrem pontos que verifiquem a condição (2).

Continuando pelo mesmo processo, conclue-se que chegaríamos a construir uma serie illimitada de quadrados, cujos lados

$$\frac{l}{m}, \frac{l}{m^2}, \frac{l}{m^3}, \dots$$

decrecem indefinidamente. Designando por

$$(4) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

os valores absolutos das abscissas e por

$$(5) \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

os valores absolutos das ordenadas dos vértices

$$P', P'', P''', \dots$$

de cada um d'estes quadrados, vê-se que cada uma das successões infinitas (4) e (5) tende para um limite determinado.

Com effeito será

$$|a_j - a_i| < \frac{l}{m^i}, \quad |b_j - b_i| < \frac{l}{m^i},$$

para cada valor de i e para todos os valores de $j > i$; por conseguinte as successões (4) e (5) satisfazem á condição necessária e sufficiente para a existencia do limite (n.º 79). Pondo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

no interior do quadrado PQRS existirá um ponto determinado M, que é o affixo do complexo $A + Bi$; este ponto encontra-se no interior de cada um dos quadrados successivos, que atraz considerámos.

Ora a funcção $f(x)$ é contínua no ponto M (n.º 116, 4.º); além d'isto os lados dos quadrados que conteem M são indefinidamente decrescentes, e tendem para zero. Por conseguinte é claro que, dado um numero δ positivo, arbitrariamente pequeno e differente de zero, poderá sempre determinar-se um quadrado $P^{(i)} Q^{(i)} R^{(i)} S^{(i)}$ muito pequeno e tal, que seja em valor absoluto

$$|\text{mod } f(x) - \text{mod } f(A + Bi)| < \delta$$

para todos os pontos x contidos no mesmo quadrado.

Por outra para parte a differença (3) pode-se tornar arbitrariamente pequena por meio de pontos contidos no mesmo quadrado, como já se disse; e entre estes pontos deve existir *pelo*

menos um x_i para o qual seja

$$(6) \quad |\text{mod } f(x_i) - H| < \delta.$$

Mas este ponto x_i encontra-se entre aquelles que devem satisfazer á desigualdade precedente, onde se pode substituir x por x_i ; e então d'essa desigualdade e de (6) se conclue à *fortiori* que será

$$(7) \quad |\text{mod } f(A + Bi) - H| < 2\delta.$$

Ora o primeiro membro de (7) é um numero determinado e constante, em quanto que a quantidade δ se pode tornar arbitrariamente pequena. Por conseguinte aquella relação só pode subsistir com a condição de ser o seu primeiro membro igual a zero, ou

$$\text{mod } f(A + Bi) = H.$$

Fica assim completada a demonstração do lemma enunciado.

118. THEOREMA DE DALEMBERT. — *Toda a equação algébrica racional e inteira tem pelo menos uma raiz real ou imaginária.*

São conhecidas muitas demonstrações d'este principio, que é o fundamento da theoria das equações. Adoptamos com ligeiras variantes a de Legendre, modificada por Cauchy.

Seja $f(x) = 0$ uma equação algébrica e inteira, de coefficients reaes ou imaginários. Começaremos por provar que:

Se a quantidade real ou imaginária x_0 substituída por x em $f(x)$ não tornar $\text{mod } f(x_0) = 0$, haverá um numero real ou imaginário h differente de zero para o qual é

$$(8) \quad \text{mod } f(x_0 + h) < \text{mod } f(x_0).$$

No desenvolvimento de $f(x_0 + h)$ pela fórmula de Taylor pode acontecer que para $x = x_0$ se annullem successivamente algumas derivadas de $f(x)$, incluindo a primeira. Não podem annullar-se todas pela razão que já dissemos (n.º 106) e, designando por m a ordem da primeira que não se annulla, teremos

$$f(x_0 + h) \equiv f(x_0) + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Dividindo os dois membros d'esta identidade por $f(x_0)$, o que é permitido por ser $f(x_0)$ diferente de zero, acha-se o quociente

$$Q \equiv \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \equiv 1 + A_m h^m + \dots + A_n h^n,$$

pondo por brevidade

$$A_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i! f(x_0)}, \quad i = m, m+1, \dots, n.$$

Ora, dando ao coefficiente A_m a forma

$$A_m = \rho_m (\cos \varphi_m + i \operatorname{sen} \varphi_m),$$

será $\rho_m \neq 0$ por ser $A_m \neq 0$. Por outra parte, sendo

$$h = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

será tambem

$$A_m h^m = \rho_m \rho^m [\cos (\varphi_m + m \varphi) + i \operatorname{sen} (\varphi_m + m \varphi)].$$

Posto isto, determinemos o argumento φ da arbitraria h pela

condição de ser

$$\varphi_m + m\varphi = \pi, \text{ ou } \varphi = \frac{\pi - \varphi_m}{m};$$

virá

$$A_m h^m = -\rho_m \rho^m,$$

e o quociente Q torna-se em

$$(9) \quad Q = (1 - \rho_m \rho^m) + h^m (A_{m+1} h + A_{m+2} h^2 + \dots + A_n h^{n-m}).$$

Determinemos tambem o módulo ρ de h pela condição de ser

$$\rho_m \rho^m < 1 \quad \text{ou} \quad \rho < \sqrt[m]{\frac{1}{\rho_m}};$$

a quantidade $1 - \rho_m \rho^m$ será positiva e $\text{mod}(1 - \rho_m \rho^m) = 1 - \rho_m \rho^m$.

Além d'isto, aos outros termos de (9) podemos dar a forma Rh^m , sendo R um polynómio inteiro em h , que se annulla para $h = 0$; e ainda podemos (n.º 116) sujeitar ρ á condição de tornar

$$\text{mod } R < \rho_m \quad \text{ou} \quad \text{mod}(Rh^m) < \rho_m \rho^m.$$

Dando a ρ o menor dos valores determinados pelas duas condições precedentes, virá finalmente

$$\text{mod } Q = \frac{\text{mod } f(x_0 + h)}{\text{mod } f(x_0)} < 1,$$

e por conseguinte

$$\text{mod } f(x_0 + h) < \text{mod } f(x_0),$$

como queríamos demonstrar.

Ora, se designarmos por α um dos valores de x para os quaes $f(x)$ tem o valor mínimo, será (n.º 117) para todos os valores possíveis de x

$$(10) \quad \text{mod } f(x) \geq \text{mod } f(\alpha).$$

Por conseguinte será $\text{mod } f(\alpha) = 0$; com effeito, se podesse ser

$$\text{mod } f(\alpha) = A > 0,$$

haveria um numero h , como acabamos de demonstrar, que tornaria

$$\text{mod } f(\alpha + h) < A,$$

e esta desigualdade é evidentemente incompativel com (10).

D'este modo fica demonstrado que a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz α .

119. Designando por a_1 uma raiz da equação $f(x) = 0$ de grau n , o polynómio $f(x)$ será divisivel por $x - a_1$ (n.º 9, *Theor. I*); e o quociente d'esta divisão será um polynómio inteiro de grau $n - 1$, que designaremos por $f_1(x)$.

Mas a equação $f_1(x) = 0$ terá do mesmo modo uma raiz a_2 ; portanto $f_1(x)$ será divisivel por $x - a_2$, e o quociente da divisão será ainda uma função inteira $f_2(x)$ do grau $n - 2$.

Continuando pelo mesmo processo, facilmente se reconhece que tem logar em todos os casos a fórmula

$$(11) \quad f(x) \equiv p_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

que no n.º 9 ficou dependente da existencia das raizes a_1, a_2, \dots, a_n .

Todos estes numeros são raizes da equação $f(x) = 0$. Mas vimos naquelle numero que o polynómio de grau n não pode

annular-se para mais de n valores diferentes de x , excepto se fôr identicamente $f(x) \equiv 0$, isto é, se os coefficients de todos os termos de $f(x)$ forem zero. Logo, a equação de grau n não tem mais de n raizes.

Por outra parte podem ser eguaes alguns factores do segundo membro de (14). Se fôr, por exemplo, $a_1 = a_2 = \dots = a_i$ ($i < n$) diremos que a equação tem i raizes eguaes a a_1 , ou que a_1 é uma raiz múltipla, do grau i de multiplicidade. Com esta convenção a equação tambem não pode ter menos de n raizes e portanto:

A equação algébrica e inteira de grau n tem n raizes reaes ou imaginárias, eguaes ou deseguaes.

Se houver só uma raiz igual a a_1 , diz-se que a_1 é raiz simples; se houver duas, é dupla, etc. Em geral daremos a $f(x)$ a forma

$$(12) \quad f(x) \equiv p_0 (x - a_1)^r (x - a_2)^s \dots (x - a_k)^v,$$

sendo $r + s + \dots + v = n$. Se fôr $r = s = \dots = v = 1$, a equação só tem raizes simples.

O grau da equação pode abaixar-se em tantas unidades, quantas sejam as raizes conhecidas da mesma equação. Bastará dividir o seu primeiro membro pelo producto dos factores binómios da forma $x - a$ formados com estas raizes.

120. Na equação inteira de *coefficients reaes* as raizes imaginárias são conjugadas duas a duas.

Com effeito, se $a + ib$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$, será

$$f(x) \equiv [x - (a + ib)] Q$$

Mas, sendo reaes os coefficients dos termos de $f(x)$, a quantidade i deve desaparecer do segundo membro d'esta identidade quando se effectuarem as operações indicadas. Logo, no producto de $x - (a + ib)$ por Q só pode haver potencias pares

de i e a identidade precedente subsiste quando se muda i em $-i$. Teremos, pois,

$$f(x) \equiv [x - (a - ib)] Q',$$

sendo ainda Q' função inteira de x ; por onde se vê que $a - ib$ é também raiz da equação $f(x) = 0$.

O producto (n.º 72, 2.º)

$$[x - (a + ib)][x - (a - ib)] = (x - a)^2 + b^2$$

é positivo para qualquer valor real de x . Por conseguinte, se a_1, a_2, \dots, a_m forem *todas* as raízes reais da equação (1), na identidade

$$(13) \quad f(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \varphi(x)$$

o factor $\varphi(x)$ é o producto dos factores binómios correspondentes ás raízes imaginárias sómente, e portanto conserva valores positivos para todos os valores reais de x . O grau $n - m$ de $\varphi(x)$ será par, visto que a equação $\varphi(x) = 0$ só tem raízes imaginárias, cujo numero é par.

121. Suppondo a $f(x)$ a forma (1) e designando por a_1, a_2, \dots, a_n as n raízes da equação $f(x) = 0$, teremos

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n \equiv p_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Attendendo á regra da multiplicação binomial e ao principio das identidades, d'esta egualdade se deduz que será

$$(14) \quad p_i = (-1)^i p_0 S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

designando por S_i a somma dos productos distinctos formados com as raízes, tomadas i a i . Assim teremos designadamente

para o coefficiente do segundo termo da equação dada

$$p_1 = -p_0(a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

e para o termo conhecido

$$p_n = (-1)^n p_0 a_1 a_2 \dots a_n ;$$

isto é:

O coefficiente do segundo termo é igual ao producto do coefficiente do primeiro pela somma das raizes tomadas com signal contrário.

O termo conhecido é igual ao coefficiente do primeiro termo multiplicado pelo producto das raizes, com o mesmo signal ou com signal contrário conforme o grau da equação é par ou impar.

122. Se tivermos a egualdade

$$(x - a_1)^r (x - a_2)^s \dots (x - a_k)^v \equiv (x - a'_1)^{r'} (x - a'_2)^{s'} \dots (x - a'_k)^{v'}$$

com $r + s + \dots + v = r' + s' + \dots + v' = n$, o binómio $x - a'_1$, que é factor do segundo membro, dividirá tambem o primeiro. Mas esta condição não se poderá realisar, sem que algum dos factores lineares do primeiro membro seja precisamente igual a $x - a'_1$; supponhamos que é $x - a_1 = x - a'_1$. Do modo mesmo se mostraria que deverá ser $x - a'_2 = x - a_2$, etc.

Assim a egualdade precedente tornava-se em

$$(x - a_1)^r (x - a_2)^s \dots (x - a_k)^v \equiv (x - a_1)^{r'} (x - a_2)^{s'} \dots (x - a_k)^{v'}.$$

Suppondo $r > r'$ e dividindo ambos os membro por $(x - a_1)^{r'}$, teriamos

$$(x - a_1)^{r-r'} (x - a_2)^s \dots (x - a_k)^v \equiv (x - a_2)^{s'} \dots (x - a_k)^{v'}.$$

Por conseguinte

$$(x - a_1)^{r-r'}$$

seria divisor do segundo membro, o que evidentemente só pode ter lugar sendo $r - r' = 0$ ou $r = r'$, visto serem diferentes os números a_1, a_2, \dots, a_k . Do mesmo modo se acharia $s = s'$, etc.; e d'aqui se conclue que a decomposição do polynomio $f(x)$ em factores lineares só se pode operar por uma forma única.

XIII. — **Maximo divisor commum.** **Eliminação.**

123. Se as equações $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$ tiverem raizes communs, os polynómios $f(x)$ e $F(x)$ serão conjunctamente divisíveis pelo producto dos factores binómios formados com estas raizes. Reciprocamente, se o polynómio $D(x)$ dividir simultaneamente os dois $f(x)$ e $F(x)$, as raizes da equação $D(x) = 0$ convirão ás duas $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$. Em geral:

DEFINIÇÃO. — *Dá-se o nome de máximo divisor commum de dois polynómios ao polynómio de grau mais elevado que os divide ambos.*

O grau do maior divisor commum de dois polynómios $f(x)$ e $F(x)$ indica o numero de raizes communs ás equações $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$.

Designemos por A e B dois polynómios, funcções inteiras de uma variavel x , e por C outro polynómio que é divisor de A e de B. O producto de C por um factor h independente de x tambem é divisor de A, porque da identidade $A \equiv CQ$, em que Q é um polynómio inteiro, se deduz

$$A \equiv h C. \left(\frac{Q}{h} \right)$$

e $\frac{Q}{h}$ é ainda um polynómio inteiro relativamente a x . Do mesmo modo se veria que hC é divisor de B ; e por este motivo não se consideram diferentes dois divisores communs de A e B , que se distinguem sómente por um factor constante. Ambos admittirão os mesmos factores binómios da forma $x - a$, cuja existencia unicamente nos interessa.

Ordenem-se os polynómios A e B segundo as potencias decrescentes da variavel x , e proceda-se á divisão de um d'elles pelo outro. Suppondo que o grau de B não é maior que o de A , obteremos assim a identidade

$$A \equiv BQ + R,$$

em que Q e R são polynómios inteiros e o grau de R é inferior ao de B . Se um polynómio inteiro C fôr divisor de A e de B , esse polynómio será tambem divisor de B e R ; com effeito, das identidades $A \equiv CA'$ e $B \equiv CB'$, em que A' e B' são polynómios inteiros, deduz-se

$$R \equiv A - BQ \equiv C(A' - B'Q)$$

e $A' - B'Q$ é tambem um polynómio inteiro em x . Do mesmo modo se provaria que um polynómio divisor de B e de R tambem é divisor de A .

Além d'isto podemos notar que, se B fôr divisor de A , será B o maior divisor commum dos dois polynómios A e B . Com effeito, designando por m o grau de B , não pode haver polynómio de grau superior a m que seja divisor de B . Por outra parte um polynómio C de grau m , que divida ao mesmo tempo A e B , não pode neste caso distinguir-se de B senão por um factor constante; por isso que, se fôr $B \equiv CB'$, a prática da divisão mostra que será $B' = \frac{b_0}{c_0}$, sendo b_0 e c_0 os coefficients de x^m em B e C .

124. Consideremos em geral dois polynómios inteiros

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \\ F(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \end{cases}$$

ordenados segundo as potencias decrescentes da variavel. Supponmos que nenhum d'elles se reduz a uma simples constante e que o grau n de $f(x)$ não é inferior ao grau m de $F(x)$, isto é, que

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad n \geq m.$$

Applicando aos polynómios (1) o *algorithmo de Euclides*, empregado em Arithmetica na determinação do maior divisor commum de dois numeros, obteremos as identidades

$$(2) \quad \begin{cases} f(x) \equiv Q_0(x) F(x) + R_1(x), \\ F(x) \equiv Q_1(x) R_1(x) + R_2(x), \\ R_1(x) \equiv Q_2(x) R_2(x) + R_3(x), \\ \dots \\ R_{s-1}(x) \equiv Q_s(x) R_s(x) + R_{s+1}. \end{cases}$$

Os restos successivos R são polynómios de graus decrescentes, de modo que, passado um certo numero de divisões, havemos de chegar a um que não contenha x . É este último resto que designamos por R_{s+1} .

Reflectindo no *algorithmo* (2), reconhece-se que qualquer divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$ é tambem divisor commum de $F(x)$ e $R_1(x)$, assim como de $R_1(x)$ e $R_2(x)$ e ainda de todos os restos seguintes. Do mesmo modo cada divisor de dois restos successivos será divisor de todos os restos antecedentes,

e portanto tambem de $f(x)$ e $F(x)$. D'estas operações podem resultar os dois casos seguintes :

1.º $R_{s+1} \neq 0$. N'este caso nenhum polynómio inteiro em x pode dividir R_{s+1} , porque este resto é independente de x , nem por conseguinte os polynómios dados. Diz-se então que $f(x)$ e $F(x)$ são *primos entre si*.

2.º $R_{s+1} = 0$. Então R_s é o maior divisor commum de R_s e R_{s+1} , e portanto tambem de $f(x)$ e $F(x)$. O polynómio R_s é completamente determinado.

Convém simplificar a prática das operações (2), que são laboriosas. Para este effeito supprimem-se em cada divisor os factores communs aos respectivos coefficients; além d'isto, se o coefficiente do primeiro termo de um dividendo parcial não é divisivel pelo coefficiente do primeiro termo do divisor respectivo, evita-se o apparecimento de coefficients fraccionarios multiplicando esse dividendo por um numero que torne a divisão possivel. Na escolha d'este factor observa-se a regra seguinte, que resulta immediatamente do processo da divisão algébrica: sejam h e k respectivamente os coefficients dos primeiros termos do dividendo e do divisor e $k = \alpha \beta$, designando por β o factor de k que não entra em h ; multiplica-se o dividendo por β se o seu grau é igual ao do divisor, por $\alpha \beta^2$ se o grau do dividendo excede o do divisor em uma unidade, e assim successivamente. Estas operações auxiliares não influem no resultado final, visto que na determinação do maior divisor commum de dois polynómios não se attende a factores constantes, como vimos.

Sejam, por exemplo, os polynómios

$$f(x) \equiv a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \quad a_0 \neq 0,$$

$$F(x) \equiv b_0 x^2 + b_1 x + b_2, \quad b_0 \neq 0.$$

Multiplicando $f(x)$ por b_0 e dividindo o producto por $F(x)$,

o resto da divisão será

$$R_1 \equiv (a_1 b_0 - a_0 b_1) x + (a_2 b_0 - a_0 b_2).$$

Se fôr $a_1 b_0 - a_0 b_1 = 0$, a operação está concluída; se fôr simultaneamente $a_2 b_0 - a_0 b_2 \neq 0$, os dois polynómios são primos entre si, e reciprocamente.

Se fôr diferente de zero o coefficiente de x em R_1 , multiplique-se $F(x)$ por $(a_1 b_0 - a_0 b_1)^2$ e divida-se o producto por R_1 . Acharemos por último que o resto independente de x é

$$R_2 = [(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)] b_0.$$

Dividindo R_2 por b_0 , que supozemos diferente de zero, vê-se que a condição necessária e sufficiente para os dois polynómios serem primos entre si é

$$(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0,$$

na qual está contida a precedente.

Para ter o maior divisor commum de tres polynómios $f(x)$, $F(x)$ e $\varphi(x)$, procura-se primeiro o maior divisor commum $R_1(x)$ de dois d'elles e depois o maior divisor commum entre o terceiro e $R_1(x)$.

125. Pela primeira identidade (2) é

$$R_1(x) \equiv f(x) - Q_0(x) F(x).$$

Da segunda tira-se $R_2(x) \equiv F(x) - Q_1(x) R_1(x)$ ou, substituindo a expressão precedente de R_1 ,

$$R_2(x) \equiv -Q_1(x) f(x) + [Q_0(x) Q_1(x) + 1] F(x).$$

Pela terceira acharíamos, eliminando R_1 e R_2 ,

$$R_3(x) \equiv [Q_1(x)Q_2(x)+1]f(x) - [Q_0(x)Q_1(x)+1]Q_2(x) + Q_0(x)F(x),$$

e assim por deante.

Para determinar a forma geral dos restos usaremos da notação seguinte :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} [] = 1, \\ [a_1] = a_1, \\ [a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1 \\ [a_1, a_2, a_3] = [a_1, a_2] a_3 + [a_1] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] a_n + [a_1, \dots, a_{n-2}]; \end{array} \right.$$

e vamos mostrar que, se o resto R_k é formado segundo a lei indicada pela expressão de R_3 quando k tem qualquer valor menor que $s+1$, a mesma lei se verifica para o resto R_{s+1} e portanto é geral.

Supponhamos pois que é, simplificando a notação dos quocientes,

$$R_{s-1} \equiv (-1)^{s-2} [Q_1, \dots, Q_{s-2}] f(x) + (-1)^{s-1} [Q_0, \dots, Q_{s-2}] F(x),$$

$$R_s \equiv (-1)^{s-1} [Q_1, \dots, Q_{s-1}] f(x) + (-1)^s [Q_0, \dots, Q_{s-1}] F(x).$$

Da última identidade (2) tira-se $R_{s+1} \equiv R_{s-1}(x) - Q_s(x) R_s(x)$ ou, eliminando R_s e R_{s-1} ,

$$R_{s+1} \equiv (-1)^s [Q_1, Q_2, \dots, Q_s] f(x) + (-1)^{s+1} [Q_0, Q_1, \dots, Q_s] F(x),$$

com a mesma forma dos outros restos.

Ora, se os polynómios (1) forem primos entre si, será $R_{s+1} \neq 0$. Dividindo a última expressão por R_{s+1} , teremos neste caso a identidade

$$(4) \quad \varphi(x)f(x) + \phi(x)F(x) \equiv 1,$$

fazendo

$$\varphi(x) \equiv \frac{(-1)^s}{R_{s+1}} [Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_s(x)],$$

(5)

$$\phi(x) \equiv \frac{(-1)^{s+1}}{R_{s+1}} [Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_s(x)].$$

Segundo as definições (3), vê-se que $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ são polynómios inteiros em x . A existencia de dois polynómios $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ que verifiquem a identidade (4) é portanto condição necessária para serem primos entre si os polynómios $f(x)$ e $F(x)$. Esta condição é também sufficiente, porque da mesma identidade resulta que qualquer factor commum de $f(x)$ e $F(x)$ será também factor de 1, isto é, só pode ser uma constante.

Quanto aos graus de φ e ϕ notaremos que, designando respectivamente por k_1, \dots, k_n os graus de a_1, \dots, a_n , as definições (3) mostram que o grau de $[a_1, \dots, a_n]$ não pode ser superior a $k_1 + \dots + k_n$. Ora, sendo n o grau de $f(x)$, m o de $F(x)$ e designando por m_i o grau de qualquer resto $R_i(x)$, os graus de Q_0, Q_1, Q_2, \dots serão respectivamente $n - m, m - m_1, m_1 - m_2$, etc. Por conseguinte, segundo as fórmulas (5), os graus de φ e ϕ , respectivamente, não podem ser superiores a

$$(n - m_1) + (m_1 - m_2) + \dots + (m_{s-1} - m_s) = n - m_s,$$

$$(n - m) + (m - m_1) + (m_1 - m_2) + \dots + (m_{s-1} - m_s) = n - m_s;$$

e portanto será o grau de φ menor que o de F e o grau de ϕ menor que o de f , visto ser $m_i > 0$. Em outros termos: o grau de φ não pode exceder $m-1$ e o de ϕ não pode exceder $n-1$.

Por outra parte, se dois polynómios φ_1 e ϕ_1 , de graus respectivamente inferiores a m e a n , verificam a identidade

$$\varphi_1(x)f(x) + \phi_1(x)F(x) \equiv 1,$$

subtrahindo esta identidade de (4) teremos a seguinte

$$(\varphi - \varphi_1)f \equiv (\phi_1 - \phi)F.$$

D'aqui resulta que deverá ser F um divisor de $\varphi - \varphi_1$ e f um divisor de $\phi - \phi_1$, visto serem f e F primos entre si; mas estas condições só podem verificar-se quando as diferenças $\varphi - \varphi_1$ e $\phi_1 - \phi$ se annullam identicamente, visto que os seus graus são inferiores respectivamente a m e a n . Logo, hade ser

$$\varphi \equiv \varphi_1, \quad \phi \equiv \phi_1;$$

isto é, ha só um par de polynómios que satisfaçam ás condições indicadas. Assim:

THEOREMA I. — *A condição necessária e sufficiente para que dois polynómios $f(x)$ e $F(x)$ sejam primos entre si consiste na existencia de dois polynómios $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ que verifiquem a identidade (4).*

THEOREMA II. (Bezout). — *Se forem primos entre si os polynómios $f(x)$ de grau n e $F(x)$ de grau m , sem que algum d'elles seja constante, existe um par e só um de polynómios $\varphi(x)$ e $\phi(x)$, o primeiro de grau inferior a m e o segundo de grau inferior a n , que verificam a identidade (4).*

THEOREMA III. (Euler). — *A condição necessária e sufficiente*

para que dois polynómios inteiros $f(x)$ e $F(x)$ de graus n e m tenham um divisor commum, que não seja constante, consiste na existencia de dois polynómios $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, cujos graus não sejam respectivamente maiores que $m-1$ e $n-1$, com os quaes seja verificada a identidade

$$(6) \quad \varphi(x)f(x) + \psi(x)F(x) \equiv 0.$$

Este último theorema pode-se demonstrar directamente do modo seguinte.

A condição referida é necessária. Com effeito, se f e F não são primos entre si, designando por Δ o seu maior divisor commum e por q o grau de Δ , teremos

$$f \equiv \Delta f_1, \quad F \equiv \Delta F_1$$

e os polynómios f_1 e F_1 , primos entre si, são de graus $n-q$ e $m-q$. Mas, representando por M um polynómio de grau $q-1$, será evidentemente

$$fF_1M - Ff_1M \equiv 0;$$

pondo $\varphi = F_1M$ e $\psi = -f_1M$, os polynómios φ e ψ serão respectivamente de graus $m-1$ e $n-1$ e verificam a identidade (6).

A mesma condição é sufficiente. Sejam, com effeito, φ e ψ dois polynómios de graus $m-1$ e $n-1$ respectivamente, os quaes verificam a identidade (6). D'esta identidade deduz-se a seguinte

$$\varphi(x)f(x) \equiv -\psi(x)F(x);$$

e se f e F fossem primos entre si, o polynómio f seria divisor de $\psi(x)$, e F seria divisor de $\varphi(x)$. Mas nenhuma d'estas con-

dições se pode verificar, visto que o grau de ϕ é inferior ao de f , e o grau de φ é inferior ao de F . Logo, a identidade (6) só pode ter logar quando os polynómios f e F admittem divisor commum.

126. A condição (*Theor. II*) para serem primos os polynómios (1) consiste na existencia de constantes $p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ para as quaes seja

$$(p_0 x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \dots + p_{m-1})(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) + (q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \dots + q_{n-1})(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \equiv 1.$$

Esta identidade é equivalente ao seguinte systema de equações, que se obtêm egualando os coefficients das mesmas potencias de x nos seus dois membros :

$$(7) \begin{cases} a_0 p_0 & + b_0 q_0 & = 0, \\ a_1 p_0 + a_0 p_1 & + b_1 q_0 + b_0 q_1 & = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_m p_0 + a_{m-1} p_1 + \dots + a_1 p_{m-1} + b_m q_0 + b_{m-1} q_1 + \dots + b_0 q_m & = 0, \\ a_{m+1} p_0 + a_m p_1 + \dots + a_2 p_{m-1} & + b_m q_1 + \dots + b_0 q_{m+1} & = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n p_0 + a_{n-1} p_1 + \dots + a_{n-m+1} p_{m-1} & + b_m q_{n-m} + \dots + b_1 q_{n-1} & = 0, \\ & a_n p_1 + \dots + a_{n-m+2} p_{m-1} & + b_m q_{n-m+1} + \dots + b_2 q_{n-1} & = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & a_n p_{m-1} & + b_m q_{n-1} & = 1. \end{cases}$$

Transpostas as linhas e columnas, e permutadas as últimas linhas, o determinante d'este systema de $m + n$ equações não

homogeneas com $m+n$ incógnitas é

$$R \begin{pmatrix} a_0, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & \dots & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

com $m+n$ linhas e columnas.

Se fôr $R \neq 0$, as equações (7) tem uma solução única, dada pela regra de Cramer; e os polynómios (1) são primos entre si.

Se fôr $R = 0$, parece á primeira vista que dois casos são possiveis: ou o systema é incompativel, ou as equações tem uma infinidade de soluções. Mas esta última alternativa tem de ser posta de parte, por isso que (*Theor. II*) não ha mais de um par de polynómios φ e ψ que satisfaçam á identidade (4) e cujos graus não sejam superiores respectivamente a $m-1$ e $n-1$. Por conseguinte, se fôr $R = 0$, as equações (7) não tem solução, e f e F tem um factor commum. R chama-se a *resultante* de f e F .

O termo *resultante* fica assim definido no caso de f e F serem pelo menos do primeiro grau. Consideremos, porém, o caso de ser $m=0$ e $n>0$. No determinante R , que se reduz ás ultimas n linhas, só podem ser differentes de zero os elementos da segunda diagonal, que são todos eguaes a b_0 . Assim teremos

$$R \begin{pmatrix} a_0, \dots, a_n \\ b_0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_0^n.$$

Se fôr $b_0 \neq 0$, tambem será $R \neq 0$ e sem duvida f e F são primos entre si, porque F reduz-se a uma constante e não admite factores que não sejam constantes. Pelo contrário, se fôr $b_0 = 0$, será $R = 0$ e cada factor de f é tambem factor de F , porque então F é identicamente nullo.

Se fôr $n = 0$ e $m > 0$, teremos semelhantemente

$$R \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix} = a_0^m,$$

e do mesmo modo se veria que a condição necessária e sufficiente para que f e F sejam primos entre si é $R \neq 0$.

Finalmente, se fôr $m = n = 0$, designaremos ainda a resultante pelo symbolo

$$R \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

admittindo convencionalmente que elle representará a unidade quando os dois coefficients a_0 e b_0 não são ambos nullos e zero quando é $a_0 = b_0 = 0$. D'este modo podemos estabelecer com toda a generalidade o seguinte

THEOREMA. — *A condição necessária e sufficiente para dois polynómios serem primos entre si é que a sua resultante seja diferente de zero.*

127. *Subresultante de ordem i dos polynómios f e F é o determinante que se obtem quando na resultante d'estes polynómios supprimimos as primeiras i e as últimas i columnas, assim como as primeiras i e as últimas i linhas.*

Consideremos, por exemplo, os dois polynómios seguintes,

de graus 5 e 3:

$$(8) \quad \begin{aligned} f(x) &\equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5, \\ F(x) &\equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3. \end{aligned}$$

A resultante R d'estes polynómios e as suas *primeira, segunda e terceira* subresultantes R_1 , R_2 e R_3 são os determinantes, de ordens 8, 6, 4 e 2 respectivamente, que estão representados no quadro seguinte:

$$(9) \quad R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Se os polynómios (8) admitem um divisor commum do primeiro grau $x - \alpha$, teremos

$$f(x) \equiv (x - \alpha) f_1(x), \quad F(x) \equiv (x - \alpha) F_1(x);$$

sendo f_1 e F_1 polynómios inteiros da fórmula

$$f_1(x) \equiv c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4,$$

$$F_1(x) \equiv d_0 x^2 + d_1 x + d_2,$$

cuja resultante é

$$r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c^2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Ruffini (n.º 8) será

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1 - \alpha c_0, \quad a_2 = c_2 - \alpha c_1, \quad a_3 = c_3 - \alpha c_2$$

$$a_4 = c_4 - \alpha c_3, \quad a_5 = -\alpha c_4;$$

$$b_0 = d_0, \quad b_1 = d_1 - \alpha d_0, \quad b_2 = d_2 - \alpha d_1, \quad b_3 = -\alpha d_2,$$

visto serem nullos os restos das divisões de $f(x)$ e $F(x)$ por $x - \alpha$. Portanto, subtrahindo de cada uma das columnas 2, 3, 4, 5 e 6 de r a precedente multiplicada por α , acha-se que é $r = R_1$; e d'aqui resultaria tambem $r_1 = R_2$, etc. Estes resultados são geraes; logo:

THEOREMA I. — «Se tiverem logar as identidades

$$f(x) \equiv (x - \alpha) f_1(x), \quad F(x) \equiv (x - \alpha) F_1(x),$$

a resultante e as subresultantes successivas de f_1 e F_1 serão eguaes respectivamente ás successivas subresultantes de f e F .

COROLLARIO. — O grau do maior divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$ é o indice da primeira subresultante $R_0 = R, R_1, R_2$, etc. que não se annulla.

THEOREMA II. — «Se for i o grau do maior divisor commum D dos polynomios $f(x)$ e $F(x)$, pode-se obter D por meio da subresultante i de f e F substituindo nesta subresultante o último elemento da última linha de coefficients de f por $f(x)$ e os ele-

mentos precedentes da mesma columna por $xf(x)$, $x^2f(x)$, etc. successivamente; e substituindo além d'isto o último elemento da primeira linha de coefficients de F por $F(x)$ e os elementos seguintes da mesma columna por $x F(x)$, $x^2 F(x)$, etc.

Com effeito o determinante assim formado é divisivel por D , visto que D é factor de todos os elementos da sua última columna; não admite divisor de grau mais elevado, porque nas outras columnas todos os elementos são constantes; finalmente esse determinante é de grau i porque, resolvendo-o na somma de determinantes de elementos simples, o termo de grau mais elevado neste desenvolvimento é de grau i e o coefficiente de x^i é precisamente a subresultante R_i que supponmos differente de zero.

Para ver melhor como assim é, consideremos em particular os polynómios (8), suppondo que a sua resultante R se annulla e que a primeira subresultante R_1 é differente de zero. O maior divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$ é do primeiro grau, ou $x - a$, e, segundo o *Theor. II*, será representado pelo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & xf(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & f(x) \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & F(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xF(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2F(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & x^3F(x) \end{vmatrix}$$

Com effeito, $x - a$ é factor commum de $f(x)$ e $F(x)$, e portanto é factor de todos os elementos da última columna de D ; d'onde se segue que tambem é factor de D . Por outra parte, se d'esta mesma columna subtrahirmos a somma das cinco primeiras depois de multiplicadas respectivamente por x^6 , x^5 , x^4 ,

x^3 e x^2 , virá

$$(10) \quad D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 x \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 x + a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 x + b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 x \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

onde se vê que D é do primeiro grau em x . Finalmente, decompondo este último determinante na somma de dois de elementos simples, acha-se

$$(11) \quad D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

em que o coefficiente de x é a subresultante R_1 .

No caso que temos considerado os quocientes da divisão de $f(x)$ e $F(x)$ por $x - \alpha$ são os polynómios que anteriormente designámos por f_1 e F_1 . Se elles ainda admittissem um divisor commum $x - \beta$ do primeiro grau, isto é, se fosse $R_1 = 0$ e $R_2 \neq 0$, esse divisor commum seria, segundo o mesmo theorema,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & f_1(x) \\ 0 & 0 & b_0 & F_1(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & x F_1(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x^2 F_1(x) \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a última columna d'este determinante por $x - a$, isto é, mudando f_1 e F_1 respectivamente em f e F , viria a expressão

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & f(x) \\ 0 & 0 & b_1 & F(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & xF(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & x_2 F(x) \end{vmatrix}$$

do maior divisor commum de $f(x)$ e $F(x)$, que seria agora do segundo grau.

Como se vê, este maior divisor commum ainda se forma segundo os principios enunciados no *Theor. II*.

128. ELIMINAÇÃO. — Dadas duas equações a uma incógnita x , a eliminação de x tem por objecto achar a *condição necessária e sufficiente* para que essas equações tenham raizes communs. O problema pode-se resolver sempre do modo que vamos indicar para um caso particular.

Sejam as equações

$$(12) \quad \begin{aligned} f(x) &\equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0, \\ F(x) &\equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0, \\ &\text{com } a_0 \neq 0 \text{ e } b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Considerando as differentes potencias de x como outras tantas incógnitas, teremos assim um systema de duas equações lineares não homogeneas com cinco incógnitas x, x^2, x^3, x^4, x^5 .

Multipliquemos a equação $f(x) = 0$ por x , e depois por x^2 ; multipliquemos tambem $F(x) = 0$ successivamente por x, x^2, x^3, x^4 . Teremos d'este modo o systema das oito equações lineares

não homogêneas com sete incógnitas

$$\begin{aligned}
 a_0 x^7 + a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 &= 0, \\
 a_0 x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x &= 0, \\
 a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 &= 0, \\
 (13) \quad b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 &= 0, \\
 b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x &= 0, \\
 b_0 x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 &= 0, \\
 b_0 x^6 + b_1 x^5 + b_2 x^4 + b_3 x^3 &= 0, \\
 b_0 x^7 + b_1 x^6 + b_2 x^5 + b_3 x^4 &= 0;
 \end{aligned}$$

e a matriz completa d'este systema é exactamente a matriz (9) da resultante R.

Se existir algum valor de x que satisfaça ás equações (12), esse mesmo valor hade satisfazer a (13). Estas equações serão então compatíveis, e para isso é necessário que a matriz do systema e a matriz completa tenham a mesma característica, ou que se annulle o determinante característico R.

Assim, a condição necessária para a existencia de raizes communs ás duas equações $f(x) = 0$ e $F(x) = 0$ é a mesma que para a existencia de um factor commum entre os polynómios f e F , como já tínhamos visto.

Este método de eliminação é conhecido pelo nome de *méthodo dialytico* ou de *Sylvester*.

O numero das raizes communs ás duas equações, assim como a equação para calcular essas raizes pode achar-se do modo que se disse no n.º 126. Assim, se for $R = 0$ e $R_1 \neq 0$, as equações (12) teem só uma raiz commum, que se acha egualando a zero o determinante (10) ou a somma (11). Ora os complementos algebricos dos dois últimos elementos da primeira linha

de R são

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_0 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$B = - \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_0 \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Comparando com (11) e supprimindo o factor commum b_0 que suppomos diferente de zero, a equação $D=0$ daria

$$x = \frac{A}{B}$$

para valor da raiz commum das equações (12).

129. Convem notar que, segundo as definições que temos dado, o determinante

$$\begin{pmatrix} a_0, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix}$$

será a resultante dos polynómios (1) sómente quando sejam $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Assim, por exemplo, a resultante dos polynómios.

$$f(x) \equiv a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$F(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

já não é o determinante de ordem $m+n$

$$R \begin{pmatrix} 0, a_1, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix},$$

mas sim, se fôr $a_1 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$, o determinante de ordem $m+n-1$

$$R \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix};$$

ou, se fôr $a_1 = 0$ ou $b_0 = 0$, um determinante de ordem ainda menos elevada.

Designemos sempre por R o determinante de ordem $m+n$

$$\begin{pmatrix} a_0, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix},$$

e por r a resultante de f e F . Se fôr $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$, podemos escrever

$$R = (-1)^{m+n-1} b_0 r,$$

visto serem zero todos os elementos da primeira columna de R , menos o último. Do mesmo modo, se $n-i$ fôr o grau de f e $b_0 \neq 0$, teremos

$$R = \pm b_0^i r;$$

e se o grau de F fôr $m-i$ e $a_0 \neq 0$ será,

$$R = a_0^i r.$$

Por conseguinte, em qualquer d'estes casos R difere de r unicamente num factor que é differente de zero. Logo:

THEOREMA. — «Ainda que

$$R \begin{pmatrix} a_0, \dots, a_n \\ b_0, \dots, b_m \end{pmatrix}$$

seja a resultante de f e F unicamente quando é $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$, todavia a condição necessária e sufficiente para que f e F admittam um factor commum é sempre $R=0$, mesmo quando é $a_0=0$ ou $b_0=0$, comtanto que não seja $a_0=b_0=0$.

XIV. — Transformação das equações.

130. O problema da transformação das equações tem por objecto, dada uma equação $f(x)=0$, achar outra cujas raizes tenham com as raizes da primeira uma certa relação, que se chama *relação de transformação*.

São fundamentaes os seguintes casos, em que a relação de transformação é do primeiro grau ou *linear*.

1.º — Transformar a equação $f(x)=0$ noutra que tenha as mesmas raizes com signaes contrários.

Segundo a expressão (14) do n.º 121, mudaremos o signal a todos os termos em que o expoente de x seja de paridade differente do grau da equação. Com effeito, p_i é o coefficiente do termo de grau $n-i$, e os dois numeros n e $n-i$ são da mesma paridade quando i é par, e *vice-versa*.

2.º — Transformar a equação $f(x) = 0$ noutra cujas raízes sejam h vezes maiores.

Da relação de transformação $y = hx$ tira-se $x = \frac{y}{h}$. Substituindo na equação (1) do n.º 117 e desembaraçando o resultado de denominadores, virá a transformada

$$p_0 y^n + p_1 h y^{n-1} + \dots + p_{n-1} h^{n-1} y + p_n h^n = 0.$$

Esta equação resulta da proposta mudando x em y , e multiplicando cada termo por uma potencia de h cujo expoente é complementar do expoente de x no mesmo termo para o grau da equação dada. Se forem inteiros h e os coefficients d'esta equação, os coefficients da transformada tambem serão inteiros.

Fazendo $h = p_0$ e dividindo por esta quantidade, a transformada torna-se em

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_n p_0^{n-1} = 0,$$

e o expoente de p_0 em cada termo será complementar do expoente de x nesse termo para $n - 1$. Os coefficients dos termos d'esta equação são numeros inteiros; logo:

Podemos sempre transformar uma equação de coefficients inteiros noutra em que o coefficiente do primeiro termo seja a unidade, sem deixarem de ser inteiros os coefficients da transformada.

3.º — Transformar a equação $f(x) = 0$ noutra cujas raízes tenham menos que as da proposta uma quantidade h .

A relação de transformação é $y = x - h$ ou $x = h + y$. Pela fórmula de Taylor a transformada é

$$f(h + y) = f(h) + y f'(h) + \frac{1}{2} y^2 f''(h) + \dots = 0,$$

e os coefficients d'esta equação obteem-se muito facilmente por

meio da regra de Ruffini. Com efeito, o resto da divisão de $f(x)$ por $x-h$ é $f(h)$ e o quociente, que se acharia dividindo $f(x)-f(h)$ por $x-h=y$, é

$$Q_1 \equiv f'(h) + \frac{1}{2} y f''(h) + \dots$$

Dividindo agora Q_1 por $x-h$, acha-se o resto $f''(h)$ e o quociente

$$Q_2 \equiv \frac{1}{2} f''(h) + \dots,$$

e assim por diante. Vê-se, pois, que os coeficientes da transformada são os restos d'estas divisões sucessivas, e tanto estes restos como os quocientes correspondentes se formariam pela regra de Ruffini, como se verá melhor num exemplo.

Seja $f(x) \equiv 2x^4 - 2x^3 + 5x - 4 = 0$ e procure-se a transformada em $y = x + 2$. Neste caso é $h = -2$ e $p_1 = 0$; convém sempre dar ao cálculo a seguinte disposição:

<i>Coef. da proposta...</i>	2, 0, - 2, + 5, - 4
1. ^a divisão	2, - 4, + 6, - 7, + 10;
2. ^a »	2, - 8, + 22, - 51;
3. ^a »	2, - 12, + 46;
4. ^a »	2, - 16;

a transformada é $2y^4 - 16y^3 + 46y^2 - 51y + 10$. Os coeficientes de Q_1 são 2, -4, 6, -7.

4.^o — Transformar a equação $f(x) = 0$ noutra cujas raízes sejam reciprocas das raízes da proposta.

Mudando x em $\frac{1}{y}$, desembaraçando de donominadores e ordenando em sentido decrescente, os coeficientes da transformada são os mesmos de $f(x)$, dispostos em ordem inversa.

131. Mudando x em $y+h$ e ordenando, a equação (1) do n.º 117 torna-se em

$$p_0 y^n + (p_1 + n p_0 h) y^{n-1} + \left[p_2 + (n-1) p_1 h + \frac{n(n-1)}{2} p_0 h^2 \right] y^{n-2} + \dots = 0.$$

Determinando a arbitrária h pela condição de ser

$$n p_0 h + p_1 = 0,$$

desaparece da equação o termo com a potencia de grau $n-1$ da incógnita; esta equação tem sempre uma solução finita e única

$$h = -\frac{p_1}{n p_0},$$

visto ser diferente de zero o coefficiente $n p_0$ do primeiro termo.

Logo:

Podemos sempre desembaraçar uma equação do seu segundo termo.

A somma das raizes da transformada será igual a zero (n.º 121). Para desembaraçar a equação do terceiro termo teríamos de resolver a equação do segundo grau

$$p_2 + (n-1) p_1 h + \frac{n(n-1)}{2} p_0 h^2 = 0;$$

as raizes d'esta equação podem ser imaginárias, e neste caso o problema não teria solução.

132. Se o último termo da equação $f(x) = 0$ fôr da forma $p_{n-k} x^k$, a equação terá k raizes eguaes a zero.

Se o coefficiente p_0 do primeiro termo decrescer indefinida-

mente, tendendo para zero, uma das raízes da transformada em $\frac{1}{x}$ decresce do mesmo modo, pois que p_0 é o último termo d'esta equação. Mas neste caso x cresce ao mesmo tempo em valor absoluto, podendo tornar-se maior que qualquer quantidade dada; e por este motivo se diz que, sendo $p_0=0$, a equação considerada tem uma raiz infinita.

Do mesmo modo, se os primeiros k coefficients de $f(x)$ ou os últimos k da transformada em $\frac{1}{x}$ tendem para zero, k raízes d'esta última equação tendem para zero. Por conseguinte também k raízes da proposta crescem cada vez mais em valor absoluto, e assim diremos que a equação tem k raízes infinitas.

Pode-se demonstrar directamente que, no caso de tenderem para zero os coefficients dos k primeiros termos de $f(x)$, algumas raízes da equação $f(x)=0$ tendem para o infinito; e que o numero d'estas raízes não pode ser maior nem menor que k , e é portanto igual a k .

XV. — Limites das raízes.

133. *Limite superior* das raízes positivas de uma equação é qualquer numero maior que a maior d'ellas. Os métodos dos limites tem por objecto determinar um criterio por onde se possa encontrar um numero que realice esta condição; vamos tratar dos principaes, começando pelas observações seguintes:

Se todos os termos forem positivos, zero é limite superior das raízes da equação. Se os termos com potencias pares da incógnita tiverem todos o mesmo signal, contrario ao dos termos com potencias impares de x , a equação não tem raízes negativas. Se houver só termos positivos e com potencias pares de x , a equação só tem raízes imaginárias ou nullas, e estas últimas serão em numero par. Se houver só termos positivos e com

potencias ímpares de x , a equação tem um número ímpar de raízes nullas, uma pelo menos, e as restantes imaginárias.

134. MÉTHODO DE NEWTON. — Mudando x em $y + h$ na equação $f(x) = 0$, e substituindo h na equação transformada

$$f(y + h) = f(h) + y f'(h) + \dots + \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(h) = 0$$

por um numero tal, que torne positivos os valores de

$$f(h), f'(h), \dots, f^{(n)}(h),$$

esta última equação não pode dar raízes positivas para $y = x - h$. D'aqui resulta que não pode ser $x > h$, e por tanto:

É limite superior das raízes positivas da equação $f(x) = 0$ o numero que, substituído por x em $f(x)$ e em todas as suas derivadas, dá sempre resultados positivos.

Para achar um numero que satisfaça a todas estas condições, começaremos por notar que o valor de $f^{(n)}(h) = n! p_0$ é sempre positivo, visto que supomos p_0 positivo. A derivada $f^{(n-1)}(h)$ é do primeiro grau em h , de modo que facilmente se determinará o inteiro h que torna $f^{(n-1)}(h) > 0$. Verifica-se depois se o valor de h assim achado torna tambem $f^{(n-2)}(h) > 0$, e no caso contrário adicionam-se successivamente a este primeiro valor de h tantas unidades, uma a uma, quantas sejam necessárias para dar áquella derivada um valor positivo. Procede-se do mesmo modo com a derivada $f^{(n-3)}(h)$, e assim por diante até chegar a $f(h)$.

Convém observar que, tendo verificado que $f^{(r)}(h)$ e todas as suas derivadas até $f^{(n)}(h)$ são positivas para um certo valor l de h , o mesmo terá logar para qualquer valor de h maior que l .

Com effeito, suppondo k positivo, de

$$f^{(r)}(l+k) = f^{(r)}(l) + k f^{(r+1)}(l) + \dots + \frac{k^{n-r}}{r!} f^{(n)}(l);$$

resulta que, sendo $f^{(r)}(l) > 0$, $f^{(r+1)}(l) > 0$, ..., $f^{(n)}(l) > 0$, será tambem $f^{(r)}(l+k) > 0$.

Por conseguinte, tendo reconhecido que um numero h satisfaz ao criterio do limite até uma derivada $f^{(r)}(x)$, se as derivadas seguintes indicarem outro numero $l > h$, não teremos de verificar ainda o numero l nas derivadas já ensaiadas.

135. MÉTHODO DE LAGRANGE. — Divida-se a equação $f(x) = 0$ pelo coefficiente do primeiro termo. Sendo $n-r$ o grau do seu primeiro termo negativo, $n-r-s$ o do segundo e assim por deante, teremos com os signaes em evidencia

$$f(x) \equiv x^n + \dots - P_r x^{n-r} + \dots - P_{r+s} x^{n-r-s} + \dots \pm P_n = 0.$$

Se o numero positivo k tornar

$$(1) \quad k^n > P_r k^{n-r} + P_{r+s} k^{n-r-s} + \dots,$$

será tambem

$$1 > \frac{P_r}{k^r} + \frac{P_{r+s}}{k^{r+s}} + \dots,$$

e qualquer numero $l > k$ satisfará necessariamente a esta condição. Logo k será limite superior das raizes positivas da proposta, pois que á expressão

$$k^n - P_r k^{n-r} - P_{r+s} k^{n-r-s} - \dots$$

viriam adicionar-se os termos positivos da equação.

Ora, sendo P o maior coefficiente negativo de $f(x)$, a

desigualdade (1) está contida na seguinte

$$k^n > P(k^{n-r} + k^{n-r-1} + \dots + k + 1) = P \frac{k^{n-r+1} - 1}{k - 1};$$

e esta última ainda está compreendida successivamente nas seguintes

$$k^n > P \frac{k^{n-r+1}}{k-1}, \quad k^{r-1}(k-1) > P, \quad (k-1)^r \geq P,$$

visto ser $k > 1$. Da última se tira

$$k \geq 1 + \sqrt[r]{P},$$

e por conseguinte:

É limite superior das raizes positivas da equação $f(x) = 0$ a somma da unidade com o numero que se obtem extrahindo ao maior coefficiente negativo de $f(x)$, depois de dividido pelo coefficiente do primeiro termo, a raiz cujo grau é a differença entre o grau da equação e o do seu primeiro termo negativo.

Teriamos immediatamente um limite superior sommando a unidade com o maior coefficiente negativo; mas esse limite

$$l = 1 + P \quad \text{ou} \quad l = 1 + \frac{p}{p_0}$$

pode afastar-se consideravelmente da maior das raizes.

136. MÉTHODO DE BRET. — Seja a proposta, com os signaes de cada termo em evidencia,

$$p_0 x^n + \dots - p_r x^{n-r} + \dots - p_{r+1} x^{n-r-1} + \dots \pm p_n = 0.$$

Substituam-se nos termos positivos as respectivas potencias de x , desenvolvidas segundo a fórmula geral

$$x^m = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) + 1;$$

incluindo o factor $x-1$ nos coefficients e reduzindo depois com os termos negativos semelhantes, nos quaes se não faz a mesma transformação, os coefficients das potencias $n-r$, $n-r-s$, etc. de x serão

$$\begin{aligned} & (p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1})(x-1) - p_r, \\ & (p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1} + p_{r+1} + \dots + p_{r+s-1})(x-1) - p_{r+s}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Na primeira d'estas expressões entram os coefficients de todos os termos positivos que precedem p_r , na segunda todos os que precedem p_{r+s} , etc. Além d'isto, substituindo por x qualquer numero $k > 1$, os coefficients dos outros termos constam só de parcellas positivas; portanto o número que, substituído por x , tornar aquellas expressões positivas, isto é, o número determinado pelas condições de ser

$$\begin{aligned} x &> \frac{p_r}{p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1}} + 1, \\ x &> \frac{p_{r+s}}{p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1} + p_{r+1} + \dots + p_{r+s-1}} + 1, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

será limite superior das raizes positivas da proposta.

137. O método de Newton dá, em geral, o limite mais próximo da maior das raizes. Quando ellas são todas reaes, este limite é o inteiro immediatamente superior á maior; ou esta mesma, quando ella é inteira.

Com effeito, representando por h o menor numero inteiro superior á maior raiz positiva da equação $f(x)=0$, as raizes da transformada $f(y+h)=0$ serão todas reaes e negativas; designando-as por $-b_1, -b_2, \dots, -b_n$, com os signaes em evidencia, a fórmula (14) do n.º 121 mostra que os coefficients de $f(x+h)$ hão de ser todos positivos. Mas estes coefficients são $f(h)$ e todas as suas derivadas. Por conseguinte h é o limite dado pelo método de Newton.

É evidente que entre os métodos de Lagrange e de Bret se deve preferir o primeiro quando na equação ha muitos termos negativos; e o segundo quando o primeiro termo negativo é precedido por muitos negativos, e ainda quando os menores coefficients negativos precedem os maiores.

138. O limite das raizes negativas da equação $f(x)=0$ é o limite superior das raizes positivas da transformada $f(-x)=0$.

O limite inferior das raizes positivas da mesma equação é o limite superior das raizes da transformada $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Em geral, toma-se zero para limite commum das raizes positivas e negativas.

139. Designemos por α e ρ o argumento e o módulo da incógnita, assim como por α_r e ρ_r o argumento e o módulo do coefficiente p_r . Dividindo a equação pelo coefficiente p_0 do primeiro termo, o módulo d'este termo será ρ^n e o do termo de ordem $r+1$ é

$$\frac{\rho_r}{\rho_0} \rho^{n-r} = R_r \rho^{n-r}$$

O $\text{mod } f(x)$ não pode ser menor que

$$\rho^n - R_1 \rho^{n-1} - R_2 \rho^{n-2} - \dots - R_n.$$

Se acharmos para ρ um valor l que torne esta expressão positiva e tal, que o mesmo tenha logar para qualquer valor

de $\rho > l$, será l limite superior dos módulos das raízes da equação dada.

Ora aquella expressão é função de quantidades todas reaes, e tem todos os termos negativos com excepção do primeiro. Logo será (n.º 135)

$$l = 1 + R_r,$$

designando por R_r o maior dos módulos R . Attendendo á relação entre R_r , ρ_r e ρ_0 , podemos dar ao limite a forma

$$l = \frac{\rho_0 + \rho_r}{\rho_0};$$

do mesmo modo se acharia o limite superior dos módulos das raízes da equação transformada $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, isto é, o limite inferior dos módulos das raízes da proposta.

XVI. — Raízes eguaes.

140. Dando ao polynómio $f(x)$ a forma geral (12) do n.º 119, a sua derivada, segundo a fórmula (1) do n.º 96, será

$$f'(x) = r \frac{f(x)}{x - a_1} + s \frac{f(x)}{x - a_2} + \dots + v \frac{f(x)}{x - a_k}.$$

D'aqui resulta que em $f'(x)$ entra como factor cada um dos factores binómios diferentes de $f(x)$ com o expoente diminuido de uma unidade.

Por conseguinte o maior divisor commum entre $f(x)$ e $f'(x)$ será

$$(1) \quad d_1 = (x - a_1)^{r-1} (x - a_2)^{s-1} \dots (x - a_k)^{v-1}.$$

Se a equação $f(x)=0$ tiver só raízes simples, será $r=s=\dots=v=1$ e $d_1=1$; pelo contrário, se algum d'estes expoentes fôr maior que 1, a equação tem raízes eguaes e d_1 é uma função de x . Logo:

A condição necessária e sufficiente para que a equação $f(x)=0$ tenha raízes eguaes é que entre $f(x)$ e a sua derivada haja um divisor commum.

Se fôr $r > 1$, a expressão (1) mostra que a_1 será tambem raiz da equação $f'(x)=0$, e que nesta equação o grau de multiplicidade da raiz a_1 é $r-1$. Se fosse $r > 2$, a_1 seria igualmente raiz da equação $f''(x)=0$, onde teria o grau de multiplicidade $r-2$; e assim por deante. Por conseguinte, segundo a fórmula (3) do n.º 16, teremos neste caso

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^r}{r!} f^{(r)}(a_1) + \dots + \frac{(x-a_1)^n}{n!} f^{(n)}(a_1),$$

visto ser $f(a_1)=f'(a_1)=\dots=f^{(r-1)}(a_1)=0$ e $f^{(r)}(a_1) \neq 0$.

141. Se a equação $f(x)=0$ tiver m raízes a_1, a_2, \dots, a_m do mesmo grau de multiplicidade r , o seu primeiro membro $f(x)$ terá por divisor o producto

$$[(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)]^r = X_r^r,$$

e as quantidades a_1, a_2, \dots, a_m serão raízes simples da equação $X_r=0$, de grau m .

Para considerar de um modo geral os casos que podem resultar da existencia de raízes eguaes numa equação dada, bastará suppor que o maior grau de multiplicidade d'estas raízes é 4; e assim teremos

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4,$$

conforme a notação precedente.

Ora, segundo (1), o maior divisos commum entre $f(x)$ e $f'(x)$ será

$$d_1 = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

Do mesmo modo, representando por d_2 , d_3 e d_4 respectivamente o maior divisor commum entre cada um dos polynómios d_1 , d_2 , d_3 e a derivada correspondente, teriamos

$$d_2 = X_3 X_4^2,$$

$$d_3 = X_4,$$

$$d_4 = 1.$$

Por outra parte, designando por q_1 , q_2 , q_3 , q_4 os quocientes da divisão de $f(x)$ por d_1 , de d_1 por d_2 , de d_2 por d_3 e de d_3 por d_4 , viria

$$q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$q_2 = X_2 X_3 X_4,$$

$$q_3 = X_3 X_4,$$

$$q_4 = X_4.$$

Finalmente uma nova serie de divisões fará conhecer os polynómios

$$X_1 = \frac{q_1}{q_2}, X_2 = \frac{q_2}{q_3}, X_3 = \frac{q_3}{q_4}, X_4 = \frac{q_4}{1},$$

que só teem factores simples; e pela resolução das equações $X_r = 0$ ($r = 1, 2, \dots$) teremos as raizes de grau r de multiplicidade da proposta. Por conseguinte:

É sempre possível reduzir a resolução de uma equação que tenha raizes multiplas á resolução de equações que só tenham raizes simples. Cada uma d'estas equações $X_r = 0$ dará todas as raizes do grau r de multiplicidade da proposta, e o grau de X_r indicará o numero d'estas raizes.

Se a equação não tiver raizes de grau de multiplicidade r , será $X_r = 1$, ou $q_r = q_{r+1}$.

Seja, por exemplo,

$$f(x) \equiv x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0;$$

a derivada $f'(x)$, depois de dividida pelo factor 6 commum aos seus termos, será

$$x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

e, procedendo á divisão de $f(x)$ por este polynómio, acharemos o primeiro resto que, depois de dividido por -2 , é

$$d_1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$$

Continuando as operações, vê-se que 'este polynómio é o maior divisor commum de $f(x)$ e $f'(x)$; donde concluímos que a equação tem raizes eguaes. Seguindo o processo indicado, forma-se o quadro

$$\begin{array}{ll} f(x) \equiv x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4, & q_1 = x^2 - x - 2, \\ d_1 \equiv x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2, & q_2 = x^2 - x - 2, \\ d_2 \equiv x^2 + 2x + 1, & q_3 = x + 1, \\ d_3 \equiv x + 1, & q_4 = x + 1, \\ d_4 \equiv 1 & \end{array}$$

donde se tira

$$\begin{array}{ll} X_1 = \frac{q_1}{q_2} = 1, & X_2 = \frac{q_2}{q_3} = x - 2, \\ X_3 = \frac{q_3}{q_4} = 1, & X_4 = \frac{q_4}{1} = x + 1. \end{array}$$

Portanto é $f(x) \equiv (x-2)^2(x+1)^4$; a proposta não tem raizes simples nem triplas, tem a raiz dupla 2 e a raiz quádrupla -1 .

142. Como se vê pelo exemplo do n.º anterior, este processo é laborioso; e por esse motivo não se applicará ao cálculo das raizes eguaes commensuraveis, cuja determinação é facil.

Ora, suppondo racionaes os coefficients da proposta, egual-

mente o serão os coefficients de cada uma das equações $X_r = 0$ e, se esta equação fôr do primeiro grau, a raiz correspondente é commensuravel.

Posto isto, se a proposta é do terceiro grau e tem raizes eguaes, ellas são commensuraveis, porque só pode haver *uma* dupla ou *uma* tripla. Se a equação é do quarto grau e tem raizes eguaes, estas raizes só poderão deixar de ser commensuraveis quando sejam *duas* duplas; neste caso a equação abaixa-se ao segundo grau pela extracção da raiz quadrada. Finalmente, se a proposta é do quinto grau, as raizes múltiplas, quando as ha, são tambem commensuraveis, excepto se forem *duas* duplas; mas neste caso haverá *uma* raiz simples que é commensuravel e, tendo determinado esta raiz, divide-se pelo binómio correspondente a equação proposta, que assim se abaixa ao quarto grau e se encontra no caso anterior.

Por conseguinte o *méthodo das raizes eguaes* só se applica ás raizes incommensuraveis das equações de grau superior ao quinto, quando os coefficients são commensuraveis.

XVII. — Existencia das raizes.

143. A equação $f(x) = 0$ pode suppor-se desembaraçada de raizes eguaes. Representando por a_1, a_2, \dots, a_m todas as suas raizes reaes, dispostas por ordem de grandezas crescentes, o polynómio $f(x)$ terá a forma (13) do n.º 120, sendo $\varphi(x)$, como se disse, um factor que se conserva positivo e differente de zero para todos os valores reaes de x .

Substituindo x em $f(x)$ successivamente pelos numeros x_1 e $x_2 > x_1$, e dividindo um dos resultados pelo outro, virá

$$(1) \quad \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1 - a_1}{x_2 - a_1} \cdot \frac{x_1 - a_2}{x_2 - a_2} \cdots \frac{x_1 - a_m}{x_2 - a_m} \cdot \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$$

Se houver uma raiz a_h compreendida entre x_1 e x_2 , isto é, se fôr $x_1 < a_h < x_2$, o factor correspondente de (1) será negativo. Por consequencia, se entre x_1 e x_2 se encontrar um numero par de raizes reaes da proposta ou nenhuma, o producto (1) será positivo; donde se segue que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ terão o mesmo signal. Se entre x_1 e x_2 existir um numero impar de raizes, uma pelo menos, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ terão signaes contrários.

Reciprocamente: se $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem o mesmo signal, entre x_1 e x_2 ha um numero par de raizes reaes da equação $f(x) = 0$; por que, se este numero fosse impar, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teriam signaes contrários. Se $f(x_1)$ e $f(x_2)$ teem signaes contrários, entre x_1 e x_2 ha um numero impar de raizes reaes da proposta.

Os termos maior e menor tomam-se aqui no sentido algebrico.

144. Suppondo independente da incógnita o último termo da equação, do theorema precedente deduzem-se os seguintes corollarios;

1.º *As equações de grau impar teem um numero impar de raizes reaes, uma pelo menos, de signal contrario ao do seu último termo.*

Seja primeiro, com o signal em evidência,

$$f(x) \equiv p_0 x^{2k+1} + \dots - p_n = 0.$$

Designando por l o limite superior das raizes positivas d'esta equação, será

$$f(0) < 0, \quad f(l) > 0$$

e entre 0 e l haverá um numero impar de raizes, que são positivas.

Seja agora

$$f(x) \equiv p_0 x^{2k+1} + \dots + p_n = 0.$$

O último termo da transformada em $-x$ será negativo

(n.º 130, 1.º) e esta equação tem um numero impar de raizes positivas, que são raizes negativas da proposta.

2.º *As equações de grau par com o último termo negativo teem um numero impar de raizes positivas e um numero impar de raizes negativas.*

Neste caso será ainda

$$f(0) < 0, \quad f(l) > 0,$$

e a proposta tem um numero impar de raizes positivas. O último termo da transformada em $-x$ conserva-se agora negativo, e portanto esta equação tem um numero impar de raizes positivas que são raizes negativas da equação dada.

3.º *As equações de grau par com o último termo positivo teem um numero par de raizes positivas e um numero par de raizes negativas.*

Neste caso é

$$f(0) > 0, \quad f(l) > 0,$$

tanto na proposta como no transformada em $-x$. No último enunciado considera-se zero como caso particular dos numeros pares.

145. Dois termos consecutivos da equação $f(x) = 0$ dão logar a uma *permanencia* ou a uma *variação* conforme teem o mesmo ou differente signal. Entre dois termos do mesmo signal haverá um numero par de variações ou nenhuma, por isso que, se nos termos intermédios houver mudanças de signal, estas só poderão fazer-se aos pares.

Se a equação de grau n fôr completa e forem p e v os numeros das suas permanencias e variações, será $p + v = n$. Neste caso, mudando x em $-x$, as permanencias tornam-se em variações na transformada, e vice-versa.

A somma $v + v'$ das variações da proposta e da sua transformada em $-x$ não pode exceder o grau d'aquella equação.

O último termo de uma equação que só tem raízes imaginárias é positivo (n.º 144), donde resulta que nesta equação haverá um numero par de variações.

146. Sendo a positivo e multiplicando por $x - a$ a equação $f(x) = 0$, a nova equação $(x - a)f(x) \equiv F(x) = 0$ terá evidentemente mais uma raiz positiva do que a proposta, e terá também, como vamos ver, mais uma variação.

A primeira variação da equação primitiva tem logar no primeiro termo negativo de $f(x)$. Designando esse termo por $-p_r x^{n-r}$, com $p_r > 0$, esta primeira parte de $f(x)$ será, com os signaes em evidencia,

$$(p_0 x^n + \dots + p_{r-1} x^{n-r+1}) - (p_r x^{n-r} + \dots);$$

e d'aqui resultam para $F(x)$ os termos

$$p_0 x^{n+1} + \dots - (ap_{r-1} + p_r) x^{n-r+1}.$$

O termo $p_0 x^{n+1}$ é positivo e irreductível. Entre os termos seguintes alguns podem reduzir-se ou produzir variações, e poderá mesmo ser $r = 1$ ou $p_{r-1} = 0$. Em todos os casos subsistirá o termo negativo de grau $n - r + 1$, e entre este termo e o primeiro haverá pelo menos uma variação.

A segunda variação de $f(x)$ apparece quando se chega novamente a um termo positivo $p_s x^{n-s}$, com $p_s > 0$ e podendo ser $s \geq r + 1$. Mas dos termos

$$-p_{s-1} x^{n-s+1} + p_s x^{n-s}$$

de $f(x)$ resulta para $F(x)$ o seguinte

$$+ (ap_{s-1} + p_s) x^{n-s+1},$$

que é positivo, irreductível e cujo coefficiente em caso algum pode ser zero. Entre este termo e o termo negativo

$$-(ap_{r-1} + p_r)^{n-r+1},$$

cuja existencia se reconheceu já, haverá pelo menos uma variação.

Continuando do mesmo modo hade chegar-se finalmente a um termo $\pm p_{n-t} x^t$, depois do qual não haverá mais variações em $f(x)$. Até este termo, onde pode ser $t \geq 0$, não se tem perdido variação alguma e só pode haver em $F(x)$ as mesmas ou mais variações do que em $f(x)$. Seja porém como fôr, em $F(x)$ o termo com x^{t+1} tem o signal de $\pm p_{n-t}$, emquanto que o último $\mp ap_n$ tem o signal contrário. Por conseguinte em $F(x)$ ha pelo menos uma variação mais do que em $f(x)$.

Por outra parte, sendo $p_0 x^n$ e $\pm p_n$ os termos extremos de $f(x)$, os de $F(x)$ serão $p_0 x^{n+1}$ e $\mp ap_n$. Portanto os numeros v e V das variações de $f(x)$ e $F(x)$ são de paridade differente e, pois que é $V > v$, será:

$$V - v = 2k + 1,$$

sendo o numero k inteiro e positivo, ou zero.

147. THEOREMA DE DESCARTES. — Designemos por a_1, a_2, \dots, a_m todas as raizes positivas da equação $f(x) = 0$. Pondo

$$f(x) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) \varphi(x),$$

em $\varphi(x) = 0$ estarão contidas as raizes negativas e as raizes imaginárias da proposta.

Designando por v e v_1 os numeros de variações de $f(x)$ e $\varphi(x)$, a multiplicação de $\varphi(x)$ por cada factor binómio introduz no producto um numero ímpar de variações. Portanto será

$$v = v_1 + (2k_1 + 1) + \dots + (2k_m + 1) = v_1 + m + 2k.$$

Ora a equação $\varphi(x) = 0$ não tem raizes positivas, e por isso o

seu último termo será positivo (n.º 144) como o primeiro; d'aqui resulta que v_1 será um numero par, e a expressão precedente terá a forma

$$v = m + 2l,$$

sendo l um numero inteiro e positivo, ou zero.

Mudando x em $-x$ e designando por v' e m' os numeros de variações e de raizes positivas da transformada, será do mesmo modo

$$v' = m' + 2l',$$

e aquellas raizes são raizes negativas da proposta. Logo:

A equação $f(x)=0$ não tem mais raizes positivas do que variações, nem mais raizes negativas do que as variações da sua transformada em $-x$.

Esta proposição é conhecida pelo nome de *regra dos signaes de Descartes*. D'ella resultam os seguintes corollarios:

1.º O numero $m + m'$ das raizes reaes não pode exceder a somma $v + v'$ das variações de $f(x)$ e $f(-x)$; se os numeros $m + m'$ e $v + v'$ não forem eguaes, a sua differença será um numero par.

2.º Sendo positivos todos os termos da equação, é $v=0$ e $m=0$.

3.º Sendo todas as raizes reaes e positivas, é $m=n=v$ e $l=0$. A equação, cujo grau designamos por n , é completa e só tem variações. A transformada em $-x$ só tem permanencias.

4.º Sendo $v=1$, é $l=0$ e $m=1$; a equação tem só uma variação e só uma raiz positiva. Se fosse $v'=1$, seria $l'=0$, $m'=1$ e a equação teria só uma raiz negativa.

5.º Sendo reaes todas as raizes, é $m+m'=n=v+v'-2(l+l')$; e pois que não pode ser $v+v'>n$, será $l=l'=0$, $m=v$ e $m'=v'$.

Se a equação fôr completa, o theorema de Descartes pode enunciar-se nos termos seguintes:

A equação completa não tem mais raizes positivas do que variações, nem mais raizes negativas do que permanencias.

148. Havendo faltas de termos, ou *lacunas*, será em geral $v + v' < n$. Supponhamos, em primeiro logar, que faltam $2k$ termos entre os dois

$$px^t, \quad qx^{t-2k-1},$$

O polynómio completo

$$F(x) \equiv px^t + q_1 x^{t-1} + q_2 x^{t-2} + \dots + qx^{t-2k-1},$$

onde q_1, q_2 , etc. são coefficients quaesquer, tem $2k + 2$ termos; de modo que em $F(x)$ e $F(-x)$ haverá $2k + 1$ variações. Por outra parte, os graus dos termos extremos são de differente paridade, e estes dois termos dão só uma variação para a proposta $f(x) = 0$ e para a sua transformada $f(-x) = 0$; portanto a falta dos termos intermédios faz perder $2k$ variações, e na equação dada faltam só por este facto $2k$ raizes reaes.

Se faltarem $2k + 1$ termos entre os dois

$$px^t, \quad qx^{t-2k-2},$$

o polynómio completo

$$F(x) \equiv px^t + q_1 x^{t-1} + \dots + qx^{t-2k-2}$$

tem $2k + 3$ termos, e haverá $2k + 2$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Mas agora os graus dos termos extremos são da mesma paridade, e estes termos podem ter o mesmo ou differente signal em $f(x)$. No primeiro caso não dão variação alguma na proposta e na transformada, e estas equações perderam $2k + 2$ variações pela falta dos termos intermédios. No segundo caso aquelles termos dão duas variações em $f(x)$ e $f(-x)$, e estes polynómios veem a perder só $2k$ variações pela falta dos termos intermédios. Á proposta faltam num caso $2k + 2$ raizes reaes, e no outro $2k$; e como pode ser $k = 0$, se na equação faltar só um termo entre dois de signaes contrários será

$v + v' = n$, como na equação completa, e a proposta poderá ter ainda todas as raízes reaes.

XVIII. — Equações recíprocas. Equações binómias.

149. Diz-se *recíproca* a equação $f(x) = 0$ que tem as mesmas raízes que a sua transformada $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Assim, o primeiro membro d'esta última equação, desembaraçada de denominadores, só poderá distinguir-se de $f(x)$ por algum factor constante δ ; e continuando a designar por n o grau da proposta, a equação recíproca será definida pela identidade

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \delta f(x).$$

Teremos, pois, suppondo que $f(x)$ é o polynómio (1) do n.º 117,

$$\begin{aligned} & p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0 \\ & \equiv \delta p_0 x^n + \delta p_1 x^{n-1} + \dots + \delta p_{n-1} x + \delta p_n; \end{aligned}$$

e por conseguinte será

$$p_n = \delta p_0, \quad p_{n-1} = \delta p_1, \quad \dots, \quad p_1 = \delta p_{n-1}, \quad p_0 = \delta p_n.$$

Multiplicando a primeira d'estas egualdades pela última, e dividindo o producto por $p_0 p_n$ visto suppormos $p_0 \neq 0$ e $p_n \neq 0$, vem

$$\delta^2 = 1, \quad \delta = \pm 1$$

e portanto

$$p_0 = \pm p_n, \quad p_1 = \pm p_{n-1}, \quad \text{etc.}$$

Se fosse $n = 2k$ haveria em $f(x)$ um termo médio $p_k x_k$, e entre as últimas relações havia de encontrar-se esta

$$p_k = \pm p_k.$$

Mas esta egualdade só pode subsistir com o signal inferior quando seja $p_k = 0$; e portanto:

Na equação recíproca os coefficients dos termos equidistantes dos extremos são eguaes, ou numéricamente eguaes e de signaes contrários com tanto que neste caso falte o termo médio se o grau da equação é par.

150. A equação recíproca de grau ímpar tem a raiz -1 quando os termos equidistantes dos extremos teem o mesmo signal e tem a raiz $+1$ no caso contrário, porque em ambos os casos os termos se reduzem dois a dois para aquelles valores de x .

A equação recíproca de grau par tem pela mesma razão as duas raizes ± 1 quando é $p_n = -p_0$, pois que neste caso lhe faltará o termo médio.

Da relação $z^2 = 1$ ou $z = \pm 1$ tira-se $z = \frac{1}{z}$; isto é, as raizes $+1$ e -1 são recíprocas de si mesmas, e os casos precedentes estão incluídos na definição d'estas equações. É facil reconhecer directamente a existencia d'aquellas raizes, que poremos de parte dividindo $f(x)$ por algum dos binómios $x - 1$ e $x + 1$, ou por ambos. Tendo effectuado estas divisões até encontrar um quociente $\varphi(x)$ que não seja divisivel por qualquer d'aquelles binómios, a equação $\varphi(x) = 0$ será de grau par $2m$, por isso que as suas raizes são, duas a duas, recíprocas umas das outras e differentes da unidade.

Por outra parte, em $\varphi(x)$ os termos equidistantes dos extremos hão de ser numéricamente eguaes e do mesmo signal. Com effeito a relação

$$x^{2m} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \delta \varphi(x)$$

torna-se para $x = \pm 1$ em

$$\varphi(\pm 1) = \delta \varphi(\pm 1),$$

donde se tira $\delta = 1$ por ser $\varphi(\pm 1) \neq 0$.

Por conseguinte a resolução da equação recíproca virá sempre a depender da resolução de uma equação da forma

$$p_0 x^{2m} + p_1 x^{2m-1} + \dots + p_1 x + p_0 = 0$$

com os termos equidistantes dos extremos eguaes em valor numérico e signal. Dividindo por x^m e reduzindo os termos que teem o mesmo coefficiente, esta equação torna-se em

$$(1) \quad p_0 \left(x^m + \frac{1}{x^m} \right) + p_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) + \dots + p_m = 0.$$

Ora, da relação

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$$

tira-se

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} \right).$$

Pondo

$$(2) \quad x + \frac{1}{x} = y,$$

e fazendo successivamente $k=1, 2, 3, 4, \dots$, da expressão

precedente resultam as seguintes :

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,$$

etc.

Substituindo estas expressões na equação (1), teremos a transformada de grau m em y . A relação de transformação (2) podemos dar a forma

$$(3) \quad x^2 - yx + 1 = 0;$$

substituindo y successivamente por cada uma das raízes da transformada, determinaremos por (3) as duas raízes correspondentes da proposta. Logo:

As equações reciprocas são susceptíveis de abaixamento. As de grau par em que os termos equidistantes dos extremos teem o mesmo signal abaixam-se ao grau subduplo.

151. Chamam-se *binômias* as equações da forma

$$(4) \quad x^n \pm A = 0.$$

Estas equações não teem raízes eguaes, porque entre $x^n \pm A$ e a sua derivada não ha outro divisor commum além da unidade.

Por conseguinte o numero A , positivo ou negativo, real ou imaginário, tem n raízes *diferentes* do grau n . Designando uma

d'ellas por a e pondo $x = ay$, a transformada de (4), depois de dividida por a^n , será

$$y^n \pm 1 = 0.$$

Se n é ímpar, mudando y em $-y$ na equação $y^n + 1 = 0$ a transformada será $y^n - 1 = 0$. Se fôr n par e k o expoente da maior potencia de 2 que se contem em n , ou $n = 2^k r$, será r ímpar; fazendo $2^k = s$ e $y^s = z$, ou $y^s - z = 0$, a equação $y^n + 1 = 0$ torna-se em $z^r + 1 = 0$ e transforma-se, como já vimos, em $z^r - 1 = 0$. Por outra parte a equação $y^s - z = 0$ faz-se depender, como anteriormente, de outra da forma $t^s - 1 = 0$.

D'esta discussão resulta que recahiremos sempre numa equação como

$$(5) \quad y^n - 1 = 0,$$

que vem a ser a forma *normal* das equações binómicas.

152. As raizes communs ás duas equações

$$y^m - 1 = 0, \quad y^n - 1 = 0$$

são raizes de equação

$$y^d - 1 = 0,$$

em que d é o maior divisor commum dos numeros m e n .

Applicando ás equações dadas o algorithmo de Euclides, facilmente se conclue que $y^d - 1$ é o maior divisor commum de $y^m - 1$ e $y^n - 1$. Se m e n forem primos entre si, as duas equações só tem a raiz commum $+1$.

Pelo theorema de Descartes se reconhece que a equação (5) tem só uma raiz real $+1$, no caso de n ser ímpar; e tem duas ± 1 , no caso de n ser par.

A equação (5) é recíproca, quer n seja par ou ímpar, visto que lhe faltá o termo médio.

153. Se α fôr uma raiz da equação (5), qualquer potencia de α será também raiz da mesma equação, visto que, sendo $\alpha^n = 1$, será $(\alpha^t)^n = (\alpha^n)^t = 1$.

Uma raiz da equação (5) diz-se *primitiva*, quando não é conjunctamente raiz de outra equação da mesma forma e de grau inferior. A raiz $+1$ nunca é primitiva; para $n = 2k$ a raiz -1 também o não é, excepto se fôr $n = 2$. Se n fôr um numero primo, qualquer raiz imaginária da equação (5) é primitiva. Posto isto:

Se α fôr uma raiz primitiva da equação (5), as potencias de α desde 1 até n serão todas as raizes da mesma equação.

Em primeiro logar, na série de todas as potencias inteiras de α

$$\dots \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \dots$$

não ha mais de n termos diferentes, que se reproduzem periodicamente. Com effeito, qualquer inteiro t , positivo ou negativo, será da forma

$$t = nq + r,$$

sendo q um inteiro ou zero e r positivo e menor que n . D'aqui resulta que será

$$\alpha^t = \alpha^r,$$

por ser $\alpha^{nq} = (\alpha^n)^q = 1$.

Por outra parte, os numeros

$$\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$$

são todos diferentes; porque, se entre elles houvesse dois eguaes, $\alpha^k = \alpha^h$ por exemplo, d'esta egualdade se tirava, suppondo $k > h$ e fazendo $k - h = m < n$,

$$\alpha^{k-h} = \alpha^m = 1.$$

D'aqui resultaria que α seria tambem raiz da equação $y^m - 1 = 0$, o que não pode ter logar quando α é raiz primitiva de (5).

154. A equação binómia (5) tem sempre raizes primitivas. Considerando os casos que podem dar-se relativamente á composição do numero n , vamos ver que a resolução d'esta equação se pode sempre fazer depender da resolução de uma equação binómia, cujo grau seja um numero primo.

1.º — Se n é o producto de dois factores primos r e s , obtem-se todas as raizes da equação $y^{rs} - 1 = 0$ {multiplicando as raizes da equação $y^r - 1 = 0$ pelas raizes da equação $y^s - 1 = 0$.

As $r + s$ raizes das duas últimas equações são tambem raizes da proposta, mas não são primitivas. Neste numero conta-se a unidade duas vezes; contando-a uma vez só, acha-se que o numero das raizes não primitivas da equação (5) será $r + s - 1$ e portanto o das raizes primitivas é

$$\begin{aligned} rs - r - s + 1 &= (r - 1)(s - 1) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

Se β e γ forem respectivamente raizes primitivas das equações $y^r - 1 = 0$ e $y^s - 1 = 0$, o producto $\beta\gamma = \alpha$ será raiz primitiva da proposta. Com effeito, de $\beta^r = 1$ e $\gamma^s = 1$ deduz-se

$$\beta^{rs} = 1, \quad \gamma^{rs} = 1, \quad (\beta\gamma)^{rs} = \alpha^n = 1,$$

por onde se vê que α é raiz da equação (5). E é primitiva, porque no caso contrário só poderia ser raiz de alguma das equações $y^r - 1 = 0$ ou $y^s - 1 = 0$; mas se α fosse raiz da primeira d'estas equações, seria $(\beta\gamma)^r = 1$, ou $\gamma^r = 1$ por ser $\beta^r = 1$. D'aqui resultaria que γ seria raiz das duas equações $y^r - 1 = 0$ e $y^s - 1 = 0$, o que não pode ter logar porque os numeros r e s são primos entre si. Do mesmo modo se veria que α não pode ser raiz da equação $y^s - 1 = 0$.

Na formação das potencias

$$\beta \gamma, (\beta \gamma)^2, \dots, (\beta \gamma)^n,$$

que seriam todas as raizes da proposta, pode-se abaixar o expoente de cada factor de modo que o de β não exceda r e o de γ não seja maior que s ; por conseguinte formando as duas linhas

$$\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^r,$$

$$\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^s$$

com as raizes das equações $y^r - 1 = 0$ e $y^s - 1 = 0$, e multiplicando cada elemento da primeira linha por todos os termos da segunda, teremos obtido todas as raizes da equação $y^n - 1 = 0$.

2.º — Do mesmo modo, se o grau da equação (5) fôr o producto de tres factores primos differentes, ou $n = rst$, as raizes das equações

$$(6) \quad \begin{aligned} y_1^r - 1 = 0, & \quad y^s - 1 = 0, & \quad y^t - 1 = 0, \\ y_1^s - 1 = 0, & \quad y^{rt} - 1 = 0, & \quad y^t - 1 = 0 \end{aligned}$$

verificam a proposta e não são primitivas. Ora, não contando a unidade, o numero das raizes das tres últimas equações é

$$rs + rt + st - 3,$$

onde se encontra repetido o numero das raizes das tres primeiras. Portanto, subtrahindo d'aquelle numero a somma

$$r - 1 + s - 1 + t - 1$$

e juntando á differença uma unidade, pois que não se attendeu á raíz 1, o numero das raizes não primitivas da equação (5) será

$$rs + rt + st - r - s - t + 1.$$

D'aqui resulta que o numero das raizes primitivas da proposta é a differença d'este último para n , ou $rst - rs - rt - st + r + s + t - 1$, isto é,

$$(r-1)(s-1)(t-1) = n \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Se β , γ e δ são raizes primitivas das tres primeiras equações (6), o producto $\beta\gamma\delta = \alpha$ será raiz primitiva da equação (5). Com effeito, das identidades

$$\beta^r = 1, \quad \gamma^s = 1, \quad \delta^t = 1$$

deduz-se

$$(\beta\gamma\delta)^{rst} = \alpha^n = 1,$$

e portanto α é raiz daquella equação. Além d'isso esta raiz é primitiva, porque não pode ser raiz de nenhuma das equações (6); e estas são as únicas cujos graus são inferiores a n e não são primos com n . Se $\beta\gamma\delta$ fosse raiz da equação $y^{rs} - 1 = 0$, por exemplo, seria

$$(\beta\gamma\delta)^{rs} = \delta^{rs} = 1$$

e δ , que é raiz primitiva da equação $y^t - 1 = 0$, seria tambem raiz da equação $y^{rs} - 1 = 0$; mas isto não pode ter logar, porque os numeros rs e t são primos entre si. Do mesmo modo se veria que α não pode ser raiz de nenhuma das outras equações (6).

Multiplicando as raizes da equação $y^{rs} - 1 = 0$, que se formaríam do modo que anteriormente se disse, pelas raizes da equação $y^t - 1 = 0$, teríamos todas as raizes da equação $y^n - 1 = 0$.

Pelo mesmo processo se resolveria o caso em que n fosse o producto de maior numero de factores primos differentes.

3.º — Sendo r um numero primo, a equação

$$y^{r^p} - 1 = 0$$

resolve-se por meio da equação $y^r - 1 = 0$.

As raizes não primitivas da equação proposta satisfazem a uma equação da mesma forma cujo grau seja um divisor de r^p , Qualquer numero nestas circunstancias, excepto o mesmo r^p , divide r^{p-1} ; portanto as raizes não primitivas da proposta satisfazem á equação

$$(7) \quad y^{r^{p-1}} - 1 = 0,$$

e todas as raizes d'esta equação satisfazem evidentemente á primeira. Logo o numero das raizes primitivas d'esta última equação será

$$r^p - r^{p-1} = n \left(1 - \frac{1}{r} \right).$$

Se fôr β uma raiz imaginária da equação $y^r - 1 = 0$, o numero

$$\alpha = \sqrt[r^{p-1}]{\beta}$$

é raiz da proposta, por ser $\alpha^{r^p} = \beta^r = 1$. E é raiz primitiva, porque no caso contrário seria raiz da equação (7) e portanto

$$\alpha^{r^{p-1}} = \beta = 1,$$

contra a hypothese feita a respeito de β .

Se a decomposição de n em factores primos der

$$n = r^p s^v t^u,$$

veriamos, pelo que temos dito, que a resolução da proposta vem a depender finalmente das tres equações

$$y^r - 1 = 0, \quad y^s - 1 = 0, \quad y^t - 1 = 0,$$

cujos graus são numeros primos.

155. Sendo n um numero primo, á equação recíproca (5) é applicavel a transformação do n.º 150.

Dividindo a proposta pelo binómio $y - 1$, que corresponde á raiz real $+1$, obtem-se a equação de grau par

$$y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1 = 0.$$

Fazendo depois

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

a transformada da última equação será de grau $\frac{n-1}{2}$ e terá todas as raizes reaes e menores que 2. Com effeito, se uma das raizes de grau n da unidade fôr

$$y = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi,$$

a sua recíproca será

$$\frac{1}{y} = \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi,$$

visto ser $(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi) = 1$; e das duas últimas expressões resulta $z = 2 \cos \varphi$.

D'este modo a relação de transformação será

$$y^2 - 2y \cos \varphi + 1 = 0,$$

e esta equação dará os dois valores de y correspondentes a cada raiz da equação transformada.

Nota ao Cap. XV.

É sufficiente conhecer os limites das raizes em numeros inteiros.

FIM

BIBLIOTECA DE
COMPTON

1880. ...
...
...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

ERRATA

<i>Pag.</i>	<i>Lin.</i>	<i>Onde está:</i>	<i>Leia-se:</i>
31	16	THEOREMA	THEOREMA II.
57	6	β_{k+}	β_{k+1}
64	2	fórmula (9)	fórmula (10)
82	23	<i>collecções</i>	<i>collecções</i>
84	22	$x_c^{(c+1)}$	$x_c^{(c+1)}$
97	25	termo em x^i	termo em x_i
105	2	$< v_1 (v'_n - u_n) +$	$< v_1 (v'_n - u'_n) +$
113	4	<i>parallelas</i>	<i>parcelas</i>
114	18	e portanto	e portanto, pondo $k = 0$,
145	19	se dirá.	se dirá (n.º 107).
157	2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
173	15	$dx f' (x + \theta dx, y, + dy)$	$dx f' (x + \theta dx, y + dy)$
174	20	Será <i>y</i> ums	Será <i>y</i> uma
207	2	c^2	c_2
210	7	$x_2 F(x)$	$x^2 F(x)$
212	14	b_0	b_0
223	12	muitos negativos	muitos positivos

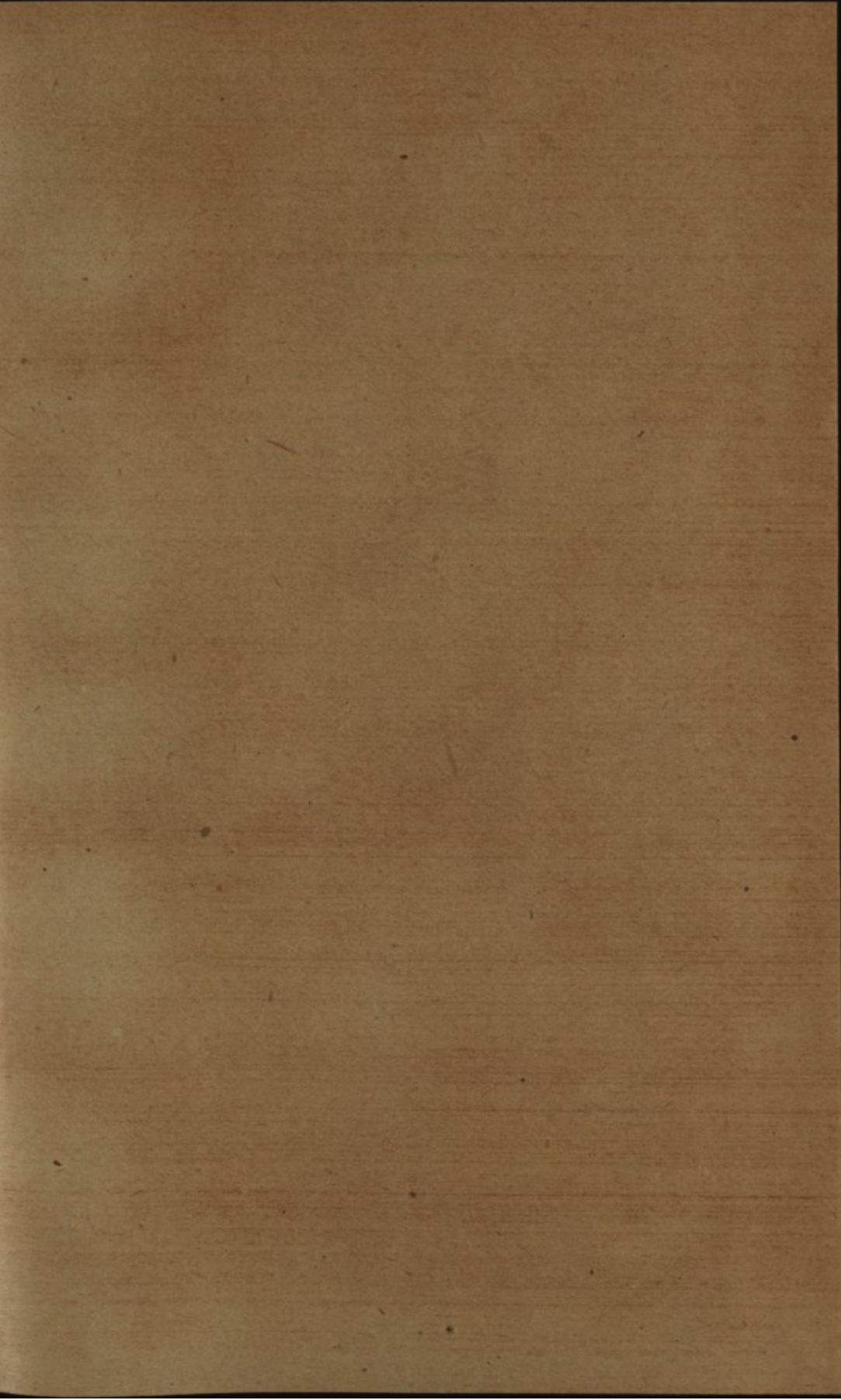
ERRATA

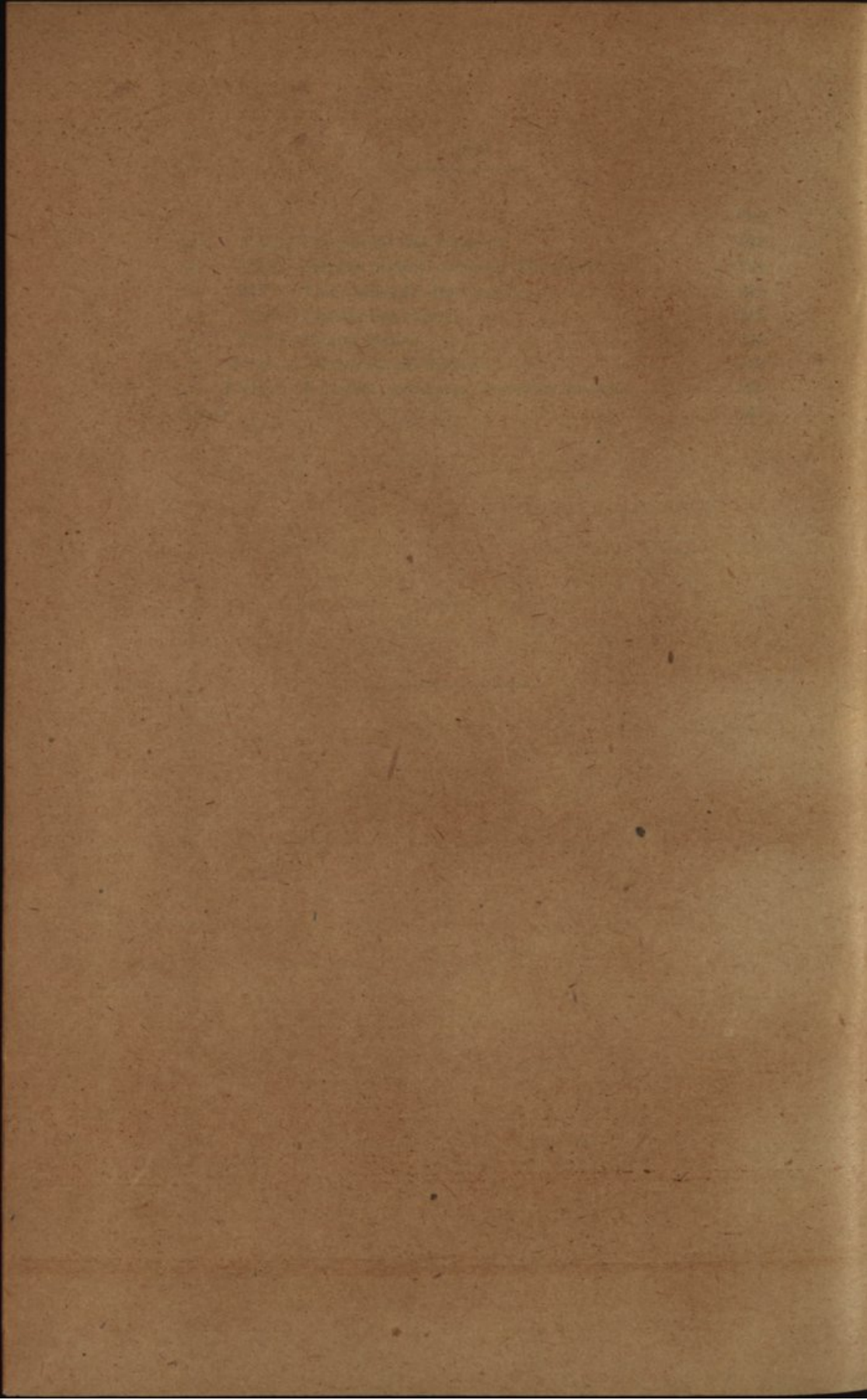
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60
61	62	63	64
65	66	67	68
69	70	71	72
73	74	75	76
77	78	79	80
81	82	83	84
85	86	87	88
89	90	91	92
93	94	95	96
97	98	99	100

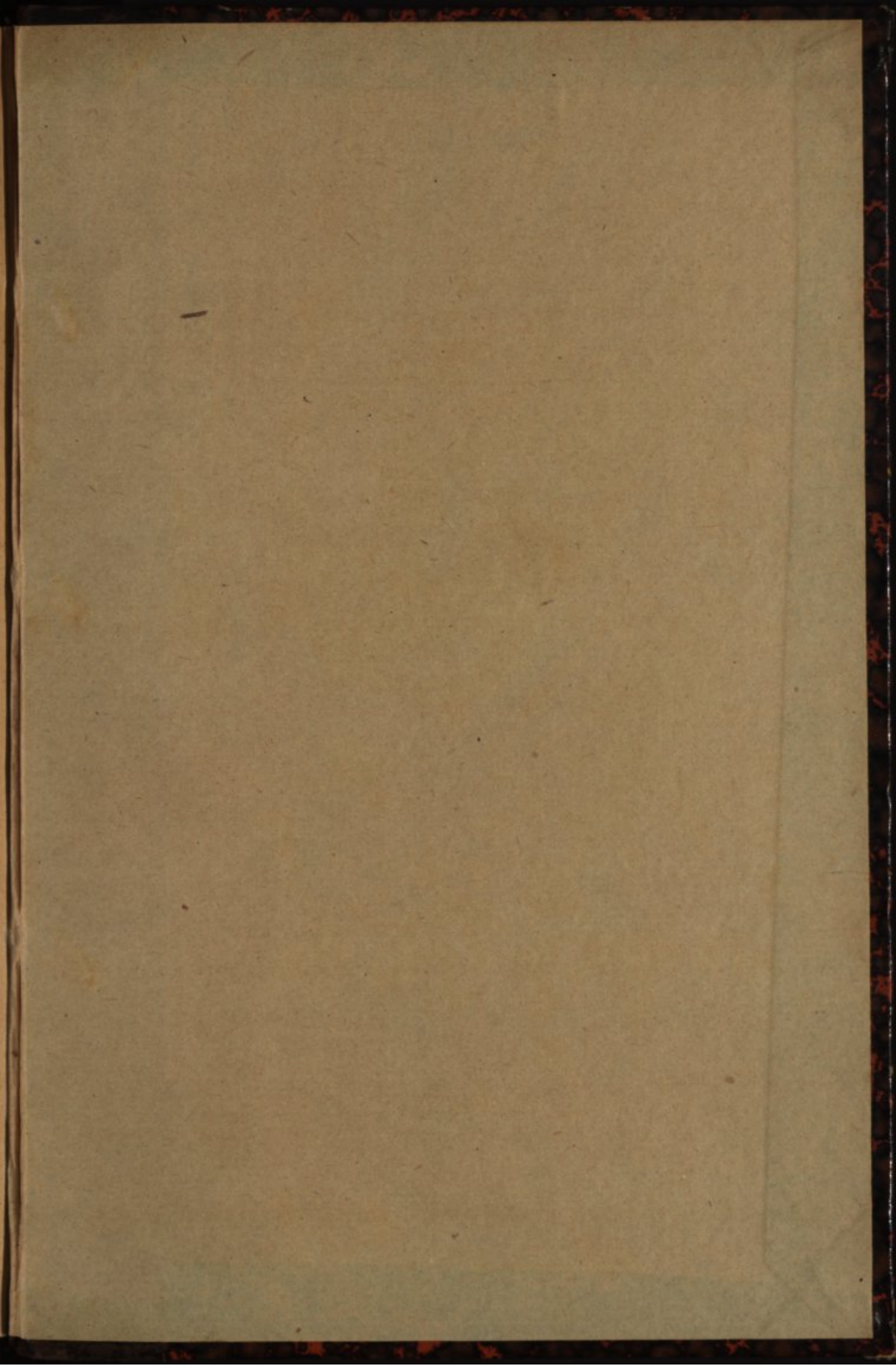
INDICE

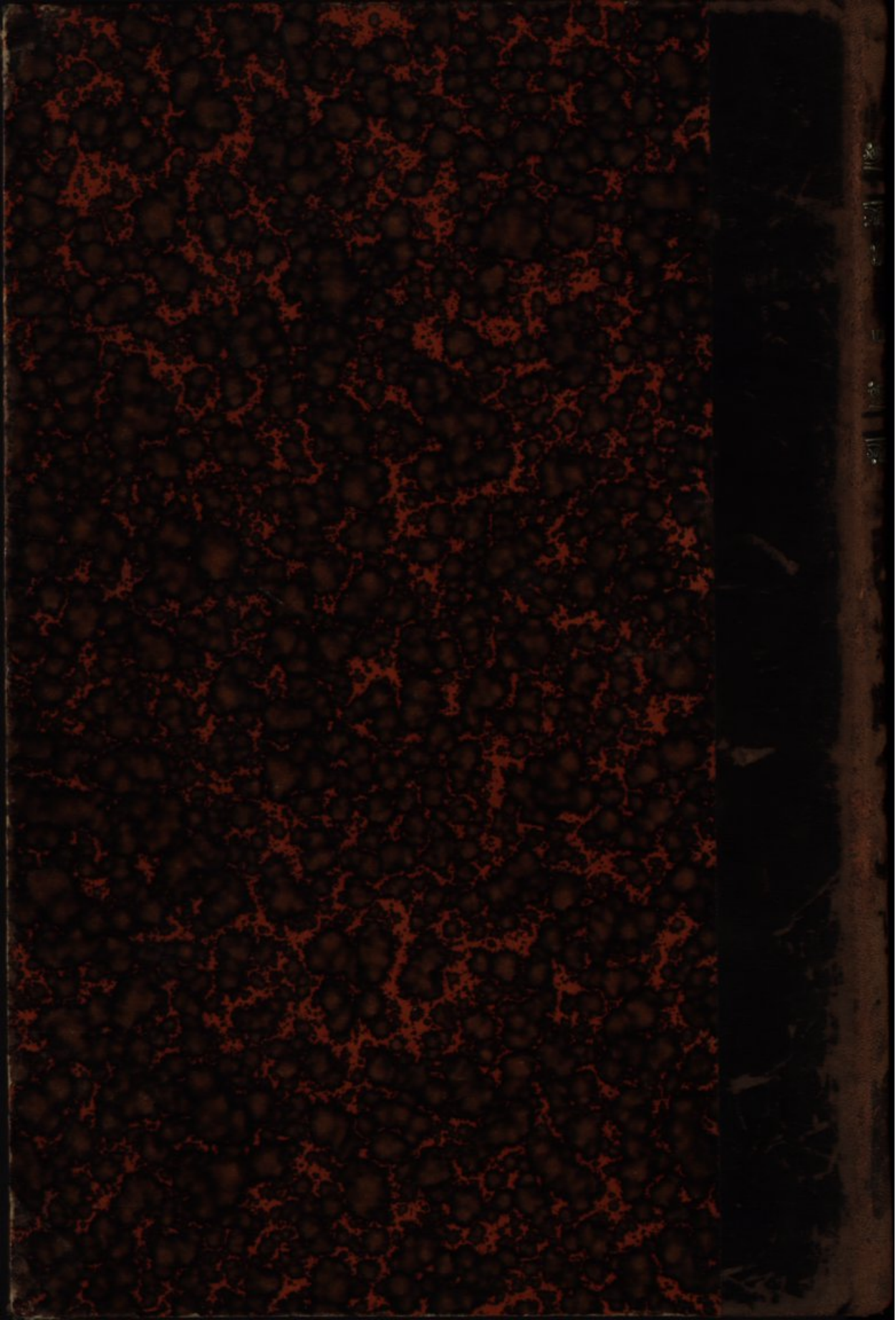
CAP.		Pag.
—	I. — Preliminares	1
—	II. — Polynómios. Identidades	9
—	III. — Fórmula de Taylor	20
—	IV. — Continuidade	29
—	V. — Determinantes	34
	§ 1.º Definições	34
	§ 2.º Propriedades fundamentaes	46
	§ 3.º Determinantes menores	54
	§ 4.º Producto de determinantes. Determinante adjunto	69
—	VI. — Dependencia linear	80
—	VII. — Systemas lineares não homogeneos	86
—	VIII. — Systemas lineares homogeneos	96
—	IX. — Numeros incommensuraveis, negativos e complexos	99
	§ 1.º Numeros incommensuraveis	99
	§ 2.º Numeros negativos	108
	§ 3.º Numeros complexos	109
—	X. — Limites	120
	§ 1.º Definições e princípios fundamentaes	120
	§ 2.º Operações com limites finitos	130
	§ 3.º Infinitamente pequenos	135
	§ 4.º Limites das funcções	139
—	XI. — Derivadas	144
	§ 1.º Funcções de uma variavel	144
	§ 2.º Funcções simples	152
	§ 3.º Estudo das funcções por meio das suas deri- vadas	162
	§ 4.º Diferenciaes	169
	§ 5.º Funcções de duas variaveis	172
	§ 6.º Funcções homogeneas	177

	Pag.
CAP. XII. — Composição das equações	179
— XIII. — Máximo divisor commum. Eliminação.	194
— XIV. — Transformação das equações.	214
— XV. — Limites das raizes	218
— XVI. — Raizes eguaes	224
— XVII. — Existencia das raizes	228
— XVIII. — Equações reciprocas. Equações binómicas	235
Errata	247











S. RODRIGUES

ALGEBRA

