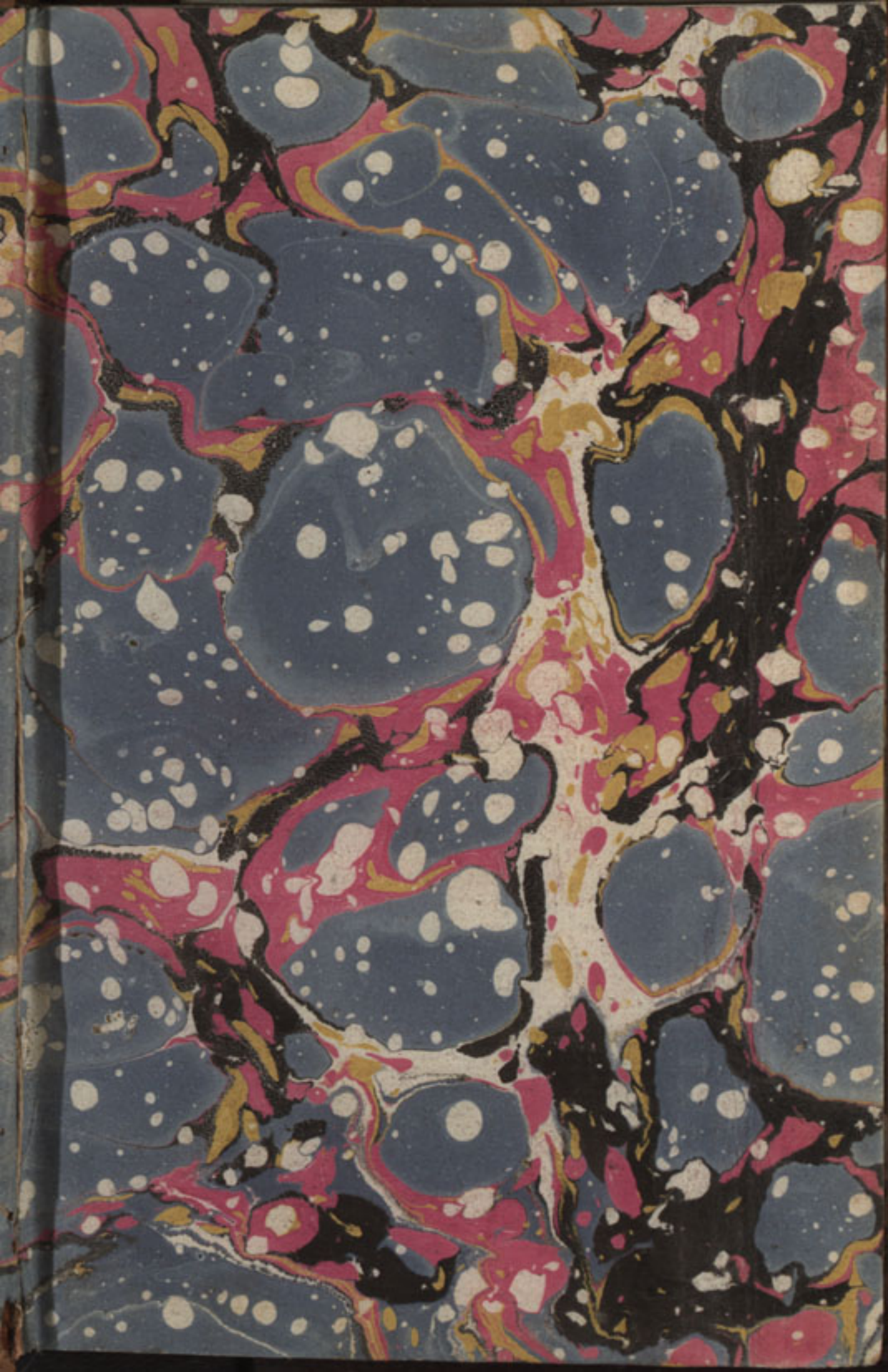
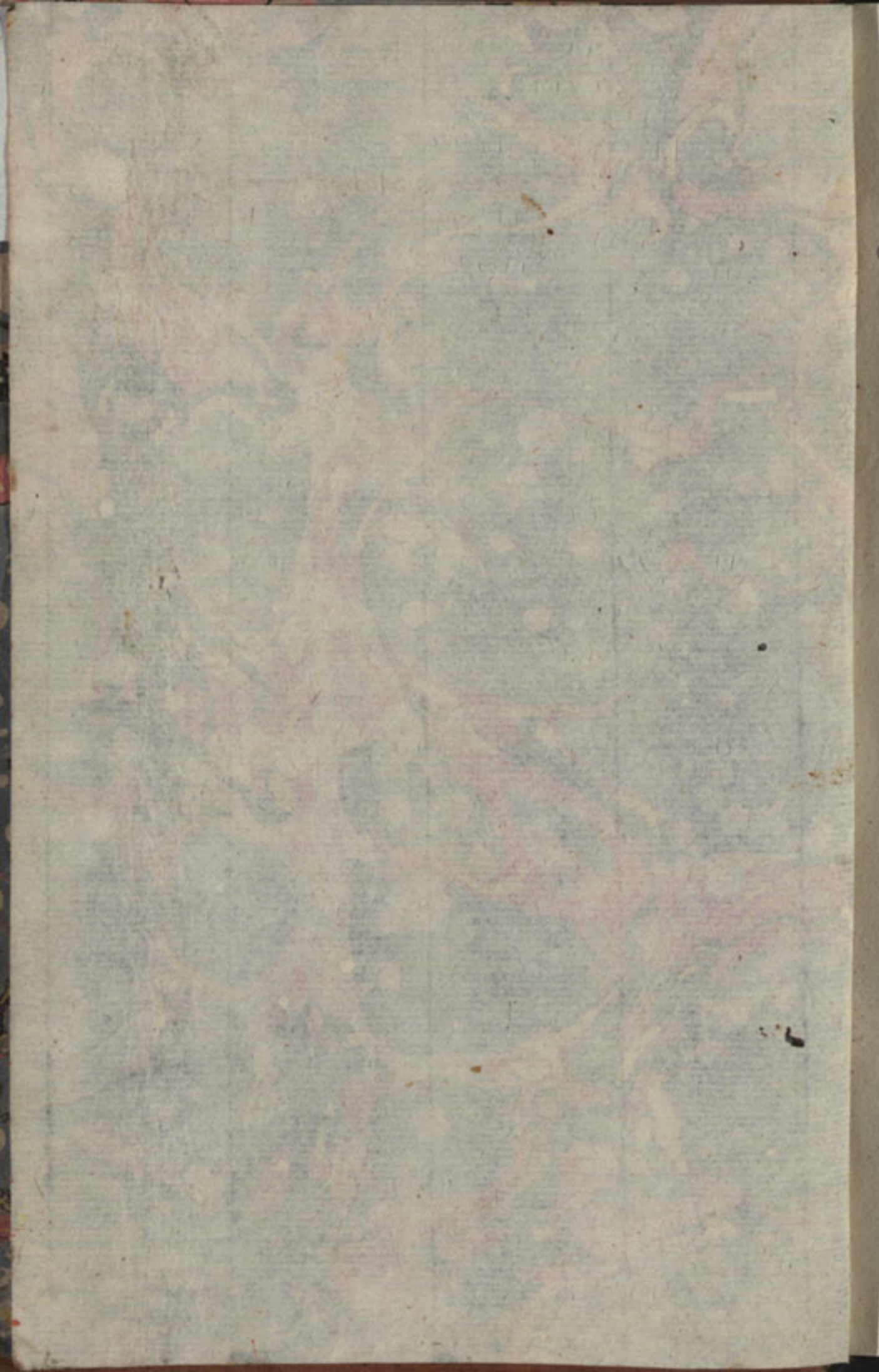


4  
2  
7  
27

4  
2  
7  
27

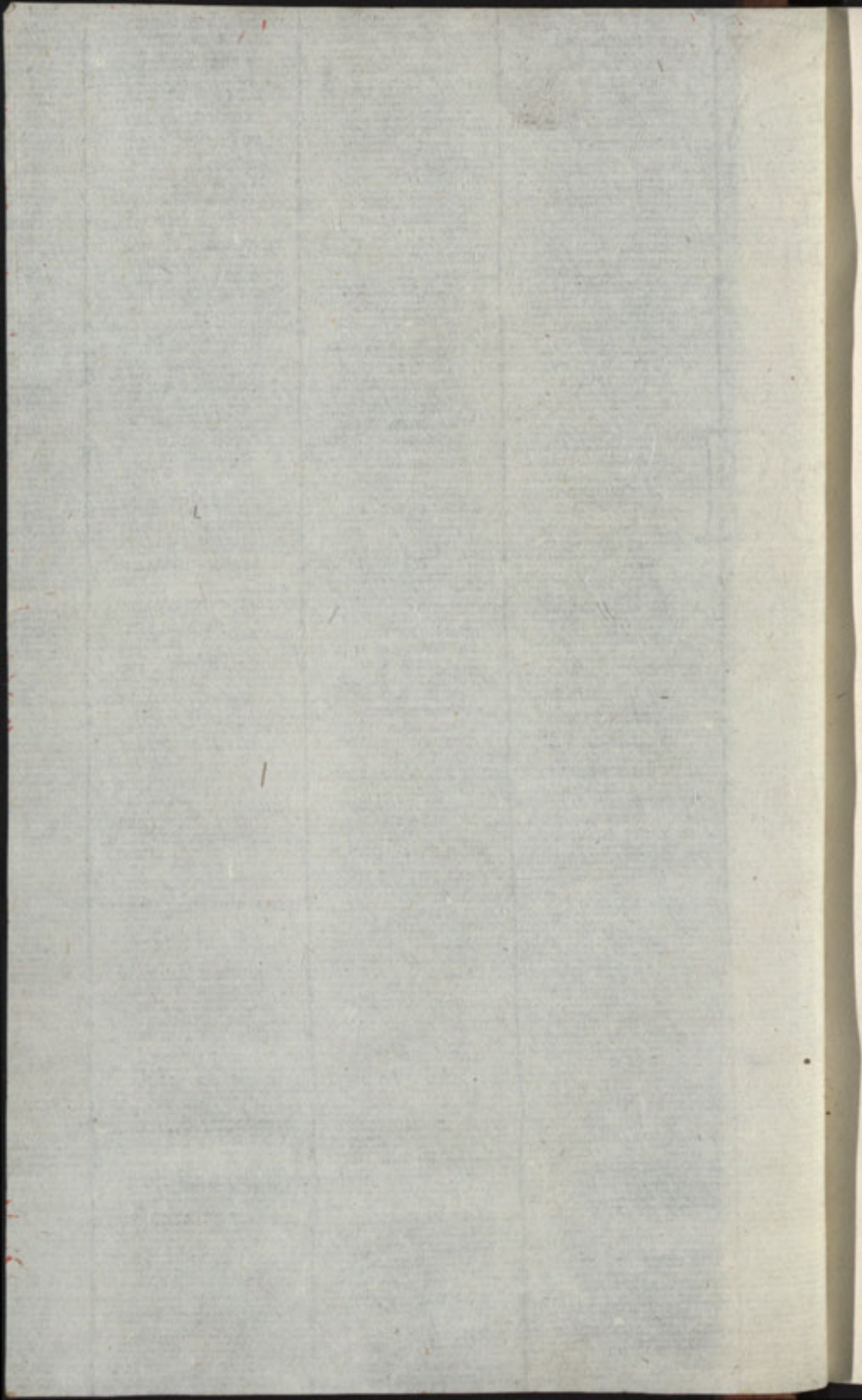






4  
2  
7  
27

ELEMENTOS  
DE  
ANALYSE.



ELEMENTOS

ANALYSE

MR. BEZOUT

ELEMENTOS

DE

ANALYSE.

TOMO II.

COIMBRA

PAZ REAL IMPRESSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXIII.

Com licença da Real Mesa do Conselho Geral  
fôro e Exame e Censura dos Livros,  
e Privilégio Real.

ELEMENTOS

DE

ANALYSIS



ELEMENTOS  
DE  
ANALYSE  
POR  
M<sub>R.</sub> BEZOUT

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇÃO

*Correita e accõmodada para o uso das Escolas  
de Mathematica da Universidade.*

---

TOMO II.

---



COIMBRA:

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

---

M. DCC. LXXXIIII.

*Com licença da Real Mesa da Commissão Geral  
sobre o Exame e Censura dos Livros,  
e Privilegio Real.*

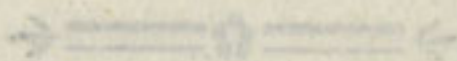


77

ELEMENTOS  
DE  
ANALYSE  
POR  
M. BÉZOUT  
TRADUZIDOS DO FRANCÊS  
SEGUNDA EDIÇÃO

Cartella e acompanhada para o uso das Escolas  
de Matemática da Universidade.

TOMO II.



COIMBRA:

NA REAL IMPRESSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXIII.

Os preços da Real Academia da Universidade Geral  
são a Escala e a Escola de Livros,  
e a Real Academia.

# T A B O A

D A S

MATERIAS QUE SE CONTÊM NESTES  
ELEMENTOS.

---

<b>N</b> OÇÕES PRELIMINARES	Pag. 1
<b>C</b> A L C U L O D I F F E R E N C I A L .	10
<i>Das Diferenciais segundas, e terceiras &amp;c.</i>	17
<i>Das Diferenciais das quantidades affectas de Senos, Cosenos &amp;c.</i>	21
<i>Das Diferenciais logarithmicas.</i>	23
<i>Das Diferenciais das quantidades exponen- ciais.</i>	27
<i>Applicações das regras precedentes.</i>	28
<i>— ás Subtangentes, Tangentes, Nor- mais, &amp;c. das Curvas.</i>	29
<i>— aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades, e aos problemas de Maximis &amp; Minimis.</i>	46
<i>Dos Pontos multiplos.</i>	64
<i>Dos Pontos de inflexão visíveis e invisíveis.</i>	74
<i>Reflexão sobre hum Maximum &amp; Mini- mum.</i>	79
<i>Dos</i>	

## II

<i>Dos Pontos de reversão, e das differentes especies de contaço dos ramos de huma curva.</i>	80
<i>Dos Raios da Curvatura ou da Evoluta.</i>	81
<i>Outras applicações do Calculo Differential.</i>	90

<b>CALCULO INTEGRAL.</b>	<b>99</b>
--------------------------	-----------

<i>Das Differentiais de huma variavel susceptiveis de integraço Algebrica; e primeiramente das differentiais binomias.</i>	100
<i>———— complexas que se integraõ pela regra fundamental.</i>	102
<i>———— binomias que se podem integrar algebricamente.</i>	105
<i>Da integraço das quantidades differentiais, que constaõ de Senos, Cosenos, &amp;c.</i>	111
<i>Applicaço das regras precedentes á quadratura das curvas.</i>	116
<i>———— á rectificaço das curvas.</i>	126
<i>———— ás superficies curvas.</i>	128
<i>———— á medida dos solidos.</i>	131
<i>Dos metodos de integrar por approximaço.</i>	140
<i>Uso das approximações antecedentes na integraço de varias quantidades.</i>	159
<i>Do modo de reduzir a integraço de huma differential proposta á de outra differential conhecida, e de distinguir os casos em que isso he possivel.</i>	171

Das

<i>Das Fracções racionais.</i>	181
<i>De algumas transformações que podem facilitar as integrações.</i>	193
<i>Da integraçãõ das quantidades exponenciais e logarithmicas.</i>	198
<i>———— das quantidades de duas, ou mais variaveis.</i>	201
<i>Das Equações differenciais.</i>	207
<i>Das Quantidades, e Equações differenciais da segunda, terceira, &amp;c. ordem.</i>	230

Das Fortschreiten der Fortschritte, 184  
 De algemeen beschouwing der geschiedenis der  
 185  
 186  
 De integriteit der gemeentelijke administratie, 187  
 De legitiemiteit van de wetten en besluiten, 188  
 —————  
 De quaestie der hantvering der hant, 189  
 190  
 191  
 De hantvering der hant, 192  
 De hantvering der hant, 193  
 De hantvering der hant, 194  
 De hantvering der hant, 195  
 De hantvering der hant, 196  
 De hantvering der hant, 197  
 De hantvering der hant, 198  
 De hantvering der hant, 199  
 De hantvering der hant, 200  
 De hantvering der hant, 201  
 De hantvering der hant, 202  
 De hantvering der hant, 203  
 De hantvering der hant, 204  
 De hantvering der hant, 205  
 De hantvering der hant, 206  
 De hantvering der hant, 207  
 De hantvering der hant, 208  
 De hantvering der hant, 209  
 De hantvering der hant, 210  
 De hantvering der hant, 211  
 De hantvering der hant, 212  
 De hantvering der hant, 213  
 De hantvering der hant, 214  
 De hantvering der hant, 215  
 De hantvering der hant, 216  
 De hantvering der hant, 217  
 De hantvering der hant, 218  
 De hantvering der hant, 219  
 De hantvering der hant, 220  
 De hantvering der hant, 221  
 De hantvering der hant, 222  
 De hantvering der hant, 223  
 De hantvering der hant, 224  
 De hantvering der hant, 225  
 De hantvering der hant, 226  
 De hantvering der hant, 227  
 De hantvering der hant, 228  
 De hantvering der hant, 229  
 De hantvering der hant, 230  
 De hantvering der hant, 231  
 De hantvering der hant, 232  
 De hantvering der hant, 233  
 De hantvering der hant, 234  
 De hantvering der hant, 235  
 De hantvering der hant, 236  
 De hantvering der hant, 237  
 De hantvering der hant, 238  
 De hantvering der hant, 239  
 De hantvering der hant, 240  
 De hantvering der hant, 241  
 De hantvering der hant, 242  
 De hantvering der hant, 243  
 De hantvering der hant, 244  
 De hantvering der hant, 245  
 De hantvering der hant, 246  
 De hantvering der hant, 247  
 De hantvering der hant, 248  
 De hantvering der hant, 249  
 De hantvering der hant, 250  
 De hantvering der hant, 251  
 De hantvering der hant, 252  
 De hantvering der hant, 253  
 De hantvering der hant, 254  
 De hantvering der hant, 255  
 De hantvering der hant, 256  
 De hantvering der hant, 257  
 De hantvering der hant, 258  
 De hantvering der hant, 259  
 De hantvering der hant, 260  
 De hantvering der hant, 261  
 De hantvering der hant, 262  
 De hantvering der hant, 263  
 De hantvering der hant, 264  
 De hantvering der hant, 265  
 De hantvering der hant, 266  
 De hantvering der hant, 267  
 De hantvering der hant, 268  
 De hantvering der hant, 269  
 De hantvering der hant, 270  
 De hantvering der hant, 271  
 De hantvering der hant, 272  
 De hantvering der hant, 273  
 De hantvering der hant, 274  
 De hantvering der hant, 275  
 De hantvering der hant, 276  
 De hantvering der hant, 277  
 De hantvering der hant, 278  
 De hantvering der hant, 279  
 De hantvering der hant, 280  
 De hantvering der hant, 281  
 De hantvering der hant, 282  
 De hantvering der hant, 283  
 De hantvering der hant, 284  
 De hantvering der hant, 285  
 De hantvering der hant, 286  
 De hantvering der hant, 287  
 De hantvering der hant, 288  
 De hantvering der hant, 289  
 De hantvering der hant, 290  
 De hantvering der hant, 291  
 De hantvering der hant, 292  
 De hantvering der hant, 293  
 De hantvering der hant, 294  
 De hantvering der hant, 295  
 De hantvering der hant, 296  
 De hantvering der hant, 297  
 De hantvering der hant, 298  
 De hantvering der hant, 299  
 De hantvering der hant, 300

K

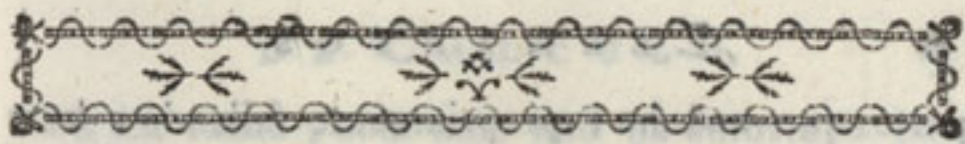
ERRATA S.

Pag. Lin.	Errat.	Emend.
8 8	consequente	de hum modo consequente
20 9	augmentaõ	crefcem
32 7 e 8	Logarithmica	Logarithmica
36 23	apparecer	apparecerem
40 7	S do circulo CNS	do circulo CN
42 16	PL <sup>a</sup> e	PL <sup>n</sup> X
43 3	(Fig. 14)	(Fig. 15)
45 3	tereremos	teremos
55 24	— x	— b
61 17	D	D (Fig. 23)
67 pen.	depois a	depois de a
68 11	entra	entraõ
72 pen.	== o ,	== o , &c.
75 16	==	e y ==
79 5	$dxds^2$	$\frac{dxds^2}{y}$
87 11	seja	he
ibid. pen.	CBD	CDB
88 2	CBM	CKM
114 12	... 3	... 1
116 17	40	41
119 5	41	42
120 6	42	43
123 1	equaçãõ	expressãõ
125 13	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
128 11	CMT	CTM

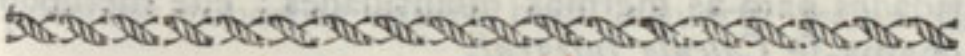
Pag. Lin. / Errat. Emend.

135	3 bis	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{6}$
137	7 e 8	MN e DE		DE e MN
ibid.	9	Seja		Seja PM = y,
138	ult.	$-\frac{1}{4} e^3$		$-\frac{1}{3} e^3$
151	6	$\frac{x^4}{a^4}$		$\frac{x^5}{a^5}$
166	1	teremos APM ou		teremos . . . .
169	6 e 7	exememplo		exemplo
177	5	$= (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$		$= (a^4x^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}$
197	4 e 5	deixando		e deixando
199	13	$a^{ax} dx$		$e^{ax} dx$
218	12	$g + b$		$g + k$
219	13	$ht$		$hz$
243	10	$(b - k)$		$(b - k')$
ibid.	ult.	para $k$		para $k'$
244	1	$dx dy$		$dx, dy$





SEGUNDA PARTE,  
O U  
ELEMENTOS DE CALCULO  
DIFFERENCIAL, E INTEGRAL.



NOÇÕES PRELIMINARES.

**H**AVEMOS dado na primeira Parte as regras necessárias para calcular as quantidades em todo e qualquer estado de grandeza em que pôdem suppor-se; falta ainda considerar as variações, pelas quais as mesmas quantidades pôdem chegar a tal ou tal estado de grandeza. Este novo objecto fórma outro ramo da Analyse, que he o da maior utilidade nas Sciencias Physico-Mathematicas, e principalmente na Mechanica, onde muitas vezes não se consegue determinar as relações das quantidades que entraõ nos problemas pertencentes á dita Sciencia, sem se ter primeiramente considerado a relação das suas variações, isto he, dos augmentos e das diminuições, que as mesmas quantidades recebem a cada instante.

He pois conveniente que nos demoremos hum pouco nesta parte do Calculo, cujo objecto he resolver as quantidades até os seus Elementos, e voltar dos Elementos para as mesmas quantidades;

A parte

parte que não he, propriamente fallando, hum novo methodo de calculo; he huma applicação dos methodos ensinados na primeira Parte, ou antes huma simplificação das regras que lá se deraõ.

2 Dous são os objectos que presentemente nos propomos: o primeiro he ensinar o methodo de de-fer das quantidades para os seus Elementos, o qual se chama *Calculo Differencial*. O segundo mostra o caminho para tornar dos Elementos das quantidades para as mesmas quantidades; este methodo chama-se *Calculo Integral*.

3 Como vamos considerar as quantidades relativamente aos seus Elementos, isto he, relativamente aos seus augmentos infinitamente pequenos, he necessario expor primeiramente o que entendemos por quantidades infinitamente pequenas, infinitas &c., e mostrar a subordinação, que no calculo deve haver entre estas quantidades.

4 Dizemos que huma quantidade he infinita, ou infinitamente pequena em comparação de outra, quando he impossivel assignar quantidade alguma ou tão grande ou tão pequena, que exprima a razão que ha entre aquellas duas quantidades, isto he, o numero de vezes que huma contém a outra.

Como huma quantidade deixaria de ser quantidade, se pudesse deixar de ser capaz de augmento ou de diminuição, segue-se que não ha huma quantidade tão grande ou tão pequena a respeito de outra, de maneira que não possamos conceber outra quantidade terceira, infinitamente maior ou infinitamente menor que ella.

Por exemplo, se  $x$  for infinito em comparação de  $a$ , ainda que nesta hypothese he impossivel assignar

nar

SEGUN.

nar a sua razão , com tudo não ha embaraço para concebermos huma terceira quantidade , a qual seja em comparação de  $x$  o mesmo que  $x$  he em comparação de  $a$  ; isto he , que seja o quarto termo de huma proporção , cujos tres primeiros fossem  $a : x$

$:: x :$  ; o quarto termo pois  $\frac{x^2}{a}$  será infinitamente maior que  $x$  , porque contém  $x$  tantas vezes , quantas se supõe que  $x$  contém  $a$  . Da mesma sorte podemos conceber muito bem o quarto termo da

proporção  $x : a :: a :$  ; e este quarto termo  $\frac{a^2}{x}$

será infinitamente menor que  $a$  ; porque deve ser contido em  $a$  tantas vezes , quantas se suppoem que  $a$  he contido em  $x$  . A nossa imaginação não reconhece limite algum a este respeito : ainda se pôde conceber da mesma sorte huma nova

quantidade , que a respeito de  $\frac{a^2}{x}$  seja tão infinita-

mente pequena , como he  $\frac{a^2}{x}$  em comparação de

$a$  . Eis-aqui a que chamamos *infinitos* , e *infinitamente pequenos* de diferentes ordens.

Em geral , o producto de duas quantidades infinitas , ou infinitamente pequenas da primeira ordem he infinitamente maior , ou infinitamente menor que cada hum dos seus dous factores . Com effeito ,  $xy : y :: x : 1$  ; mas  $x$  sendo infinito contém a unidade infinitas vezes ; logo  $xy$  conterá  $y$  huma infinidade de vezes . Hum raciocinio semelhante mostra , que o producto ou a potencia de qualquer numero de dimensões , cujos factores se-

jaõ todos infinitos da primeira ordem, he de huma ordem de infinito designada pelo numero dos seus factores. Assim quando  $x$  he infinito,  $x^4$  he infinito da quarta ordem, isto he, infinitamente maior que  $x^3$ , o qual he infinitamente maior que  $x^2$ , e esse tambem infinitamente maior que  $x$ . Com effeito  $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$ . Aconteceria o contrario, se  $x$  fosse infinitamente pequeno; entãõ  $x^4$  seria infinitamente pequeno da quarta ordem, isto he, infinitamente mais pequeno que  $x^3$ , o qual seria infinitamente mais pequeno que  $x^2$ , e este ultimo infinitamente mais pequeno que  $x$ .

Pelo contrario huma fracção cujo numerador for huma quantidade finita, e cujo denominador for huma potencia qualquer de huma quantidade infinita, será infinitamente pequena de huma ordem designada pelo expoente da mesma potencia.

Assim, sendo  $x$  infinito,  $\frac{b}{x^2}$  he infinitamente pequeno da segunda ordem;  $\frac{b}{x^3}$  he infinitamente pequeno da terceira ordem. Com effeito . . .  
 $\frac{b}{x^2} : \frac{b}{x} :: \frac{1}{x} : 1 :: 1 : x$ .

Quando porém hum producto não tiver todos os factores infinitos, a sua ordem de infinito não se deve determinar senãõ pelo numero dos factores infinitos: assim  $axy$  he da mesma ordem que  $xy$ . Com effeito  $axy : xy :: a : 1$ , e o valor desta ultima razãõ pôde-se determinar, se  $a$  for huma quantidade finita.

Note-se bem a differença que ha quando se comparaõ os infinitos ou infinitamente pequenos entre si, ou quando se comparaõ com as quantidades, a cujo respeito saõ infinitos ou infinitamente pequenos. Se  $x$  he infinito em comparaçaõ de  $a$ , não ha quantidade que possa medir a sua razaõ; mas na mesma hypothese a razaõ de  $x$  para  $x$ , multiplicado ou dividido por qualquer numero finito, he huma razaõ finita: assim  $x$  infinito ou infinitamente pequeno não he comparavel a  $a$ , suppondo-se  $a$  finito; mas he comparavel a  $x$ , porque  $x : ax :: 1 : a$ .

5 Para se exprimir no calculo que huma quantidade  $x$  he infinita em comparaçaõ de outra quantidade  $a$ ; ou, que vem a ser o mesmo, para exprimir que  $a$  he infinitamente pequeno em comparaçaõ de  $x$ , he necessario desprezar na expressaõ algebraica, em que se acharem ambas as quantidades, todas as potencias de  $x$  inferiores á mais elevada, e conseguintemente todos os termos em que não houver  $x$ . Por exemplo, se em  $\frac{3x + a}{5x + b}$  supuzermos  $x$  infinito relativamente a  $a$  e  $b$ , supprimiremos  $a$  e  $b$ , o que dará  $\frac{3x}{5x}$  ou  $\frac{3}{5}$  por valor de  $\frac{3x + a}{5x + b}$  na hypothese de  $x$  ser infinito. Com

$$\text{effeito } \frac{3x + a}{5x + b} = \frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}; \text{ mas suppondo-se } x$$

in-

infinito a respeito de  $a$  e de  $b$ , as fracções  $\frac{a}{x}$  e  $\frac{b}{x}$ , que representaõ as razões de  $a$  e de  $b$  para  $x$ , devem necessariamente supprimir-se; porque estas razões, pela mesma hypothese, saõ inferiores a qualquer quantidade por mais pequena que se supponha: logo neste caso a quantidade proposta deve reduzir-se a  $\frac{3}{5}$ .

Da mesma sorte a quantidade  $x^2 + ax + b$  se reduz a  $x^2$ , quando  $x$  he infinito. Porque nesta hypothese, como acabamos de ver, deve-se supprimir  $b$  em comparaçã de  $ax$ ; mas  $x^2$  he tambem infinito em comparaçã de  $ax$ , pois que  $x^2 : ax :: x : a$ , e por tanto deve-se supprimir  $ax$ ; logo neste caso a quantidade se torna em  $x^2$ .

Pelo contrario se  $x$  for infinitamente pequeno, devemos conservar sómente os termos em que  $x$  tiver menor expoente. Assim  $x^2 + ax$  reduz-se a  $ax$  na hypothese de  $x$  infinitamente pequeno;

$\frac{ax + b}{cx + d}$  reduz-se a  $\frac{b}{d}$  na mesma hypothese.

Nem receemos que estas omisões alterem as consequencias que se deduzirem dos calculos a que ellas se applicarem; antes pelo contrario só por estas omisões he que exprimimos o que intentamos exprimir, isto he, que  $x$  he infinito ou infinitamente pequeno; só por estes desprezos he que podemos chegar a huma conclusã conforme á hypothese. Porque, suppondo  $x$  infinito, senã desprezarmos os termos em que acabamos de fallar; se por exemplo

em

em  $\frac{3x + a}{5x + b}$  ou  $3 + \frac{a}{x}$  não desprezarmos  $\frac{a}{x}$  e

$\frac{b}{x}$ , como o calculo entãõ não exprime que  $\frac{a}{x}$  e  $\frac{b}{x}$

são razões inferiores a qualquer quantidade assignavel, não responderá ao que se procura, que he saber qual he o valor desta quantidade na hypothese de  $x$  ser infinito. Em huma palavra, se ainda attribuissemos a  $\frac{a}{x}$  e  $\frac{b}{x}$  alguma influencia no valor buscado, contradiríamos a supposição que havíamos feito.

Naõ faltarãõ occasiões em que possamos verificar a exactidaõ do principio relativo ao desprezo das quantidades infinitas das ordens inferiores; mas entretanto contentarnos-hemos com dar hum exemplo, o qual pôde servir de confirmação do que acabamos de dizer. Vê-se que os termos da serie

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$  &c. cada vez se approximaõ mais da unidade, mas nunca podem passar deste limite por mais que se continuem. Cada

termo pôde ser representado por  $\frac{x}{x + 1}$ , substituindo

em lugar de  $x$  o numero do mesmo termo. Como pois os termos continuamente se vaõ aveziñhando da unidade, e tanto mais se approximaõ quanto mais se apartaõ da origem; está claro que só a huma distancia infinita da origem he que poderãõ tocar

car o dito limite da unidade; logo para acharmos o ultimo termo da serie, devemos suppor  $x$  infinito no seu termo geral  $\frac{x}{x+1}$ . Porém esta quantidade, conforme o principio estabelecido, reduz-se a  $\frac{x}{x}$ , isto he a 1; logo o desprezar o termo  $+1$

em  $\frac{x}{x+1}$  tanto não altera a conclusão, que antes a dá tal como deve ser. Ultimamente em fazer o desprezo obra-se consequente com a hypothese.

Tal he a subordinação que deve haver no calculo entre as quantidades infinitas ou infinitamente pequenas. Na applicação porém deste principio podem occorrer alguns casos, sobre que vamos prevenir o Leitor.

Cada hum das duas quantidades  $x^2 + ax + b$ , e  $x^2 + ax + c$  se reduz a  $x^2$  na hypothese de  $x$  infinito, de maneira que então a sua differença parece ser nada; mas realmente a differença he  $b - c$ , ou  $c - b$ , para qualquer valor de  $x$ . Eis-aqui a solução desta difficuldade apparente.

A differença das duas quantidades he  $b - c$  ou  $c - b$ ; mas quando a buscamos depois de haver supposto  $x$  infinito em cada hum das mesmas quantidades, o que fazemos he averiguar que vem a ser a differença a respeito das ditas quantidades; e como cada hum dellas he então infinita, devemos achar que esta differença he nada em comparação dellas, como com effeito se acha. Quando pois procurarmos em que se torna o resultado de certas operações sobre muitas quantidades na

hy-



hypothese de  $x$  infinito , devemos executar no mesmo resultado a regra acima dada , e não em cada quantidade tomada separadamente.

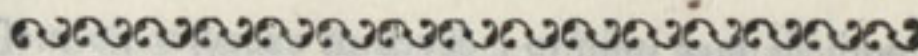
Deste modo acharemos , que a soma de  $-x^2 + ax + b$  e  $x^2 + bx + c$  , quando  $x$  he infinito , se reduz a  $ax + bx$  ; porque em geral he  $ax + bx + b + c$  , que suppondo  $x$  infinito se reduz a  $ax + bx$ . Da mesma forte a quantidade  $x - \sqrt{(xx - bb)}$  , que parece ser nada na hypothese de  $x$  infinito , he verdadeiramente  $\frac{bb}{2x}$  . Porque  $\sqrt{(xx - bb)}$  he a

indicação da raiz quadrada de  $xx - bb$  ; logo para acharmos a differença entre ella e  $x$  , devemos reduzir  $\sqrt{(xx - bb)}$  em serie (Alg. 149) , e teremos

$$x - \sqrt{(xx - bb)} = x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} + \&c.$$

ou  $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} + \&c.$  , que suppondo  $x$  infinito

em comparação de  $b$  , se reduz a  $\frac{bb}{2x}$  .



# ELEMENTOS

DE

## CALCULO DIFFERENCIAL.

---

6 QUANDO consideramos huma quantidade variavel como crescendo por augmentos infinitamente pequenos, se quizermos conhecer o valor dos mesmos augmentos, o meio mais natural que se offerece he determinar separadamente o valor da quantidade proposta em dous instantes consecutivos, do que resultaráõ dous valores; entãõ a differença entre elles he o augmento ou diminuiçaõ instantanea que a quantidade recebe, e a que se dá o nome de *differença*, ou de *differencial*, ou tambem de *fluxaõ* da quantidade.

7 Para exprimirmos a differencial de huma quantidade variavel simples como  $x$  ou  $y$ , escreveremos  $dx$  ou  $dy$ , isto he, assentamos antes da variavel a letra  $d$ , que he a inicial da palavra differença. Para indicar porém a differencial de huma quantidade composta, como  $x^2$ , ou  $5x^3 + 3x^2$ , ou  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , encerramos a dita quantidade entre parentheses, pondo antes delle a letra  $d$ ; assim escrevemos  $d(x^2)$ ,  $d(5x^3 + 3x^2)$ ,  $d(\sqrt{x^2 - a^2})$ , &c.

Daqui em diante representaremos as quantidades variaveis pelas ultimas letras  $t, u, x, y, z$  do

Al-

Alfabeto, e as constantes, ou as que conservaõ sempre o mesmo valor, pelas primeiras letras *a*, *b*, *c*, &c. Se algumas vezes for necessario usar de outra sorte, naõ deixaremos de o advertir. Quanto á letra *d*, naõ nos serviremos della, senaõ para indicar a differencial da quantidade junto de que se achar.

8 Conforme a idéa que acabamos de dar sobre a differencial de huma variavel, está claro que para acharmos a differencial de huma quantidade que naõ contém variaveis senaõ do primeiro grão, sem estarem multiplicadas ou divididas entre si, escreveremos antes de cada variavel a letra *d*, conservando o final que cada huma tiver.

Por exemplo, a differencial de  $x + y - z$  será  $dx + dy - dz$ . Com effeito, para acharmos esta differencial, devemos considerar  $x$  como tornando-se em  $x + dx$ ,  $y$  em  $y + dy$ ,  $z$  em  $z + dz$ , e portanto a quantidade proposta, que em hum estado he  $x + y - z$ , no immediato virá a ser  $x + dx + y + dy - z - dz$ ; logo a differença entre estes dous valores instantaneos, ou  $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$ , ou  $dx + dy - dz$  he a differencial da quantidade proposta.

O mesmo se praticará, quando as variaveis que entraõ na quantidade tiverem coefficients.

Assim . . .  $d(5x + 3y) = 5dx + 3dy$  . . .  $d(ax + by) = adx + bdy$ . Porque quando  $x$  e  $y$  se tornaõ em  $x + dx$  e  $y + dy$ , a quantidade  $ax + by$  se torna em  $a(x + dx) + b(y + dy) = ax + adx + by + bdy$ ; logo a differença dos dous estados, ou a differencial da quantidade he  $adx + bdy$ ; isto he,

he , em geral cada huma das variaveis deve ter antes de si a letra  $d$ .

Se na quantidade proposta entrar hum termo constante , a differencial será a mesma que se tal termo não houvesse ; porque *a differencial de huma constante he nada*. Com effeito , se huma constante tivesse differencial ou augmento , deixaria de ser constante. Assim  $d(ax + b) = adx$ .

9 Se as quantidades variaveis simples estiverem multiplicadas entre si . . . *Differenciaremos successivamente em ordem a cada huma das variaveis , como se todas as outras fossem constantes , e ajuntaremos todas as differenciais*.

Por exemplo , para differenciar  $xy$  praticaremos primeiramente como se  $x$  fosse constante , e virá  $xdy$  , escrevendo em ultimo lugar a variavel que tem  $d$  , para evitar equivocação ; depois differenciaremos  $xy$  como se  $y$  fosse constante , o que dará  $ydx$  , de maneira que a differencial total de  $xy$  será  $xdy + ydx$ .

Com effeito suppondo conforme o nosso principio que  $x$  se torna em  $x + dx$  , e  $y$  em  $y + dy$  ,  $xy$  se tornará em  $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$  ; e a differença será  $xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx + dxdy$ . Mas para exprimir que  $dx$  e  $dy$  são infinitamente pequenos , devemos ( 5 ) desprezar o infinitamente pequeno da segunda ordem  $dxdy$  em comparação de  $xdy$  e  $ydx$  , que são infinitamente pequenos da primeira ; logo a differencial de  $xy$  he  $xdy + ydx$ .

Do

Do mesmo modo  $d(xyz) = zd(xy) + xydz$   
 $= xydz + xzdy + yzdx$ , o que se demonstrará  
 como acima; e  $d(uxyz) = yzd(ux) + uxd(yz)$   
 $= uxydz + uxzdy + uyzdx + xyzdu$ .

10 Para differenciar huma potencia qualquer de  
 huma variavel, diminua-se o seu expoente de huma  
 unidade, e multiplique-se pelo mesmo expoente que  
 tinha, e pela differencial da variavel.

Assim  $d(x^2) = 2xdx$ , multiplicando pelo ex-  
 poente 2, tirando 1 do mesmo expoente 2, e mul-  
 tiplicando em fim pela differencial  $dx$  da variavel  $x$ .

Do mesmo modo  $d(x^3) = 3x^2dx \dots d(x^4)$   
 $= 4x^3dx \dots d(x^{-1}) = -3x^{-4}dx \dots d(x^{\frac{1}{2}})$   
 $= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \dots d(x^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$ , e em ge-

ral  $d(x^m) = mx^{m-1}dx$ , seja qual for o expoente  
 $m$ , positivo ou negativo, inteiro ou fraccionario.

Com effeito suppondo que  $x$  se torna em  $x +$   
 $dx$ ,  $x^m$  virá a ser  $(x + dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx$   
 $+ m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2 + \&c.$  (Alg. 149). Mas

$m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2$  desvanece em comparaçãõ  
 de  $mx^{m-1}dx$ , e o mesmo acontece aos termos se-  
 guintes, que seriaõ infinitamente pequenos de or-  
 dens inferiores; logo  $d(x^m) = x^m + mx^{m-1}dx$   
 $- x^m = mx^{m-1}dx$ .

Se houver hum coefferente ou multiplicador  
 constante, nem porisso haverá mudança na ope-  
 raçãõ; o mesmo coefferente se conservará na dif-  
 feren-

ferencial assim como estiver na quantidade. Por exemplo  $d(ax^m) = max^{m-1}dx$ .

11 Para poder differenciar todo o genero de quantidades Algebricas, basta saber o que temos dito até aqui: tudo o que se segue para diante não he mais que huma applicação das regras que acabamos de dar.

12 Se tivermos  $ax^3y^2$ , consideraremos  $x^3$  e  $y^2$  como duas variaveis simples, e (9) teremos  $d(ax^3y^2) = ax^3d(y^2) + ay^2d(x^3) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$ . Do mesmo modo  $d(ax^2y^3z^4) = 3ax^2z^4y^2dy + 4ax^2y^3z^3dz + 2axy^3z^4dx$ . Em geral  $d(ax^m y^n) = max^m y^{n-1}dy + may^n x^{m-1}dx$ .

13 Se for dada a fracção  $\frac{x}{y}$ , escrevendo -3 (Alg. 141) assim  $\dots xy^{-1}$ , e applicando a regra dada (9 e 10), teremos  $d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ .

Logo: *A differencial de huma fracção he igual à differencial do numerador multiplicada pelo denominador, menos a differencial do denominador multiplicada pelo numerador, sendo tudo dividido pelo quadrado do denominador.*

$$\text{Assim } d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{-adx}{x^2} \dots d\left(\frac{axz}{y}\right) = \frac{axydz + ayzdx - axzdy}{y^2} \dots d\left(\frac{x}{a+x}\right) = \frac{adx}{(a+x)^2}.$$

14 Passando agora ás quantidades complexas, se nellas não entrarem potencias de quantidades complexas, differenciaremos separadamente cada hum dos termos, de que ellas constarem.

Assim . . .  $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx$  . . .  $d\left(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}\right)$   
 $= 2axdx + bdx + \frac{cx^2dy - 2cxydx}{x^4}$  . . .  $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$ , lembrando-nos de que a differencial de huma constante he nada.

15 Se a quantidade complexa tiver hum expoente total, como em  $(a + bx + cx^2)^5$ , consideraremos toda a quantidade affecta do expoente como huma só variavel, a qual se differenciará conforme a regra das potencias. Assim  $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 (bdx + 2cxdx)$ . Da mesma sorte  $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$   
 $2bxdx = \frac{10}{3}bxdx (a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$ .

16 Se a quantidade complexa se compuzer de differentes factores, consideraremos cada hum delles como huma variavel simples, e observaremos a regra dos productos. Assim  $x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ , que se pôde considerar como composta de dous factores  $x^3$  e  $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ , dará  $d[x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}}]$

$$= (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} =$$

$$3x^2 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} dx + \frac{10}{3} bx^4 (a + bx^2)^{\frac{2}{3}} dx.$$

Da mesma sorte  $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) =$

$$\frac{3(x+b)^2 (x+a)^2 dx - 2(x+a)^3 (x+b) dx}{(x+b)^4}$$

$$= \frac{(x+3b-2a)(x+a)^2 dx}{(x+b)^3}.$$

17 Se a quantidade proposta for radical, substituiremos expoentes fraccionarios em lugar dos radicais (Alg. 128), e differenciaremos. Assim

$$d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \dots d(\sqrt{x^3})$$

$$= d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx \dots d[\sqrt{(aa - yy)}] =$$

$$d(aa - yy)^{\frac{1}{2}} = -y dy (aa - yy)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-y dy}{\sqrt{(aa - yy)}} \dots$$

$$\cdot d(x^m \sqrt[q]{(a + bx^n)^p}) = d\left[x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}}\right]$$

$$= \frac{pnb}{q} x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + mx^{m-1} dx$$

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} \dots d\left(\frac{z}{-z + \sqrt{(aa + zz)}}\right) =$$

$$d\left(\frac{z}{aa} [z + \sqrt{(zz + aa)}]\right) = \frac{2zdz}{aa} +$$

$$\frac{aadz + 2zdz}{aa \sqrt{(aa + zz)}}.$$



## Das Diferenças segundas, terceiras, &amp;c.

18 **A** Lém das *Diferenças* primeiras, de que acabamos de tratar, consideraõ-se tambem as diferenças segundas, terceiras, &c. Para as designar, he costume pôr antes da variavel tantas letras  $d$ , quanto for o numero da diferença que se quer exprimir. Assim a diferença segunda de  $x$  indica-se por  $ddx$ , e tambem por  $d^2x$ , a diferença terceira por  $ddd$ , e tambem por  $d^3x$ , &c.; expressões que não se devem confundir com o quadrado ou cubo &c. de  $dx$ , que representaremos simplesmente por  $dx^2$ ,  $dx^3$ , em vez de  $(dx)^2$ ,  $(dx)^3$ , &c.; nem com a differencial de  $x^2$ , ou de  $x^3$ , &c. que já assentámos em exprimir sempre por  $d(x^2)$ ,  $d(x^3)$ , &c.

Por diferença ou *differencial* segunda de huma quantidade entendemos a diferença da diferença primeira, isto he, consideramos a variavel como recebendo augmentos desiguais, mas tais que a diferença entre elles he infinitamente pequena em comparação dos mesmos augmentos. Assim,  $ddx$  he infinitamente pequeno em comparação de  $dx$ , e nas diferenças terceiras  $ddd$  he infinitamente pequeno em comparação de  $ddx$ , &c.

São pois  $ddx$  e  $dx^2$  infinitamente pequenos da segunda ordem, mas com tudo não são iguais entre si;  $ddx$  he a diferença segunda de  $x$ , ou a diferença de duas diferenças consecutivas, e  $dx^2$  he o quadrado de huma diferença.

O meio mais natural que se offerece para determinar as diferenças segundas, he considerar a

quantidade em tres estados consecutivos infinitamente vizinhos, tomar a differença entre o segundo estado e o primeiro, entre o terceiro e o segundo, e tomar depois a differença destas duas differenças. Por exemplo, o primeiro estado de  $x$  he  $x$ , o segundo he  $x + dx$ , o terceiro he  $x + dx + d(x + dx)$ ; a differença entre o segundo e o primeiro he  $dx$ , e entre o terceiro e o segundo he  $dx + d(dx)$ ; em fim a differença entre estas duas differenças, ou a differença segunda de  $x$  he  $d(dx)$ ; logo  $ddx = d(dx)$ . Donde se segue que *para termos as differenças segundas differenciaremos as differenças primeiras pelas regras dadas para estas se achârem.*

Por exemplo  $dd(xy) = d(xdy + ydx) = xddy + dydx + dydx + yddx = xddy + 2dydx + yddx$ .

Do mesmo modo  $dd(x^2) = d(2xdx) = 2xddx + 2dx^2 \dots dd(ax^m) = d(max^{m-1}dx) =$

$m(m-1)ax^{m-2}dx^2 + max^{m-1}ddx \dots dd\left(\frac{x}{y}\right)$

$= d\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) = \frac{ddx}{y} - \frac{dxdy}{y^2} - \frac{xddy}{y^2} -$

$\frac{dxdy}{y^2} + \frac{2xdy^2}{y^3} = \frac{2xdy^2 + y^2ddx - xyddy - 2ydxdy}{y^3}$ .

Naó receemos neste calculo, que os infinitamente pequenos da segunda ordem que se desprezaó nas differenças primeiras, produzaó defeito algum nas differenças segundas; porque a differencial de huma quantidade infinitamente pequena da segunda ordem he infinitamente

pequena da terceira, e por tanto deve-se desprezar em comparação das diferenças segundas, que são infinitamente pequenas da segunda ordem.

A regra será a mesma, se na quantidade entrarem diferenças primeiras, quer estas sejaõ resultado de huma differenciação exacta, quer não.

$$\text{Assim} \dots d(xdy) = xddy + dx dy \dots d\left(\frac{dy}{x}\right) = \frac{xddy - dx dy}{x^2} \dots d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}.$$

19 Quanto ás diferenças terceiras, quartas &c. discorrendo como acima, devemos differenciar do modo ordinario as diferenças segundas, terceiras, &c. considerando-as como outras tantas variaveis differentes.

20 Nos calculos em que entraõ muitas variaveis, ordinariamente para simplificar suppõe-se constante huma das diferenças primeiras. Esta supposição he licita, porque podemos tomar huma das diferenças primeiras por termo fixo de comparação das outras diferenças primeiras; e simplifica o trabalho, porque faz desaparecer todos os termos affectos da differencial da quantidade que se toma por constante. Suppondo por exemplo  $dx$  constante, he  $ddx = 0$ , e todos os termos affectos de  $ddx$  se desvaneceráõ. A unica attenção pois que devemos ter neste caso he não differenciar a differencial constante naquelles termos em que ella se achar. Assim a differencial de  $\frac{dx}{dy}$ ,

suppondo  $dx$  constante, he  $\frac{-dxddy}{dy^2}$ . Se pelo

contrario supuzermos  $dy$  constante, a differencial de  $\frac{dx}{dy}$  será  $\frac{ddx}{dy}$ .

Isto mesmo que se observa na passagem das differenças primeiras para as segundas, se deve observar em todas as mais differenciações: consideraremos sempre como constante aquella differença primeira que assim houvermos tratado.

21 ADVERTENCIA. Havemos até aqui supposto, que as variaveis  $x, y, &c.$  augmentaõ todas ao mesmo tempo, isto he, que tornando-se  $x$  em  $x + dx$ ,  $y$  vem a fer  $y + dy$ , e assim das outras. Acontecendo porém que diminuaõ humas em quanto as outras crescem, devemos depois de fazer a differenciação mudar no resultado o final da differencial da variavel que vai diminuindo, ou tambem podemos conservar a differencial do mesmo modo que a daõ as regras precedentes, mas na applicação que della se fizer a qualquer problema tomaremos negativamente a quantidade representada pela differencial da variavel que diminue. Com effeito se  $y$  tem  $q$  de diminuição, e se na differenciação supomos tacitamente que  $y$  se faz  $y + dy$ , he preciso que  $y - q = y + dy$ , ou  $-q = dy$ , ou  $q = -dy$ ; logo nestes casos, fóra da differenciação, devemos sempre chamar  $-dy$  ao que chamavamos  $dy$ . Disto encontraremos muitos exemplos no decurso desta Obra.

O mesmo se entende das differenças segundas a respeito das differenças primeiras. Se a differencial primeira diminuir, differenciaremos pelo modo ordinario; mas na applicação a qualquer problema,

ma, o que se houver chamado  $ddy$  se chamará  $-ddy$ , sendo  $dy$  a differença de que se trata.

Tais são as regras para differenciar as quantidades, quando ellas se propoem immediatamente. Succede porém muitas vezes, que em lugar das mesmas quantidades entraõ no calculo outras que as exprimem; como por exemplo, em lugar dos angulos nos servimos ordinariamente dos seus senos, tangentes, &c. e em lugar das quantidades usamos muitas vezes dos seus logaríthmos. Vejamos pois de que modo se deve differenciar este genero de expressões.

*Das Differenciais das quantidades affectas  
de Senos, Cosenos, &c.*

22 **S**UPPONHAMOS que temos para differenciar o seno do angulo ou do arco  $z$ , que he costume exprimir por  $\text{sen } z$ . Concebendo que o angulo  $z$  se faz  $z + dz$ , será  $d(\text{sen } z) = \text{sen}(z + dz) - \text{sen } z = \text{sen } z \text{ cos } dz + \text{sen } dz \text{ cos } z - \text{sen } z$ , suppondo o raio = 1 (Trig. 34). Mas o seno de hum arco infinitamente pequeno  $dz$  he este mesmo arco, e o seu coseno não differe do raio; logo  $\text{sen } dz = dz$ , e  $\text{cos } dz = 1$ ; e conseguintemente  $d(\text{sen } z) = dz \text{ cos } z$ . logo a differencial do seno de qualquer arco he igual á differencial do mesmo arco multiplicada pelo seu coseno.

23 Do mesmo modo  $d(\text{cos } z) = \text{cos}(z + dz) - \text{cos } z = \text{cos } z \text{ cos } dz - \text{sen } z \text{ sen } dz - \text{cos } z = -dz$

—  $dz \operatorname{sen} z$ . Logo a differencial do coseno de qualquer arco he igual á differencial negativa do mesmo arco, multiplicada pelo seu seno.

Com os dous principios  $d(\operatorname{sen} z) = dz \operatorname{cos} z$ , e  $d(\operatorname{cos} z) = -dz \operatorname{sen} z$  podemos differenciar qualquer quantidade composta de senos e cosenos, applicando as regras acima dadas.

Assim  $d(\operatorname{cos} 3z) = -3dz \operatorname{sen} 3z \dots d(\operatorname{cos} mz) = -mdz \operatorname{sen} mz$ , sendo  $m$  constante  $\dots d(\operatorname{sen} mz) = mdz \operatorname{cos} mz \dots d(\operatorname{sen} z \operatorname{cos} t) = dz \operatorname{cos} t \operatorname{cos} z - dt \operatorname{sen} z \operatorname{sen} t \dots d(z \operatorname{sen} z) = dz \operatorname{sen} z + z dz \operatorname{cos} z \dots d(\operatorname{sen}^m z) = mdz \operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{m-1} z \dots d(\operatorname{cos}^m z) = -mdz \operatorname{sen} z \operatorname{cos}^{m-1} z \dots dd(\operatorname{cos} z) = d(-dz \operatorname{sen} z) = -ddz \operatorname{sen} z - dz^2 \operatorname{cos} z \dots dd(\operatorname{sen} z) = d dz \operatorname{cos} z - dz^2 \operatorname{sen} z.$

24 Se tivermos para differenciar  $\operatorname{tang} z$  ou  $\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$  (Trig. 29), applicando as regras achare-

mos  $d \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z} = \frac{dz \operatorname{cos}^2 z + dz \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{cos}^2 z} = \frac{dz}{\operatorname{cos}^2 z}$ ,

na hypothese de ser o raio  $= 1$ . Logo a differencial da tangente de hum arco he igual á differencial do mesmo arco, dividida pelo quadrado do seu coseno.

25 Se nos derem para differenciar  $\operatorname{cot} z$  ou  $\frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z}$ , teremos  $d \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z} = \frac{-dz \operatorname{sen}^2 z - dz \operatorname{cos}^2 z}{\operatorname{sen}^2 z}$

$= \frac{-dz}{\operatorname{sen}^2 z}$ . Logo a differencial da cotangente de hum

ar-

arco he igual á differencial negativa do mesmo arco, dividida pelo quadrado do seu seno.

Do mesmo modo se acharáõ as differenciais segundas, terceiras &c. das quantidades affectas de senos, cosenos, tangentes &c.

Das quatro regras dadas se segue, que a differencial de hum arco he igual á differencial do seu seno, dividida pelo seu coseno, ou á differencial negativa do seu coseno, dividida pelo seu seno, ou á differencial da sua tangente, multiplicada pelo quadrado do seu coseno, ou tambem á differencial negativa da cotangente, multiplicada pelo quadrado do seu seno.

Assim se for  $z$  hum arco cujo seno seja  $y$ , o coseno  $x$ , e  $t$  a tangente, teremos  $d(A. \text{sen } y)$  ou  $dz =$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}, dz = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}, dz = \frac{dt}{1+t^2} \&c.$$

Se o raio fosse igual a  $a$ , seria  $dz = \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ ,

$$dz = \frac{-adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}, dz = \frac{a^2 dt}{a^2+t^2}.$$

### Das Differenciais logarithmicas.

26 **S**Ejaõ  $y$  e  $y'$  dous termos consecutivos de huma progressão geometrica, cujo expoente seja  $r$ , e  $a, a'$  os dous primeiros termos. Sejaõ do mesmo modo  $x$  e  $x'$  dous termos consecutivos de huma progressão arithmetica, correspondentes aos  
dous

dous  $y$  e  $y'$  da geometrica, e cujos primeiros dous termos sejaõ  $b$  e  $b'$ ; isto he, supponhamos

$$\begin{aligned} & \div \div a : a' \cdot \cdot \cdot y : y' \cdot \cdot \cdot \\ & \div b \cdot b' \cdot \cdot \cdot x \cdot x' \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Seraõ  $x$  e  $x'$  os logarithmos respectivamente de  $y$  e  $y'$  ( Arithm. 216 ).

Como ( Arithm. 211 ) temos  $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$ ; se for  $z$  a differença entre  $y'$  e  $y$ , isto he, se for  $y' = y + z$ , virá  $\frac{y+z}{y} = \frac{a'}{a}$ , ou  $\frac{az}{y} = a' - a$ . Mas a natureza da progressão arithmetica ( Arith. 204 ) dá  $x' - x = b' - b$ ; logo se supuzermos  $a' - a : b' - b :: 1 : m$ , sendo  $m$  hum numero qualquer, teremos  $\frac{maz}{y} = x' - x$ ; equação que exprime em geral a razão de huma progressão geometrica qualquer para outra qualquer progressão arithmetica correspondente.

Se em ambas as progressões os termos consecutivos forem infinitamente vizinhos, será  $z = dy$ , e  $x' - x = dx$ ; assim a equação se torna em  $\frac{mady}{y} = dx$ , e  $m$  não deixará porisso de ser hum numero finito; porque duas quantidades infinitamente pequenas pôdem conter huma a outra tantas vezes, quantas huma quantidade finita contém a outra tambem finita.

Vê-se pois que a differencial  $dx$  do logarithmo de hum numero representado por  $y$  he igual á differencial  $dy$  deste numero, dividida pelo mesmo nu-



numero  $y$ , e multiplicada pelo primeiro termo  $a$  da progressão geometrica fundamental e pelo numero  $m$ , que denota a razão da differença dos dous primeiros termos da progressão arithmetica para a differença dos dous primeiros termos da progressão geometrica. Como este numero  $m$  fixa de algum modo a relação das duas progressões, dá-se-lhe o nome de *módulo*.

Logo hum mesmo numero  $y$  pôde ter diferentes logarithmos, conforme os valores que se derem a  $m$  e a  $a$ . Mas entre todos os diferentes systems, o mais commodo nos calculos algebricos he aquelle em que  $a = 1$ , e  $m = 1$ . Nesta hypothese a equação  $\frac{mady}{y} = dx$ , que comprehende todos os systems, se torna em  $\frac{dy}{y} = dx$ .

27 Segue-se pois, que no systema de logarithmos de que se usa nos calculos *a differencial do logarithmo de huma quantidade he igual á differencial da quantidade, dividida pela mesma quantidade.*

Antes de começarmos a fazer uso deste principio na differenciação de qualquer quantidade, devemos notar: 1º que os logarithmos de que tratamos, não são os tabulares, mas são os que se chamaõ *hyperbolicos* pela razão que adiante veremos, quando ensinarmos o modo facil de passar de huns para outros.

2º Como o primeiro termo  $b$  da progressão arithmetica não apparece na equação  $\frac{mady}{y} = dx$ , tanto esta como a outra particular  $\frac{dy}{y} = dx$ , que

he deduzida daquella, tem sempre lugar, seja qual for o logarithmo do primeiro termo da progressão geometrica. Assim podemos suppollo, para maior facilidade, igual a nada, e consequentemente será cifra o logarithmo da unidade; mas não nos esqueçamos de que isto he inteiramente arbitrario.

Tomando pois a unidade por primeiro termo da progressão geometrica, e cifra por primeiro termo da arithmetica, podemos aqui applicar as regras dadas (Arithm. 227, e seg.), isto he, em lugar de  $l(ab)$  podemos tomar  $la + lb$ , denotando  $l$  o logarithmo. Da mesma sorte  $l \frac{a}{b} = la - lb$ ; como tambem  $la^m = mla$ ; e em fim  $l \sqrt[n]{a^m} = la \frac{m}{n} = \frac{m}{n} la$ .

Isto posto,  $dlx = \frac{dx}{x} \dots dl(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x} \dots dl \frac{a}{a+x} = d[la - l(a+x)] = -\frac{dx}{a+x}$ , advertindo que a differencial da constante  $la$  he nada.

Do mesmo modo  $dl \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x} \dots dl(x^2) = \frac{2dx}{x} \dots dl(xy) = d(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \dots dl \frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \dots dl \frac{a+x}{a-x} = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$

$$\frac{dx}{a-x} \dots dl(aa+xx) = \frac{2xdx}{aa+xx} \dots$$

$$\cdot dl \sqrt{(aa+xx)} = \frac{xdx}{aa+xx} \dots dl [x^m (a+bx^n)^p]$$

$$= \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n} \dots d l^m x \text{ ou } d(lx)^m =$$

$$m l^{m-1} x \frac{dx}{x} \dots d(x^m l^n x) = mx^{m-1} l^n x dx$$

$$+ nx^m l^{n-1} x \frac{dx}{x} \dots d(llx) = \frac{dy}{y} \text{ (fazendo}$$

$$lx = y) = \frac{dx}{xlx} \dots d(\cos lx) = -dlx \cdot \text{sen } lx =$$

$$- \frac{dx}{x} \text{sen } lx \dots dl(\cos x) = \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$- dx \text{tang} x.$$

### Das Diferenciais das quantidades exponenciais.

28 **P** Ara acharmos o modo de differenciar as quantidades *exponenciais*, isto he, as quantidades cujo expoente he variavel, como  $c^x$ ,  $x^y$ , &c., podemos servir-nos do principio dado (27), do qual se deduz, que a differencial de huma quantidade he igual ao producto da mesma quantidade multiplicada pela differencial do seu logarithmo.

$$\text{Assim } \dots d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d(y lx) =$$

$$x^y \left( dy lx + \frac{y dx}{x} \right) \dots d(a^x + y^z) = d(a^x)$$

$$+ d(y^z) = a^x d(la^x) + y^z d(ly^z) = a^x dx lx + y^z$$

$y^z \left( dzly + \frac{zdy}{y} \right) \dots d(a^2 + x^2)^x = (a^2 + x^2)^x$   
 $\left( dxl(a^2 + x^2) + \frac{2x^2 dx}{a^2 + x^2} \right)$ . Se for  $e$  o numero,  
 cujo logarithmo he 1, ferá  $d(e^x) = e^x dxle = e^x dx$ ;  
 logo esta exponencial particular tem por differencial a mesma quantidade multiplicada pela differencial do seu expoente.

Semelhantemente  $d(xy^z) = xy^z d(y^z lx) =$   
 $xy^z \left[ y^z \frac{dx}{x} + y^z lx \left( dzly + \frac{zdy}{y} \right) \right] = xy^z y^z$   
 $\left( \frac{dx}{x} + \frac{zdy}{y} lx + dzlxly \right)$ ; logo ferá  $d(e^{e^z})$   
 $= e^{e^z} e^z dz$ . Do mesmo modo se achará as differenciais segundas, terceiras, &c. das quantidades exponenciais, tanto da primeira ordem da fórma  $x^y$ , como da segunda ordem da fórma  $xy^z$ .

### Aplicações das regras precedentes.

29 **P** Ara mostrarmos em alguns exemplos o uso das regras dadas, e a sua grande vantagem na Algebra ordinaria, vamos applicallas aos objectos de que temos idéas, isto he, a problemas de Geometria e de Calculo.

*Aplicação ás Subtangentes, Tangentes, Subnormais, &c. das Curvas.*

30 **P** Ara tirarmos huma tangente a qualquer curva  $AM$  (*Fig. 1.*), representamos esta linha como hum polygono de infinitos lados infinitamente pequenos; o prolongamento  $MT$  de hum delles  $Mm$  he a tangente, a qual se determina para cada ponto  $M$ , calculando da maneira seguinte o valor da subtangente  $PT$ .

Pelas extremidades do lado infinitamente pequeno  $Mm$  imaginemos as duas ordenadas  $MP$ ,  $mp$ , e pelo ponto  $M$  a linha  $Mr$  paralela ao eixo das abscissas  $AP$ . Seja  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; ferá  $Pp$  ou  $Mr = dx$ , e  $mr = dy$ . Isto posto o triangulo infinitamente pequeno  $Mrm$  he semelhante ao triangulo finito  $TPM$ , e assim teremos  $rm (dy) :$

$$rM (dx) :: PM (y) ; PT ; \text{logo } PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Esta he a formula geral para determinar a subtangente de qualquer curva, seja qual for o angulo das coordenadas, com tanto que os  $y$  sejaõ parallelos entre si. Para isso não ha mais do que differenciar a equação dada da curva, a fim de tirar

o valor de  $\frac{dx}{dy}$ ; entãõ se multiplicarmos esta expressãõ por  $y$ , e puzermos nella em lugar de  $y$  o seu valor deduzido da mesma equação da curva, teremos  $PT$  expressa simplesmente em  $x$  e constantes; e querendo determinar a subtangente para qualquer ponto  $M$ , substituiremos em lugar de  $x$  o valor da abscissa correspondente a  $M$ .

Do

Do mesmo modo o triangulo rectangulo TPM dá a tangente  $MT = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}\right)}$   
 $= y \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$ . Se as coordenadas não  
 forem orthogonais, será (Trig. 180)  $MT =$   
 $y \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} - \frac{2dx}{dy} \cos a\right)}$ , sendo  $a$  o an-  
 gulo das coordenadas.

Quanto á subnormal, imaginando MQ perpendicular á tangente MT, teremos (Cor. 8.6. Eucl.)  
 $PQ = \frac{y^2}{PT} = \frac{y dy}{dx}$ . Semelhantemente a normal  
 $MQ = y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ .

*Exemplos.*

I. Na ellipse, cuja equação (Alg. 294) he  
 $yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$ , temos  $2y dy = \frac{bb}{aa} (a dx - 2x dx)$ ;  
 logo  $PT$  ou  $\frac{y dx}{dy} = \frac{2a^2 y^2}{ab^2 - 2b^2 x}$   
 $= \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$ , que he o mesmo resultado que achá-  
 mos (Alg. 301), mas de hum modo menos expedito que o presente.

A subnormal ou  $\frac{y dy}{dx} = \frac{bb}{aa} \left(\frac{a - 2x}{2}\right) =$   
 $\frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{2}a - x\right)$ , como achámos (Alg. 300).

Se

Se fizermos applicação da formula das tangentes, e normais, tambem acharemos os mesmos valores, que se deduzirão (Alg. 301, e 303).

Aqui se vê huma confirmação do que dissemos (5). Fazendo uso neste lugar das regras do Calculo Differencial, que supõem a omissão das quantidades infinitamente pequenas da segunda ordem em comparação das da primeira, chegámos aos mesmos resultados, que tínhamos achado na Secção segunda da primeira Parte por hum modo o mais directo, e o mais rigoroso. Logo quando desprezamos assim semelhantes quantidades, não fazemos mais, que imprimir no calculo o character que elle deve ter para exprimir o estado da questão.

II. Na parabola (Alg. 356) temos  $y^2 = px$ ; logo  $2ydy = p dx$ , e  $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$ . A subtangente pois  $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = 2x$ ; e a subnormal  $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$ , o que concorda com o que já achámos (Alg. 367, e 364).

III. A equação geral  $y^m = x^n a^{m-n}$ , que exprime as *parabolas* de todos os generos, sendo  $m$  e  $n$  numeros positivos dá  $my^{m-1} dy = na^{m-n} x^{n-1} dx$ ; logo  $\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{na^{m-n}x^{n-1}} = \frac{m}{n} x$ . Donde se vê, que nestas curvas a subtangente he igual á abscissa  $x$  tomada tantas vezes, quantas são as unidades do expoente de  $y$ , dividido pelo expoente de  $x$ . Se  $m = 2$ , e  $n = 1$ , que he o caso da parabola ordinaria-

dinaria, temos a subtangente igual a  $2x$ , como já vimos.

Se  $m = 3$ , e  $n = 1$ , temos  $y^3 = a^2x$ , equação que pertence á primeira parabola cubica; se  $m = 3$ , e  $n = 2$ , a curva he a segunda parabola cubica, cuja equação he  $y^3 = ax^2$ .

IV. Se a curva BM (Fig. 2) for a Logarithmica, isto he, huma curva tal, que ás abscissas AP, Ap, &c. tomadas em progressão arithmetica, correspondaõ ordenadas PM, pm, &c. em progressão geometrica; está claro que a sua equação será  $\frac{amdy}{y} = dx$  (26). Teremos pois  $\frac{ydx}{dy} = am$ ;

isto he, para todos os pontos de huma mesma logarithmica a subtangente PT he a mesma, e igual á primeira ordenada AB ou  $a$  tomada tantas vezes, quantas são as unidades do modulo.

31 Quando a equação da curva he tal, que  $y$  diminua crescendo  $x$ , como na Figura 3, então  $rM$  deve exprimir-se por  $-dy$  (21), o que dá

$PT = -\frac{ydx}{dy}$ . O calculo pois he aqui o mesmo em tudo, á excepção de que a tangente em vez de cahir para além da origem A das abscissas em ordem a PM, cahe para a parte opposta. Des-

te modo a formula  $\frac{ydx}{dy}$  póde servir em todos os casos; porque se as ordenadas forem diminuindo, o valor da subtangente virá em fórma negativa, e assim nos advertirá que o tomemos no mesmo sentido da abscissa.



V. No circulo, cuja equação (Alg. 285) he  $y^2 = a^2 - x^2$ , temos  $2ydy = -2xdx$ ; logo  $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$ ; quer dizer, que devemos tomar a subtangente PT (Fig. 4) no sentido CP dos  $x$ , porque na deducção da formula  $\frac{ydx}{dy}$  supuzemos, que ella se tomava em sentido contrario. Do mesmo modo acharemos a subnormal  $= -x$ , e a normal  $= a$ , como deve ser.

VI. A equação geral das *Hyperbolas* referidas ás asymptotas  $y^m x^n = a^{m+n}$  dá  $mly + nlx = (m+n)la$ ; logo  $\frac{mdy}{y} = -\frac{ndx}{x}$ , e conseguintemente a subtangente  $\frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{n}x$ . Se  $m = n = 1$ , ou na hyperbola ordinaria (Alg. 347), temos a subtangente  $= -x$ ; logo devemos tomar na asymptota proxima ao ponto M de que se trata (Fig. 5), e no sentido dos  $x$ , a linha PT  $= AP = x$ .

Assim se determina em geral por hum só calculo as tangentes, subtangentes, &c. de todas as curvas de huma mesma familia, isto he, das curvas cuja equação tem a mesma fórma, e sómente differre na grandeza dos expoentes, como por exemplo a respeito dos *Circulos* a equação he  $y^m = x^n (a-x)^{m-n}$ , a qual comprehende o circulo propriamente tal, quando  $m = 2$ , e  $n = 1$ ; a respeito das *Ellipses* . . .  $y^m = \frac{c}{b} x^n (a-x)^{m-n}$ ; e a

respeito das *Hyperbolas* . . .  $y^m = \frac{c}{b} x^n (\pm a + x)^{m-n}$ . A construcção destas equações, e consequentemente a determinação da figura das curvas respectivas não tem dificuldade (Alg. 283). Bem se vê, que  $y$  não tem mais que hum valor real quando o seu expoente he impar, e dous quando he par (Alg. 172); pelo que a huma mesma abscissa não corresponde mais que hum ramo de curva no primeiro caso, e dous no segundo, os quais cabem de diferentes partes do eixo das abscissas.

32 Agora podemos resolver os dous problemas seguintes: 1º *Tirar huma tangente a qualquer curva de hum ponto dado fóra della.* 2º *Tirar huma perpendicular a qualquer curva por hum ponto dado no seu plano.*

Porque suppondo que  $DM$  (Fig. 6) he a tangente procurada, tire-se pelo ponto dado  $D$  a recta  $DB$  parallela a  $PM$ , e seja  $AB = g$ ,  $BD = b$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; ferá  $BP = g + x$ , e consequentemente  $BT = PT - BP = \frac{ydx}{dy} - g - x$ . Os triangulos semelhantes  $TBD$ ,  $TPM$  dão  $TB : BD :: TP : PM$ ; logo substituindo os valores, teremos a equação  $\frac{ydx}{dy} - x - g = \frac{hdx}{dy}$ , isto he  $(y - b) \frac{dx}{dy} = g + x$ , a qual juntamente com a equação da curva dará o valor de  $x$  correspondente ao ponto  $M$ , aonde a tangente deve terminar. Se for possível tirar de  $D$  mais que huma tangen-

gente, a equação dará os valores de  $x$ , que correspondem aos diferentes pontos, em que tem lugar a solução.

Quanto á perpendicular  $DQ$  (*Fig. 7*), como temos  $PQ = \frac{ydy}{dx}$  (30), e os triangulos semelhantes  $QPM$ ,  $QBD$  dão  $DB : BQ :: PM : PQ$ ; conservando as mesmas denominações de cima, virá  $(b - y) \frac{dy}{dx} = g + x$ .

Ambas as soluções dadas se podem simplificar, fazendo passar o eixo das abscissas pelo ponto dado  $D$ , e conservando-o paralelo á sua primeira posição. Assim, tomando  $DK$  (*Fig. 6*) por eixo das abscissas, e suppondo  $KM = z$ , em lugar de  $y$  substituiremos  $z + b$  na equação da curva, e na do problema. Podemos tambem tomar o ponto  $D$  para origem das abscissas.

Se a curva tiver hum centro, como o circulo, a ellipse &c., sempre podemos suppor que o ponto  $D$  está em hum diametro, e assim a solução ficará mais simples.

33 No triangulo rectangulo  $Mmr$  (*Fig. 1*) temos (*Trig. 164*)  $\text{tang } Mmr = \frac{dx}{dy}$ ,  $\text{tang } mMr = \frac{dy}{dx}$ ,  $\text{sen } Mmr = \frac{dx}{Mm} = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ ,  $\text{sen } mMr = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ . Se quizermos pois fa-

ber em que lugar huma curva ou a sua tangente faz com a ordenada ou com a abscissa hum angulo dado, igualaremos a expressão respectiva, que agora

achámos, á tangente ou ao seno conhecido, e pela equação tanto finita, como diferencial da curva, acharemos o valor ou valores de  $x$  correspondentes aos pontos, em que existe o dito angulo. Se a questão for impossivel, o valor ou valores de  $x$  virão imaginarios, ou tambem a equação mostrará hum absurdo manifesto.

Na hyperbola, por exemplo, que tiver por equação  $yy = 2(ax + xx)$ , se quizermos saber onde a curva faz com a ordenada hum angulo cu-

$$\text{ja tangente} = m, \text{ teremos } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a + 2x} =$$

$$\frac{\sqrt{2(ax + xx)}}{a + 2x} = m; \text{ logo } x = -\frac{1}{2}a \pm$$

$$\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{1 - 2m^2}}.$$

Se o angulo for de  $45^\circ$ , será  $m = 1$ ; logo  $x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-1}$ , valores imaginarios, os quais mostraõ, que a hyperbola proposta nunca faz com a ordenada hum angulo de  $45^\circ$ .

Pouca reflexão basta para ver, que se nos problemas antecedentes tivermos fõmente a equação diferencial, o calculo não poderá satisfazer do mesmo modo que se a tivermos em termos finitos. Porque 1º se na equação que resolve o problema apparecer ainda  $x$  e  $y$  depois da substituição do

valor de  $\frac{dx}{dy}$ , a equação da curva não pôde servir

para eliminar  $y$ , pois que pela hypothese contém  $dx$  e  $dy$ . 2º E ainda quando não haja necessidade de eliminar  $y$ , como acontece em muitos casos, não poderemos segurar-nos se o valor de  $x$

fa-

satisfará á questáo , porque para isso seria necessario substituir este valor na equação da curva , e deduzir hum valor real para  $y$  ; mas da equação differencial não se pôde tirar o valor de  $y$ .

O unico modo de resolver em semelhantes casos os problemas , de que tratamos , consiste em construir a equação ultima em  $x$  e  $y$  , que se deduzio das condições do problema; entáo esta construcção (suppondo que a curva está descrita) dará huma segunda linha , cuja intersecção ou intersecções com a primeira daó a solução ou soluções procuradas.

34 Podemos tambem pelos mesmos principios determinar as asymptotas rectilneas das curvas.

Porque , tendo as curvas huma asymptota rectilnea , quando a tangente na extremidade de hum seu ramo infinito encontra o eixo das abscissas ou das ordenadas em huma distancia finita da origem , está claro , que se em  $AT = PT - AP$  (Fig.8) ,

ou em  $\frac{ydx}{dy} - x$  , depois de ser calculado , supuzermos  $x$  ou  $y$  infinito , conforme eliminarmos  $y$  ou  $x$  ; os valores finitos que resultarem para  $AT$  serão as distancias  $AC$  , por onde devem passar as asymptotas. Para acharmos a outra distancia necessaria para determinar a posição das mesmas asymptotas , imaginemos por  $A$  a linha  $AK$  parallela ás ordenadas , e pela semelhança dos triangulos

$TPM$  ,  $TAK$  teremos  $AK = y - \frac{xdy}{dx}$  ; valor que depois de ser calculado dará , suppondo se  $x$  ou  $y$  infinito , as distancias  $AR$  por onde passa a asymptota.

Exem-

Exemplo. Se tivermos  $y^3 = x^2 (a + x)$  por equação da curva, virá  $3y^2 dy = (2ax + 3x^2) dx$ ;

logo AT ou  $\frac{y dx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax + 3x^2} - x = \frac{ax}{2a + 3x}$ , que na hypothese de  $x$  infinito dá

AT  $= \frac{1}{3}a$ . Da mesma sorte se achará AK ou  $y - \frac{x dy}{dx} = y - \frac{2ax^2 + 3x^3}{3y^2} = \frac{ax^2}{3x \sqrt{[(a + x)^2 x]}}$ ,

que na hypothese de  $x$  infinito se reduz a AK  $= \frac{1}{3}a$ . Tem pois a curva huma asymptota, cuja posição se determina pelos dous pontos achados.

Se o valor de AK fahir infinito, sendo finito o de AT, a asymptota será parallelá aos  $y$ . Se pelo contrario sendo AT infinito, o valor de AK vier finito, cifra, ou infinitamente pequeno, a asymptota será parallelá aos  $x$ .

35 Até aqui havemos supposto, que as ordenadas eraõ parallelas, e se contavaõ da mesma linha sobre que se contaõ as abscissas. Porém humas vezes fazemos partir as ordenadas de hum ponto fixo; outras vezes tomamos por abscissas os arcos de huma curva, e por ordenadas linhas rectas, ou linhas curvas. De qualquer modo que se reportem os pontos da curva principal, sempre temos, ou ao menos sempre podemos ter huma equação, que exprima a relação entre as abscissas e as ordenadas. Querendo fazer uso della para determinar as tangentes, ou outras linhas, devemos praticar de maneira, que as linhas de que para isso

nos servirmos não contenhaõ outras diferenciais , que não sejaõ as das variaveis da equaçãõ , como vamos mostrar em alguns exemplos.

36 I. Seja BS ( Fig. 9 ) huma curva que tem por abscissas os arcos AM de huma curva conhecida AM , a qual sabemos já tirar tangentes , e por ordenadas as reãtas MS parallelas a huma linha dada ; suppondo que a relação de AM para MS se exprime por huma equaçãõ qualquer , isto he , que MS he huma funcãõ qualquer de AM , tirar huma tangente a hum ponto dado S da curva proposta BS.

Imaginemos , como acima , o elemento S; produzido até encontrar em Q a tangente MT ao ponto correspondente M da curva AM ; tire-se Sk parallela a MT ou Mm , e seja  $AM = x$  ,  $MS = y$  ; ferá  $Mm = Sk = dx$  , e  $sk = sm - SM = dy$ .

Isto posto , os triangulos semelhantes Sks , QMS daõ  $MQ = \frac{ydx}{dy}$  ; logo tomando sobre MT a

parte MQ igual ao valor de  $\frac{ydx}{dy}$  que der a equaçãõ diferencial da curva , teremos o ponto Q ; a linha QS pois tirada por elle e por S ferá a tangente procurada.

Supponhamos por exemplo , que a curva BS se constroe tomando sempre MS igual a huma parte  $\frac{a}{b}$  do arco AM ; entãõ teremos  $by = ax$  , e

conseguintemente  $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$  ; logo  $MQ = x$ . Af-

firm em todas as curvas , cujas ordenadas parallelas forem proporcionais ás abscissas correspondentes,

tes, ou estas fejas rectas ou curvas, será a subtangente igual á abscissa correspondente.

37 Nesta mesma hypothese se AM for hum circulo, a curva BS será huma *Cycloide*. Quando  $b = a$ , ou  $MS = BM$  ( *Fig. 10* ), temos a *cycloide* simples ou ordinaria, a qual he descrita por hum ponto da circumferencia S do circulo CNS rodando sobre huma linha Cc.

Está claro, que nesta cycloide a base Cc he igual á circumferencia do circulo genitor, e que sendo  $BM = x$ , e  $PS = y$ , a equação da curva he  $y = x + \text{sen } x$ ; donde se vê que a cycloide he do genero das curvas transcendentis. Se  $a < b$ , a curva chama-se *cycloide encurtada* ( *Fig. 11* ), a qual he descrita por hum ponto da circumferencia do circulo, que além do movimento de revolução tem tambem o de translação no mesmo sentido; nesta curva a base he menor que a circumferencia do circulo genitor. Se  $a > b$ , temos a *cycloide alongada* ( *Fig. 12* ), em cuja formação o movimento progressivo se faz para a parte contraria do movimento de rotação; nesta a base he maior que a circumferencia do circulo genitor. O diametro AB do circulo, quando he perpendicular ao meio da base, chama-se o *eixo* da *cycloide*; o ponto B he o *vertice*. Se em lugar de hum ponto da circumferencia do circulo tomarmos hum ponto dentro ou fóra delle para descrever a cycloide, e se em vez de se effectuar a rotação do circulo sobre huma recta, este movimento se fizer sobre a circumferencia de outro circulo, então a curva descrita será do genero das que se chamaõ *Epicicloides*.

38 II. *Suppondo no problema precedente ( 36 ), que as ordenadas se contaõ desde huma recta determina-*  
na-



nada AP ( Fig. 9 ) ; achar a subtangente PI sobre a mesma linha AP.

Tire-se Su paralela a AP ; e seja PM = y , a tangente TM da curva conhecida AM = t , e a sua subtangente PT = s . Isto posto , conservando as outras denominações , os triangulos semelhantes TPM , Mrm dão Mr ou Su =  $\frac{sdx}{t}$  ; logo comparando os dous triangulos Sus , IPS , teremos PI =  $\frac{sydx}{tdy}$  .

39 III. Resultando a curva BMs ( Fig. 13 ) de duas curvas conhecidas AL , CN por huma equação entre as ordenadas correspondentes PL ( x ) , PM ( y ) , PN ( z ) ; tirar a tangente a hum ponto qualquer M.

Imaginemos a ordenada infinitamente vizinha pmml , e as linhas Lu , Mr , no paralelas a AP . Seja a subtangente conhecida PS da curva AL = s , e a subtangente PR da curva CN = s' . Isto posto , os triangulos semelhantes LPS , luL dão PL ( x ) : PS ( s ) :: ul ( dx ) : Lu ;

logo Lu ou Mr ou on =  $\frac{sdx}{x}$  . Mas os trian-

gulos Non , NPR dão dz =  $-\frac{z}{s'}$  on =  $-\frac{szdx}{s'x}$  ,

notando que PM cresce , e PN diminue ; e os

dous TPM , Mrm dão PT =  $\frac{y}{dy}$  Mr =  $\frac{sydx}{xdy}$  ;

logo pondo na equação diferencial da curva o valor agora achado de dz , e substituindo na expref-

pressão de PT o valor de  $\frac{dx}{dy}$  tirado da mesma equação diferencial, teremos o valor da subtangente.

Supponhamos por exemplo, que PM he sempre meia proporcional entre PL e PN, isto he, supponhamos que he  $y^2 = xz$ , teremos  $2ydy = zdx + xdz = zdx - \frac{szdx}{s'}$ ; logo  $\frac{dx}{dy} = \frac{2s'y}{z(s' - s)}$ , e conseguintemente  $PT = \frac{2ss'y^2}{xz(s' - s)} = \frac{2ss'}{s' - s}$ . Em geral, se for  $y^m = x^n z^{m-n}$ , achare-

mos  $PT = \frac{mss'}{ns' - (m - n)s}$ .

Estes exemplos podem variar-se com muita facilidade, tomando huma equação como quizermos entre  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Podemos, por exemplo, suppor que as curvas AL, CN se tornaõ em linhas rectas (Fig. 14). Entaõ tomando sempre  $PM^m$  igual a  $PL^n$  e  $PN^{m-n}$ , a curva BM será huma secção conica ao infinito: a saber, huma parabola, quando algum dos pontos C ou A estiver a huma distancia infinita, isto he, quando huma das rectas AL, CN for parallela ao diametro AB; huma ellipse, quando os dous angulos HAC, HCA forem agudos; e particularmente hum circulo, quando cada hum for de  $45^\circ$ ; em fim huma hyperbola, quando hum dos mesmos angulos for obtuso, isto he, quando a ordenada ao ponto de encontro H naõ cahir entre as extremidades A e C.

40 IV. Suppondo que as ordenadas partem de hum ponto fixo, isto he, suppondo que a equação da curva exprime a relação da ordenada CM ( Fig. 14 ) para o angulo ACM comprehendido por ella e pela linha fixa AC, ou para o arco OS descrito com hum raio determinado OC; tirar huma tangente a qualquer ponto M.

Supponhamos que a perpendicular CT sobre CM encontra a tangente procurada TM no ponto T. Então imaginando o elemento  $Mm$ , e tirando  $mC$ , concebamos o arco  $Mr$  descrito com o raio CM, e seja  $CO = a$ ,  $CM = y$ ,  $OS = x$ . Isto posto, os triangulos  $Mrm$ ,  $TCM$ , que são semelhantes por differir o angulo  $Mmr$  infinitamente pouco do angulo  $TMC$ , dão  $CT$

$= \frac{CM \cdot Mr}{rm} = \frac{y \cdot Mr}{dy}$ . Mas os sectores semelhantes  $CSs$ ,  $CMr$  dão  $Mr = \frac{CM \cdot Ss}{CS} =$

$\frac{ydx}{a}$ ; logo  $CT = \frac{y^2 dx}{ady}$ , valor facil de calcular, porque supponmos que  $y$  he huma função de  $x$ .

Se for, por exemplo,  $CM (y) : OS (x) :: CO$  ou  $CS (a) : OSAO (b)$ , a curva CMA ( Fig. 16 ) será a *Spiral de Archimedes*, e teremos  $y = \frac{ax}{b}$ ; logo  $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$ , e  $CT = \frac{y^2 b}{a^2}$

$= \frac{xy}{a} = MQ$ , sendo MQ o arco descrito com o raio CM. Esta curva mechanica descreve-se  
pe-

pelo movimento uniforme de hum ponto *C* sobre o raio *CA* de *C* para *A*, em quanto este mesmo raio gyra uniformemente ao redor do centro *C*.

Na equação das espirais de todas as ordens

$y^m = \frac{a^m x}{b}$  temos  $\frac{y dx}{dy} = mx$ ; logo será a subtangente  $= m \cdot MQ$ .

41 V. Na mesma hypothese de partirem as ordenadas de hum ponto, supponhamos que a equação da curva *BM* exprime a relação de *CM* para a ordenada correspondente *CS* (Fig. 17) de outra curva conhecida *OS*; pergunta-se de que modo se ha-de tirar hum tangente a qualquer ponto *M*.

Imaginemos o elemento *Mm*, as ordenadas *CM*, *Cm*, e os arcos *Mr*, *Sq* descritos de *C* com os raios respectivos *CM*, *CS*. Por quanto a equação sómente dá a razão de *rm* para *sq*, devemos achar a razão de *rm* para *Mr*, que he necessaria para determinar a subtangente.

Para isso seja a subtangente conhecida *CQ* da curva *OS*  $= s$ , *CS*  $= x$ , *CM*  $= y$ . Os triangulos *CQS*, *Sqs* dão  $qs = \frac{s dx}{x}$ ; logo comparando os sectores semelhantes *CSq*, *CMr*, teremos  $Mr = \frac{sy dx}{xx}$ . Agora com esta expressão he facil de deduzir dos triangulos semelhantes *Mrm*, *TCM* a formula da subtangente *CT*

$$= \frac{sy^2 dx}{x^2 dy}.$$

Supponhamos por exemplo, que para qual-quer linha OS he SM sempre igual a huma linha dada  $a$ ; tereremos  $x + a = y$ ; logo  $\frac{dx}{dy} = 1$ , e conseguintemente  $CT = \frac{sy^2}{x^2}$ , que se construirá da maneira seguinte.

Conduziremos por M a linha MX parallela a SQ, e tirando SX, conduziremos parallelamente a ella a linha MT, que será a tangente procurada. Com effeito os triangulos semelhantes CSQ, CMX dão  $CX = \frac{sy}{x}$ , e os dous CSX, CMT dão  $CT = \frac{CM \cdot CX}{CS} = \frac{sy^2}{x^2}$ .

Quando OS he huma linha recta, a curva BM (Fig. 18) chama-se a *Concoide de Nicomedes*, cuja asymptota he a recta OS, e o pólo o ponto C. Seja AD ou SM =  $a$ , AC =  $b$ , AP =  $x$ , PM =  $y$ ; será AS =  $x$  — PS =  $x - \sqrt{aa - yy}$ , e os triangulos semelhantes PSM, CSA darão  $xy = (b + y) \sqrt{aa - yy}$ , equação ás coordenadas da concoide superior BM, pela qual se vê que esta curva algebraica pertence ás linhas da quarta ordem.

Estes exemplos mostram de que modo se ha-de proceder em outros casos, quer as curvas sejaõ mechanicas, quer algebraicas.

*Aplicação aos limites das Linhas Curvas, e em geral aos limites das quantidades, e aos problemas de Maximis & Minimis.*

42 **P** Or quanto  $\frac{dx}{dy}$  exprime (33) a tangente do angulo, que a curva ou a sua tangente faz em cada ponto com a ordenada, e  $\frac{dy}{dx}$  exprime a tangente do angulo, que a curva ou a sua tangente faz com o eixo das abscissas, segue-se que para saber em que lugar a tangente de huma curva he parallela ás ordenadas, procuraremos em que lugar a razão das differenciais das coordenadas, isto he, o valor de  $\frac{dx}{dy}$  se reduz a nada, ou (que vem a ser o mesmo) em que lugar  $dx = 0$ ; e para saber em que lugar a tangente da curva he parallela ás abscissas, procuraremos em que lugar  $dy = 0$ ; porque em ambos os casos os angulos são nullos. Differentiando pois a equação de huma curva, e igualando a nada ou ao infinito o valor de  $\frac{dx}{dy}$  teremos huma equação, a qual sendo combinada com a mesma equação da curva dará os valores das coordenadas  $x$  e  $y$ , correspondentes aos pontos, em que a tangente da curva he parallela ás ordenadas ou ás abscissas.

Para illustrar esta regra com hum exemplo familiar, tomemos a equação  $yy + xx = 3ax - 2aa$

$\pm 2by - bb$ , a qual pertence ao circulo (Alg. 392), se (Fig. 19) os  $x$  (AP) e os  $y$  (PM, PM') forem perpendiculares entre si.

Esta equação dá  $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$ . Se igualarmos o numerador a nada, teremos  $2y = 2b$ , ou  $y = b$ . Substituindo este valor na equação da curva, virá  $xx - 3ax = -2aa$ , que dá  $x = \frac{1}{2}(3a \pm a)$ , isto he  $x = 2a$ , e  $x = a$ . He pois a curva ou a sua tangente parallelas ás ordenadas em dous pontos R e R', dos quais hum R tem por abscissa a linha AQ  $= a$ , e o outro R' tem por abscissa a linha AQ'  $= 2a$ , tendo ambos elles a linha  $b$  por ordenada.

Se igualarmos tambem o denominador a nada, teremos  $3a - 2x = 0$ , ou  $x = \frac{3}{2}a$ ; e substituindo este valor na equação da curva, virá  $(y - b)^2 = \frac{1}{4}aa$ ; logo  $y = b \pm \frac{1}{2}a$ , isto he  $y = b + \frac{1}{2}a$ , e  $y = b - \frac{1}{2}a$ . Estes resultados nos mostraõ, que a tangente he parallelas ás abscissas em dous pontos T e T', dos quais hum T' tem por ordenada a linha ST'  $= b + \frac{1}{2}a$ , e o outro T tem por ordenada a linha ST  $= b - \frac{1}{2}a$ , tendo ambos a mesma abscissa AS  $= \frac{3}{2}a$ .

Os pontos Q e Q' chamaõ-se os *limites* das abscissas, porque entre Q e Q' a cada abscissa correspondem os  $y$  reais PM, PM', e não ha ponto algum de curva nem entre Q e A, nem para além de Q'; de maneira que se supuzermos  $x$  menor  
que

que  $AQ$  ou  $a$ , ou tambem maior que  $AQ'$  ou  $2a$ , isto he, se em lugar de  $x$  substituirmos na equação  $a - q$ , ou  $2a + q$ , não virá valor algum real para  $y$ .

Da mesma forte se tirarmos pelo ponto  $A$  a linha  $AL$  paralela ás ordenadas, que será o eixo dellas, e pelos pontos  $T, T'$  tirarmos  $TL, T'L'$  parallelamente ás abscissas, as linhas  $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$ , e  $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$  feráo os limites das ordenadas; porque sendo a tangente paralela ás abscissas, não pôde haver ordenada maior que  $AL'$ , nem menor que  $AL$ . Tambem se na equação da curva metermos em lugar de  $y$  huma quantidade  $b - \frac{1}{2}a - q$  menor que  $b - \frac{1}{2}a$ , ou huma quantidade  $b + \frac{1}{2}a + q$  maior que  $b + \frac{1}{2}a$ , a resolução da equação dará valores imaginarios para  $x$ .

43 A ordenada  $ST'$  he a maior de todas as que terminaõ na parte concava  $RT'R'$  da circumferencia; a ordenada  $ST$  he a menor de todas as que terminaõ na parte convexa  $RTR'$ ; e as ordenadas  $QR, Q'R'$  são simultaneamente as menores que terminaõ na parte concava, e as maiores que terminaõ na parte convexa.

44 Assim o mesmo methodo determina 1º os limites das ordenadas e abscissas; 2º os pontos em que a tangente he paralela ás abscissas, ou ás ordenadas; 3º em fim as maiores e menores abscissas, ou ordenadas.

45 Huma função qualquer de huma variavel  $x$  pôde considerar-se como a expressãõ da ordena-

na-



nada  $y$  de huma curva. Por exemplo,  $\frac{x^2 (a - x)}{aa}$  pôde tomar-se pela expressã de huma quantidade  $y$ ; e a equaçã  $y = \frac{x^2 (a - x)}{aa}$ , que entã temos, pôde considerar-se como a de huma curva, cuja abscissa seja  $x$ , e  $y$  a ordenada. Logo para saber se huma quantidade  $\frac{x^2 (a - x)}{aa}$  vem a ser maior ou menor em algum caso do que em outro qualquer (o que se chama ser susceptivel de hum *Maximum*, ou de hum *Minimum*), seguiremos o methodo exposto, o qual consiste em igualar a nada o valor de  $\frac{dx}{dy}$  tirado da equaçã, que sempre podemos formar entre  $x$  e  $y$ .

46 A isto se reduz o methodo chamado de *Maximis & Minimis*, que he hum dos mais uteis da Analyse, e que como acabamos de ver, ensina a achar entre muitas quantidades que crescem ou diminuem por huma lei, qual he a maior ou a menor dellas, ou em geral qual he a que tem certas propriedades no mais alto grão em comparaçã de todas as suas semelhantes. Passemos a dar alguns exemplos tirados da Geometria e do Calculo.

47 Probl. I. *Dividir hum numero dado em duas partes tais, que o seu produçto seja hum Maximum.*

Representando huma destas partes por  $x$ , a outra será  $a - x$ , e o produçto de ambas será  $ax - xx$ ; expressã que he susceptivel de *maximum*, como veremos se substituirmos successivamente o e  $a$  em

D

lugar

lugar de  $x$ . Suppondo pois  $y = ax - xx$ , teremos  
 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$ . Se igualarmos o numerador a nada, virá  $1 = 0$ , que he absurdo; logo não poderemos achar o *maximum*, senão igualando o denominador a nada. Fazendo isso, vem  $a - 2x = 0$ , e conseguintemente  $x = \frac{1}{2}a$ , que reduz o producto a  $\frac{1}{4}a^2$ . Logo de qualquer modo que se divida hum numero em duas partes, o producto dellas será o maior possível, quando cada huma for a ametade do mesmo numero; e conseguintemente o reclangulo formado pelas partes de huma linha  $a$  será o maior possível, quando cada huma dellas for  $\frac{1}{2}a$ .

48 Todas as vezes que tivermos a expressão algebrica da quantidade, não he necessario igualalla a huma nova variavel  $y$ ; basta simplesmente differencialla, e depois de dividir pela differencial da variavel, igualar a nada o numerador ou o denominador, se a differencial for huma fracção. Assim no nosso exemplo differenciaremos logo  $ax - xx$ , e igualando a differencial a nada, teremos  $a - 2x = 0$ , que igualmente dá  $x = \frac{1}{2}a$ .

49 Em geral: *Dividir hum numero dado  $a$  em duas partes tais, que o producto de huma potencia determinada de huma dellas pela mesma ou outra potencia da outra parte seja o maior possível.*

Seja a primeira parte  $= x$ , a potencia  $a$  que ella deve ser elevada  $= m$ , a potencia  $a$  que deve ser elevada a outra parte  $= n$ ; teremos  $x^m (a-x)^n = \text{Max.}$ ; logo  $mx^{m-1} (a-x)^n = nx^m (a-x)^{n-1}$ , isto he,  $m(a-x) = nx$ , que dá  $x = \frac{ma}{m+n}$ ,  
e

e conseguintemente o valor do maximo producto será  $m^m n^n \left( \frac{a}{m+n} \right)^{m+n}$ . Se a questaõ por exemplo fosse dividir o numero  $a$  em duas partes tais, que o quadrado de huma multiplicado pelo cubo da outra fosse o maior possivel, teriamos  $m = 2, n = 3$ ; logo  $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$ ; isto he huma das partes deve ser  $\frac{2}{5}$  do numero ou da quantidade proposta, e por conseguinte a outra deve ser  $\frac{3}{5}$  da mesma quantidade.

Pelo que acima dissemos se mostra, que huma quantidade pôde vir a ser a maior de todas as suas semelhantes por dous modos differentes; ou quando, como  $PM'$  (*Fig. 19*), começa a crescer para entrar depois a diminuir; ou quando, como  $P'M''$ , vai crescendo para parar de repente, fazendo-se  $Q'R'$ ; porém neste ultimo caso a quantidade he ao mesmo tempo a maior das ordenadas que terminaõ na parte convexa, e a menor das que terminaõ na parte concava. Da mesma sorte huma quantidade pôde vir a ser a menor das suas semelhantes por dous modos; ou quando, como  $PM$ , diminue, e depois começa a crescer; ou quando, como  $P'M'''$ , diminue para parar de repente, e entãõ he ao mesmo tempo hum *minimum* e hum *maximum*; hum *minimum* a respeito do ramo  $M'T'M'''$ , e hum *maximum* a respeito do ramo  $MTM''$ .

50 Assim para distinguir se huma quantidade

he hum *maximum*, ou hum *minimum*, ou hum e outro ao mesmo tempo; suppondo que *a* representa o valor de *x*, que convem ao *maximum* ou ao *minimum*, devemos substituir na quantidade proposta em lugar de *x* successivamente  $a + q$ ,  $a$ ,  $a - q$ . Se os dous resultados extremos forem reais e menores que o do meio, a quantidade será hum *maximum*; se pelo contrario os dous resultados extremos forem maiores que o do meio, a quantidade será hum *minimum*; em fim se dos mesmos dous resultados extremos hum for imaginario e o outro real, a quantidade será ao mesmo tempo hum *maximum* e hum *minimum*.

51 Quando o valor, que se achar para a variavel pelo methodo de *maximis & minimis*, fizer negativa a expressao do *maximum* ou do *minimum*, concluiremos que esse *maximum* ou *minimum* não pertence á queltao actual, mas a outra, que tenha algumas condiçoes contrarias ás da primeira. Propondo-se por exemplo: *Dividir a linha AB (a) no ponto C (Fig. 20), de maneira que o quociente do quadrado da distancia AC (x) ao ponto A, dividido pela distancia CB (a-x) ao ponto B seja o menor possivel,*

teremos  $\frac{x^2}{a-x} = Min$ ; logo  $\frac{2x(a-x) + x^2}{(a-x)^2} = 0$ ;

que (igualando-se o numerador a nada) dá  $x = 0$ , ou  $x = 2a$ . O primeiro valor indica hum *minimum*, mas que he evidente sem o calculo. Quanto ao se-

gundo, se o substituiremos em  $\frac{x^2}{a-x}$ , acharemos  $-4a$ ; donde concluiremos, que o *minimum* não pertence ao problema actual. Reflectindo porém no valor  $x = 2a$ , vê-se que o ponto C não pôde estar

estar entre A e B, e que a soluçãõ pertence ao problema, em que se propuzesse achar o ponto no prolongamento de AB além de B a respeito de A. Com effeito neste caso, chamando a AC',  $x$ , a distancia

BC' será  $x - a$ , e assim teremos  $\frac{x^2}{x - a} =$

*Min*; logo  $\frac{2x(x - a) - x^2}{(x - a)^2} = 0$ , que dá  $x = 2a$

como acima. Se substituirmos este valor em  $\frac{x^2}{x - a}$ , teremos  $4a$ ; logo este caso tem hum *minimum*.

O denominador  $(x - a)^2$  da expressãõ differencial, sendo igualado a nada, dá  $x = a$ , que indica hum *maximum*, pois que entãõ a quantidade he infinita. Mas nem porisso perde o verdadeiro caracter do *maximum*; porque ou supponhamos  $x$  maior, ou menor que  $a$ , sempre virá huma quantidade menor, do que se suppozessesemos  $x = a$ .

52 Quando a expressãõ de huma quantidade susceptivel de hum *maximum* ou *minimum* contiver algum multiplicador ou divisor constante, podemos supprimillo antes de differenciar. Represente  $\frac{ay}{b}$

geralmente a quantidade susceptivel de *maximum* ou *minimum*, sendo  $a$  e  $b$  constantes; deve ser

$\frac{ady}{b} = 0$ ; mas como  $a$  e  $b$  não são nada, deve

ser  $dy = 0$ ; logo sahe a mesma conclusãõ que no caso de sõmente  $y$  ser *maximum* ou *minimum*, isto he

no caso de se supprimir  $\frac{a}{b}$ . Por esta reflexãõ se

simplificaõ os calculos em muitos casos.

53 Probl. II. Achar entre todas as linhas que se podem tirar por hum mesmo ponto D, dentro do angulo conhecido ABC (Fig. 21), qual he a que fórma com os lados deste angulo o menor triangulo possível.

Havendo pelo ponto D conduzido DG parallela a AB, DK perpendicular sobre BC, e huma recta qualquer EF, tire-se pelo ponto de encontro E de EF com AB a linha EL parallela a DK. Seja  $BG = a$ ,  $DK = b$ , e a base BF do triangulo  $BEF = x$ . Bem se vê que passado hum certo termo, quanto mais crescer BF, tanto mais crescerá o triangulo; e que pelo contrario se BF diminuir, tambem o triangulo ha de diminuir, mas só até certo limite; porque se BF viesse a ser quasi igual a BG, a recta EDF seria quasi parallela a AB, isto he, estaria proxima a confundir-se com GD, e então o triangulo seria extremamente grande: ha pois hum valor de BF entre  $x = a$  e  $x = \infty$ , que dá o menor triangulo possível. Para o achar, busque-se a expressão geral do triangulo BEF.

Os triangulos semelhantes BEF, GDF dão  $GF : BF :: DF : EF$ , e os dous DKF, ELF dão  $DF : EF :: DK : EL$ ; logo  $GF (x - a) : BF (x)$

$:: DK (b) : EL = \frac{bx}{x - a}$ ; será pois a superficie do

triangulo BEF ou  $\frac{EL \cdot BF}{2} = \frac{\frac{1}{2} bx^2}{(x - a)}$ . Assim

differenciando  $\frac{x^2}{x - a}$  (52), acharemos  $x = 2a$  por

hum

hum calculo ja feito ( 51 ). Logo se tomarmos  $BF = 2BG$ , a linha FDE que se tirar por D, dará o menor triangulo procurado  $EBF = 2ab$ .

54 Probl. III. *Achar o maior parallelepipedo de todos os que tem a mesma superficie e a mesma altura.*

Seja  $h$  a altura do parallelepipedo,  $cc$  a sua superficie,  $x$  e  $y$  os dous lados do rectangulo que lhe serve de base. A superficie total compõe-se de seis rectangulos, dos quais dous tem cada hum a altura  $h$  e a base  $x$ ; dous tem a altura  $h$  e a base  $y$ ; e os dous ultimos tem a base  $x$  e a altura  $y$ ; assim a superficie total  $cc = 2hx + 2hy + 2xy$ , que he constante. Como a solidez  $hxy$  deve ser a maior de todas as da mesma superficie, teremos  $xdy + ydx = 0$ . Tirando desta equação o valor de  $dx$ , e substituindo-o na expressão differencial da superficie  $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$ , acharemos  $y = x$ ; logo a base deve ser hum quadrado. Para ter o lado deste quadrado, poremos em lugar de  $y$  o seu valor  $x$  na equação  $2hx + 2hy + 2xy = cc$ , e teremos  $4hx + 2x^2 = cc$ , que dá  $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$ ; excluindo pois a raiz negativa, que he inutil no caso presente, será  $-x + \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$  o valor conveniente de  $x$ .

Querendo agora saber qual deve ser a altura  $h$ , para que o parallelepipedo tenha a maior solidez entre todos os da mesma superficie, advertiremos, que como a base deve ser hum quadrado  $xx$ , a solidez ha de exprimir-se por  $hxx$ . Differenciando  
pois

pois esta expressãõ na hypothese de  $b$  e  $x$  serem variaveis , e igualando a differencial a nada , teremos  $db = -\frac{2b dx}{x}$  . Substituindo este valor em

$4b dx + 4x db + 4x dx = 0$  , que exprime entãõ a outra condiçãõ de ser constante a superficie , acharemos  $b = x$  ; logo o parallelepipedo procurado deve ser hum cubo , porque a altura  $b$  deve ser igual ao lado do quadrado , que serve de base. Para achar agora o lado deste cubo , substitua-se  $x$  em lugar de  $b$  na equaçãõ  $4bx + 2x^2 = cc$  , e virã

$6x^2 = cc$  , que dá  $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$  . Logo entre todos

os parallelepipedos de superficie constante , o que tem maior capacidade he o cubo , cujo lado he a raiz quadrada da sexta parte da mesma superficie

55 Procederemos do mesmo modo para achar o cylindro recto de maior capacidade entre todos os de mesma superficie. Porque sendo  $x$  o raio da base,  $y$  a altura , e  $1 : c$  a razãõ do raio para a semicircumferencia , teremos a superficie total  $= 2cxy + 2cx^2$  , e a solidez  $= cx^2y$  . Se tratarmos pois estas equações como acabamos de fazer com as do problema precedente , virã  $x = \frac{1}{2}y$  . Logo entre todos os cylindros rectos da mesma superficie , o que tem a altura igual ao diametro da base , he o de maior capacidade ; e reciprocamente entre todos os de igual capacidade , o que tem a altura igual ao diametro da base , he o de menor superficie.



56 Probl. IV. *Achar entre todos os triangulos do mesmo perimetro e base , qual he o que tem maior superficie.*

Tire-se a perpendicular CP ( Fig. 22 ) , e seja a base  $AB = a$  , o perimetro do triangulo  $ABC = c$  ,  $AP = x$  ,  $CP = y$  ; sera  $PB = a - x$  ,  $AC = \sqrt{(xx + yy)}$  , e  $CB = \sqrt{[yy + (a - x)^2]}$  . Logo teremos o perimetro ou  $c = a + \sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[yy + (a - x)^2]}$  , e a superficie =  $\frac{ay}{2} =$

Max. Esta ultima condiçãõ dá  $\frac{ady}{2} = 0$  , logo  $dy = 0$  ; e substituindo este valor na primeira equaçãõ depois de diferenciada, a saber  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{ydy - (a - x) dx}{\sqrt{[yy + (a - x)^2]}} = 0$  , virá  $x \sqrt{[yy + (a - x)^2]} = (a - x) \sqrt{(xx + yy)}$  , isto he  $xx = (a - x)^2$  , que dá  $x = \frac{1}{2}a$  , por onde se mostra , que o triangulo deve ser isosceles. Levantaremos pois huma perpendicular no meio de AB , e havendo descrito do ponto B com o raio igual á ametade da differença entre o perimetro  $c$  e a base  $a$  hum arco , que corte a perpendicular em C , se tirarmos CB e CA , teremos o triangulo de maior superficie entre todos os isoperimetros , construidos sobre a mesma base.

57 Se quizermos saber em geral, *qual he o triangulo de maior superficie entre todos os isoperimetros* ,  
de-

devemos notar , que pela soluçãõ antecedente consta , que  $x$  deve ser ametade da base , qualquer que ella seja. Logo a equaçãõ do perimetro se reduz a  $c - a = 2 \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)}$  , que dá

$$y = \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)} ; \text{ e por conseguinte a super-}$$

$$\text{ficie do triangulo} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)} , \text{ que}$$

deve ser hum *maximum* , seja qual for a base  $a$ . Diferenciaremos pois esta quantidade ou  $a \sqrt{(c - 2a)}$  na hypothese de  $a$  variavel , e igualando a diffe-

$$\text{rencial a nada, teremos } \sqrt{(c - 2a)} = \frac{a}{\sqrt{(c - 2a)}} ,$$

donde se tira  $a = \frac{1}{3}c$  ; logo a base deve ser o terço do perimetro ; e como já vimos que o triangulo era isosceles , segue-se que ha de ser equilatero. Assim de todos os triangulos isoperimetros , o equilatero he o que tem maior superficie.

58 Se nestas duas soluções igualassemos o denominador a nada , na primeira viria  $x$  imaginario , e na segunda  $a = \frac{1}{2}c$  , que tambem não satisfaz ao problema ; porque se a base fosse ametade do perimetro , os outros lados se confundiriam com a mesma base , e o triangulo degenerando entãõ em linha recta seria nullo. Daqui por diante , para não nos demorarmos em indagações inuteis , não igualaremos o numerador ou o denominador a nada , senãõ no caso de resultar huma soluçãõ admissivel.

59 No problema penultimo , para determinar o maior parallelepipedo entre todos os da mesma

su-

superficie, supuzemo-los primeiramente todos da mesma altura. No ultimo problema tambem para determinar o maior triangulo entre todos os do mesmo perimetro, começamos a solução pelos triangulos da mesma base.

Este methodo, ainda que indirecto, he ordinariamente o mais simples; resolve-se o problema fazendo variar primeiramente o menor numero de quantidades que for possivel, e fazendo depois variar successivamente cada huma das quantidades, que se tinhaõ tratado como constantes. Querendo por exemplo *dividir huma quantidade a em tres partes x, y, e a — x — y, tais que o producto de todas seja o maior possivel*, teremos  $d[xy(a - x - y)] = 0$ . Porém em lugar de differenciar de huma vez em ordem ás duas variaveis  $x, y$ , differenciaremos sómente em ordem a  $x$ , e virá  $a - 2x - y = 0$ , donde se conclue  $x = \frac{1}{2}(a - y)$ ; valor que muda o producto em  $\frac{1}{4}y(a - y)^2$ . Differenciando agora relativamente a  $y$ , acharemos  $(a - y)^2 = 2y(a - y)$ , que dá  $y = \frac{1}{3}a$ ; logo as tres partes devem ser iguais cada huma a hum terço da quantidade proposta.

6o Podemos tambem fazer variar todas as variaveis ao mesmo tempo, e ajuntando depois todos os termos em que entrar a differencial de huma mesma variavel, igualallos a nada; executando tambem a mesma cousa a respeito da differencial de cada variavel. Assim no ultimo exemplo teriamos

$$aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0,$$

e igualando separadamente a nada os termos affectos de  $dx$ , e os de  $dy$ , acharemos  $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$ , e  $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$ , isto he  $a - 2x - y = 0$ , e  $a - x - 2y = 0$ , das quais se conclue como acima  $x = \frac{1}{3}a$ , e  $y = \frac{1}{3}a$ .

A razão he facil de perceber, advertindo que não ha aqui outra condição a que se deva satisfazer, senão que a differencial seja nada; e que a isto se satisfaz, ou suppondo cada differencial  $dx$ ,  $dy$  igual a nada, o que he verdade, mas não dá nada a conhecer, ou suppondo que a soma dos termos multiplicados por  $dx$  e por  $dy$  he cada huma igual a nada.

61 Quando as condições dos problemas se exprimem por muitas equações, antes de applicar esta regra á equação differencial, que determina o *maximum* ou o *minimum*, devemos tirar das outras equações differenciadas os valores das differenciais de tantas variaveis, quantas são as equações menos a do *maximum* ou *minimum*, e introduzil-os nesta. Assim no exemplo acima do maior parallelepipedo, no qual tínhamos  $2bx + 2by + 2xy = cc$ , e  $bxy = Max$ , se quizermos tratar ao mesmo tempo  $b$ ,  $x$ ,  $y$  como variaveis, tiraremos da primeira equação differenciada o valor

$$db = \frac{-ydx - xdy - bdx - bdy}{x + y}, \text{ e substituindo-o na do } maximum \text{ tambem differenciada, virá}$$

$bx^2dy + by^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$ . Agora podemos igualar separadamente a nada a soma dos termos,

mos ; que multiplicação  $dx$  e  $dy$  , e teremos  $by^2 - xy^2 = 0$  , ou  $x = b$  , e  $bx^2 - x^2y = 0$  , ou  $y = b$  ; logo  $b = \sqrt{\frac{cc}{6}}$  ; o que tudo concorda com a solução achada.

62 Não só podemos fazer variar as quantidades ou successivamente , ou todas ao mesmo tempo , mas tambem podemos suppor constantes quaifquer funções das mesmas quantidades , com tanto que o numero destas novas condições arbitrarías , juntamente com o das condições do problema , não exceda o numero das variaveis  $x$  ,  $y$  ,  $z$  , que entrarem no mesmo problema. Esta advertencia pôde ser utilissima em muitas questões , principalmente havendo radicais , como vamos a moltrar.

Probl. V. *Achar entre todos os quadrilateros isoperimetros , qual he o que tem maior superficie.*

Abaixem-se dos angulos C e D sobre o lado AB as perpendiculares DE , CF , e conduza-se por D a recta DK paralela a AB. Seja  $AE = s$  ,  $DE = t$  ,  $AF = u$  ,  $CF = x$  ,  $BF = y$  , o perimetro do quadrilatero  $= a$  ; e os triangulos rectangulos darão  $DA = \sqrt{ss + tt}$  ,  $DC = \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]}$  ,  $CB = \sqrt{xx + yy}$  ; logo será  $a = u + y + \sqrt{ss + tt} + \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]} + \sqrt{xx + yy}$  . Por outra parte  $ABCD = DEFC + CFB - DAE = (t + x) \frac{s + u}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{st}{2}$  ; logo devemos differenciar esta quan-

tidade, e a equação antecedente. Porém como os radicais fariam o calculo subsequente muito complicado, supponhamollos todos tres constantes, o que dará . . .  $d\sqrt{(ss + tt)} = 0$ , ou  $sds + tdt = 0$ .  
 . . .  $(s + u)(ds + du) + (x - t)(dx - dt) = 0$ .  
 . . .  $x dx + y dy = 0$ . A equação do perimetro sendo diferenciada nesta supposição dá  $du + dy = 0$ , e a condição do *maximum* dá  $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$ . Destas cinco equações differenciais a primeira dá  $ds = -\frac{tdt}{s}$ , a terceira dá  $dx = -\frac{ydy}{x}$ , e a quarta dá  $dx = -dy$ . Substituindo estes valores na segunda e na quinta, teremos as equações . . .  $-(tdt + sdy)(u + s)x - (ydy + xdt)(x - t)s = 0$  . . .  $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - xxtdt - syydy = 0$ ; as quais mostram que  $s = 0$ ; logo o angulo DAB deve ser recto, e conseguintemente a equação do perimetro se torna em  $a = u + y + t + \sqrt{[u^2 + (x - t)^2]} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$ , e a expressão da superficie em  $(t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$ .

Diferenciemos pois suppondo sómente constantes os dous radicais; teremos . . .  $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$  . . .  $x dx + y dy = 0$  . . .  $dt + du + dy = 0$ .  
 . . .  $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = 0$ .

A segunda destas equações dá  $dy = -\frac{x dx}{y}$ ; a terceira dá  $dt = -du - dy = \frac{x dx - y du}{y}$ ; e substituindo na primeira e na quarta, teremos as equações . . .  $y u du + (x - t)(y dx - x dx + y du) = 0$  . . .  $u(x dx - y du + y dx) + (t + x)y du - x^2 dx + y^2 dx = 0$ , as quais mostram que  $y = 0$ ; logo o angulo CBA deve ser recto, e consequentemente a equação do perimetro se reduz a  $a = t + u + x + \sqrt{[u^2 + (x - t)^2]}$ , e a expressão da superficie a  $(t + x) \frac{u}{2}$ .

Diferenciemos agora, não suppondo constante senão o radical; teremos . . .  $u du + (x - t)(dx - dt) = 0$  . . .  $dt + du + dx = 0$  . . .  $u(dt + dx) + (t + x) du = 0$ . A segunda dá  $dt = -dx - du$ ; substituindo pois este valor nas outras duas, e combinando-as virá  $x = t$ ; logo a equação do perimetro se reduz a  $a = 2t + 2u$ , e a expressão da superficie a  $ut$ .

Estas duas expressões sendo diferenciadas dão  $dt + du = 0$  . . .  $u dt + t du = 0$ ; logo  $t = u$ . Concluiremos pois, que as linhas AB, AD, DC, CB são iguais entre si; e como o angulo A deve ser recto, o quadrilatero procurado necessariamente ha de ser hum quadrado.

Esta propriedade podia achar-se com mais facilidade; mas não satisfariamos então ao que nos  
pro-

propuzemos, isto he, a mostrar de que modo a liberdade de tomar esta ou aquella quantidade por constante facilita o calculo em muitos casos. Se applicarmos isto mesmo aos outros polygonos, acharemos que em geral de todas as figuras isoperimétricas do mesmo numero de lados, o polygono regular desse numero de lados he o que tem maior superficie; donde se segue, que de todas as figuras isoperimétricas o circulo he a que tem maior superficie.

*Dos Pontos multiplos.*

63 **A** Té aqui examinámos o que acontece, quando a razão entre as diferenciais das coordenadas he nada; consideremos agora o que succede, quando esta razão ou  $\frac{dx}{dy}$  sahe na fórma indeterminada  $\frac{0}{0}$ .

Como a equação de huma curva, depois de ser diferenciada, se pôde reduzir á fórma  $A dx + B dy = 0$  (sendo A a soma dos termos multiplicados por  $dx$ , e B a dos termos multiplicados por  $dy$ ), isto he a  $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$ , está claro, que para B e A se fazerem nada ao mesmo tempo, he necessario que ambos tenhaõ hum commum divisor, o qual se reduza a nada em certos valores de  $x$  e  $y$ . Por exemplo na curva, cuja equação he  $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{a}$ , temos  $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$ , isto



isto he  $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$ , que no caso de  $x = a$  se torna em  $\frac{0}{0}$ ; mas bem se vê, que  $a - x$  he commum divisor do numerador e do denominador, e que o valor de  $\frac{dx}{dy}$  se reduz a  $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a\sqrt{\frac{x}{a}}}{a - 3x}$ , que he  $\pm 1$  no caso particular de  $x = a$ : logo neste exemplo  $\frac{0}{0} = \pm 1$ .

Affim para achar em semelhantes casos o valor de  $\frac{dx}{dy}$ , poder-se-hia procurar o commum divisor dos dous termos da fracção que exprime o dito valor, e dividillos pelo mesmo divisor.

Porém como este methodo não satisfaz, quando o valor de  $\frac{dx}{dy}$  contém mais que huma variavel, nem quando contendo sómente huma incluye quantidades radicais; por isso daremos outro mais geral e mais facil, mostrando primeiramente, que esta singularidade sómente tem lugar nos *pontos multiplos*, isto he, naquelles pontos por onde passam muitos ramos de huma mesma curva.

64 Seja  $S O M Z M' O N''$  (Fig. 24) huma curva, em que se encontraõ ao menos dous ramos no ponto  $O$ . Está claro, que a cada abscissa  $AP$  ou  $x$  corresponde (ao menos em certo intervallo) hum numero de valores  $PM, PM'$  para  $y$ , e que

E

os

os y correspondentes aos ramos que se encontrão , fazem-se iguais no ponto O.

Da mesma sorte , sendo AZ o eixo das ordenadas , necessariamente a cada huma dellas AQ ha de corresponder (ao menos em certo intervallo) hum numero de abscissãs QN , QN' , QN'' , e as correspondentes aos ramos que se encontrão , far-se-hão iguais no ponto do encontro.

Logo , representando por  $a$  e  $b$  respectivamente os valores de  $x$  e  $y$  , que convem ao ponto multiplo , a equação desta curva deve ser tal , que se nella puzermos  $a$  em lugar de  $x$  , venhamos a ter para  $y$  tantos valores iguais a  $b$  , quantos são os ramos que passam pelo ponto multiplo ; e pondo tambem  $b$  em lugar de  $y$  , venhamos a achar outros tantos valores  $a$  para  $x$ .

Donde se vê , que a equação deverá reduzir-se á fórma . . .  $(x - a)^m F + (x - a)^{m-1} (y - b) F' + (x - a)^{m-2} (y - b)^2 F'' + (x - a)^{m-3} (y - b)^3 F''' + (y - b)^m T = 0$  , designando  $m$  o grão de multiplicidade do ponto de que se trata , e sendo  $F$  ,  $F'$  , &c  $T$  funções de  $x$  e  $y$  e de constantes.

Com effeito . se fizermos  $x = a$  , a equação reduzindo-se então a  $(y - b)^m T = 0$  será divisivel  $m$  vezes por  $y - b$  , e consequentemente dará  $m$  vezes  $y = b$  ; e se fizermos  $y = b$  , a equação do mesmo modo dará  $m$  vezes  $x = a$  ; o que não acontecerá , se a equação não se reduzir á fórma exposta.

Isto

Isto posto, se diferenciarmos a nossa equação  $m$  vezes successivamente, fazendo variar tambem, se quizermos,  $dx$  e  $dy$ , he facil de ver pelo principio da differenciação, 1º que sómente a ultima equação differencial conterà termos não affectos de  $y - b$ , ou de  $x - a$ . Logo todas as vezes que houver hum ponto multiplo, as differenciais primeira, segunda, terceira, &c da equação, se nellas puzermos em lugar de  $x$  e  $y$  os seus valores  $a$  e  $b$  correspondentes ao ponto multiplo, deveráo aniquilar-se todas, excepto a differencial do gráo  $m$ . 2º Que nesta ultima equação os termos affectos de  $ddx$ ,  $ddy$ ,  $d^3x$ , &c e de todas as mais differenciais de grãos ulteriores, teráo todos por factores algumas potencias de  $x - a$ , ou de  $y - b$ ; e que por conseguinte estas mesmas differenciais haõ de desaparecer no ponto multiplo.

Logo: 1º No ponto multiplo o valor de  $\frac{dx}{dy}$  não pôde vir em outra fórma, que não seja a de  $\frac{0}{0}$ , excepto se buscarmos o dito valor por meio da ultima equação differencial. 2º Esta ultima equação como não contém nem  $ddx$ , nem  $ddy$ , nem alguma das differenciais ulteriores, pôde resultar immediatamente da equação proposta, differenciada  $m$  vezes successivamente, suppondo sempre  $dx$  e  $dy$  constantes. 3º Nesta mesma ultima equação  $dx$  e  $dy$  subiráo ao gráo  $m$ ; e conseguintemente se a dividirmos por  $dy^m$ , teremos, depois a resolver,  $m$  valores de  $\frac{dx}{dy}$ , os quais determinaráo as

taungentes , que tem no ponto multiplo os differentes ramos que por ellè passaõ.

Se a curva , por exemplo ; tiver a equaçãõ  $a(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$  , differenciaremos duas vezes, e teremos 1<sup>o</sup>  $2ady(y - b) - dx(x - a)^2 - 2xdx(x - a) = 0$  , 2<sup>o</sup>  $2addy(y - b) + 2ady^2 - ddx(x - a)^2 - 2dx^2(x - a) - 2xddx(x - a) - 2dx^2(x - a) - 2xdx^2 = 0$ . Substituindo  $a$  em lugar de  $x$  , e  $b$  em lugar de  $y$  , a primeira equaçãõ differencial se desfvaneece ; e na segunda os termos em que entra  $ddx$  e  $ddy$  tambem se desfvanecem , de maneira que ella se reduz a  $2ady^2 - 2adx^2 = 0$ .

Tomando porém na segunda differenciaçãõ  $dx$  e  $dy$  como constantès , virá  $2ady^2 - 2dx^2(x - a) - 2dx^2(x - a) - 2xdx^2 = 0$  , que na mesma supposiçãõ de  $x = a$  se reduz tambem a  $2ady^2 - 2adx^2 = 0$  , e dá  $\frac{dx}{dy} = \pm 1$  , indicando assim duas tangentes no ponto em que  $x = a$  , e  $y = b$  ; logo este ponto he hum ponto duplo ; e como entãõ a subtangente  $\frac{ydx}{dy} = \pm b$  , as duas tangentes fazem com a ordenada hum angulo de  $45^\circ$  . A descriçãõ da curva por meio da equaçãõ confirma illo mesmo ; porque dando  $y = b \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{a}}$  mostra , que a curva tem dous ramos iguais e semelhantes , os quaes se cruzaõ no ponto  $O$  onde  $x = a$  , e  $y = b$ . A sua figura he a mesma que se vê (*Fig. 24*).

65 Para determinar pois se huma curva, cuja equação representamos por  $a$ , tem pontos multiplos, quais elles são, e aonde estão, buscaremos a differencial  $A dx + B dy = 0$  da equação, e fazendo  $A = 0$ ,  $B = 0$ , teremos tantos pontos multiplos, quantos forem os valores de  $y$ , que com os correspondentes de  $x$  satisfizerem á equação  $a$ , compreendendo tambem nestes valores diferentes de  $y$  aquelles que são iguais, mas que ou differem nos finais, ou correspondem a diferentes abscissas. Para determinar depois o gráo da multiplicidade do ponto ou dos pontos achados, passaremos a differenciar  $a$  successivamente (suppondo  $dx$  e  $dy$  constantes) até que pelos valores de  $x$  e de  $y$  tirados das equações  $A = 0$  e  $B = 0$  não se aniquilem todos os termos da equação differencial que se for achando; então o gráo da multiplicidade será da ordem da differencial, em que isso tiver lugar; isto he, o ponto será duplo, se pelos ditos valores não se aniquilarem todos os termos da equação, que provier da segunda differenciação; triplo, se pelos mesmos valores não se aniquilarem todos os termos da equação resultante da terceira differenciação; e assim por diante.

Exemplo. *Achar os pontos multiplos da curva, cuja equação he*  $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$ .

Differenciando a equação proposta, vem  $4y^3 dy - 2axy dy - ay^2 dx + 3bx^2 dx = 0$ ; e igualando  $A$  e  $B$  a nada, temos  $4y^3 - 2axy = 0$ , e  $3bx^2 - ay^2 = 0$ , as quais dão  $x = 0$ , e  $y = 0$ ,  $x = \frac{a^2}{6b}$ , e  $y = \sqrt{\frac{a^3}{12b}}$ ; mas estes dous ultimos va-

lores não satisfazem á equação proposta ; logo nesta curva não ha senão o ponto multiplo, que he dado pelas equações  $x = 0$  e  $y = 0$ , isto he , não ha ponto multiplo senão na origem das coordenadas.

Para achar a multiplicidade deste ponto , diferenciaremos segunda vez , e virá  $12y^2dy^2 - 2axdy^2 - 2aydx^2 - 2aydx^2 + 6bxdx^2 = 0$ , cujos termos se aniquilão todos , pondo  $x = 0$  e  $y = 0$ : logo o ponto achado he mais que duplo , isto he , passão por elle mais que dous ramos da curva.

Procedendo pois a terceira differenciação , teremos  $24ydy^3 - 2adx^2dy^2 - 2adx^2dy^2 - 2adx^2dy^2 + 6bdx^3 = 0$ , que suppondo  $x = 0$  e  $y = 0$ , se reduz a  $6bdx^3 - 6adx^2dy^2 = 0$ . Como esta terceira differencial não se aniquila , o ponto he hum ponto triplo , ou ( que vem a ser o mesmo ) he commum a tres ramos da curva.

A mesma equação dá  $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{adx}{bdy} = 0$ , donde se tira  $\frac{dx}{dy} = 0$ , e  $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ . O primeiro valor mostra , que huma das tangentes no ponto multiplo he parallela ás ordenadas , isto he , que hum dos ramos toca o eixo das ordenadas , por ser então o ponto multiplo na origem. Os outros dous valores  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  e  $-\sqrt{\frac{a}{b}}$  mostraõ, que os outros dous ramos fazem cada hum com o eixo das ordenadas hum angulo , cuja tangente he  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ .

$\sqrt{\frac{a}{b}}$ , e que se estendem de ambas as partes deste eixo. Póde-se achar a figura da curva ( Alg. 283 ) pela sua equação  $y = \pm \sqrt{\left[ \frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2} \sqrt{(aa - 4bx)} \right]}$ , e ver-se-há que he a mesma representada na *Figura 25*.

Se a equação que determina as tangentes não tiver todas as raizes reais, como acontece algumas vezes, então dos ramos que passão pelo ponto multiplo serão tantos invisiveis, quantas forem as raizes imaginarias. Quando os pontos, em que isto acontece, estão destacados do curso da curva, chamaõ-se *pontos conjugados*. Porém ainda que estejaõ destacados, sempre se reputa que unem o numero de ramos denotado pelo grão da sua multiplicidade: a curva a que elles pertencem he individuo de huma familia mais extensa, na qual todos estes ramos são visiveis; mas fazem-se invisiveis na curva individual, porque alguma das constantes, que extraõ na equação commua a toda a familia, he nada no caso particular da curva individual. Para exemplo desta aniquilação dos ramos tomemos a curva, que tem por equação  $m(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$ . A curva da *Figura 24* he hum caso particular desta, como se achará fazendo  $m = a$ . Porém se supuzermos  $a = 0$ , a folha, que como vimos, havia na *Figura 24*, não terá lugar; porque então a equação se reduz a  $m(y - b)^2 - x^3 = 0$ , na qual os dous ramos OMZ, OM'Z, que estavaõ por cima do ponto Q, não terãõ lugar; ou ao me-  
nos

nos não serão visíveis: digo ao menos não serão visíveis, porque podemos suppor que elles sempre lá existem, ainda que invisíveis, se tomarmos  $a$  não como nada absoluto, mas só como infinitamente pequeno, e assim não deixará a curva de ter duas tangentes.

66 De tudo o que acabamos de dizer por occasião dos pontos multiplos, podem-se tirar muitas consequencias uteis.

1º Todas as vezes que huma expressão algebrica fraccionaria  $\frac{B}{A}$  (sendo  $A$  e  $B$  funções, por exemplo, de huma ou duas variaveis  $x$  e  $y$ ) he tal que pela substituição de certos valores determinados de cada variavel se torna em  $\frac{0}{0}$ , acharemos o valor que então deve ter a expressão, differenciando separadamente o numerador e o denominador, na supposição de serem constantes as differenças primeiras, e tantas vezes successivas, quantas for necessario para que elles não se reduzão ao mesmo tempo a nada. Porque podemos suppor  $\frac{B}{A} = \frac{dx}{dy}$ , ou  $A dx - B dy = 0$ , e assim estamos no caso de que temos tratado. Mas as differenciações consecutivas, que requer o methodo exposto, dão  $\dots dA dx - dB dy = 0 \dots ddA dx - ddB dy = 0 \dots d^3 A dx - d^3 B dy = 0$ , isto he  $\frac{dx}{dy} = \frac{dB}{dA} \dots \frac{dx}{dy} = \frac{ddB}{ddA} \dots \frac{dx}{dy} = \frac{d^3 B}{d^3 A}$ ; logo devemos differenciar separadamente



o numerador e o denominador, e a ultima equação dará o valor ou valores de  $\frac{dx}{dy}$ .

*Exemplos.* I. Qual he o valor de  $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$ , quando  $x = a$ ? Temos  $B = x^2 - a^2$ ,  $A = x - a$ ; logo  $\frac{dB}{dA} = \frac{2xdx}{dx} = 2x = 2a$ .

II. Qual he o valor de  $\frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$

quando  $a = x$ ? Temos  $\frac{dB}{dA} =$

$$\frac{adx(a-x)\frac{1}{\sqrt{ax}} - 2adx\sqrt{\frac{x}{a}}}{-2dx(a-x) - 2dx(a-x) + 2xdx} = \pm 1.$$

Do mesmo modo se acharão nos casos particulares os valores indeterminados de  $0 \times \infty$ , e de

$\infty - \infty$ ; porque  $\infty = \frac{a}{0}$ , sendo  $a$  huma quantidade finita.

67 2º Todas as vezes que huma equação de muitas variaveis  $x, y, z, \&c$  for tal, que a certos valores de huma dellas menos hum corresponda certo numero de valores iguais da ultima, e que o mesmo aconteça a todas ellas, acharemos estes valores differenciando successivamente a equação proposta, outras tantas vezes menos huma, na suposição de  $dx, dy, dz, \&c$  serem constantes, e igualando a nada os multiplicadores de  $dx, dy, dz, \&c$ , os de  $dx^2, dx dy, dz dy, \&c$ ; e assim por diante.

Se

Se todas estas equações concordarem entre si, e com a proposta, os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , &c que ellas derem, seráo os valores procurados.

68 ADVERTENCIA. Por quanto nos pontos multiplos os valores de  $x$  e  $y$ , achados depois de se igualar o coeſſiciente de  $dx$  e de  $dy$  a 0, devem satisfazer á equação da curva; se ella não for dada em termos finitos, ou não se puder obter nesta fórma pelos methodos do Calculo Integral, nunca poderemos segurar-nos da existencia dos ditos pontos pelo calculo fómte.

*Dos Pontos de inflexão visiveis e invisiveis.*

69 SE huma curva  $BMb$  (Fig. 26) passar de convexa a ser concava, o ponto  $O$ , onde acontece esta mudança, chama-se *ponto de inflexão*.

Para determinar esta especie de pontos, observaremos que sendo a tangente em  $O$  commua aos ramos  $OB$ ,  $Ob$ , que se tocaó no ponto  $O$ , se de huma e outra parte do mesmo ponto imaginarmos dous elementos, ou iguais ou desiguais, a tangente será a continuacão de ambos, de maneira que estes elementos  $OM$ ,  $Om$  estarão em linha recta.

Isto posto, tirem-se as ordenadas  $MP$ ,  $OQ$ ,  $mp$ , e seja  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; será  $Mr = dx$ ,  $Or = dy$ ,  $Or' = dx + ddx$ ,  $mr' = dy + ddy$ . Os triangulos  $MrO$  e  $Orm'$  são semelhantes; mas se suppuzermos  $MO = Om$ , como he licito, os mesmos triangulos seráo tambem iguais, e teremos  $dx = dx + ddx$ , e  $dy = dy + ddy$ , isto he  $ddx = 0$ , e  $ddy = 0$ .

Logo

Logo para determinar os pontos de inflexão simples, diferenciaremos duas vezes successivamente a equação da curva, suppondo  $dx$  e  $dy$  constantes na segunda differenciação; então eliminando  $dx$  ou  $dy$  de ambas as equações differenciais virá huma terceira, que sendo primeiramente dividida por  $dy^2$  ou por  $dx^2$ , e combinando-se depois com a equação da curva, dará os valores de  $x$  e  $y$ , que convém ao ponto de inflexão.

*Exemplos.* I. Na curva, cuja equação he  $x^3 - by^2 = a^3$ , vem por primeira differenciação . . .  $3x^2 dx - 2by dy = 0$ , e por segunda . . .  $6x dx^2 - 2bdy^2 = 0$ , as quais dão  $6x dx^2 - \frac{18bx^4 dx^2}{4b^2 y^2} = 0$ , isto he  $4by^2 - 3x^3 = 0$ . Comparando pois esta com a proposta, temos no ponto da inflexão  $x = a \sqrt[3]{4}$ ,  
 $= a \sqrt{\frac{3a}{b}}$ .

II. Na curva, cuja equação he  $y = a + (x-a)^5$ , differenciando duas vezes consecutivamente teremos . . .  $dy = \frac{3}{5} (x-a)^3 dx$  . . .  $0 = -\frac{6}{25} (x-a)^7 dx^2$ ; como esta dá  $dx = 0$ , virá  $(x-a)^2 = 0$ ; logo  $x = a = y$  são os valores que correspondem ao ponto de inflexão.

Como achámos  $dx = 0$ , a tangente no ponto de inflexão desta curva he parallela ás ordenadas.

70 O methodo , que ordinariamente se dá para achar os pontos de inflexão, consiste em differenciar duas vezes a equação da curva, suppondo  $dx$  constante, e igualar  $ddy$  a nada, ou ao infinito. Ainda que esta regra conduz aos mesmos resultados, com tudo de proposito não quizemos servir-nos della; porque na realidade o que então he infinito he  $\frac{ddy}{dx^2}$ , e não  $ddy$ , que tanto neste caso como em outro qualquer só pôde ser nada; mas como  $dx$  he nada nos pontos de inflexão, em que he costume suppor  $ddy$  infinito,  $\frac{ddy}{dx^2}$  he realmente  $\frac{0}{0^2}$ , que com effeito he infinito, tomando o por huma quantidade infinitamente pequena.

71 Quando a curva tiver muitos pontos de inflexão, a equação final passará do primeiro grão, e dará muitos valores de  $x$ : succede isto nas curvas de curso tortuoso, como na *Figura 27*.

72 Se concebermos que os dous pontos de inflexão  $O$  e  $O'$  (*Fig. 27*) se avizinhaõ cada vez mais, até que a sua distancia seja infinitamente pequena; então se representarmos como acima os elementos  $OM$ ,  $Om$ ,  $O'M'$ ,  $O'm'$ , os dous lados  $Om$  e  $M'O'$  estarão hum sobre o outro; e como no ponto de inflexão  $MO$  está em linha recta com  $Om$ , e  $M'O'$  com  $O'm'$ , segue-se que haverá tres elementos consecutivos em linha recta.

Sejaõ  $Mm$ ,  $mm'$ ,  $m'm''$  (*Fig. 28*) estes tres elementos, de cujas extremidades se abaixem as ordenadas  $MP$ ,  $mp$ ,  $m'p'$ ,  $m''p''$ ; tirem-se  $Mr$ ,  
 $mr'$ ,

$mr'$ ,  $m'r''$  parallelas a AP. Supponhamos  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; teremos  $Mr = dx$ ,  $mr = dy$ ,  $mr' = dx + ddx$ ,  $r'm' = dy + ddy$ ,  $m'r'' = dx + 2ddx + d^2x$ ,  $r''m'' = dy + 2ddy + d^2y$ . Estando pois os tres elementos em linha recta, os tres triangulos  $Mrm$ ,  $mr'm'$ ,  $m'r''m''$  faõ semelhantes; e se ufarmos da liberdade que temos de suppor os tres elementos iguais, os tres triangulos seraõ iguais, e assim teremos  $ddx = 0$ ,  $ddy = 0$ ,  $d^2x = 0$ ,  $d^2y = 0$ .

Logo em geral: differenciaremos a equaçã da curva tantas vèzes, suppondo  $dx$  e  $dy$  constantes, quantos forem os pontos de inflexãõ; entãõ tirando da primeira equaçã differencial o valor de  $dx$  para o substituir em todas as outras, e dividindo depois a segunda por  $dy^2$ , a terceira por  $dy^3$ , &c teremos outras tantas equações, que devem ter lugar com a proposta, para que haja huma, duas, tres, &c inflexões reunidas; isto he, os valores de  $x$  e  $y$  tirados de duas equações destas, devem satisfazer às outras em que se haõ de substituir.

Quando as inflexões reunidas naõ forem senãõ duas, a inflexãõ serã invisivel; mas se forem tres, a inflexãõ serã visivel. Em geral a inflexãõ he visivel ou invisivel, conforme for par ou impar o numero das inflexões reunidas. Logo, representando geralmente a equaçã de huma curva por  $E = 0$ , para qua haja  $m$  pontos reunidos de inflexãõ, he necessario que differenciando  $E$ ,  $m + 1$  vezes, suppondo  $dx$  e  $dy$  constantes, todas as differenciais  $d^2x$ ,  $d^2y$ ,  $d^3x$ ,  $d^3y$ , &c até o grãõ  $m + 1$  sejaõ nada; e a inflexãõ serã visivel ou invisivel, conforme  $m$  for par ou impar.

73 Para determinar agora os pontos de inflexão, quando as ordenadas partem de hum ponto fixo, tirem-se (*Fig. 29*) as ordenadas  $CM$ ,  $Cm$ ,  $Cm'$  a dous elementos da curva, os quais devem estar em linha recta no ponto de inflexão, e descrevaõ-se os arcos  $Mr$ ,  $mr'$ , que podemos suppor perpendiculares a  $Cm$ , e  $Cm'$ . Isto posto, como  $Cmm' + rMm = 180^\circ$ , ou  $Cmr' + r'mm' + 90^\circ - rMm = 180^\circ$ , ferá  $r'mm' - rMm = 90^\circ - Cmr' = mCr'$ , porque o triangulo  $Cr'm$  he rectangulo em  $r'$ ; logo a differença entre  $r'mm'$  e  $rMm$  he só o angulo  $mCr'$ .

Tire-se  $mn$  que faça o angulo  $m'mn = mCr'$ ; ferá o angulo  $nmr' = mMr$ , e por conseguinte os triangulos  $tmr'$ ,  $mMr$  seraõ semelhantes. Supponhamos  $CM = y$ ,  $Mr = dx$ ,  $Mm = ds$ ; teremos  $mr = dy$ ,  $mr' = dx + ddx$ ,  $m'r' = dy + ddy$ ,  $mm' = ds + dds$ . Descrevendo do ponto  $m$  com o raio  $mm'$  o arco  $m'n$ , os sectores semelhantes  $Cmr'$ ,  $nmn'$  darão  $Cm (y + dy) : mr' (dx + ddx) :: mm' (ds + dds) : m'n = \frac{dsdx}{y}$ ; mas pelos triangulos semelhantes  $m'tn$ ,  $mrM$ , e  $mr't$  temos  $Mr (dx) : Mm (ds) :: m'n \left( \frac{dsdx}{y} \right) : m't = \frac{ds^2}{y}$ , e  $Mr (dx) : rm (dy) :: mr' (dx + ddx) : r't (dy + ddy - m't)$ ; logo  $dxddy - dyddx - \frac{dxds^2}{y} = 0$ . Esta

Esta formula coincide com a das coordenadas parallelas, quando se suppõe que o ponto C está a huma distancia infinita, e os  $dx$  e  $dy$  se tomão como constantes; porque entã  $y$  he infinito, e o termo  $dx ds^2$  deve desprezar-se. Se supuzermos

$dx$  constante, a formula será  $ddy = \frac{ds^2}{y}$ ; mas não

deve esquecer esta supposiçãõ, quando se differenciar a equaçãõ da curva. Por outra parte, como os  $dx$  sãõ arcos descritos com hum raio variavel, podemos referillos a arcos descritos com hum raio constante CO, assim como se costuma de ordinario (40), pondo em lugar de  $dx$  o seu valor, que he sempre facil de achar, advertindo na semelhança dos sectores CSs, CMr.

Não nos demoraremos em dar nesta mesma hypothese as formulas para achar os outros pontos de inflexãõ, porque presentemente não pôde haver nisso difficuldade.

### Reflexãõ sobre hum Maximum & Minimum.

74 **S**Eja a funçãõ F de huma ou muitas variaveis susceptivel de *maximum* ou *minimum*. Considerando esta funçãõ como ordenada ou abscissa de huma curva, isto he, suppondo  $x = F$ , vê-se pelo que dissemos sobre os pontos de inflexãõ, que se  $dF$  ou  $dx$  he o todas as vezes que ha *maximum* ou *minimum*, a inversa nem sempre he verdadeira; porque achãmos (70) hum caso em que era  $dx = 0$  no ponto de inflexãõ, isto he, em que a tangente era parallela ás ordenadas, e nesse caso nem a orde-

denada, nem a abscissa são *maximum*, nem *minimum*. Assim para nos certificarmos da existencia do *maximum* ou do *minimum*, devemos differenciar muitas vezes successivamente a quantidade, fazendo constantes as differenças primeiras de cada variavel; então se os valores que as variaveis tem no ponto buscado do *maximum* ou *minimum*, aniquilarem  $dF$ ,  $ddF$ , e não  $d^3F$ , não haverá *maximum* na curva, cuja equação he  $x = F$ , mas sim hum ponto visível de inflexão, e conseguintemente  $F$  não terá *maximum* nem *minimum*. Porém se  $d^3F$  se aniquilar, e não  $d^4F$ , haverá *maximum* ou *minimum*. Em geral: Todas as vezes que a ultima differencial que se aniquila for de grão impar, haverá *maximum* ou *minimum* na quantidade.

*Dos pontos de Reversão, e das differentes especies de contacto dos ramos de huma curva.*

75 **D**ous ramos de curva, quando chegaõ a tocar-se, ou oppõem hum ao outro as suas convexidades ( *Fig. 30* ), ou se abraçaõ ( *Fig. 31* ); e em ambos os casos pôde succeder, ou que continuem no seu curso de huma e outra parte do ponto do contacto, ou que parem de repente nesse mesmo ponto ( *Fig. 32*, e *33* ). Neste ultimo caso o ponto do contacto chama-se *ponto de reversão*, o qual he de *reversão simples* ( *Fig. 32* ), e de *reversão de bico* ( *Fig. 33* ). Quando se reúnem mais que dous ramos, estas differentes variedades podem achar-se juntamente no mesmo ponto, e além dellas huma infinidade de outras; podem, por exemplo, os

ra-



ramos ao tocar-se ter huma ou muitas inflexões. Póde acontecer, que se achem reunidos hum ponto de inflexão e hum ponto de reversão, e pareçaõ formar hum só ponto de reversão. Assim se o ramo EBD ( *Fig. 34* ), que fórma em E huma reversão simples com o ramo EC, tivesse hum ponto de inflexão em B, quando este se achasse infinitamente vizinho do ponto E, não haveria senão a apparencia de huma reversão de bico.

Naõ nos demoraremos em dar o caracter de cada variedade; observaremos sómente, que quando muitos ramos de curva se tocaõ, 1º o ponto em que isto acontece, como he multiplo, ha de ter as condições mencionadas (64). 2º A equação que serve para determinar as tangentes dos pontos multiplos, terá entãõ tantas raizes iguais, quantos forem os ramos que se tocaõ, porque nesse caso ha outras tantas tangentes reunidas. Assim na reversão simples são necessarias as mesmas condições dos pontos duplos, e a equação, que dá as tangentes ou  $\frac{dx}{dy}$ , deve ter duas raizes iguais. Quem desejar instruir-se mais nesta materia, póde consultar a *Analyse das linhas curvas de Cramer. Genebra 1750.*

*Dos Raios da Curvatura, ou da Evoluta.*

76 **S**E de cada ponto M, m, m', &c de huma curva qualquer AM ( *Fig. 35* ) se levantarem as perpendiculares MN, mn, m'n', &c; as intersecções consecutivas n, n', &c formarãõ huma curva, a que se dá o nome de *evoluta*; porque se ima-

ginarmos applicado a ella hum fio ABN, que á toque na origem B, entaõ, desenvolvendo-se a curva, a extremidade A do fio descreverá a curva AM. Com effeito na evoluçãõ de Nn, por exemplo, considerando este arco como huma pequena recta, o fio MNn descreve ao redor de n como centro o arco Mm, ao qual he necessariamente perpendicular, porque o raio de hum circulo he perpendicular á sua circumferencia. Donde se vê 1º que o comprimento da tangente MN da evoluta he igual a  $AB + BN$ ; logo a curva BN he rectificavel. 2º Que o ponto n se pôde considerar como o ponto de reuniaõ de duas normais infinitamente vizinhas MN, mn'. Cada linha MN se chama *raio da evoluta*, ou *raio da curvatura*, ou tambem *raio osculador*.

77 Isto posto, para determinar o valor do raio osculador MN em qualquer ponto da curva dada AM, imaginem-se dous elementos consecutivos Mm, mm' (Fig. 36), duas perpendiculares MN, mN, e produza-se o elemento Mm. No triangulo NMm rectangulo em M teremos 1 : sen MNm ou MNm :: mN ou MN : Mm; logo

$$MN = \frac{Mm}{MNm} = \frac{Mm}{umm'} = \text{ao elemento da curva dividido pelo angulo do contacto.}$$

Se conduzirmos Mr, mr' parallelas a AP, está claro, que  $umm' = \mp d(rMm)$ , tendo lugar o final — quando a curva he concava como no nosso caso, e o final + quando a curva he conve-

$$\text{xa; e como (25, e 33) } d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

sup-

suppondo  $Mm$  ou  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ , teremos

$$MN = \frac{ds}{\pm \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\pm dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

Esta formula dos raios da evoluta no caso das ordenadas serem parallelas entre si, pôde ter diferentes fórmãs, conforme se tomar huma ou outra differencial por constante. Se tomarmos o elemento  $ds$  da curva por constante, isto he, se suppuzermos  $dds = 0$ , a equação  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  sendo differenciada dará  $dyddy = -dxddx$ ; logo

$$MN = \frac{dsdy}{\pm adx}$$

Se suppuzermos  $dy$  constante, ou  $ddy = 0$ , virá  $MN = \frac{ds^3}{\pm dyddx}$ . Se  $dx$  porém for a

differencial constante, ferá  $MN = \frac{ds^3}{\pm dxddy}$ .

*Exemplos.* I. No circulo, cuja equação he

$$yy = 2ax - xx, \text{ teremos } dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}; \text{ logo}$$

$$ds = \sqrt{(dx + dy^2)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}, \text{ e } d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= d\left(\frac{a-x}{\sqrt{(2ax - xx)}}\right) = \frac{-a^2dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Substi-}$$

tuindo pois estes valores na formula  $\frac{ds^3}{\pm dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ ,

$$\text{teremos } \frac{\frac{a^3 dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2 dx^2}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}} = a; \text{ quer dizer que o raio}$$

osculador he sempre da mesma grandeza, e igual ao raio do circulo, de maneira que a evoluta se reduz a hum ponto, que he o centro, como já sabemos.

II. Na parabola temos  $y^2 = px$ , que dá

$$dy = \frac{1}{2} dx \sqrt{\frac{p}{x}}; \text{ logo } ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \sqrt{(4x + p)},$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{p}}{x\sqrt{x}} dx; \text{ e a formula se tornará}$$

$$\text{em } \frac{\frac{dx^3(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{dx^3 p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{4x + p}{2} \sqrt{\frac{4x + p}{p}}. \text{ Se}$$

representarmos a normal por  $n$ , teremos  $n =$

$$\frac{1}{2} p \sqrt{\frac{4x + p}{p}} \text{ (Alg. 364); logo o raio da evo}$$

luta  $= \frac{n^2}{\frac{1}{4} p^2}$ ; resultado que tem lugar em todas as secções conicas.

III. Na cycloide (Fig. 37) temos  $y = AS + \sqrt{(2ax - xx)}$ , sendo  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AB$

$$= 2a; \text{ logo } dy = \frac{ad(\text{sen } AS)}{\text{cof } AS} + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

$$= \frac{a}{a-x} \cdot \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} =$$

$$dx \sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}, ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}}, d\left(\frac{dy}{dx}\right) =$$

$$\frac{-adx}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2a-x)}}, \text{ e por conseguinte o raio da evo-}$$

luta  $MN = 2\sqrt{2a(2a-x)} = 2BS$ . Vê-se pois  
 1º que o raio he nullo no ponto C; e por conse-  
 guinte a evoluta passa por este ponto. 2º Que o  
 raio no ponto A he o dobro de AB. ◉

78 Para acharmos a equação da evoluta BN  
 (Fig. 38), forme-se o rectangulo PONQ, e  
 seja  $MN = R$ ,  $AQ = u$ ,  $QN = t$ ,  $AP = x$ ,  
 $PM = y$ , o elemento da curva  $AM = ds$ . No  
 triangulo rectangulo MON temos  $1 : \text{sen } MNO$   
 $\left(\frac{dx}{ds}\right) :: MN (R) : MO = \frac{Rdx}{ds}$ ; logo  $t =$   
 $\frac{Rdx}{ds} - y$ . Do mesmo modo NO ou  $PQ =$   
 $\frac{Rdy}{ds}$ ; logo  $u = \frac{Rdy}{ds} + x$ : expressões que por  
 meio da equação da curva darão a relação entre  $u$   
 e  $t$ .

Se

Se por exemplo a curva AM for huma parabola, cuja normal CM =  $n$ , teremos  $R = \frac{n^3}{\frac{1}{3}p^2}$ ,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{PM}{CM} = \frac{y}{n}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2}p}{n}; \text{ e conse-}$$

$$\text{guintemente } t = \frac{4n^2y}{p^2} - y = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}, \text{ e}$$

$$u = \frac{2n^2}{p} + x = 3x + \frac{1}{2}p, \text{ a qual dá } x = \frac{u - \frac{1}{2}p}{3}.$$

Logo se fizermos  $u - \frac{1}{2}p = z$ , isto he, se contarmos as abscissas do ponto B, teremos  $x = \frac{1}{3}z$ , e por conseguinte  $27p^2 = 16z^3$ . Donde se vê, que a evoluta NB da parabola ordinaria he a segunda parabola cubica, cujo parametro he igual a  $\frac{27}{16}$  do parametro da parabola dada. Está claro, que a evoluta da parabola toda MAM' tem hum ponto de reversão em B.

Do mesmo modo se achará, que a evoluta da cycloide CA (Fig. 37) he outra cycloide igual CE, mas em posição inversa.

79 Quando as ordenadas partem de hum ponto fixo Fig. 39, para achar o valor de  $m'mu$ , que se deve substituir na formula  $MN = \frac{Mm}{m'mu}$ , descre-

veremos os arcos Mr,  $mr'$ , e teremos  $m'mu = r'mu - m'mr'$ ; mas (73)  $r'mu = mCr' + rMm = MCr + rMm$ ; logo  $m'mu = MCr + rMm - r'mm' = MCr - d(mMr)$ ,

Isto

Isto posto, se for  $Mr = dx$ , e  $CM = y$ ,  
 teremos  $MCr = \frac{dx}{y}$ ; logo  $m'mu = \frac{dx}{y} \mp$

$\frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ , conforme a curva for concava ou

convexa, e conseguintemente  $MN =$

$\frac{yds^3}{ds^2 dx \mp ydx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ . Quando  $y = \infty$ , isto he

quando as ordenadas são paralelas, vem  $MN =$

$\frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ , como já achámos.

Seja a curva  $CKM$  (Fig. 40) a *Spiral logaríthmica*, cuja natureza he tal, que conduzindo de qualquer dos seus pontos  $M$  a recta  $MC$  ao centro  $C$ , e a tangente  $MT$ , o angulo  $CMT$  seja sempre o mesmo, ou  $\frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx} = \text{Const.}$  Logo te-

remos o raio osculador  $= \frac{yds}{dx}$ . Se tirarmos pois

$CB$  perpendicular a  $MC$ , e  $MB$  perpendicular á tangente  $MT$ , teremos  $Mr(dx) : Mm(ds) ::$

$CM(y) : MB = \frac{yds}{dx}$ ; logo o raio  $= MB$ .

Como produzindo  $BC$ , temos  $CBM = CMT$ , a evoluta  $CBD$  he a mesma spiral  $CKM$  em diferente posição. Vê-se pois, que a tangente  $MB$  he de

de comprimento igual á spiral  $CDB$ , e por conseguinte  $MT =$  ao arco  $CBM$ .

80 Os raios da evoluta servem para medir a curvatura de qualquer curva em cada ponto. Com effeito, como na evolução do elemento  $Nn$  da curva  $BN$  (*Fig. 35*) o fio descreve o pequeno arco  $mm'$ , segue-se que este mesmo arco tem huma curvatura igual á do circulo do raio  $mn$ ; e consequentemente na expressão do raio da evoluta temos para cada ponto o raio do circulo, que nesse mesmo ponto he de huma curvatura igual á da curva. Logo, pois que as curvaturas dos circulos estão na razão inversa dos seus raios, com muita facilidade podemos comparar a curvatura de huma curva em qualquer ponto com a curvatura da mesma, ou de outra curva em outro qualquer ponto. Por exemplo, se quizessemos comparar a curvatura da parabola na sua origem com a curvatura, que ella tem na extremidade da ordenada que passa pelo fóco, fariamos successivamente na expressão do raio da evoluta  $x = 0$ , e  $x = \frac{1}{2}p$  (*Alg. 356*), o que daria  $\frac{1}{2}p$ , e  $p\sqrt{2}$ ; logo a curvatura no primeiro ponto he para a curvatura no segundo  $\therefore p\sqrt{2} : \frac{1}{2}p \therefore 2\sqrt{2} : 1$ . Sobre as propriedades das evolutas póde consultar-se a *Analyse dos infinitamente pequenos do Marquez de l'Hopital*, onde além disso se acharão outras applicações do Calculo Diferencial.

81 ADVERTENCIA. Da supposição que fizemos (70) de estarem em linha recta os dous elementos proximos de huma curva no ponto de inflexão, parece seguir-se, que neste ponto o raio da  
evo-



evoluta he infinito ; porque entaõ as duas perpendiculares saõ parallelas. Sem embargo , em muitas curvas o raio da evoluta no ponto de inflexaõ he nullo , como por exemplo na parabola , cuja equaçãõ he  $y = x^{\frac{3}{5}}$  .

He porém de advertir , que na nossa supposiçãõ naõ ha cousa que determine a grandeza dos dous elementos consecutivos ; logo se cada hum delles se reduzir a hum ponto , nem por isso deixaráõ de estar ambos em linha recta , e as duas perpendiculares cahindo huma sobre outra , se encontrarãõ no mesmo ponto donde partem. Succede isto nas curvas , em que o raio da evoluta = 0 no ponto de inflexaõ ; porque sendo entaõ a curvatura infinita , cada hum dos dous elementos consecutivos se confunde com a tangente infinitamente menos que em outro qualquer caso , e por conseguinte ambos elles se devem considerar como dous pontos reunidos. Logo podem os dous elementos estar em linha recta , sem que por isso o raio da evoluta seja infinito ; mas daqui mesmo se segue tambem , que no ponto de inflexaõ o raio da evoluta he sempre ou infinito , ou nullo ( 70 ) .

Como o raio da evoluta he positivo no ponto do maximum , e negativo no ponto do minimum , segue-se que para distinguir se huma quantidade  $y$  funçãõ de  $x$  he hum maximum , ou hum minimum ,

examinaremos se a expressãõ  $\frac{ddy}{dx^2}$  he positiva , ou negativa ; no primeiro caso  $y$  será hum minimum , e no segundo hum maximum .

*Outras applicações do Calculo Differential.*

82 I. **S**upponhamos que se pede o valor de  $(a + x)^m$ . Representando este valor pela equação

$$(a + x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c$$

differenciemo-la consecutivamente; e dividindo por  $dx$ , teremos

$$m(a + x)^{m-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c$$

$$m(m-1)(a + x)^{m-2} = 2C + 2.3 Dx + \&c$$

$m(m-1)(m-2)(a + x)^{m-3} = 2.3 D + \&c$   
e assim por diante.

Como todas estas equações devem ser sempre verdadeiras para qualquer valor de  $x$ , façamos  $x = 0$ ; virá . . .  $A = a^m$  . . .  $B = m a^{m-1}$ .

. . .  $C = m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2}$  . . .  $D = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3}$  . . .  $\&c$ ; logo

$$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} x^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} x^3 + \&c.$$

De outra sorte. Seja  $(a + x)^m = y$ , teremos  $\delta y = m(a + x) \delta x$ , que dá  $(a + x) \frac{dy}{dx} - my = 0$ .

Sup-

Suppondo  $y = A + Bx + Cx^2 + \&c$ , vem  $\frac{dy}{dx}$

$= B + 2Cx + \&c$ ; valores que sendo substitui-

dos na equação  $(a + x) \frac{dy}{dx} - my = 0$ , daõ

$$\begin{aligned} aB + 2aCx + 3aDx^2 + \&c &= 0 \\ -mA + Bx + 2Cx^2 & \\ -mBx - mCx^2 & \end{aligned}$$

Logo  $aB - mA = 0$ , . . .  $2aC + B - mB$   
 $= 0$  . . .  $3aD + 2C - mC = 0$ ; e como sendo

$x = 0$ , he  $y = a^m$ , teremos  $A = a^m$ , . . .  $B =$

$m a^{m-1}$ , . . .  $C = m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2}$ , . . .  $D = m \cdot$

$\frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3}$ ; e por conseguinte

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2}x^2 + \&c,$$

Se  $x = \frac{-az}{a+z}$ , a nossa formula darã

$$\frac{a^{2m}}{(a+z)^m} = a^m + ma^{m-1} \cdot \frac{-az}{a+z} + m \cdot \frac{m-1}{2}$$

$a^{m-2} \cdot \frac{a^2z^2}{(a+z)^2} + \&c$ , isto he, dividindo por  $a^{2m}$ ,

e pondo  $n$  em lugar de  $-m$ ,

$$(a+z)^n = a^n \left( 1 + n \cdot \frac{z}{a+z} + n \cdot \frac{n+1}{2} \frac{z^2}{(a+z)^2} + \&c \right)$$

for-

formula em que a serie pára , quando  $n$  he numero inteiro negativo.

II. Em geral: Trate-se de desenvolver huma função  $y$  de  $x$  em huma serie da fórmula  $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c$ . Expressando esta hypothese , e differenciando-a successivamente na supposição de  $dx$  constante , teremos as equações seguintes para determinar os coefficients.

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c$$

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2.3 Dx + 3.4 Ex^2 + \&c$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3 D + 2.3.4 Ex + \&c$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3.4 E + \&c$$

e assim por diante.

Fazendo pois  $x = 0$  , e representando os valores que tem então  $y$  ,  $\frac{dy}{dx}$  ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$  ,  $\frac{d^4y}{dx^4}$  , &c respectivamente por  $V$  ,  $V'$  ,  $V''$  ,  $V'''$  ,  $V''''$  , &c teremos  $A = V$  ,  $B = V'$  ,  $C = \frac{V''}{2}$  ,  $D = \frac{V'''}{2.3}$  ,  $E = \frac{V''''}{2.3.4}$  , &c ; logo

$$y = V + V'x + \frac{V''}{2} x^2 + \frac{V'''}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{V''''}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \&c.$$

Mostremos o uso deste Theorema em alguns exemplos.

1º Pergunta-se qual he o valor de  $l(a+x)$ .

Neste caso temos  $y = l(a+x) \dots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a+x}$ .

$$\dots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(a+x)^2} \dots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{(a+x)^3} \dots$$

$$\dots \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-2 \cdot 3}{(a+x)^4} \&c. \text{ Pondo em todas estas ex-}$$

pressões  $x = 0$ , acharemos  $V = la \dots V' = \frac{1}{a}$ .

$$\dots V'' = \frac{-1}{a^2} \dots V''' = \frac{2}{a^3} \dots V'''' =$$

$$\frac{-2 \cdot 3}{a^4} \&c; \text{ logo}$$

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Semelhantemente

$$l(a-x) = la - \left( \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} + \&c \right).$$

Adiante veremos o modo de deduzir destas series outras mais convergentes.

2º Querendo achar o valor de  $\text{sen } x$ , teremos

mos . . .  $y = \text{sen } x \dots \frac{dy}{dx} = \text{cos } x \dots \frac{d^2y}{dx^2} =$   
 $= -\text{sen } x \dots \frac{d^3y}{dx^3} \dots = -\text{cos } x \dots \frac{d^4y}{dx^4}$   
 $= \text{sen } x \ \&c$ ; logo  $V = 0 \dots V' = 1 \dots$   
 $V'' = 0 \dots V''' = -1 \dots V'''' = 0 \ \&c$ , e  
 conseguintemente

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

O mesmo methodo dá

$$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

3º Para achar o valor de  $a^x$ , teremos . . .

$y = a^x \dots \frac{dy}{dx} = a^x l a \dots \frac{d^2y}{dx^2} = a^x l^2 a \dots$   
 $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x l^3 a$ ; logo  $V = 1 \dots V' = l a \dots$   
 $V'' = l^2 a \dots V''' = l^3 a \dots V'''' = l^4 a$ , e por  
 conseguinte

$$a^x = 1 + x l a + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2 \cdot 3} + \frac{x^4 l^4 a}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

Se  $a$  for o numero cujo logarithmo  $= 1$ , te-  
 remos  $x = l y$ ; logo

$$y = 1 + l y + \frac{l^2 y}{2} + \frac{l^3 y}{2 \cdot 3} + \frac{l^4 y}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

III. Mais geralmente : Seja

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \&c.$$

Suppondo  $x^n = t$ , e  $A + Bt + Ct^2 + \&c = u$ ; e representando por  $V$  o valor de  $u$  quando  $t = 0$ , e por  $V'$ ,  $V''$ ,  $V'''$ ,  $\&c$  os valores das quantidades  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3u}{dt^3}$ ,  $\&c$  quando se faz  $t = 0$ , e  $u = V$ , teremos  $A = V$ ,  $B = V'$ ,  $C = \frac{V''}{2}$ ,  $D = \frac{V'''}{2.3}$ ,  $E = \frac{V''''}{2.3.4}$   $\&c$ , e conseguintemente

$$y = Vx^m + V'x^{m+n} + \frac{V''}{2}x^{m+2n} + \frac{V'''}{2.3}x^{m+3n} + \frac{V''''}{2.3.4}x^{m+4n} + \&c.$$

IV. Suppondo como até agora, que  $y$  he huma função de  $x$ , está claro, que quando  $x$  se muda em  $x + dx$ ,  $y$  torna-se em  $y + dy$ , e que se  $x$  varia uniformemente, e se faz  $x + 2dx$ ,  $y$  vem a fazer-se  $y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + ddy$ . Do mesmo modo quando  $x$  se muda em  $x + 3dx$ ,  $y$  se torna em  $y + 3dy + 3ddy + d^3y$ ; e em geral se na expressão de  $y$  se substituir  $x + ndx$  em lugar de  $x$ ,  $y$  se tornará em  $y + ndy + n. \frac{n-1}{2} ddy$

+

$$+ n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} d^3y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} d^4y + \&c. \text{ Logo se for } ndx = \text{á quanti-}$$

dade finita  $q$ ,  $n$  será infinito; e então designando por  $Y$  o valor, que resulta para  $y$  de  $x$  se fazer  $x \pm q$ , ou de se substituir  $x \pm q$  em lugar de  $x$ , teremos

$$Y = y \pm q \frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{q^3}{2 \cdot 3} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4y}{dx^4} \pm \&c.$$

1º Para fazermos algumas applicações, supponhamos que he conhecido o arco, cujo seno he  $x$ , e queremos saber qual he o arco correspondente ao seno  $x + q$ . Temos neste caso  $y =$

$$\text{Arc. sen } x \dots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \dots \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \&c. \text{ Logo}$$

$$\text{Arc. sen } (x+q) = \text{Arc. sen } x + \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{q^3(1+2xx)}{2 \cdot 3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Do



Do mesmo modo

$$\begin{aligned} \text{Arc. sen } (x - q) &= \text{Arc. sen } x - \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{q^3(1+2xx)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \&c. \end{aligned}$$

2º Seja agora  $y = \text{Arc. cos } x$ ; teremos  $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \dots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \frac{d^3y}{dx^3} = \\ &= \frac{1+2xx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \&c. \text{ Logo} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Arc. cos } (x \pm q) &= \text{Arc. cos } x \mp \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{q^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \mp \frac{q^3(1+2xx)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \&c. \end{aligned}$$

3º Se for  $y = \text{sen } x$ , que dá  $\frac{dy}{dx} = \text{cos } x$ ,

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\text{sen } x \dots \frac{d^3y}{dx^3} = -\text{cos } x, \&c, \text{ te-}$$

remos

$$\begin{aligned} \text{sen } (x + q) &= \text{sen } x + q \text{ cos } x - \frac{1}{2} q^2 \text{ sen } x - \frac{1}{6} q^3 \text{ cos } x \\ &\quad + \frac{1}{24} q^4 \text{ sen } x + \&c \end{aligned}$$

G

sen

$$\begin{aligned} \text{sen}(x - q) &= \text{sen } x - q \text{ cos } x - \frac{1}{2} q^2 \text{ sen } x + \frac{1}{6} q^3 \text{ cos } x \\ &+ \frac{1}{24} q^4 \text{ sen } x - \&c. \end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned} \text{cos}(x + q) &= \text{cos } x - q \text{ sen } x - \frac{1}{2} q^2 \text{ cos } x + \frac{1}{6} q^3 \text{ sen } x \\ &+ \frac{1}{24} q^4 \text{ cos } x - \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cos}(x - q) &= \text{cos } x + q \text{ sen } x - \frac{1}{2} q^2 \text{ cos } x - \frac{1}{6} q^3 \text{ sen } x \\ &+ \frac{1}{24} q^4 \text{ cos } x + \&c. \end{aligned}$$

Quando  $x = 0$ , as formulas  $\text{sen}(x + q)$  e  $\text{cos}(x + q)$  coincidem com as que acima deduzimos.

4<sup>o</sup> Seja  $y = l \text{ sen } x$ ; teremos  $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$ .

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$  . . .  $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \text{ cos } x}{\text{sen}^3 x}$  &c; e con-

seguintemente

$$l \text{ sen}(x \pm q) = l \text{ sen } x \pm \frac{q \text{ cos } x}{\text{sen } x} - \frac{q^2}{2 \text{ sen}^2 x} \pm \frac{q^3 \text{ cos } x}{3 \text{ sen}^3 x} \&c.$$

Com igual facilidade se achará  $l \text{ cos}(x \pm q)$ ,  $l \text{ tang}(x \pm q)$ , e  $l \text{ cot}(x \pm q)$ .



## ELEMENTOS

DE

## CALCULO INTEGRAL.

83 **O** METHODO inverso do Calculo Diferencial, isto he, o methodo que ensina a voltar das quantidades differenciais para as finitas, de cuja differenciação aquellas resultáraõ, chama-se *Calculo Integral*.

A letra *f* posta antes de huma quantidade differencial indica o seu *integral*, de maneira que esta letra he equivalente ás palavras *integral de*, ou *soma de*; porque *integrar*, ou *tomar o integral*, ou tambem *achar a fluente* não he mais do que somar todos os aumentos infinitamente pequenos, que huma quantidade deve receber para chegar a hum estado finito determinado.

Se todas as quantidades differenciais procedessem de huma differenciação exacta, cada huma teria o seu integral; mas como por quantidade differencial se entende qualquer quantidade affecta de *dx*, *dy*, &c, ha muitas que não são susceptiveis de integração, porque não podem resultar de differenciação alguma, como por exemplo *xdy*, *xdy - ydx*.

Ha outras differenciais que não se podem integrar senão por approximação, como são as dif-

ferenciais dos logarithmos, dos arcos de circulo, e em geral das quantidades que se chamaõ transcendentos. Trataremos primeiramente das differenciais, que tem integraçõ exacta ou algebraica.

*Das Differenciais de huma variavel susceptiveis de integraçõ algebraica; e primeiramente das differenciais monomias.*

84 **R**EGRA fundamental. *Para integrar as differenciais monomias aumentaremos primeiramente com huma unidade o expoente da variavel, e dividiremos depois pelo expoente assim augmentado, e pela differencial da variavel.*

Com effeito, aqui não se trata de mais que de achar a quantidade que havia sido differenciada; logo devemos applicar huma regra inverfa da differenciaçõ (10).

Como todo o termo constante que entra em qualquer quantidade não apparece mais depois da differenciaçõ, ajuntaremos sempre ao integral huma constante que representamos por *C*.

Isto posto, o integral de  $2x dx$  ou  $\int 2x dx =$

$$\frac{2x^{1+1} dx}{(1+1) dx} = x^2 + C \dots \int x dx = \frac{x^2 dx}{2 dx} = \frac{x^2}{2}$$

$$+ C \dots \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{\left(\frac{2}{3}+1\right) dx} = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}}$$

$$+ C \dots \int \frac{adx}{x^3} \text{ ou } \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-2} dx}{-2 dx} =$$

$\frac{-a}{2x^2} + C$ . Em geral sendo  $m$  hum expoente positivo ou negativo, inteiro ou fraccionario, tere-

$$\text{mos } \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1} dx}{(m+1) dx} = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\text{Se } m = 0, \text{ temos } \int adx = \frac{ax^{0+1}}{0+1} = ax,$$

como se vê claramente sem recorrer á regra.

$$\text{Se } m = -1, \text{ temos } \int \frac{adx}{x} = \frac{ax^{1-1}}{1-1} =$$

$\frac{a}{0} + C$ , quantidade infinita, porque as fracções

estão na razão inversa dos denominadores; logo este caso não se comprehende na regra fundamental. Em quanto não explicamos, porque razão o integral toma a fôrma infinita, observare-

mos que  $\frac{adx}{x}$  he a differencial do logarithmo

hyperbolico de  $x$ , e assim  $\int \frac{adx}{x} = alx$  ou  $lx^a$

$+ C$ , como se póde ver fazendo a differenciação (27).

Se a quantidade monomia tiver radical, substituiremos em lugar d'elle hum expoente fraccionario.

Assim  $\int adx \sqrt[3]{x^2} = \int adx \cdot x^{\frac{2}{3}} =$

$$\frac{3}{2} ax^{\frac{5}{3}} + C,$$

Logo

Logo as differenciais monomias a huma variavel integraõ-se exactamente, ou ao menos por approximação empregando os logarithmos.

85 A constante que se deve ajuntar indispensavelmente ao integral para o fazer completo, pôde ter o valor que lhe quizermos dar, quando a nossa tenção he só achar huma quantidade tal, que sendo differenciada reproduza a differencial proposta;

porque para todo o valor de  $C$ ,  $d\left(\frac{ax^m + 1}{m + 1} + C\right) = ax^m dx$ . Porém quando a integração se faz com o fim de satisfazer a hum problema proposto, a constante não he arbitraria, tem hum valor determinado, o qual em geral se achará formando huma equação particular, em que sómente seja desconhecida a constante: isto se consegue pelas condições do problema, como veremos para diante.

*Das Differenciais complexas que se integraõ pela regra fundamental.*

86 1º **P** Ela regra precedente podemos tambem integrar qualquer quantidade, em que não entrarem potencias de quantidades complexas, nem divisores complexos que contenhaõ variaveis.

$$\text{Assim } \int (ax^3 dx + \frac{bx^2 dx}{c} + edx) = \int ax^3 dx + \int \frac{bx^2 dx}{c} + \int edx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C. \text{ Da}$$

melma sorte  $\int \left( ax^3 dx + \frac{bdx}{x^4} + \frac{dx}{(a + b)^2} \right) =$

$ax^4$

$$\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + \frac{x}{(a+bx)^2} + C; \text{ e } \int dx (a+bx)$$

$$= \int adx + \int bxdx = ax + \frac{bx^2}{2} + C.$$

87 2º Ainda quando entrem potencias de quantidades complexas, a integração se fará pela regra fundamental, com tanto que as ditas potencias não estejaõ no denominador, e que ao mesmo tempo o expoente seja hum numero inteiro positivo.

$$\text{Assim } \int dx (a + bx^2)^3 = \int dx (a^3 + 3a^2bx^2$$

$$+ 3ab^2x^4 + b^3x^6) = a^3x + a^2bx^3 + \frac{3ab^2x^5}{5} +$$

$$\frac{b^3x^7}{7} + C.$$

88 Como não ha quantidade complexa elevada a huma potencia, cujo expoente seja numero inteiro positivo, que não possa reduzir-se (Alg. 149) a huma serie finita de monomios; segue-se que podemos integrar qualquer quantidade complexa, que não contenha outras partes complexas mais, que potencias cujos expoentes sejaõ numeros inteiros positivos. Se tivermos, por exemplo, para integrar  $gx^3dx (a + bx^2)^2 + a^2x^7dx (c + ex^2 + fx^3)^4$ , desenvolveremos  $(a + bx^2)^2$ , e multiplicaremos cada termo do resultado por  $gx^3dx$ ; desenvolveremos depois  $(c + ex^2 + fx^3)^4$ , e multiplicaremos cada termo do resultado por  $a^2x^7dx$ ; entãõ não teremos para integrar senãõ huma serie de monomios, que he o caso da regra fundamental.

89 Deve-se aqui exceptuar o caso, em que haja algum expoente negativo, e succeda que depois da evoluçã e multiplicaçã, a variavel fique em algum termo com o expoente  $-1$ ; mas neste caso a integraçã se fará por logarithmos. Por exem-

$$\begin{aligned} \text{plo } \int \frac{adx}{x^3} (a + bx^2)^2 &= \int ax^{-3} dx (a^2 + 2abx^2 \\ &+ b^2x^4) = \int a^3x^{-3} dx + \int 2a^2bx^{-1} dx + \int ab^2x dx \\ &= C - \frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2b \int \frac{dx}{x} = C - \\ &\frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2b \ln x. \end{aligned}$$

90 3º Podemos tambem integrar pela regra fundamental huma quantidade complexa, elevada a qualquer expoente, se tudo o que multiplicar a quantidade complexa for a differencial della mesma, considerada sem o seu expoente total, ou esta differencial multiplicada ou dividida por hum numero constante: entã para integrar naõ ha mais que considerar a quantidade complexa como huma variavel simples, e applicar a regra fundamental palavra por palavra.

Com effeito a expressã  $gx^{n-1} dx (a + bx^n)^m$  representa todas as differenciais do caso presente; porque  $gx^{n-1} dx$  he a differencial de  $a + bx^n$  multiplicada por  $\frac{g}{nb}$ . Se fizermos pois  $a + bx^n = z$ , teremos  $nbx^{n-1} dx = dz$ , e  $(a + bx^n)^m = z^m$ ; e por conseguinte a nossa expressã pôde



pôde transformar-se em hum monomio  $\frac{g}{nb} z^m dz$ ,

cujo integral he  $\frac{gz^{m+1}}{nb(m+1)} + C$ ; logo

$$\int gx^{n-1} dx (a + bx^n)^m = \frac{g(a + bx^n)^{m+1}}{nb(m+1)} + C.$$

$$\text{Assim } \int adx (b + x)^p = \frac{adx(b+x)^{p+1}}{(p+1)d(b+x)} =$$

$$\frac{a(b+x)^{p+1}}{p+1} + C. \text{ Do mesmo modo}$$

$$\int \frac{(a^2 + 2ax) dx}{\sqrt{(ax + xx)}} \text{ ou } \int (a^2 dx + 2ax dx) (ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(a^2 dx + 2ax dx) (ax + xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx + 2x dx)} = 2a \sqrt{(ax + xx)} + C.$$

Deve-se exceptuar unicamente o caso, em que o expoente da quantidade complexa he  $-1$ ; porque entã he necessario fazer a integraçã por logarithmos, como adiante veremos.

*Das Diferenciais binomias, que se podem integrar algebricamente.*

91 **P** Or differencial binomia entendemos aquella, em que a quantidade complexa a mais composta he huma potencia qualquer de hum bino-

nomio. Assim  $gx^5 dx (a + bx^2)^{\frac{3}{5}}$  he huma differencial binomia. O mesmo se diz de  $gx^m dx (a + bx^n)^p$ .

$bx^n)^p$ , que pôde representar toda e qualquer differencial binomia, pois que  $g, a, b, m, n, p$  podem exprimir todos os numeros imaginaveis, positivos ou negativos.

Ignora-se o methodo geral de integrar qualquer differencial binomia. Porém pelo que fica dito se vê, que  $gx^m dx (a + bx^n)^p$  he integravel algebricamente 1º quando  $p$  he numero inteiro positivo, sejaõ quais forem os expoentes  $m$  e  $n$  (87), exceptuando sómente o caso mencionado (89); 2º quando o expoente  $m$  de  $x$  fóra do binomio he menor em huma unidade que o expoente  $n$  de  $x$  dentro do binomio (90), isto he quando  $m = n - 1$ , sejaõ quais forem  $n$  e  $p$ , exceptuando o caso de  $p = -1$ . Além destes casos temos mais os dous seguintes.

92 1º He integravel a differencial binomia, quando o expoente  $m$  de  $x$  fóra do binomio, sendo augmentado de huma unidade, for divisivel pelo expoente  $n$  de  $x$  dentro do binomio, e der por quociente hum numero inteiro positivo; isto he, quando  $\frac{m+1}{n}$  for numero inteiro positivo.

Porque seja  $a + bx^n = z$ , teremos  $x^{m+1} =$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}, \text{ que dá } x^m dx = \frac{1}{nb \frac{m+1}{n}} dz$$

$(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$ ; logo  $gx^m dx (a + bx^n)^p$  se muda em

$$\frac{g}{nb \frac{m+1}{n}} z^p dz (z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}, \text{ que he integravel todas as}$$

as vezes que  $\frac{m+1}{n}$  for numero inteiro positivo.

Neste caso pois não ha mais do que transformar a differencial proposta, igualando o binomio a huma simples variavel, ou fazendo uso da transformada geral que acabamos de achar.

Por exemplo  $gx^3 dx (a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$  he integravel, porque  $\frac{3+1}{2} = 2$  numero inteiro positivo.

Faça-se pois  $a+bx^2 = z$ , teremos  $x^4 =$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^2, \text{ e } x^3 dx = \frac{(z-a) dz}{2b^2}; \text{ logo } \int gx^3 dx$$

$$(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \int \frac{gz^{\frac{4}{5}} dz (z-a)}{2b^2} =$$

$$\int \frac{gz^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} - \int \frac{gaz^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{\left(\frac{4}{5}+2\right)2b^2} -$$

$$\frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{\left(\frac{4}{5}+1\right)2b^2} + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{2b^2} \left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right) +$$

$$C = \frac{g}{2b^2} (a+bx^2)^{\frac{9}{5}} \left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a\right]$$

+ C.

Do mesmo modo se tivermos para integrar

$gx^3 dx (a+bx^2)^{-\frac{2}{5}}$ , como  $\frac{8+1}{3} = 3$  numero

inteiro positivo, faremos  $a+bx^2 = z$ , e te-

re-

remos  $x^i = \left(\frac{z-a}{b}\right)^i$ , que dá  $x^i dx = \frac{(z-a)^2 dz}{3b^i}$ ; logo  $\int gx^i dx (a+bx^i)^{-\frac{2}{i}} = \int \frac{gz^{-\frac{2}{i}} dz}{3b^i} (z-a)^2 = \int \frac{gz^2 - \frac{2}{i} dz}{3b^i} - \int \frac{2gaz^{1-\frac{2}{i}} dz}{3b^i} + \int \frac{ga^2 z^{-\frac{2}{i}} dz}{3b^i} = \frac{gz^3 - \frac{2}{i}}{3b^i (3-\frac{2}{i})} - \frac{2gaz^2 - \frac{2}{i}}{3b^i (2-\frac{2}{i})} + \frac{ga^2 z^{1-\frac{2}{i}}}{3b^i (1-\frac{2}{i})} + C = \frac{g}{b^i} z^{1-\frac{2}{i}} \left( \frac{z^2}{7} - \frac{az}{2} + a^2 \right) + C = \frac{g}{b^i} (a+bx^i)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{1}{7} (a+bx^i)^2 - \frac{a}{2} (a+bx^i) + a^2 \right] + C.$

.93 2º Como  $gx^m dx (a+bx^n)^p = gx^{m+pn} (b+ax^{-n})^p$ , que se integra (92) quando  $\frac{m+pn+1}{-n}$  ou  $-p - \frac{m+1}{n}$  he hum numero inteiro positivo; segue-se que póde  $\frac{m+1}{n}$  não ser numero inteiro positivo, e com tudo ser tambem integravel a differencial binomia; basta para isso que a

fo-

soma do quociente  $\frac{m+1}{n}$  e do expoente  $p$  do binomio, tomada com final contrario, seja numero inteiro positivo. Neste caso pois faremos a preparação, dividindo os dous termos do binomio por  $x^n$ , e multiplicando fóra por  $x^{pn}$  para não alterar o valor da expressão; isto he, fazendo mudar de final o expoente  $n$  de  $x$  dentro do binomio; e depois transformaremos como no caso precedente.

Por exemplo a diferencial  $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$  ou

$aadx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$ , em que  $\frac{0+1}{2}$  não he numero

inteiro, dá  $-\left(\frac{0+1}{2} - \frac{3}{2}\right) = 1$ , numero inteiro

positivo. Pelo que prepararemos a expressão, reduzindo-a á forma  $gx^m + px^n dx (b + ax^{-n})^p$ , e te-

remos  $aax^{-1} dx (1 + aax^{-2})^{-\frac{3}{2}}$ . Applicando agora

o methodo antecedente, supponhamos  $1 + aax^{-2}$

$= z$ , teremos  $x^{-2} = \frac{z-1}{aa}$ , e  $x^{-1} dx = -$

$\frac{dz}{2aa}$ ; logo  $\int aax^{-1} dx (1 + aax^{-2})^{-\frac{3}{2}} =$

$\int \frac{-z^{-\frac{3}{2}} dz}{2} = z^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{(1 + aax^{-2})}}$

$+ C$ ; e por conseguinte  $\int \frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}} =$

$\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}} + C.$

94. Até agora temos supposto que não havia potencia de  $x$ , senão em hum dos dous termos do binomio. Se porém a houver em ambos elles, reduziremos o binomio a não a ter mais do que em hum termo, fazendo uso das regras ordinarias da

Algebra. Assim se quizermos integrar  $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$

ou  $aax^{-1}dx (ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$ , mudaremos esta expressão em  $aax^{-\frac{3}{2}}dx (a+x)^{-\frac{1}{2}}$ . Applicando

agora as regras dadas acharemos que  $\frac{-\frac{3}{2}+1}{1}$  não

he numero inteiro positivo, mas se lhe ajuntarmos  $-\frac{1}{2}$ , a soma tomada negativamente he 1. Faremos pois negativo o expoente de  $x$  dentro do

binomio, e teremos  $aax^{-2}dx (1+ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ . Logo suppondo  $1+ax^{-1}=z$ , que dá  $x^{-2}dx =$

$-\frac{dz}{a}$ , virá  $\int aax^{-2}dx (1+ax^{-1})^{-\frac{1}{2}} = -$

$2az^{\frac{1}{2}} + C = -2a\sqrt{(1+ax^{-1})} + C$ , e con-

seguintemente  $\int \frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}} = C -$

$2a\sqrt{(1+\frac{a}{x})}$ .

Se huma differencial binomia não se comprehender em nenhum dos casos precedentes, podemos perder a esperança de achar o seu integral puramente algebrico.

Em

Em quanto ás quantidades trinomias , quadrinomias &c, ellas são integraveis nos casos mencionados ( 86 , e seg. ). Além destes ha outros , em que as ditas diferenciais admittem integral algebrico ; mas como estes casos são muito poucos , e encontrão-se raras vezes , não nos demoramos em expollos.

Adiante daremos o methodo de descobrir as que são integraveis , e as que se podem reduzir a huma differencial conhecida.

*Da integraçã das quantidades diferenciais que constão de Senos , Cosenos &c.*

95 **C**omo ( 22 )  $d(\text{sen } z) = dz \text{ cos } z$  , e  $d(\text{cos } z) = - dz \text{ sen } z$  , será reciprocamente  $\int dz \text{ cos } z = \text{sen } z$  , ou mais geralmente  $\text{sen } z + C$  , que tem a mesma differencial ; e  $\int - dz \text{ sen } z = \text{cos } z + C$ .

Se tivermos para integrar  $dz \text{ cos } 3z$  , escreveremos deste modo  $\frac{3dz \text{ cos } 3z}{3}$  , e entã o integral será  $\frac{\text{sen } 3z}{3} + C$ . Da mesma forte  $\int dz \text{ sen } 3z$

$$= -\frac{1}{3} \int -3dz \text{ sen } 3z = C - \frac{\text{cos } 3z}{3} . \text{ Em}$$

$$\text{geral } \int dz \text{ sen } mz = -\frac{1}{m} \int -mdz \text{ sen } mz = C$$

$$\frac{\cos mz}{m}, \text{ e } \int dz \cos mz = \frac{1}{m} \int mdz \cos mz = \frac{\sin mz}{m} + C.$$

Se a expressão for  $dz \cos z (\sin z)^n$ , notaremos que esta quantidade he o mesmo que  $(\sin z)^n d(\sin z)$ ; logo tratando  $\sin z$  como huma simples variavel, teremos pela regra fundamental

$$\int (\sin z)^n d(\sin z) = \frac{(\sin z)^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\text{Do mesmo modo } \int dz \cos mz (\sin mz)^n = \frac{1}{m} \int mdz \cos mz (\sin mz)^n = \frac{(\sin mz)^{n+1}}{m(n+1)} + C,$$

$$\text{e } \int dz \sin mz (\cos mz)^n = -\frac{1}{m} \int -mdz \sin mz$$

$$(\cos mz)^n = C - \frac{(\cos mz)^{n+1}}{m(n+1)}.$$

Querendo integrar  $dz \sin pz \cos qz$ , mudaremos (Trig. 36)  $\sin pz \cos qz$  em  $\frac{1}{2} \sin (pz + qz) + \frac{1}{2} \sin (pz - qz) = \frac{1}{2} \sin (p+q)z + \frac{1}{2} \sin (p-q)z$ ; logo  $\int dz \sin pz \cos qz =$

$$\frac{1}{2(p+q)} \int (p+q) dz \sin (p+q)z +$$

$$\frac{1}{2(p-q)} \int (p-q) dz \sin (p-q)z =$$

$$C - \frac{\frac{1}{2} \cos (p+q)z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2} \cos (p-q)z}{p-q}.$$



Da mesma sorte se tratará  $dz \operatorname{sen} pz \operatorname{cos} qz$ ,  $\operatorname{sen} rz$  &c reduzindo estes productos a senos ou a cosenos simples (Trig. 36).

Se tivermos para integrar  $dz \operatorname{sen}^3 z$ , mudaremos esta quantidade em  $dz \operatorname{sen} z \operatorname{sen}^2 z = dz \operatorname{sen} z \times \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z = dz \operatorname{sen} z (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2z) = \frac{1}{2} dz \operatorname{sen} z - \frac{1}{2} dz \operatorname{sen} z \operatorname{cos} 2z$ ; e reduzindo  $\operatorname{sen} z \operatorname{cos} 2z$ , como fizemos em  $\operatorname{sen} pz \operatorname{cos} qz$ , facilmente acharemos o integral. Além de que, visto ser  $\operatorname{sen}^3 z = \frac{3}{4} \operatorname{sen} z - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3z$  (Trig. 39), teremos

$$\int dz \operatorname{sen}^3 z = -\frac{3}{4} \operatorname{cos} z + \frac{1}{3 \cdot 4} \operatorname{cos} 3z + C.$$

Vê-se pois de que modo se ha-de integrar  $dz \operatorname{sen}^n z$ , e  $dz \operatorname{cos}^n z$  (sendo  $n$  hum numero inteiro positivo), como tambem as quantidades da fórma  $dz (\operatorname{sen} pz)^m (\operatorname{cos} qz)^n (\operatorname{sen} rz)^s$  &c, sendo  $m, n, s$  &c numeros inteiros positivos.

Além deste methodo podemos usar do seguinte, que he mais simples. Para isso advirta-se que como temos  $d(xy) = xdy + ydx$ , será  $ydx = d(xy) - xdy$ , e por conseguinte  $\int ydx = xy - \int xdy$ .

Ilto posto teremos  $\int dz \operatorname{sen}^n z = \int dz \operatorname{sen} z \times \operatorname{sen}^{n-1} z = \operatorname{sen}^{n-1} z \int dz \operatorname{sen} z - \int [d(\operatorname{sen}^{n-1} z) \times$

H

 $\int dz$

$$\int dz \operatorname{sen} z ] = -\operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-1} z + (n-1) \int dz \operatorname{sen}^{n-2} z \operatorname{cos}^2 z = -\operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-1} z + (n-1) \int dz \operatorname{sen}^{n-2} z (1 - \operatorname{sen}^2 z) = -\operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-1} z + (n-1) \int dz \operatorname{sen}^{n-2} z - (n-1) \int dz \operatorname{sen}^n z; \text{ logo}$$

$$\int dz \operatorname{sen}^n z = -\frac{1}{n} \operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-1} z + \frac{n-1}{n}$$

$$\int dz \operatorname{sen}^{n-2} z. \text{ Do mesmo modo } \int dz \operatorname{sen}^{n-2} dz = -\frac{1}{n-2} \operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-1} z + \frac{n-3}{n-2} \int dz \operatorname{sen}^{n-4} z,$$

$$\int dz \operatorname{sen}^{n-4} dz = -\frac{1}{n-4} \operatorname{cos} z \operatorname{sen}^{n-3} z + \frac{n-5}{n-4} \int dz \operatorname{sen}^{n-6} z, \text{ \&c. Logo quando } n \text{ he numero par, temos}$$

$$\int dz \operatorname{sen}^n z = -\operatorname{cos} z \left( \frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} z + \frac{n-1}{n(n-2)} \operatorname{sen}^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \operatorname{sen}^{n-5} z \right. \\ \left. + \dots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 3}{n(n-2)(n-4)(n-6) \dots 2} \operatorname{sen} z \right) \\ + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) \dots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6) \dots 2} \cdot z,$$

e quando  $n$  he impar, temos

$$\int dz \operatorname{sen}^n z = -\operatorname{cos} z \left( \frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} z + \frac{n-1}{n(n-2)} \operatorname{sen}^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} \operatorname{sen}^{n-5} z \right. \\ \left. + \dots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \dots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6) \dots 1} \right);$$

serie que depende somente de  $\operatorname{cos} z$  e  $\operatorname{sen} z$ .

Assim

$$\text{Assim } \int dz \operatorname{sen}^6 z = C - \operatorname{cos} z \left( \frac{1}{6} \operatorname{sen}^5 z + \frac{5}{6 \cdot 4} \operatorname{sen}^3 z + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \operatorname{sen} z \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} z, \text{ e}$$

$$\int dz \operatorname{sen}^5 z = C - \operatorname{cos} z \left( \frac{1}{5} \operatorname{sen}^4 z + \frac{4}{5 \cdot 3} \operatorname{sen}^2 z + \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} \right).$$

Pelas mesmas formulas se póde integrar  $dy \operatorname{cos}^n y$ ; porque fazendo  $y = 90^\circ - z$ , temos  $dy = -dz$ ,  $\operatorname{cos} y = \operatorname{sen} z$ , e  $\int dy \operatorname{cos}^n y = -\int dz \operatorname{sen}^n z$ .

O mesmo methodo serve para achar o valor de  $\int dz \operatorname{sen}^n z \operatorname{cos}^m z$ , advertindo que por ser  $d(\operatorname{sen}^v z \operatorname{cos}^\mu z) = v \operatorname{cos}^{\mu+1} z \operatorname{sen}^{v-1} z \cdot dz - \mu \operatorname{cos}^{\mu-1} z \operatorname{sen}^{v+1} z \cdot dz$ , teremos  $\int dz \operatorname{sen}^v z \operatorname{cos}^{\mu+1} z = \frac{1}{v} \operatorname{sen}^v z \operatorname{cos}^\mu z + \frac{\mu}{v} \int dz \operatorname{sen}^v z \operatorname{cos}^{\mu-1} z \operatorname{sen}^{v+1} z$ ; logo  $\int dz \operatorname{sen}^n z \operatorname{cos}^m z = \frac{1}{n+m} \operatorname{sen}^{n+1} z \operatorname{cos}^{m-1} z + \frac{m-1}{n+m} \int dz \operatorname{sen}^n z \operatorname{cos}^{m-2} z$ , e assim por diante até chegar a  $\int dz \operatorname{sen}^n z$  ou  $\int dz \operatorname{sen}^n z \operatorname{cos} z$ , conforme  $m$  for par ou impar.

Podemos tambem fazer  $\operatorname{sen} z$  ou  $\operatorname{cos} z$  igual a  $x$ , e transformar  $dz \operatorname{sen}^n z \operatorname{cos}^m z$  em  $x^n dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ , ou em  $x^m dx (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$ ; donde se vê que a proposta he integravel al-

gebricamente, quando hum dos dous expoentes  $n$  ou  $m$  he numero inteiro positivo impar.

Em fim todos os principios, que havemos dado para a integraçõ das quantidades, servem para integrar as differenciais affectas de senos e cosenos, quando tem huma integral algebrica; e quando nellas entrarem tangentes, reduzillas-hemos a differenciais de senos e de cosenos, advertindo que  $\text{tang } z$

$$= \frac{\text{sen } z}{\text{cos } z}.$$

*Appliquaçõ das regras precedentes á quadratura das Curvas.*

96 **P** Ara acharmos a superficie, ou (que vem a ser o mesmo) a quadratura das curvas, consideramos estas linhas como polygonos de infinitos lados: entã resolvendo a superficie em infinitos trapezios infinitamente pequenos pelas perpendiculares  $MP, mp$  (*Fig. 40*) tiradas das extremidades  $M, m$  de cada lado sobre o eixo das abscissas, cada trapezio  $PpmM$  he a differencial (6) do espaço finito  $APM$ ; porque  $PpmM = Apm - APM = d(APM)$ . Se acharmos pois a expressãõ algebrica de  $PpmM$ , o seu integral serã o espaço procurado  $APM$ .

Seja  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; serã  $Pp = dx$ ,  $pm = y + dy$ , e conseguintemente a superficie do trapezio ou  $\frac{PM + pm}{2} \cdot Pp = \frac{2y + dy}{2} \cdot dx = ydx$

$ydx + \frac{dydx}{2}$ . Mas  $\frac{dydx}{2}$  he (4) infinitamente pequeno em comparação de  $ydx$ ; logo  $d(\text{APM}) = ydx$ , e por conseguinte  $\text{APM} = \int ydx + C$ .

Sendo pois dada a equação da curva, tiraremos della o valor de  $y$ , que substituiremos na formula  $ydx$ , e virá huma função differencial de  $x$ . Então para termos a superficie, integraremos essa differencial, e determinaremos immediatamente a constante, recorrendo á origem do integral onde o seu valor he nullo, e vendo o que he  $x$  nesse mesmo ponto para substituir o seu valor no integral. Assim se formará huma equação particular, a qual dará o valor de  $C$  que se deve substituir na equação geral.

Para se ver a necessidade de ajuntar huma constante, deve-se notar que  $Pp m M$  tanto he a differencial da superficie contada desde a origem  $A$  das abscissas, como de outro qualquer espaço  $KPML$ , contado de hum ponto fixo e determinado  $K$ ; porque temos igualmente  $Pp m M = KpmL - KPML = d(KPML)$ . Logo não ha razão para attribuir o integral, que se achar, antes ao espaço  $\text{APM}$ , do que a outro qualquer  $KPML$ , que differe daquelle em hum espaço determinado  $KAL$ . He pois necessario que se ajunte huma constante, que exprima esta differença, isto he que exprima de que ponto pertencemos contar a superficie.

*Exem-*

*Exemplos.*

I. Na parábola temos  $yy = px$ , que dá  $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ , logo  $\int ydx = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$ .

Se contarmos os espaços desde o ponto A origem das abscissas, a equação geral  $\int ydx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$  se reduz a  $0 = 0 + C$ ; logo  $C = 0$ , e conseguintemente o espaço indefinido  $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} AP \cdot PM = \frac{2}{3}$  do retângulo circunscrito  $APMO$ , para qualquer  $AP$ .

Se contarmos porém os espaços desde o ponto K onde supponmos  $x = b$ , a equação geral se tornará em  $0 = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$ ; logo  $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ , e por conseguinte  $KPML = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} b \cdot KL = \frac{2}{3} APMO - \frac{2}{3} AKLI$ .

De todas as secções conicas sómente a parábola he quadravel.

II. A equação das parabolâs de todos os grãos

$$y^m = x^n a^{m-n} \text{ dá } y = x^{\frac{n}{m}} a^{\frac{m-n}{m}}; \text{ logo } \int y dx = \\ a^{\frac{m-n}{m}} \int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$$

Querendo contar os espaços desde a origem A dos  $x$  ( Fig. 41 ), temos  $C = 0$ ; logo  $APM = \frac{m}{m+n} xy =$  á parte determinada  $\frac{m}{m+n}$  do retângulo circumscrito  $APMO$ . Pelo que todas as parabolâs são quadraveis.

III. Nas hyperbolâs referidas ás asymptotâs

$$\text{temos } y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}; \text{ logo } \int y dx = \\ \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} + C. \text{ Se quizermos contar}$$

os espaços desde a origem dos  $x$ , acharemos  $C = 0$

no caso de  $m > n$ ; e  $C = \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} = \infty$ , no

caso de  $m < n$ , ou de ser negativo o expoente

$\frac{m-n}{m}$  de  $x$ , e por conseguinte o espaço  $APM$

he infinito. Pelo contrario se contarmos os espaços

desde o ponto K onde  $AK = b$ , teremos  $C = -$

$$\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} b^{\frac{m-n}{m}}, \text{ e por conseguinte o espaço}$$

$\int y dx$

$\int y dx$  será então finito, quer  $m - n$  seja positivo, quer negativo.

Para isto se perceber he preciso advertir, que as curvas comprehendidas na equação  $y =$

$$\frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}}, \text{ quando } m < n \text{ se aproximaõ mais da}$$

asymptota AZ (Fig. 42), que da asymptota AY; porque quando  $x$  he infinito,  $y$  he infinitamente pe-

quenos da ordem  $\frac{n}{m} > 1$ , e quando  $y$  he infinito,  $x$

he só infinitamente pequeno da ordem  $\frac{m}{n} < 1$ ;

logo os espaços APMS contados desde a asymptota AY saõ infinitos, porque o espaço comprehendido entre esta asymptota e o ramo infinito BS he infinito. Pelo contrario os espaços comprehendidos entre o ramo BM e a asymptota AZ até o infinito tem hum valor finito; porque depois de hum mui curto interuallo o ramo se aproxima rapidamente da sua asymptota, de sorte que o espaço infinitamente comprido KLMOZ =

$$\frac{m}{n-m} \cdot \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}, \text{ e PMOZ} = \frac{m}{n-m} \cdot \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}}; \text{ lo-}$$

$$\text{go KLMP} = \frac{m}{n-m} a^{\frac{m+n}{m}} \left( \frac{1}{b^{\frac{n}{m}}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} \right).$$

Don-



Donde se segue, que ainda que não possamos ter os espaços contados desde AY, com tudo podemos ter os espaços KLMP contados de hum ponto K o mais proximo que quizermos de AY.

São pois quadraveis todas as hyperbolas referidas ás asymptotas, excepto a hyperbola ordinaria.

IV. Na curva que tem por equação  $y = \frac{aax - x^3}{aa}$ , a qual se representa na *Figura 44*, como

se pôde ver dando hum valor determinado a  $a$ , e consecutivamente a  $x$  valores arbitrarios, acharemos

$$\int y dx = \int \frac{aax dx - x^3 dx}{aa} = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$$

+ C. Se contarmos os espaços desde a origem A das abscissas, será  $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$ .

V. Na logarithmica temos  $\int y dx = \int a m dy = a m y + C$ . Suppondo que  $\int y dx = 0$ , quando  $y = a = AB$  (*Fig. 45*), virá  $0 = ma^2 + C$ , que dá  $C = -ma^2$ ; logo  $APMB = am(y - a)$ ; e como a subtangente  $PT = am(30)$ , será  $APMB$  igual ao rectangulo  $OIQM$ . Se fizermos  $y = 0$ , virá o espaço infinitamente comprido  $BXYA = -ma^2 = PQIT$ .

VI. Seja  $y = \text{sen } x$ , que he a equação da curva dos senos; teremos  $\int y dx = \int dx \text{ sen } x = C - \text{cos}$

*cos x*. Se contarmos os espaços do ponto A (*Fig. 46*), em que  $x = 0$ , acharemos  $C = 1$ ; logo  $APM = 1 - \cos x$ . Segue-se pois, que quando  $x = 180^\circ = c$ , será  $AMA'A = 2$ , isto he o dobro do quadrado do raio; e quando  $x = 2c = AA''$ , será o espaço  $= 0$ , isto he, o positivo igual ao negativo. Em geral, quando  $x = 2nc$ , o espaço será nullo, e quando  $x = (2n + 1)c$ , será o espaço  $= 2$ .

97 Mostrámos (*Alg. 413*) que se pôde imitar qualquer contorno ABCD (*Fig. 47*), fazendo passar por certo numero de pontos A, B, C, D huma curva, cuja equação seja da fórmula  $y = m + nx + px^2 + qx^3 + \&c$ ; e vimos de que modo se determinaõ as quantidades  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $\&c$ . Supponhamos agora, que se pertende achar a superficie ABCDLK, sem ser dada a equação da curva ABCD.

Para isso faremos passar (*Alg. 413*) por certo numero de pontos A, B, C, D huma curva Ae Bf Cg D, a qual se confundirá tanto mais com a proposta, quanto maior for o numero de pontos que se tomarem. E como temos a equação daquella, podemos consideralla como a equação da curva ABCD, ao menos na extensaõ ABCD. Visto pois o ella constar de termos monomios, com facilidade se achará a superficie procurada.

Em geral pôde servir o mesmo calculo para achar por approximação tanto as superficies das curvas, como o integral das quantidades, que não se podem integrar exactamente. Com effeito toda a  
equa-

equação differencial se pôde considerar como a expressão do elemento da superficie de huma curva, cuja ordenada seja igual a tudo o que está multiplicado por  $dx$ ; por exemplo  $dx\sqrt{(aa + xx)}$  he o elemento da superficie da curva, cuja ordenada  $y = \sqrt{(aa + xx)}$ . Assim calculando por meio desta equação alguns valores de  $y$  para alguns valores de  $x$ , e fazendo passar pelas extremidades das ordenadas huma curva da natureza, que acabamos de expôr, acharemos a sua superficie, a qual será o valor approximado de  $\int dx\sqrt{(aa + xx)}$  na extensão que se tiver dado a  $x$ .

Supponhamos tres ordenadas  $PM (a)$ ,  $P'M' (b)$ ,  $P''M'' (c)$  (*Fig. 48*) correspondentes ás tres abscissas  $0, 1, 2$  nos pontos  $P, P', P''$ ; teremos  $y = a + (b - a)x + \left(\frac{a + c}{2} - b\right)(x^2 - x)$ ; logo  $\int y dx = PMM''P'' = \int a dx + (b - a) \int x dx + \left(\frac{a + c}{2} - b\right) \int (x^2 dx - x dx) = ax + \frac{b - a}{2} x^2 + \left(\frac{a + c}{2} - b\right) \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$ ; e substituindo  $PP'' = 2$  em lugar de  $x$ , teremos a superficie  $= \frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{1}{3} c$  no caso de tres ordenadas. Em geral para maior numero de ordenadas somaremos as superficies parciais de tres em tres ordenadas, e será a superficie toda igual a hum ter-

terço da primeira, e da ultima ordenada, mais  $\frac{4}{3}$  das de numero par, isto he, da segunda, quarta &c, mais  $\frac{2}{3}$  das de numero impar, isto he, da terceira, quinta, &c.

98 Tambem podemos achar a superficie das curvas, resolvendo-as em triangulos em lugar de trapezios. Assim considerando a superficie do segmento ANQA (*Fig. 41*) como composta de infinitos triangulos infinitamente pequenos AQ $q$ ; se abaixarmos a perpendicular Qt, isto he, se descrevermos do centro A com o raio AQ o arco infinitamente pequeno Qt, entao suppondo AQ =  $y$ , e Qt =  $dx$ , teremos o triangulo AQ $q$  ou  $d(ANq)$

$$= \frac{Aq \cdot Qt}{2} = \frac{y + dy}{2} \cdot dx = \frac{1}{2}ydx; \text{ logo}$$

$$ANQA = \frac{1}{2} \int ydx + C.$$

Se for  $\phi$  o angulo comprehendido por AQ e por huma linha fixa que passe por A, isto he, o arco que mede este angulo no circulo do raio 1, teremos Qt =  $y d\phi$ , e por conseguinte ANQA =  $\frac{1}{2} \int yy d\phi + C$ .

### Exemplos.

I. Se da extremidade A (*Fig. 49*) do diametro AB de hum circulo ANBN' se tirarem rectas AQ para os differentes pontos da tangente BQ ao pon-

ponto B, e em cada huma dellas se tomar  $QM = AN$ , a curva  $MAM'$ , que passa pelos pontos M, M' assim determinados, chama-se a *Cissoide de Diocles*, cuja asymptota he a tangente  $QBQ'$ . Seja  $AB = a$ ,  $AM = y$ , o angulo  $MAB = \phi$ , tere-

mos  $AQ = \frac{a}{\cos \phi}$ ,  $AN = MQ = a \cos \phi$ ; logo

$$y = \frac{a}{\cos \phi} - a \cos \phi = \frac{a \operatorname{sen}^2 \phi}{\cos \phi}, \text{ e } \frac{1}{2} \int yy d\phi =$$

$$\frac{a^2}{2} \int \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} - aa \int d\phi + \frac{a^2}{2} \int d\phi \cos^2 \phi = \frac{a^2}{2} \operatorname{tang} \phi$$

$$- aa\phi + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \frac{1}{2} \phi \right) + C; \text{ e por}$$

consequente  $AKMNA = \frac{1}{2} aa \operatorname{tang} \phi + \frac{1}{8} aa \operatorname{sen} 2\phi$

$- \frac{3}{4} aa\phi$  sem constante. Como o triangulo  $APM$

$$= \frac{1}{2} yy \operatorname{sen} \phi \cos \phi, \text{ ser\u00e1 } AKMPA = \frac{3}{4} a^2 \phi -$$

$$\frac{3}{8} a^2 \operatorname{sen} 2\phi + \frac{1}{16} a^2 \operatorname{sen} 4\phi, \text{ que para } \phi = 90^\circ$$

se torna em  $3 ANBA =$  ao triplo do semicirculo genitor.

II. Na espiral de Archimedes (*Fig. 50*) te-

mos  $y = \frac{ax}{b}$ ; logo  $\frac{1}{2} \int yy d\phi = \frac{1}{2} \int \frac{ax^2 dx}{b^2} =$

$$\frac{1}{2} \frac{ax^3}{3b^2} + C, \text{ e por consequente } CKMC = \frac{1}{2} \frac{ax^3}{3b^2}.$$

He

He pois  $CKMAC = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} =$  ao terço do círculo inteiro. Se  $\phi$  passar de  $360^\circ$ , os triangulos elementares comprehenderão os já formados; pelo que toda a extensão, que se pôde dar a  $\frac{1}{2} \int yy d\phi$ , he de  $\phi = 360^\circ$ .

III. Se do centro C (Fig. 51), tomado na linha indefinida CQ, se descreverem os arcos AG, QM, &c iguais entre si, a curva CKGM que se fizer passar pelas extremidades G, M &c, ferá a *Spiral hyperbolica*. Seja  $CA = a$ ,  $AN = x$ ,  $CM = y$ ,  $AG = QM$  &c  $= b$ ; os sectores semelhantes CAN, CQM darão  $xy = ab$ . Se quizermos quadrar esta curva, notaremos que  $d\phi = \frac{dx}{a} = \frac{b dy}{yy}$ ; logo  $\frac{1}{2} \int yy d\phi = \frac{1}{2} by + C$ .

*Aplicação á rectificação das curvas.*

99 **P** Ara rectificar huma curva AM (Fig. 41), isto he, para determinar o seu comprimento, ou assignar huma recta, que lhe seja igual, temos  $Mm = Am - AM = d(AM) = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ; logo  $AM = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$ , quer as ordenadas sejaõ parallelas, quer partaõ de hum ponto fixo. Diferenciaremos pois a equação da

da curva para exprimir  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$  em  $x$  e  $dx$ ,  
ou  $y$  e  $dy$ , e integraremos.

*Exemplos.*

I. Se a curva for a segunda parabola cubica,

cuja equação he  $y^3 = ax^2$ , teremos  $dx = \frac{3y^{\frac{1}{2}} dy}{2a^{\frac{1}{2}}}$ ;

logo  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9y dy^2}{4a}\right)} =$

$dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; e por conseguinte  $(90) \int \sqrt{(dx^2$

$+ dy^2)} = \frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$ . Se quizermos

contar a curva desde a origem A dos  $y$ , teremos

$0 = \frac{8a}{27} + C$ ; logo  $AM = \frac{8a}{27} \left[\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$ .

II. A equação geral das parabolae  $y^m =$

$ax^{m-n}x^n$  dá  $\frac{m dy}{y} = \frac{n dx}{x}$ ; logo  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{dx}{m} \sqrt{\left(m^2 + \frac{n^2 y^2}{x^2}\right)} = \frac{dx}{m} \sqrt{\left(m^2 +$

$\frac{2m-n}{m^2} \frac{2m-2m}{x^m}\right)$ . Esta quantidade he inte-  
gra

gravel quando  $-\left(\frac{0+1}{2n-2m} + \frac{1}{2}\right) = t$ , sendo

do  $t$  hum numero inteiro positivo, isto he, quando  $m = \frac{2t+1}{2}n$ ; logo são rectificaveis as parabolas que se comprehendem na equação  $y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}}x$ .

III. Na cycloide (*Fig. 52*) temos  $dy = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ , sendo  $AB = a$ ; logo  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\frac{a}{x}}$ ; e integrando vem  $AM (s) = 2\sqrt{ax} = 2AN$ ; logo  $s^2 = 4ax$ .

IV. Na spiral logarithmica (*Fig. 53*) temos  $dy = tdx$ , sendo  $t$  a tangente do angulo  $CMT$ ; logo  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{dy}{c}$ , sendo  $c$  o coseno de  $CMT$ ; e por conseguinte  $CKM = \frac{y}{c} = MT$ .

*Aplicação ás superficies curvas.*

100 **T** Rataremos unicamente das superficies dos solidos de revolução, isto he, dos solidos que  
con-



concebemos gerados por huma curva AM ( *Fig. 54* ) movendo-se ao redor de huma recta AP.

Neste movimento o elemento  $Mm$  descreve a pequena pyramide conica truncada, que he a differencial, ou o elemento da superficie descrita por AM. E como a superficie da dita pyramide, por ser  $Mm$  infinitamente pequeno, he igual ao producto de  $Mm$  ( $ds$ ) pela circumferencia do raio PM ( $y$ ), será a superficie dos solidos de revolução  $= \int Mm \text{ circ. PM} = 2c \int y ds = 2c \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C.$

### Exemplos.

I. Se quizermos achar a superficie de huma pyramide conica recta ABC ( *Fig. 55* ), onde a linha generante he huma hypothenuza AC, teremos  $y = x \text{ tang } a$ , suppondo o angulo DAC  $= a$ ; logo

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\text{tang}^2 a}\right)} = \frac{dy}{\text{sen } a},$$

e conseguintemente  $2c \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2cy}{\text{sen } a}$

$$\int y dy = \frac{cy^2}{\text{sen } a} + C = c. \text{ PM. AM} + C. \text{ He pois}$$

a superficie ABC  $= c. \text{ CD. AC} = \text{AC. } \frac{1}{2} \text{ circ. CD.}$

II. Nos cylindros temos  $ds = dx$ , e  $y$  constante e igual ao raio do circulo da base. Logo representando este raio por  $a$ , será a superficie  $= 2ac \int dx = 2acx.$

I

III.

III. Se o solido for huma esfera , a curva gerante neste caso he o circulo AMB ( *Fig. 56* ), que tem por equação  $yy = 2ax - xx$  , sendo  $MC = a$  ,  $AP = x$  ,  $PM = y$ . Logo  $dy$

$$= \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} , \text{ e } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$dx \sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{2ax - xx}\right)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} ; \text{ co-}$$

mo tambem se podia deduzir dos triangulos semelhantes CPM , Mrm , que daõ  $ds = \frac{adx}{y}$  . Substi-

tuindo pois na formula este valor , e o de  $y$  , teremos  $2c \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2c \int adx = 2acx + C$  , ou simplesmente  $2acx$  , contando a superficie desde o ponto A. Logo a superficie da esfera he igual á do cylindro circumscrito.

IV. No solido paraboloido , que he gerado pela revoluçãõ da parabola AM ( *Fig. 54* ) ao redor do seu eixo , temos  $yy = px$  ; logo  $dx = \frac{2ydy}{p}$  , e

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2dy}{p} \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + y^2\right)} . \text{ He pois a}$$

$$\text{superficie do paraboloido} = \frac{4c}{p} \int ydy \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + y^2\right)}$$

$$= \frac{4c}{3p} \left(\frac{1}{4}p^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} + C . \text{ Se contarmos a superfic-}$$

cie

ie desde A, onde  $y=0$ , temos  $0 = \frac{4c}{3p} \left(\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}}$

$$+ C = \frac{4c}{3p} \cdot \frac{1}{8} p^3 + C, \text{ que dá } C = -\frac{4c}{3p} \cdot \frac{1}{8} p^3;$$

$$\text{logo AMLA} = \frac{c}{6p} \left[ (p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right].$$

*Aplicação á medida dos solidos.*

101 **P** Ara medir o volume ou a solidez dos corpos, podemos imaginallos partidos por secções infinitamente vizinhas, e parallelas entre si; ou tambem concebellos como compostos de huma infinidade de pyramides, as quais tenhaõ por vertice commum hum mesmo ponto. Quando os consideramos como partidos por secções infinitamente vizinhas, e parallelas entre si, a differença entre duas superficies oppostas, que terminaõ cada secção, he infinitamente pequena, e por conseguinte devemos omittilla no calculo. Donde vem, que considerando assim cada segmento como hum prisma, se for  $T$  a superficie de huma secção, e  $dx$  a sua espessura, isto he, a sua altura infinitamente pequena, será  $Tdx$  o elemento do solido, e por conseguinte a solidez do corpo será  $\int Tdx + C$ . Devemos pois determinar em cada caso o valor  $T$  da secção em  $x$ , e integrar.

Exemplo. Se o solido for huma pyramide SABC

(Fig. 57); suppondo a superficie da base  $ABC = bb$ , a altura  $ST = h$ , e a distancia  $St$  de  $S$  a qualquer secção  $abc$  parallelá á base  $= x$ , teremos (19. 6. Eucl.)

$$bb : xx :: bb : abc \text{ ou } T = \frac{bbxx}{hh}; \text{ e por con-}$$

seguinte a solidez de qualquer porção da pyramide

$$= \frac{bb}{hh} \int x^2 dx = \frac{bbx^3}{3hh} + C; \text{ ou simplesmente}$$

$\frac{bbx^3}{3hh}$ , se esta porção começar no vertice. Como

temos  $Sabc = \frac{bbxx}{hh} \cdot \frac{1}{3} x$ , segue-se que a soli-

dez de huma pyramide he igual á base multiplicada pelo terço da altura : o que concorda com o que se demonstra na Geometria (7. 12. Eucl.).

102 Quanto aos solidos de revolução, a superficie da secção, que neste caso he hum circulo do raio  $PM$  (Fig. 54), será  $cy^2$ ; logo hum solido qualquer de revolução  $= \int cy^2 dx + C$ . Para fazer uso desta formula, devemos substituir o  $y^2$  da linha generante, e integrar.

### Exemplos.

103 I. Se quizermos achar a solidez da esfera, substituiremos  $2ax - xx$  em lugar de  $y^2$  na formula, e teremos a solidez de hum segmento esfe-

rico  $\equiv c \int (2ax - xx) dx \equiv cx^2 (a - \frac{1}{3}x)$ ; logo  
pondo  $x \equiv 2a$  teremos a solidez de toda a esfera  
 $\equiv \frac{4}{3} a^3 c \equiv \frac{2}{3}$  do cylindro circumscrito.

104 II. Querendo applicar a mesma formula  
ao *Esferoide allongado*, que he gerado pela revolu-  
ção da ellipse á roda do seu eixo maior AB (*Fig. 58*),

teremos  $yy \equiv \frac{bb}{aa} (2ax - xx)$ , sendo AC  $\equiv a$ ,

CD  $\equiv b$ , AP  $\equiv x$ , PM  $\equiv y$ ; e por conseguinte

$$\int cy^2 dx \equiv \frac{cbb}{aa} \int (2ax - xx) dx \equiv \frac{cbb}{aa} xx (a - \frac{1}{3}x)$$

+ C, ou simplesmente  $\frac{cbbxx}{aa} (a - \frac{1}{3}x)$ , se contar-

mos a solidez do ponto A. Está pois o ellipsoide  
inteiro para a esfera circumscrita  $\therefore bb : aa$ , e por  
conseguinte he igual aos dous terços do cylindro  
circumscrito.

Para ter a solidez contada desde hum ponto K,  
onde supponmos AK  $\equiv e$ , formaremos huma equação  
pela condição de ser o integral nullo quando  $x \equiv e$ ;

o que dará  $0 \equiv \frac{cbb e e}{aa} (a - \frac{1}{3}e) + C$ , isto he,

$$C \equiv - \frac{cbb e e}{aa} (a - \frac{1}{3}e); \text{ logo a solidez de hum}$$

segmento de esferoide elliptico, comprehendido en-  
tre dous planos parallellos entre si, e perpendicular-  
res

res ao eixo, em distancia hum do outro  $= x - e$ ,  
 tem por expressão  $\frac{cbb}{aa} (ax^2 - ae^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} e^3)$ .

Esta formula serve para calcular a solidez, e conseguintemente o pezo dos mastros, e das vergas dos navios; como tambem para medir a capacidade dos toneis, cuja superficie exterior se possa considerar como porção de hum esferoide allongado.

105 III. No paraboloido (Fig. 54) temos  $yy = px$ , e  $\int cy^2 dx = c \int px dx = \frac{1}{2} c px^2 + C$ . Logo o paraboloido ALMA  $= cpx \cdot \frac{1}{2} x = cy^2 \cdot \frac{1}{2} x =$  á ametade do producto da superficie do circulo, cujo raio he PM, pela altura  $x$ , ou (que vem a ser o mesmo) á ametade do producto da base do solido pela sua altura; e conseguintemente he ametade do cylindro circumscrito.

Se contarmos a solidez desde hum ponto K em que  $x = e$ , teremos  $\frac{cp}{2} (x^2 - e^2)$ ; formula, pela qual se póde medir a excavação das minas.

106 Podemos applicar a mesma formula ao *Hyperboloide*, que he o solido gerado pela revolução da hyperbola ao redor de hum dos eixos; como tambem ao *Ellipsoide chato*, que he gerado pela revolução da ellipse á roda do seu eixo menor. Fazendo o calculo, acharemos que o ellipsoide chato he  $\frac{2}{3}$  do cylindro circumscrito; isto he, que sendo

$a$  o eixo maior da ellipse generante, e  $b$  o menor, o esferoide allongado (104) tem a solidez =

$$\frac{2}{3} cabb, \text{ e o esferoide chato a tem } = \frac{2}{3} caab;$$

logo o esferoide allongado está para o esferoide chato  $:: b : a ::$  o eixo menor para o maior.

Isto he o que basta pelo que respeita aos solidos de revolução. Porém para acostumar os principiantes a extender o uso destes methodos, vamos a fazer mais duas applicações.

107 Exemplo I, *Achar a solidez da unha cylindrica ABDE (Fig. 59), formada pela secção de hum plano ABD. obliquo á base de hum cylindro recto, suppondo para maior facilidade, que o dito plano passa pelo centro da base.*

Se concebermos o solido partido por planos parallelos, infinitamente vizinhos, e perpendiculares á base AEB (Fig. 60), as secções seraõ triangulos semelhantes, cujas superficies conseguintemente seraõ como os quadrados dos lados homologos. Seja pois o raio CE da base =  $a$ , a altura DE =  $b$ , AP =  $x$ ; será a espessura Pp do elemento comprehendido entre duas secções contiguas =  $dx$ , e a base PM do triangulo PMN =  $\sqrt{(2ax - xx)}$ . Isto posto, como temos CED : PMN  $:: CE^2 :$

$$PM^2, \text{ e } CED = \frac{1}{2} ab, \text{ será } PMN = \frac{b}{2a} (2ax - xx); \text{ logo (101) a solidez da unha =}$$

$b$

$$\frac{h}{2a} \int (2ax dx - x dx) = \frac{h}{2a} \left( ax^2 - \frac{x^2}{2} \right) + C ; \text{ ou}$$

simplesmente  $\frac{h}{2a} \left( ax^2 - \frac{x^2}{2} \right)$ , contando-a des-

de o ponto A. Para acharmos todo o solido, naõ

ha mais do que suppor  $x = 2a$ , o que dá  $\frac{2}{3} a^2 h$

$$= \frac{1}{2} ab \cdot \frac{4}{3} a = CED \times \frac{2}{3} AB. \text{ He pois a so-}$$

lidez da unha igual a dous terços do prisma, que tenha o triangulo CED por base, e o diametro AB por altura.

108 Exemplo II. *Achar a solidez de huma porção de ellipsoide allongado, comprehendida entre dous planos parallelos entre si, e ao eixo maior.*

He necessario primeiramente demonstrar, que as secções do ellipsoide parallelas ao eixo maior, são ellipses semelhantes á ellipse generante; isto he, que os eixos de qualquer daquellas são entre si como os eixos desta.

Para isso imaginemos o ellipsoide cortado por hum plano, o qual ( para fixar as idéas ) supomos ser vertical, e passar pelo eixo maior AB (*Fig. 61*); a secção será a ellipse ADBE igual á generante. Imaginemos tambem o ellipsoide cortado por outros tres planos, dos quais dous sejaõ verticais, e o terceiro horizontal. Sejaõ as secções dos dous primeiros com o plano ADBE representadas pelo eixo menor DE, e pela parallela MN; e a secção do terceiro com o mesmo plano seja representada por ST.

Isto



Isto posto, digo que a secção representada por ST he huma ellipse semelhante a ADBE.

Imaginemos levantadas nos pontos R e O duas linhas ( $z$  e  $t$ ) perpendiculares ao plano ADBE, que se encontrem com a superficie do ellipsoide. Como estas são ordenadas commuas da secção feita por ST, e das secções circulares feitas por MN e DE, teremos  $zz = DR \times RE$ , e  $tt = MO \times ON$ . Seja  $CD = \frac{1}{2} b$ ,  $CA = \frac{1}{2} a$ ,  $CR = OP = u$ ; será  $DR = \frac{1}{2} b + u$ ,  $RE = \frac{1}{2} b - u$ ,  $MO = y + u$ ,  $ON = y - u$ , e por conseguinte virá  $zz = \frac{1}{4} bb - uu$ , e  $tt = yy - uu$ . Mas suppondo  $CP = x$ , e a ordenada SR do eixo menor  $= k$ , temos (Alg. 307, e 304)  $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4} aa - xx)$ , e  $kk = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4} bb - uu)$ , que dá  $uu = \frac{1}{4} bb - \frac{bbkk}{aa}$ ; logo  $zz = \frac{bbkk}{aa}$ , e  $tt = \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$ ; e por conseguinte  $zz : tt :: kk : kk - xx :: SR^2$  ou  $SR \times RT : SO \times OT$ ; isto he, o quadrado da ordenada  $z$ , que corresponde ao ponto R, está para o quadrado da ordenada  $t$ , que corresponde ao ponto O, como o producto das duas abscissas correspondentes á primeira está para o producto das abscissas correspondentes á segunda; logo a secção feita por ST he huma ellipse.

Além

Além disto a equação  $zx = \frac{bbkk}{aa}$  dá  $z : k ::$

$b : a$ ; mas  $z$  he a ametade da maior largura da secção, ou a ametade do eixo menor desta ellipse, e  $k$  ou  $SR$  he a ametade do maior comprimento da secção, ou a ametade do eixo maior da mesma ellipse; logo os seus dous eixos tem entre si a mesma razão que os da ellipse generante; e como em todo este raciocinio não entra a distancia  $CR$  da secção que havemos considerado, segue-se que o mesmo succederá em outra qualquer secção paralela a  $AB$ .

Isto posto, para achar a solidez de qualquer porção do ellipsoide comprehendida entre dous planos parallelos, representados por  $AB$  e  $ST$ , seja a superficie da ellipse generante  $= S$ ; será a superficie da ellipse, cujo eixo maior he  $ST = \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$ ,

e por conseguinte o elemento do solido  $= \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa} du$

$= \frac{S}{\frac{1}{4}bb} (\frac{1}{4}bbdu - uudu)$ . Integrando pois, te-

remos a solidez  $= \frac{S}{\frac{1}{4}bb} (\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3) + C$ ,

ou simplesmente  $\frac{S}{\frac{1}{4}bb} (\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3)$ , se a con-

tarmos desde o centro  $C$ . Porém se a porção começar em outro ponto  $K$ , em que  $CK = e$ ,

teremos o  $= \frac{S}{\frac{1}{4}bb} (\frac{1}{4}bbe - \frac{1}{3}e^3) + C$ , e conse-

guin-

guintemente a solidez da parte do ellipsoide allongado , comprehendida entre dous planos parallelos

ao eixo maior , tem por expressãõ  $\frac{S}{\frac{1}{4}bb} [\frac{1}{4}bb(u - e) - \frac{1}{3}(u^3 - e^3)] = \frac{S}{\frac{1}{4}bb} (u - e) (\frac{bb}{4} - \frac{ee + eu + uu}{3})$ . Como  $u - e$  he a distan-

cia dos dous planos parallelos , ou a altura da porçãõ por elles comprehendida ; se suppuzermos

esta altura  $= b$  , ferá a solidez  $= \frac{Sh}{\frac{1}{4}bb} (\frac{1}{4}bb - uu)$

$+ \frac{Shb}{\frac{1}{4}bb} (u - \frac{1}{3}b) = \frac{Shkk}{\frac{1}{4}aa} + \frac{Shb}{\frac{1}{4}bb} (u - \frac{1}{3}b)$  .

Seja a superficie da secçãõ feita por ST , ou

$\frac{Skk}{\frac{1}{4}aa} = s$  , a da secçãõ feita por LK  $= s'$  , e a

ametade da sua largura , ou a ametade do seu eixo menor  $= l$  ; teremos , em razaõ da semelhança de

todas as secções ,  $S = \frac{1}{4} \frac{bbs'}{ll}$  ; logo virá por ultima

expressãõ reduzida do solido ,  $sh + \frac{s'bh}{ll} (u - \frac{1}{3}b)$ .

Devemos pois 1º multiplicar a superficie da secçãõ menor pela altura do solido ; 2º multiplicar a su-

perficie da secçãõ maior pela razaõ  $\frac{h^2}{l^2}$  do quadra-

do

do da mesma altura para o quadrado da semilargura da secção superior, e pela distancia do centro á secção inferior menos o terço da altura do solido.

Esta regra pôde-se applicar utilmente á medida da parte de hum navio mergulhada em ração do peso da carga, com tanto que a figura desta parte se possa comparar com hum tronco de ellipsoide. Então  $s$  representará a secção feita á flor d'agua quando o navio está sem carga, e  $s'$  quando já está carregado;  $h$  representará a distancia das duas secções;  $l$  a maior largura de  $s'$ , e finalmente  $u$  a distancia de  $s$  á maior secção horizontal do esferoide.

Quanto ao modo de medir  $s$  e  $s'$ , devemos advertir, que huma superficie destas se determina pela outra; porque ambas pertencem á classe das ellipses semelhantes, e por conseguinte estão entre si como os quadrados dos seus eixos maiores, ou menores. Assim o que unicamente resta, he determinar huma dellas. Adiante veremos, que a superficie da ellipse he para a do circulo de diametro igual ao eixo maior da mesma ellipse, como o eixo menor he para o maior; e como sabemos avaliar a superficie do circulo com a approximação que quizermos, facilmente poderemos determinar a superficie de huma ellipse, cujos eixos sejaõ conhecidos.

*Dos methodos de integrar. por approximação.*

109 **A**S differenciais complexas, que não se comprehendem nos casos que acima examinámos, integraõ-se por approximação. Para isso converte-se a quantidade proposta em huma serie convergente  
de

de termos monomios (Alg. 151), e integrando hum certo numero delles, teremos o valor approximado do integral procurado.

110 Exemplo I. *Achar o comprimento do arco de circulo AM (Fig. 56) por meio do seu seno verso AP.*

Suppondo que  $Mm$  he o elemento do arco, tire-se  $Mr$  paralela a  $AP$ , e o raio  $CM$ . Seja  $AP = x$ ,  $CM = \frac{1}{2}$ ; ferá  $PM = \sqrt{(x - xx)}$ ; logo em razão dos triangulos semelhantes  $CPM$ ,  $Mrm$  teremos  $Mm = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$ , e conseguintemente  $AM = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$ .

Como esta quantidade não se póde integrar pelas regras dadas, mudalla-hemos (Alg. 112 e

141) em  $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ; e reduzindo

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$  a serie, teremos  $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c$ ; logo

$\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int \left( \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx + \&c \right)$ , e integrando,  $AM =$

$x$

$$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2.3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1.3}{2.4.5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^{\frac{7}{2}} + \&c;$$

integral a que não se ajunta constante, porque dá  $AM = 0$ , quando  $x = 0$ , como deve ser.

Dando a esta serie a fórmula  $x^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{40} x^2 + \frac{5}{112} x^3 + \&c \right)$ , vê-se que por ser  $x$  sem-

pre menor que o diametro 1 (excepto quando se applica á semicircumferencia), os termos da serie tanto mais irãõ diminuindo, quanto menor for o seno verso da questaõ. Assim se procurarmos, por exemplo, o comprimento do arco, cujo seno verso he a centesima parte do diametro, teremos

$x = 0,01$ ,  $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$ ; logo o arco =

$$0,1 \left( 1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5(0,01)^3}{112} \right); \text{ e co-}$$

mo o termo seguinte da serie seria ao menos cem vezes menor que o ultimo destes, por ser cada hum mais de cem vezes menor que o seu antecedente, se examinarmos qual he o valor do termo

$\frac{5}{112} (0,01)^3$ , poderemos, tomando a centesima par-

te delle, julgar do grão da exactidaõ, em que temos o arco sem passar além dos quatro primeiros ter-

mos da serie. Fazendo isto vem  $\frac{5}{112} (0,01)^3 =$

0,

$\frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$ , cuja centesima par-

te he  $0,000000000446$ ; logo podemos com toda a segurança avaliar cada termo da serie até 10 decimais, sem o receio de que o valor do arco, que resultar, tenha de erro huma unidade da

nona caza de dizima. Assim teremos  $\frac{5}{112} (0,01)^1$

$= 0,0000000446$ ;  $\frac{3}{40} (0,01)^2 =$

$0,0000075000$ ;  $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$ ; logo

a totalidade da serie será  $0,1 (1,0016742112)$ , ou  $0,100167421$ , limitando-nos a 9 decimais; e ainda poderíamos com toda a segurança admittir a decima.

Achado este arco, se foubessemos quantas vezes o seu numero de grãos se contém em  $360^\circ$ , não era necessario mais para ter o valor approximado da circumferencia, do que multiplicar o comprimento achado por esse numero de vezes; mas isso he o que se ignora.

Como sabemos (Trig. 22) que o seno de  $30^\circ$  he ametade do raio, poderíamos calcular (Trig. 21) o seno verso de  $30^\circ$ , substituillo em lugar de  $x$  na serie acima, e multiplicando o resultado por 12, teríamos o comprimento proximo da circumferencia. Porém viria huma serie pouco convergente, de forte que seria necessario calcular hum grande numero de termos para achar o valor da circumfe-

ren-

rencia com huma approximação sufficiente; pelo que ensinaremos outro modo de resolver o problema.

III Exemplo II. *Achar o comprimento do arco de circulo AM (Fig.62) por meio da sua tangente AN.*

Tire-se a secante  $Cmn$  infinitamente vizinha de  $CMN$ , e com o raio  $CN$  descreva-se o arco  $Nr$ , que podemos considerar como huma perpendicular a  $Cn$ . Seja  $CA = a$ , e  $AN = x$ ; será  $Nn = dx$ , e  $CN = \sqrt{aa + xx}$ . Isto posto, como o triangulo  $CAN$  ou  $CAn$  he semelhante ao triangulo

$Nrn$ , teremos  $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$ ; mas os sectores

semelhantes  $CNr$ ,  $CMm$  dão  $Mm = \frac{CA \times Nr}{CN}$ ;

logo virá  $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2} = \frac{aadx}{aa + xx}$ , como

já achámos ( 25 ); e por conseguinte  $\int Mm$  ou  $AM = \int \frac{aadx}{aa + xx}$ . Como esta quantidade não se pôde

integrar exactamente, demos-lhe a fórmula  $\int aadx (aa + xx)^{-1}$ , e desenvolvendo  $(aa + xx)^{-1}$  em  $a^{-2}$

$(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c)$ ; teremos

$\int aadx (aa + xx)^{-1} = \int (dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{x^4 dx}{a^4} -$



$$\left( \frac{x^6 dx}{a^6} + \frac{x^8 dx}{a^8} - \&c \right) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c ; \text{ logo AM ou Arc. tang } x =$$

$$x \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{5} \frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{7} \frac{x^6}{a^6} + \frac{1}{9} \frac{x^8}{a^8} - \&c \right) .$$

Fazendo  $x = a$ , teremos ( Trig. 23 ) o comprimento do arco de  $45^\circ = a \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c \right)$ ; e por conseguinte a circumferencia  $= 8a \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c \right)$ . Porém como os termos desta serie di-

minuem muito de vagar, resolvamos o arco de  $45^\circ$  em dous arcos de tangentes conhecidas, porque devendo ser entao cada huma dellas menor que o raio, virao duas series mais convergentes, que ambas juntas darao o comprimento do arco de  $45^\circ$ . Sejao  $a$  e  $c$  estes dous arcos, cuja soma  $= 45^\circ$ ; teremos  $\text{tang}(a + c) = 1$ , e por conseguinte a formula

$$\text{(Trig. 41) } \text{tang}(a + c) = \frac{\text{tang } a + \text{tang } c}{1 - \text{tang } a \text{ tang } c} \text{ dará}$$

K

tang

$\text{tang } \epsilon = \frac{1 - \text{tang } a}{1 + \text{tang } a}$ . Se tomarmos pois

$\text{tang } a = \frac{1}{2}$ , teremos  $\text{tang } \epsilon = \frac{1}{3}$ . Logo pondo na serie successivamente  $\frac{1}{2} a$  e  $\frac{1}{3} a$  em lugar de  $x$ , acharemos

$$\frac{a}{2} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{12}} - \&c \right)$$

$$\frac{a}{3} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} - \frac{1}{11 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{12}} - \&c \right);$$

Se quizermos achar os valores de cada hum destes arcos, exactamente expressos até a nona decimal, devemos calcular os primeiros 15 termos da primeira serie, e os 10 primeiros termos sómente da segunda. Este calculo he muito facil de fazer, se repararmos, que na primeira se podem calcular os termos consecutivos, formando huma serie, na qual cada termo seja igual ao precedente multipli-

cado por  $\frac{1}{2^2}$ , isto he, que seja  $\frac{1}{4}$  do precedente:

depois multiplica-se esta serie termo por termo pe-

la serie  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \&c$ , e finalmente ajun-

tando em huma soma os termos de numero par, e os de numero impar em outra, tira-se a soma dos primeiros da soma dos segundos, e multiplica-se o

resto por  $\frac{a}{2}$ . Do mesmo modo se reduz o calculo

da

da segunda a formar huma serie , na qual cada termo seja o producto do precedente por  $\frac{1}{3^2}$  , ou por  $\frac{1}{9}$  , isto he , que seja a nona parte do precedente : depois multiplica-se esta serie termo por termo pela serie  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$  &c , e continua-se a fazer o mesmo que na primeira , excepto que se multiplica o resultado por  $\frac{a}{3}$  , em lugar de se multiplicar por  $\frac{a}{2}$  . Se fizermos esta operaçaõ levando a approximaçaõ até 10 decimais , teremos para a primeira serie  $\frac{a}{2} (0,9272952180)$  , ou  $a(0,4636476090)$  ; e para a segunda  $\frac{a}{3}(0,9652516632)$  , ou  $a(0,3217505544)$  ; logo o arco de  $45^\circ$  , que he a soma daquelles dous , será  $a(0,7853981634)$  : Tomando pois o quadruplo , para termos a semicircumferencia , acharemos  $a(3,1415926536)$  ; logo o raio he para a semicircumferencia ( ou o diametro he para toda a circumferencia )  $:: a : a(3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536$  ; razaõ que ainda se poderia calcular muito mais approximadamente.

112 Exemplo III. *Achar o logarithmo de qualquer numero dado.*

Concebamos o numero dividido em duas partes  $a$  e  $x$ , sendo  $a$  a maior;  $a+x$  representará o numero dado. Como (27) temos  $l(a+x) = \int \frac{dx}{a+x}$ ,

e esta quantidade não se pôde integrar algebricamente, reduzamos em serie, e teremos  $\int \frac{dx}{a+x}$

$$= \int a^{-1} dx \left( 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \&c \right);$$

$$\text{logo } l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c + C.$$

Como esta equação deve sempre ter lugar, seja qual for o valor de  $x$ , ponhamos  $x = 0$ , virá  $C = la$ ; logo

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Conhecendo pois o logarithmo de hum só numero  $a$ , podemos calcular por esta serie o logarithmo de outro qualquer numero  $a+x$ . Seja por exemplo  $a = 10$ , e  $a+x = 11$ ; teremos

$$l11 = l10 + 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \&c.$$

De

Do mesmo modo acharemos

$$l(a-x) = la - \left( \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} + \&c \right).$$

Como a serie geral poucas vezes he affã convergente, supponhamos  $x = \frac{az}{a+z}$ , teremos

$$l(a-x) \text{ ou } 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} -$$

$$\frac{z^2}{2(a+z)^2} - \frac{z^3}{3(a+z)^3} - \&c. \text{ Logo}$$

$$l(a+z) = la + \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} + \frac{z^3}{3(a+z)^3} + \&c;$$

serie que he sempre convergente.

A differença das duas series, que exprimem os valores de  $l(a+x)$  e  $l(a-x)$ , darã  $l(a+x) - l(a-x)$  ou

$$l \frac{a+x}{a-x} = 2 \left( \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \&c \right).$$

Porém a fim de darmos mais hum exemplo do modo de integrar por approximação, resolvamos esta mesma questão de outra maneira.

113 Exemplo IV. Achar o logarithmo de huma fracção, cujo numerador seja maior que o denominador.

Re-

Representando por  $a$  a soma do numerador e do denominador, e por  $x$  a sua differença, será (Trig. 177) o numerador  $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} x$ , o denominador  $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x$ , e conseguintemente  $\frac{a+x}{a-x}$

exprimirá a fracção; logo a differencial do seu logarithmo, considerando sómente  $x$  como varia-

vel \*, he  $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x} = \frac{2udx}{aa-xx} =$

$$2dx \left( \frac{1}{a} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} + \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} + \&c \right);$$

$$\text{logo } l \frac{a+x}{a-x} = 2 \left( \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \&c \right) \text{ sem constante, porque quando}$$

$x$

\* Ainda que esta fracção deva representar qualquer fracção proposta, isso com tudo não impede, que se possa tomar a soma do numerador com o denominador, como constante; porque não há fracção, que se não possa preparar de modo, que dê a soma do numerador e do denominador igual ao numero que quizermos. Por exemplo, para fazermos que a fracção  $\frac{3}{5}$  tenha 12 por soma do numerador e do de-

nominador, basta que, havendo-lhe dado a fórma  $\frac{3^n}{5^n}$ , supponhamos  $3n + 5n$ , ou  $8n = 12$ ; donde se deduz  $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ ; logo

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}, \text{ cujo numerador somado com o denominador dá real-}$$

mente 12.