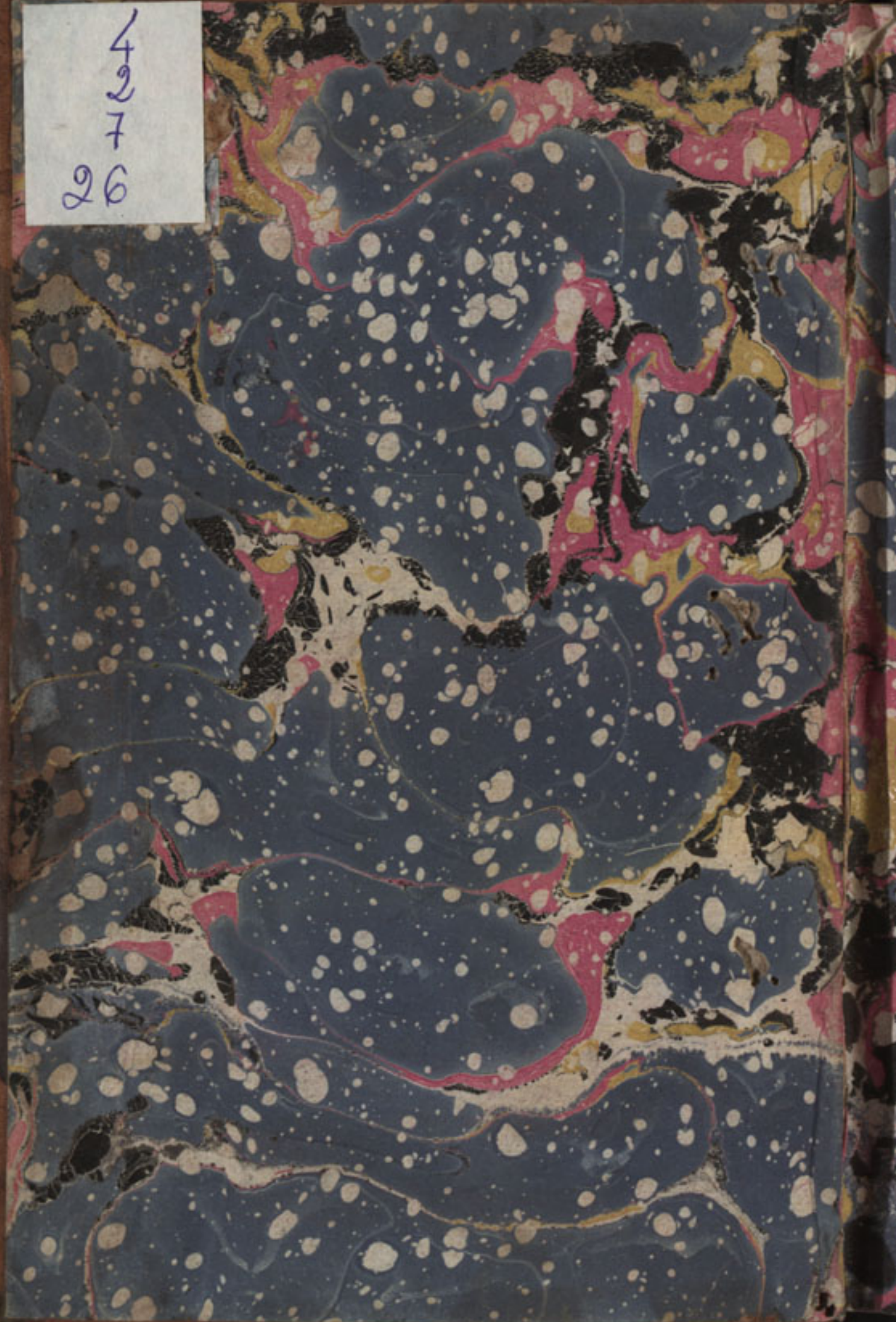
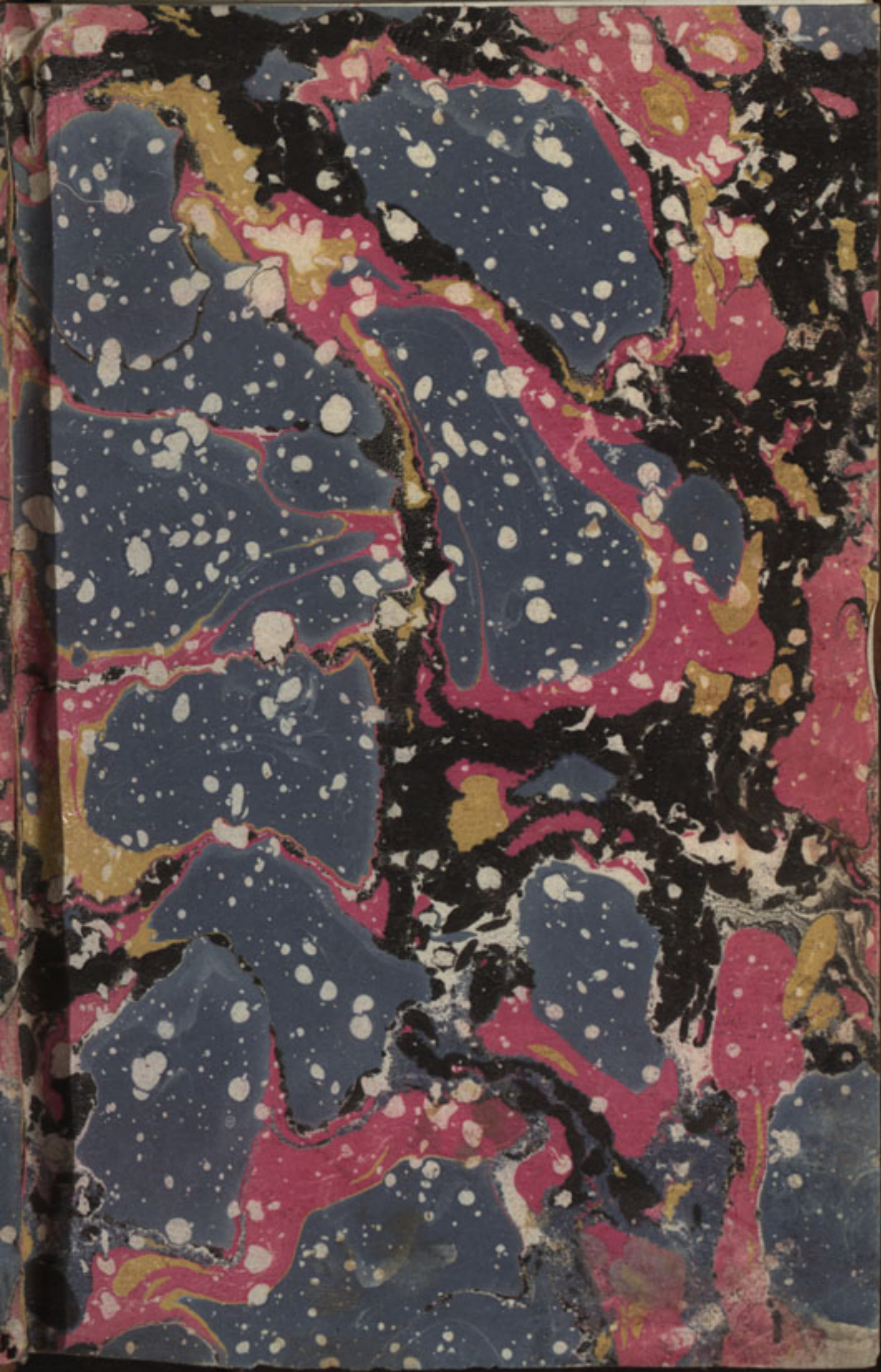


4
227
26

4
2
7
26





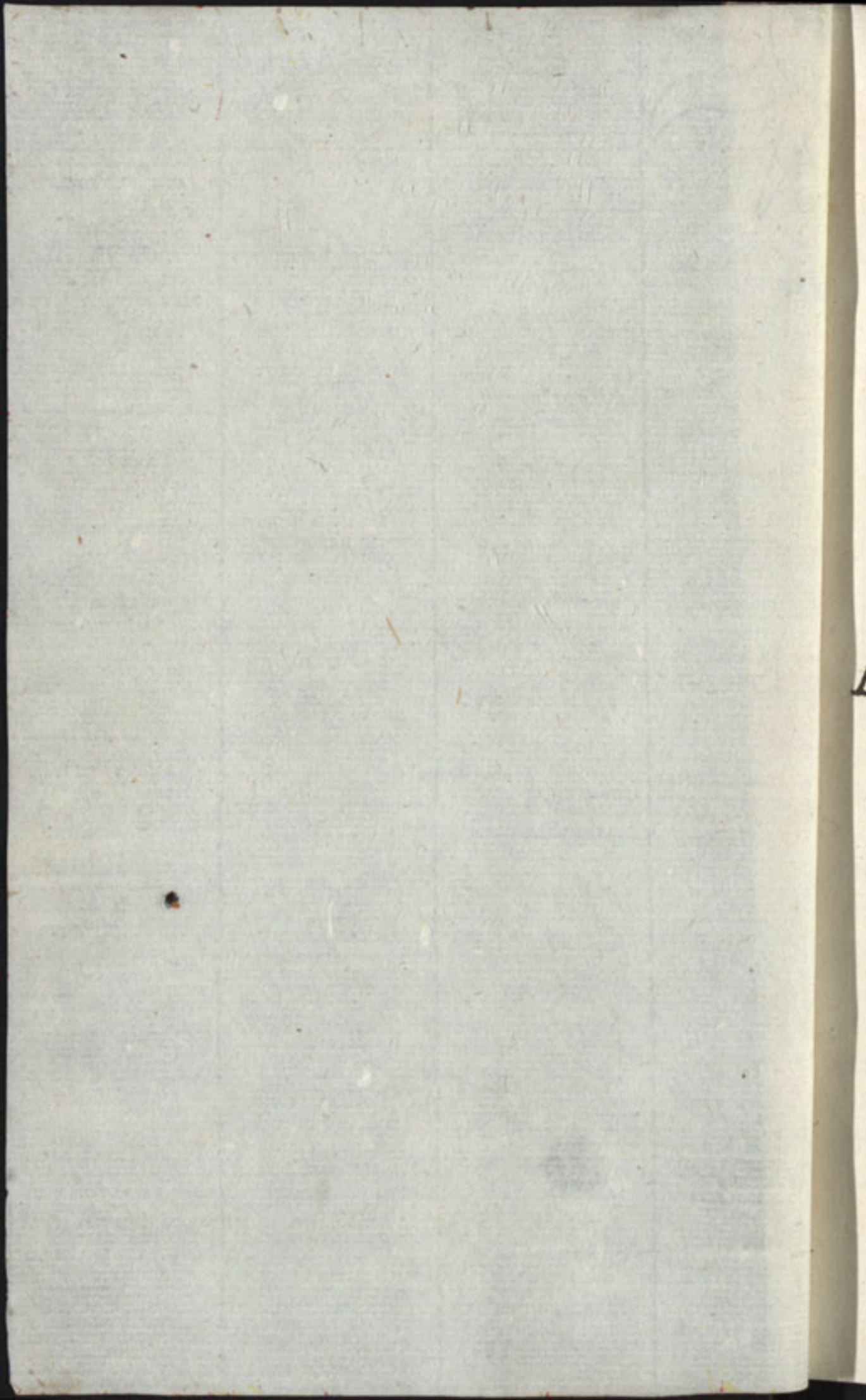
FOI: 4-22-2

4
2
7
26

ELEMENTS

DE

ANALYSE.



ELEMENTOS

DE

ANALYSE

POR

MR. BEZOUT

TRADUZIDOS DO FRANCÊZ.

ELEMENTOS

DE

ANALYSE,

COIMBRA,

M. DCC. LXXXIII.

ELEMENTOS

DE

ANALYSIS

ELEMENTOS

DE

ANALYSE

POR

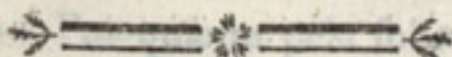
MR. BEZOUT

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇÃO

*Correita e accõmodada para o uso das Escolas
de Mathematica da Universidade.*

TOMO I.



COIMBRA:

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXIII.

*Com licença da Real Mesa da Commissão Geral
sobre o Exame e Censura dos Livros,
e Privilegio Real.*

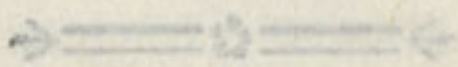


ELEMENTOS
DE
ANALYSE
POR
M. BÉZOUT
TRADUZIÇÃO DO FRANCÊS.
SEGUNDA EDIÇÃO



Correção e actualização para o uso das Escolas
de Matemática da Universidade.

TOMO I.



COIMBRA:

Na Real Imprensa da Universidade.

M. DCC. LXXXIII.

Com licença da Real Mesa do Conselho Geral
de João e Hermano e Caspary dos Livros,
e Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço saber aos que este Alvará virem : Que Havendo Eu Ordenado pelos Estatutos Novísimos , com que Restaurei , e Mandeí de novo fundar a Universidade de Coimbra , que os Estudos das Sciencias Mathematicas constituíssem nella huma indispensavel Faculdade : E sendo ao mesmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil setecentos setenta e dous abolir , e cassar os Titulos Nono , e Decimo dos Estatutos do Collegio Real de Nobres ; pelos quaes os referidos Estudos deviaõ tambem ser ensinados no sobredito Collegio ; para que só , e unicamente fossem promovidos , e cultivados na dita Universidade , em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vassallos : Por quanto pela sobredita abolição ficaraõ os referidos Estudos proprios , e privativos da Universidade ; e veio a cessar o fim do Privilegio exclusivo , que para a impressãõ dos Livros Classicos Havia concedido pela outra Carta da Ley, e Doação perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil setecentos sessenta e cinco ; naquella parte , que he respectiva aos Livros Mathematicos : Hey por bem transferir para a sobredita
Uni-

Universidade de Coimbra o mesmo Privilegio exclusivo para a impressão dos Livros de Euclides , Archimedes , e outros Classicos das Sciencias Mathematicas ; assim , e da maneira que na sobredita Doação Eu havia concedido ao referido Collegio ; Revogando , como Revogo a este fim , a mesma Doação naquella parte , que na generalidade della só he comprehensiva das impressões dos ditos Livros , ou de outros , que hajaõ de servir aos sobreditos Estudos Mathematicos , e pelos quaes se devaõ ensinar na mesma Universidade de Coimbra.

Pelo que : Mando ao Marquez de Pombal , do Meu Conselho de Estado , e Meu Lugar-Tenente na Fundação da Universidade de Coimbra ; á Real Mesa Censoria ; Mesa do Desembargo do Paço ; Regedor da Casa da Supplicação ; Conselhos de Minha Real Fazenda ; e dos Meus Dominios Ultramarinos ; Mesa da Consciencia , e Ordens ; Governador da Relação , e Casa do Porto ; Senado da Camara , e bem assim a todos os Desembargadores , Corregedores , Provedores , Ouvidores , Juizes , Justiças , e mais pessoas destes Meus Reinos , e Dominios , a quem o conhecimento deste Alvará deva pertencer , que o cumprãõ , e guardem , e façãõ cumprir , e guardar sem duvida , ou embargo algum , qualquer que elle seja ; não obstante a sobredita Carta , Ley , e Doação perpetua

tua de doze de Outubro de mil setecentos sessenta e cinco, que Tenho revogado ao sobredito fim na parte, que só respeita ás sobreditas impressoens; ficando para tudo o mais em seu vigor, e inteira validade. E este valerá como se passasse pela Chancellaria, posto que por ella não ha de passar, e o seu effeito haja de durar hum, e muitos annos: não obstante as Ordenaçoens em contrario, as quaes Hey por derogadas para este effeito sómente. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda em defeseis de Dezembro de mil setecentos setenta e tres.

REY . . .

Marquez de Pombal.

ALvará, porque Vossa Magestade pelos motivos nelle expressos He servido transferir para a Universidade de Coimbra o Privilegio exclusivo para as impressoens dos Livros Classicos dos Estudos Mathematicos;

cos ; havendo cessado o fim , com que antes fora concedido , e doado ao Collegio Real de Nobres ; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se , e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

T A B O A

D A S

MATERIAS QUE SE CONTÊM NESTES
ELEMENTOS.

INTRODUCCÃO. Pag. I

A L G E B R A.

SECÇÃO I.

DOS PRINCÍPIOS DO CALCULO
LITTERAL. 2

Das Operações Fundamentais do Calculo
Litteral. 4

Da Adição e Subtracção. ibid.

Da Multiplicação. 9

Da Divisão. 18

Do modo de achar o maior divisor commum
de duas quantidades litterais. 28

Das Fracções Litterais. 32

Das Equações. 34

Da resolução das Equações do primeiro gráo
a huma incognita. 36

Applicação dos principios precedentes á reso-
lução de alguns problemas. 41

Reflexões sobre as quantidades positivas
e negativas. 51

Das

II

<i>Das Equações lineares a muitas incognitas.</i>	56
<i>———— a tres e mais incognitas.</i>	58
<i>Applicação á resolução de alguns problemas.</i>	65
<i>Dos casos em que os problemas ficam inde-</i> <i>terminados, ainda que haja igual numero</i> <i>de equações e de incognitas.</i>	70
<i>Dos casos em que os problemas são impossiveis.</i>	72
<i>Dos Problemas indeterminados.</i>	73
<i>Das Equações do segundo gráo a huma inco-</i> <i>gnita.</i>	79
<i>Applicação a alguns problemas do segundo</i> <i>gráo.</i>	85
<i>Da extracção da Raiz quadrada das quan-</i> <i>tidades litterais.</i>	91
<i>Do calculo das quantidades affectas do si-</i> <i>nal $\sqrt{\quad}$.</i>	95
<i>Da formação das potencias dos monomios,</i> <i>e extracção das suas raizes.</i>	98
<i>Do calculo dos radicais, e dos expoentes.</i>	100
<i>Da formação das potencias das quantidades</i> <i>complexas.</i>	106
<i>Da extracção das raizes das quantidades</i> <i>complexas.</i>	116
<i>Do modo de ter a raiz approximada das po-</i> <i>tencias imperfeitas das quantidades litte-</i> <i>rais</i>	118
<i>Das Equações superlineares a duas incogni-</i> <i>tas.</i>	129
<i>———— a mais de duas incognitas.</i>	137
<i>Das Equações a dous termos.</i>	138
<i>Das</i>	

<i>Das Equações que pôdem resolver-se á maneira das do segundo gráo.</i>	139
<i>Da composiçã das Equações.</i>	140
<i>Do modo de transformar as Equações.</i>	149
<i>Da resoluçã das Equações compostas.</i>	151
<i>Applicaçã ao terceiro gráo.</i>	153
<i>———— ao quarto gráo.</i>	160
<i>Reflexões sobre o methodo precedente, e sobre a sua applicaçã ás Equações dos grãos superiores ao quarto.</i>	168
<i>Dos Divisores commensuraveis das Equações.</i>	173
<i>Da extracçã das raizes das quantidades parte commensuraveis, e parte incommensuraveis.</i>	179
<i>Do modo de achar as raizes approximadas das Equações compostas.</i>	183
<i>Reflexões sobre o methodo precedente.</i>	186
<i>Do modo de achar as raizes iguais das Equações.</i>	187
<i>Do modo de achar as raizes imaginarias das Equações.</i>	189

SECÇÃO II.

DA APPLICAÇÃO DA ALGEBRA A ARITHMETICA E GEOMETRIA.	191
<i>Propriedades gerais das Progressões Arithmeticas.</i>	192
<i>Da soma das potencias dos termos de qual- quer Progressão Arithmetica.</i>	197
<i>Das</i>	

III

<i>Das propriedades, e uso das Progreſsões Geometricas.</i>	204
<i>Da ſoma das Series Recurrentes.</i>	209
<i>Da Conſtrucção Geometrica das Quantidades Algebricas.</i>	210
<i>Problemas de Geometria, e reflexões tanto ſobre o modo de os pôr em equação, como ſobre as differentes ſoluções que dão as equações.</i>	217
<i>Outras applicações da Algebra.</i>	240
<i>Das linhas curvas em geral, e em particular das Secções Conicas.</i>	245
<i>Da Ellipſe.</i>	251
<i>Da Hyperbola.</i>	264
<i>Da Hyperbola entre as Aſymptotas.</i>	276
<i>Da Parabola.</i>	279
<i>Reflexões ſobre as Equações das Secções Conicas.</i>	286
<i>Do modo de reduzir ás Secções Conicas toda a equação indeterminada do ſegundo gráo.</i>	293
<i>Applicação á reſolução de alguns problemas indeterminados.</i>	302
<i>———— dos meſmos principios á reſolução de alguns problemas determinados.</i>	311

V

ERRATAS.

Pag.	Lin.	Errat.	Emend.
5	12	da letra	de qualquer letra
14	3	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>ibid.</i>	4	<i>ab</i>	<i>ac</i>
22	21	para dividir	para se dividir
26	3	— <i>c</i> ⁴	— <i>c</i> ²
27	13	+ 2 <i>c</i>	+ 2 <i>ac</i>
28	11	8 <i>ab</i>	8 <i>b</i> — <i>a</i>
34	1	diminuindo	diminuído
79	18	17	10
<i>ibid.</i>	19	6 de Numero Au- reio , e 5	8 de Numero Aureo , e 11
81	2	caudas	cauda
<i>ibid.</i>	9	o final ✓	o final +
85	3	± 5	± 5
90	7	ufando	se ufando
93	3	tirar	tirarmos
95	7	+ ; ou —	+, ou com o final —
96	5	porque	pela qual
110	14	elle	ella
119	17	pares	impares
<i>ibid.</i>	18	impares	pares
127	10	$(a + b)^{\frac{m}{n}}$ +	$(a + b)^{\frac{m}{n}} =$
149	18	se tornara;	se tornarão
153	16	y^{m-1}	$y^m - 1$
180	5	a sua raiz	o seu valor
197	8	altura	altura <i>b</i>
200	3	quadrando DEAIH	quadrado
202	13	an será a soma das quantidades	a soma das quantida- des an será

VI

Pag.	Lin.	Errat.	Emend.
206	10	vence	vença
208	7	poximamente	proximamente
<i>ibid.</i>	14	progressão	propagação
216	10	<i>m</i>	m^2
<i>ibid.</i>	11	<i>n</i>	n^2
220	12	<i>pependicular</i>	<i>perpendicular</i>
222	19	agudo, ou obtuso	obtuso, ou agudo
247	<i>ult.</i>	de A e B	A e B
248	22	que ferá	ferá
251	9	determidada	determinada
257	17	ponto M	ponto M da ellipse
263	20	NN	NN'
270	1	estes	estas
<i>ibid.</i>	10	AT	A t
271	12	obsciffas	abscissas
283	3	MO	as partes MO
285	12	encontraõ	encontraráõ
<i>ibid.</i>	15	MAm	AM m
291	6	linha	linha indefinida
300	17	necessario	necessaria
303	6	b^2g^2c	$b^2g^2c^2$



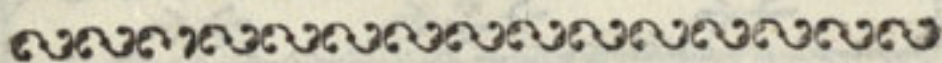
ELEMENTOS
DE
ANALYSE.



INTRODUÇÃO.

OS raciocínios que se fazem nas indagações Mathematicas, não obstante a variedade dos objectos destas sciencias, tem partes commuas, que se podem reduzir a regras gerais, resultando dellas a vantagem de ser o nosso espirito alliviado de grande parte dos esforços, que seria necessario applicar em cada huma das questões. O methodo que ensina a achar as ditas regras, chama-se *Analyse*.

Divide-se esta em duas partes: em *Analyse Finita*, ou *Algebra*; e em *Analyse Infinitesimal*, a qual comprehende o *Calculo Differencial*, e *Integral*. A primeira parte será a materia deste Tomo.



PRIMEIRA PARTE,

OU

ELEMENTOS DE ALGEBRA.

 SEÇÃO I.

DOS PRINCIPIOS DO CALCULO LITERAL.

A ALGEBRA he o instrumento da Analyse, ou a Sciencia, que tem por objecto ensinar os meios de reduzir a regras gerais a resoluçãõ de todas as questões, que se pôdem propôr ácerca das quantidades.

Como estas regras para serem gerais, não devem depender dos valores particulares das quantidades que se consideraõ, mas da natureza de cada huma das questões, de maneira que sejaõ constantemente as mesmas para todos os problemas da mesma especie; segue-se, que a Algebra não deve representar as quantidades pelos mesmos caracteres, de que usa a Arithmetica.

Porque 1.º os algarismos tem hum valor determinado por convençãõ. Ainda que 3, por exemplo, tanto pôde significar 3 toezas, como 3 horas, ou 3 libras &c.; comtudo não pôde significar cem, ou mil &c. 2.º Os resultados da Arithmetica não mostraõ o caminho, porque chegamos a descobri-los. Huma, ou muitas operações Arithmeticas

põ-

pódem dar o resultado 12, por exemplo; mas este numero não declara se procedeo de multiplicar 3 por 4, ou 2 por 6, ou de somar 5 com 7, ou 2 com 10, ou em geral de alguma outra combinação de operações. Além de que a Arithmetica dá regras para achar certos resultados, mas destes não se podem deduzir regras. A Algebra para satisfazer a estes objectos representa as quantidades por finais genericos, e universais, como são as letras do Alfabeto, as quais, não tendo mais relação com hum numero do que com outro, admittem todos os valores; e estando presentes sempre á vista no decurso de hum calculo, conservaõ, por assim dizer, o vestigio das operações, que com ellas se executáraõ, ou ao menos mostraõ nos resultados das mesmas operações o caminho mais breve, que se deve seguir para chegar ao mesmo fim pelos meios mais simples.

Tambem se exprimem em linguagem Algebrica as relações, e condições das quantidades, as diferentes operações, que destinamos fazer sobre ellas, &c.: em huma palavra na Algebra tudo he representação. Pouco a pouco ensinaremos os diferentes modos de representar tudo, quanto diz respeito ás quantidades, e mostraremos as vantagens, que disso resultaõ.

He pois a Algebra a Arte de representar por symbolos gerais todas as idéas, que se podem formar relativamente ás quantidades. Assim tudo o que he designado pelas letras do Alfabeto tem o nome de *Quantidade*, ou *Expressão Algebrica*.

*Das Operações Fundamentais do Cálculo
Literal.*

2 **S**obre as quantidades algebraicas se fazem, ou para melhor dizer se indicaõ as quatro operações de somar, diminuir, multiplicar e dividir, que se executaõ na Arithmetica.

Da Adição, e Subtracção.

3 **P**ara somar e diminuir quantidades semelhantes não se precisa de regra; he evidente, que para somar huma quantidade representada por a com igual quantidade a , devemos escrever $2a$; e que para somar $2a$ com $3a$, escreveremos $5a$. Tambem he manifesto, que tirando $2a$ de $5a$ o resto he $3a$. A estas duas operações tão faceis como frequentes se dá o nome commum de *Reducção*.¹

4 Nas quantidades dissemelhantes, que sempre se representaõ por letras differentes, não fazemos mais do que indicar estas operações. Para isso no somar usamos do sinal $+$, que se pronuncia *mais*, e no diminuir do sinal $-$, que se pronuncia *menos*.

Affim, havendo de somar huma quantidade representada por a com outra representada por b , escreveremos $a + b$; de maneira que não sabermos qual he o verdadeiro resultado, senão depois de conhecermos o valor particular das quantidades, que se representaõ por a e b ; se a vale 5, e b vale 12, $a + b$ valerá 17.

Do mesmo modo para somar - - $5a + 3b$
 com - - - - - $9a + 2c$
 e - - - - - $9b + 3d$
 escreveremos - $\frac{5a + 3b + 9a + 2c + 9b + 3d}{}$
 que se reduz (3) a - - $14a + 12b + 2c + 3d$.

Em quanto ao diminuir, para tirarmos b de a
 escreveremos $a - b$.

Se de - - - - - $9a + 6b$
 quizermos tirar - - - - - $5a + 4b$
 escreveremos. - - - - - $\frac{9a + 6b - 5a - 4b}{}$
 que se reduz (3) a - - - - - $4a + 2b$.

5 Hum numero posto antes da letra chama-se com razão *Coefficiente* da mesma letra: em $3b$, por exemplo, 3 he *coefficiente* de b . Quando o *coefficiente* he 1, não se escreve; assim se de $3a$ tirarmos $2a$ o resto he $1a$, mas escreve-se tão somente a . Pelo que se encontrarmos huma letra sem numero que a preceda, não imaginemos que o seu *coefficiente* seja cifra; nesse caso o *coefficiente* he a unidade.

6 He indifferente a ordem em que se dispõem as quantidades, que se somam ou diminuem. Se quizermos somar a com b , poderemos escrever $a + b$, ou $b + a$; e para tirarmos b de a , escreveremos $a - b$, ou $-b + a$. Seguiremos porem, quanto podermos, a ordem alfabetica, que he a mais usada, porque nella se pronunciaõ as letras com mais facilidade do que em outra qualquer, e se percebem melhor as quantidades semelhantes.

7 Notemos tambem , que toda a quantidade, que não tem final , se reputa ter $+$: a he o mesmo que $+$ a . He costume supprimir o final $+$ nas quantidades que o deym ter , quando estas se escrevem no primeiro lugar ; não assentamos $+$ a $+$ b , mas simplesmente a $+$ b .

8 Quando depois de huma operaçãõ se procede á reducçãõ , pôde acontecer que a quantidade precedida do final — tenha coefferente maior , que o da quantidade semelhante precedida do final $+$; porém em todos os casos a operaçãõ se executa por esta regra geral . *Para somar as quantidades algebricas , escrevaõ-se consecutivamente todas as suas partes com os sinais respectivos , reduzaõ-se todas as quantidades semelhantes a huma unica , ajuntando de huma parte todas as que tiverem $+$, e da outra todas as que tiverem — , tire-se finalmente o menor resultado do maior , e dê-se ao resto o sinal do maior .*

Por exemplo , se huma operaçãõ desse $14a + 12b + 2c + 3d + a + b + 4d - 5c$; reduziriamos esta quantidade a $15a + 13b - 3c + 7d$, na qual em lugar de $2c - 5c$, que tinhamos na primeira , se escreve $- 3c$, porque havendo de tirar $5c$ de huma quantidade , em que sómente se offerece $2c$, resta ainda $3c$, que se deve tirar da totalidade das outras quantidades.

Havendo de somar $a + b$ e $a - b$, teremos $a + b + a - b$, isto he $2a$, porque $b - b$ he nada . Logo se ajuntarmos a soma $a + b$ de duas quantidades quaisquer a e b com a sua differença $a - b$, acharemos o dobro da maior das mesmas quantidades.

Queremos somar as quatro quantidades seguintes

$$\begin{array}{r}
 5a + 3b - 4c \\
 2a - 5b + 6c + 2d \\
 a - 4b - 2c + 3e \\
 \hline
 7a + 4b - 3c - 6e
 \end{array}$$

Soma $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e.$

Fazendo a reduccão em ordem a a , temos $15a$; em ordem a b , temos $+7b$ de huma parte, e $-9b$ da outra, conseguintemente $-2b$ de resto; em ordem a c , temos $-9c$ de huma parte, $6c$ da outra, e conseguintemente $-3c$ de resto; reduzindo as outras quantidades do mesmo modo, acharemos $15a - 2b - 3c + 2d - 3e.$

9 Nas expressões algebricas as quantidades separadas pelos finais $+$ e $-$, chamaõ-se *Termos* das mesmas expressões.

10 Huma quantidade chama-se *Monomio*, *Binomio*, *Trinomio* &c. conforme se compõe de hum, ou dous, ou tres &c. termos; e em geral se chama *Polynomio*, quando consta de hum numero indeterminado de termos.

11 Em quanto á subtracção das quantidades algebricas, a regra geral he esta. *Mudem-se os sinais dos termos da quantidade que se deve tirar, isto he, mude-se $+$ em $-$, e $-$ em $+$; sòme-se a quantidade assim mudada com a outra de que se deve fazer a subtracção, e reduza-se.*

Ex-

Exemplo.

$$\begin{array}{r}
 \text{De} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 6a - 3b + 4c \\
 \text{queremos tirar} \quad - \quad 5a - 5b + 6c \\
 \hline
 \text{escreveremos} \quad - \quad 6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c. \\
 \hline
 \end{array}$$

e reduzindo , teremos o resto $a + 2b - 2c$.

Escolhendo hum exemplo mais simples para dar a razão da regra, supponhamos que de a queremos tirar b , he evidente que devemos escrever $a - b$. Mas se de a quizermos tirar $b - c$, isto he, se quizermos tirar não b por inteiro, mas sómente b diminuido de c , devemos por compensação ajuntar o que se tirou de mais no primeiro caso, e escrever $a - b + c$, isto he, mudar os finais de todos os termos na quantidade que se ha de subtrahir.

Nos numeros he desnecessario este cuidado; por quanto se de 12 houvessemos de tirar $8 - 3$, começariamos por tirar 3 de 8, e o resto 5 tirado de 12 daria o resto buscado 7. Mas poderiamos tambem tirar logo 8 de 12, e ao resto 4 ajuntar 3, o que da mesma sorte daria 7. Este ultimo partido he o que se toma na Algebra por necessidade, pois que ella não admite a reducção preliminar, que se faz nos numeros.

Quando se pertende sómente indicar a subtracção, encerra-se cada huma das duas quantidades entre parentheses, e dá-se o final $-$ áquella que se deve tirar. Assim, para indicar que de $a + b$ se deve tirar $a - b$, escreveremos $(a + b) - (a - b)$: se effectuarmos a operação, acharemos o resto $2b$. Logo a differença entre a soma, e a differença de du-

duas quantidades dá o dobro da menor dellas.

12 As quantidades precedidas do final $+$ chamaõ-se *Positivas*, e as que tem antes de si o final $-$ chamaõ-se *Negativas*.

Da Multiplicação.

13 **A** Multiplicação Algebrica requer algumas considerações particulares, que não tem lugar na Arithmetica; porque além das quantidades há finais, a que se deve attender. Porém se não considerarmos mais que os valores numericos das quantidades representadas pelas letras, deve-se formar a mesma idéa de ambas as multiplicações (Arith. 40), Assim, multiplicar a por b he tomar a quantidade representada por a tantas vezes, quantas são as unidades da quantidade representada por b .

14 Para indicar a multiplicação usamos do final \times , ou de hum ponto posto entre as duas quantidades que se devem multiplicar, e tambem de nenhum final, pelo menos nas quantidades monomias; de maneira que $a \times b$, $a . b$, ab são tres expressões, as quais querem dizer a multiplicado por b , ou que a se deve multiplicar por b . O ultimo modo he o mais usado.

15 Querendo multiplicar ab por c , escreveremos abc , e para multiplicar ab por cd escreveremos $abcd$. He indifferente o lugar em que as letras se põem, porque (Arith. 44) o producto he sempre o mesmo.

16 Quando encontrarmos pois huma quantidade como v. g. ab , abc , $abcd$, na qual as letras se achem escritas consecutivamente sem final algum inter-

intermediario , concluirẽmos que ella representa o productõ da multiplicação successiva de cada huma das letras , de que se compõe .

17 Logo (Arith. 42) a e b são factores de ab ; a , b , c são factores de abc , e assim nos outros casos .

18 Segue-se mais , que no productõ da multiplicação de muitas quantidades monomias devem entrar todas as letras , de que se compõe tanto o multiplicando como o multiplicador .

Isto supposto , se as quantidades , que houverem de multiplicar-se , qualquer que seja o numero dellas , se compuzerem da mesma letra , escreveremos esta no productõ tantas vezes quantas se achar nos factores . Assim a multiplicado por a dá aa ; aa multiplicado por aaa dá $aaaaa$; aa multiplicado por aaa , e além disso por a , dá $aaaaaa$.

19 Em tais casos se assentou , que não se escrevesse a dita letra mais que huma vez , mas que se marcaesse com hum numero , a que se deo o nome de *Expoente* , o qual se puzesse á direita da letra , algum tanto por cima , e significasse quantas vezes ella se devia escrever ; isto he , que em lugar de aa se escrevesse a^2 , em lugar de aaa se escrevesse a^3 &c .

Conservemos pois na lembrança , que o expoente de huma letra denota quantas vezes ella he factor do productõ . Em $a^3 b^2 c$ há tres factores de valor differente , a saber a , b , c ; porém destas letras a primeira he factor tres vezes , a segunda duas , e a terceira huma , porque $a^3 b^2 c$ vale o mesmo que $aaabbc$.

Logo (Arith. 150) o expoente denota tambem a potencia , a que huma quantidade está elevada

da. Assim a^2 he a segunda potencia, ou o quadrado de a ; a^5 a quinta potencia de a . Deste modo todas as potencias de a se representaõ cõmodamente por a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 &c. Logo em lugar de a se pôde escrever a^1 . Em geral, quando o expoente he 1 omitta-se, e reciprocamente.

Naõ devemos pois confundir o expoente com o coeſſiciente. O expoente indica a multiplicação mais ou menos repetida de huma quantidade por si mesma; o coeſſiciente porẽm denota a addição repetida de huma mesma quantidade. Por exemplo, $2a$ vale o mesmo que $a + a$, e a^2 significa $a \times a$, de maneira que se a vale 5, $2a$ vale 10, mas a^2 vale 25.

Os termos, que saõ formados das mesmas letras affectas respectivamente dos mesmos expoentes, chamaõ-se semelhantes.

20 Donde se segue, que *para multiplicar duas quantidades monomias, que tenham letras commuas, somaremos os expoentes das letras semelhantes do multiplicando e multiplicador.*

Para multiplicar a^5 por a^3 escreveremos a^8 , isto he a letra a , dando-lhe o expoente 8 soma dos dous expoentes 5 e 3. Do mesmo modo para multiplicar $a^3 b^2 c$ por $a^4 b^3 cd$, escreveremos $a^7 b^5 c^2 d$. Tal he a regra das letras na multiplicação das quantidades monomias.

21 Em quanto aos coeſſicientes que pôdem ter os factores monomios, por elles começaremos a multiplicação como na Arithmetica, e o producto servirá de coeſſiciente do producto algebrico. Assim, para multiplicar $5a$ por $3b$, multiplicaremos primeiramente 5 por 3, depois a por b , e acharemos o producto $15ab$. Do mesmo modo havendo

do de multiplicar $12a^3b^2$ por $9a^4b^3$, teremos $108a^7b^5$.

22 Passando agora á multiplicação das quantidades complexas ou dos polynomios, devemos como nos numeros compostos multiplicar successivamente cada hum dos termos do multiplicando por cada hum dos termos do multiplicador, observando as regras, que havemos dado para a multiplicação dos monomios, somar depois os productos parciais, e reduzir. He indifferente principiar da direita para a esquerda, ou da esquerda para a direita; mas seguiremos este ultimo modo, que he o mais usado.

Exemplo I.

Havendo de multiplicar $a + b$
por $c + d$

Producto $ac + bc + ad + bd.$

1.º Multiplico a por c , o producto he ac (15); 2.º multiplico b por c , o producto he bc ; somo os dous productos, e tenho $ac + bc$ por producto de $a + b$ por c .

Multiplicando do mesmo modo a e b por d , acho o producto $ad + bd$, o qual somado com o primeiro dá $ac + bc + ad + bd$.

Com effeito, multiplicar $a + b$ por $c + d$ he tomar não sómente a , mas tambem b tantas vezes, quantas são as unidades da totalidade $c + d$, isto he, tantas vezes quantas são as unidades de c , e mais tantas quantas são as unidades de d .

Ex-

Exemplo II.

$$\begin{array}{r}
 \text{Querendo multiplicar} \quad - \quad - \quad - \quad a - b \\
 \text{por} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad c - d \\
 \hline
 \text{Produção} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad ac - bc - ad + bd.
 \end{array}$$

Multiplico primeiramente a por c que dá ac , e depois b por c que dá bc ; mas tiro o segundo producto do primeiro, porque multiplicando a por inteiro na primeira operação, multiplica-se de mais a quantidade b , que se devia tirar de a : logo devemos tirar do producto a quantidade b multiplicada por c , isto he bc .

Do mesmo modo $a - b$ multiplicado por d , dá $ad - bd$; mas como o final do multiplicador actual d he $-$, tiraremos o segundo producto do primeiro, e (II) acharemos $ac - bc - ad + bd$.

Com effeito, valendo o multiplicador $c - d$ menos que c a quantidade d , o multiplicando sómente se deve tomar tantas vezes, quantas são as unidades de c diminuido de d . E como havendo tomado primeiramente $a - b$ tantas vezes, quantas são as unidades de c , o producto $ac - bc$ vale mais do que deve ser, quanto he o valor de $a - b$ tomado tantas vezes quantas são as unidades de d , segue-se que devemos tirar o producto de $a - b$ por d .

Se em lugar das letras a, b, c, d tomarmos $6, 4, 7, 3$ ou outros quaisquer numeros, poderemos com elles formar a mesma demonstração.

23 Se attendermos aos finais dos termos de que se compõe o producto total $ac - bc - ad + bd$, e os compararmos com os finais do multipli-

can-

cando e do multiplicador, acharemos 1.^o que o termo a , em que se reputa estar o final $+$, sendo multiplicado por b da mesma sorte affecto de $+$ deo o producto ab , tambem notado com o final $+$.

2.^o Que o termo b notado com o final $-$ sendo multiplicado por c , que se reputa ter o final $+$, deo o producto bc com o final $-$.

3.^o Que o termo a affecto de $+$ multiplicado por d , que tem o final $-$, deo ad com o final $-$.

4.^o Finalmente que o termo b , o qual tem o final $-$, sendo multiplicado por d , que da mesma sorte tem $-$, deo bd notado com $+$.

Isto posto, daqui por diante conheceremos facilmente nas multiplicações parciais, se os productos particulares devem ser positivos ou negativos; para o que observaremos as duas regras seguintes deduzidas das reflexões precedentes.

24 *Se o multiplicando e o multiplicador tiverem ambos o mesmo sinal, o producto será affecto do sinal $+$. Se pelo contrario tiverem sinais differentes, o producto terá sempre o sinal $-$.* Por meio destas regras, e das que havemos dado (15, 20, 21 e 22) estamos em termos de fazer qualquer multiplicação algebraica. Mas para se proceder com methodo, observaremos primeiramente a regra dos finais, depois a dos coefficients, e por fim a das letras e dos expoentes.

Exemplo III.

$$\begin{array}{r}
 \text{Se quizermos multiplicar } 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\
 \text{por } - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
 a^3 - 4a^2b + 2b^3 \\
 \hline
 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\
 - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\
 + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Pr. } 5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$$

Multiplicaremos successivamente os tres termos do multiplicando pelo primeiro a^3 do multiplicador. Tendo os dous termos $5a^4$ e a^3 o mesmo final, o producto deve ter $+$; porém não o escreveremos por pertencer ao primeiro termo do producto (7). Depois disso multiplicaremos o coeﬃciente 5 de a^4 por 1 coeﬃciente de a^3 (21), o producto he 5. Por fim multiplicando a^4 por a^3 (20) teremos a^7 , e consequentemente $5a^7$ por producto.

Passando a multiplicar o termo $-2a^3b$ por a^3 , vê-se que sendo diferentes os finais, o producto será negativo. Multiplicando além disso os coeﬃcientes e as letras, teremos o producto $-2a^6b$.

Do mesmo modo o termo $+4a^2b^2$ multiplicado por a^3 dará $4a^5b^2$.

Havendo multiplicado todos os termos do multiplicando por a^3 , devemos multiplica-los pelo segundo termo $-4a^2b$ do multiplicador. O termo $5a^4$ multiplicado por $-4a^2b$ de final contrario dará $-20a^6b$; o termo $-2a^3b$ multiplicado por $-4a^2b$ do mesmo final dará $+8a^5b^2$; e o termo $+4a^2b^2$ multiplicado por $-4a^2b$ dará $-16a^4b^3$.

Por fim passaremos a fazer a multiplicação pelo

lo termo $+ 2b^3$; e observando as mesmas regras, acharemos que os tres productos parciais são $+ 10a^4 b^3$, $- 4a^3 b^4$, $+ 8a^2 b^5$.

Somando todos estes productos e reduzindo teremos o producto total $5a^7 - 22a^6 b + 12a^5 b^2 - 6a^4 b^3 - 4a^3 b^4 + 8a^2 b^5$.

25 Para exercicio dos principiantes ajuntamos os exemplos seguintes, acompanhados de algumas reflexões, as quais mostraõ hum dos usos, que tem a Algebra para descobrir verdades gerais.

Exemp. IV.

Exemp. V.

Exemp. VI.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 - ab - b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

O exemplo IV. demonstra duas proposições, a que muitas vezes havemos de recorrer. I. *A soma de duas quantidades multiplicada pela sua differença dá sempre a differença dos quadrados das mesmas quantidades.* Tomem-se dous numeros quaisquer, 5 e 3 por exemplo, a soma 8 multiplicada pela differença 2 dá 16, que he com effeito a differença entre 25 e 9, quadrados de 5 e 3. II. *Reciprocamente, a differença dos quadrados de duas quantidades pode sempre considerar-se, como formada pela multiplicação da soma das mesmas quantidades pela sua differença.*

Assim $b^2 - c^2$ resulta da multiplicação de $b + c$ por $b - c$. Donde se segue, que a differença dos quadrados não pôde ser hum numero primo.

No exemplo V. se mostra de hum modo geral e simples, que o quadrado da soma $a + b$ de duas quantidades he composta do quadrado a^2 da primeira, do dobro $2ab$ da primeira multiplicada pela segunda, e do quadrado b^2 da segunda (Arith. 134).

O exemplo VI. confirma tambem o que dissemos (Arith. 154) sobre a formação do cubo.

Se multiplicarmos $\frac{2}{3} a^3 - \frac{4}{5} a^2 b + \frac{1}{2} b^3$ por $\frac{3}{5} ab - 2b^2$, acharemos, que o producto he $\frac{2}{5} a^4 b$

$- \frac{136}{75} a^3 b^2 + \frac{8}{5} a^2 b^3 + \frac{3}{10} ab^4 - b^5$. Do mesmo

modo $5a^3 - 4a^2 b + 5ab^2 - 3b^3$ multiplicado por $4a^2 - 5ab + 2b^2$, dá $20a^5 - 41a^4 b + 50a^3 b^2 - 45a^2 b^3 + 25ab^4 - 6b^5$.

26 Para indicar a multiplicação das quantidades complexas, he costume cobrir cada huma dellas com huma risca, ou encerra-las entre parentheses, escrevendo hum dos sinais da multiplicação (14) entre o multiplicando e o multiplicador: algumas vezes não se interpõe sinal algum. Por exemplo,

as expressões $a^2 + 3ab + b^2 \times 2a + 3b$, $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, e $(a^2 + 3ab + b^2) (2a + 3b)$, ou simplesmente $(a^2 + 3ab + b^2)$
B (2a

$(2a + 3b)$ denotação, que a totalidade $(a^2 + 3ab + b^2)$ se deve multiplicar por $2a + 3b$.

27 Em muitos casos he mais util indicar a multiplicação do que effectua-la. Aindaque estes sómente pele uso se distinguem, com tudo podemos dizer geralmente, que devemos indicar as multiplicações, quando a estas se segue a divisaão; porque executando-se esta ultima operação, como veremos, pela suppressão dos factores communs ao dividendo e ao divisor, melhor conheceremos os factores, quando a multiplicação estiver simplesmente indicada.

Da Divisaão.

28 **A** Divisaão na Algebra tem o mesmo objecto que na Arithmetica, e consequentemente o modo de a fazer depende muito dos finais, de que usamos na multiplicação.

29 Quando a quantidade dividenda e o divisor não tem letra commua, he impossivel executar a operação; indica-se porém esta em tal caso, escrevendo o divisor por baixo do dividendo em forma de fracção. Assim, para denotar que devemos dividir a por b , escreveremos $\frac{a}{b}$, e para significar

que devemos dividir $aa + bb$ por $c + d$, escreveremos $\frac{aa + bb}{c + d}$. Tambem se indica a divisaão

por meio de dous pontos postos entre o dividendo e o divisor. Deste modo $(aa + bb) : (c + d)$

ou $\overline{aa + bb} : \overline{c + d}$ he o mesmo que $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30 Sendo o dividendo e o divisor monomios, se

todas as letras, que tem o divisor, se acharem tambem no dividendo, póde fazer-se a divisaõ exactamente; o que se executará da maneira seguinte.

Supprimão-se no dividendo todas as letras commuas ao divisor, as que restarem formaraõ o quociente. Assim para dividir ab por a supprimiremos a no dividendo, e teremos b por quociente.

Do mesmo modo, havendo de dividir abc por ab , escreveremos c .

A razão he, porque as letras do divisor commuas ao dividendo são factores (15) do mesmo dividendo, e conseguintemente (Arith. 69) o quociente se comporá das letras do dividendo, que não forem commuas ao divisor.

31 Donde se segue, que havendo expoentes, tiraremos o expoente de cada huma das letras do divisor do expoente da letra semelhante do dividendo.

Desta fórte, querendo dividir a^3 por a^2 , tiraremos 2 de 3, teremos 1; e conseguintemente a^1 , ou a será o quociente. Do mesmo modo, havendo de dividir $a^4b^3c^2$ por a^2b^2c , teremos a^2b^2c .

Com effeito, $\frac{a^3}{a^2}$ he o mesmo que $\frac{aaa}{aa}$, e esta expressaõ se reduz (30) a a . Em geral, o expoente de qualquer letra do quociente deve ser a differença entre os expoentes, que a mesma letra tem no dividendo e no divisor.

32 Logo a letra, cujo expoente for o mesmo no dividendo e no divisor, terá no quociente cifra por expoente. Assim a^3 dividido por a^3 dá a^0 ; e $a^3b^2c^2$ dividido por $a^2b^2c^2$ dá $a^1b^0c^0$.

As letras que tem o por expoente não se escrevem, porque cada huma dellas não he outra coisa mais do que a unidade. Com effeito, quando dividimos a^3 por a^3 , buscamos quantas vezes a^3 se contém em a^3 ; e como se contém huma vez, o quociente deve fer 1. Mas por outra parte a^3 dividido por a^3 dá a^0 : logo a^0 vale 1. Em geral, toda a quantidade, cujo expoente he cifra, vale 1.

33 Se algumas letras do divisor não forem commuas ao dividendo, ou se alguns expoentes do divisor forem maiores que os de letras semelhantes do dividendo, indicaremos a divisaõ (29), porque em tais casos não he possível faze-la exactamente. Simplificaremos porém o quociente, ou a quantidade fraccionaria que o representa, suprimindo as letras commuas ao dividendo e ao divisor; de maneira que, havendo expoentes em letras semelhantes, riscaremos aquella que o tiver menor, e deixaremos na outra a differença entre os expoentes primitivos. Querendo, por exemplo, dividir $a^5 b c^3$ por $a^2 b^3 c^4$, escreveremos $\frac{a^5 b c^3}{a^2 b^3 c^4}$,

e a reduçãõ se fara desta fórte: riscaremos a^2 no divisor, e escreveremos sómente a^3 no dividendo; riscaremos b no dividendo, e escreveremos sómente b^2 no divisor; finalmente escreveremos sómente c no divisor, e assim teremos $\frac{a^3}{b^2 c}$. Do mesmo

modo $\frac{a^2 b^5 c^3}{a^3 b c^2 d}$ se reduz a $\frac{b^4 c}{ad}$. Se depois destas ope-

rações não restar letra alguma no dividendo, escre-
veremos em lugar d'elle a unidade. Assim $\frac{a^2}{a^3}$ se re-
duz a $\frac{1}{a}$.

A razão destas regras se percebe facilmente, advertindo, que supprimir o mesmo numero de letras no dividendo e no divisor he o mesmo, que dividir os dous termos de huma fracção por huma mesma quantidade; operação (Arith. 89) que simplifica os quebrados, e não altera o seu valor.

34 Se o dividendo, ou o divisor, ou ambos elles tiverem coefficients, praticaremos as regras da Arithmetica; e se não podermos fazer a divisão exactamente, poremos os numeros em fórma de quebrado, o qual, podendo ser, se reduzirá (Arith. 92) á expressão mais simples.

Havendo, por exemplo, de dividir $8a^3b$ por $4a^2b$, dividiremos primeiramente 8 por 4, e tere-
mos 2 por quociente; dividindo depois a^3b por a^2b teremos a por quociente, e conseguintemente $2a$ por quociente total. Querendo dividir $8a^3b^2$ por $6ab$, escreveremos $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, que se reduz a $\frac{4a^2b}{3}$.

35 A regra que acima demos (33) se applica aos polynomios, com tanto que as letras commuas ao dividendo e ao divisor se achem em todos

dos os termos de ambos elles . Assim , tendo para dividir $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ por $a^3 - 5a^2b$ reduzire-

mos o quociente $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$ a $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$,

supprimindo a^2 , que he factor commum a todos os termos do dividendo , e do divisor .

36 Quando o dividendo e o divisor são complexos , não temos regras gerais para conhecer por simples inspecção , se a divisaõ pôde ou não fazer-se exactamente . Para o saber , e achar ao mesmo tempo o quociente , he preciso fazer a operaçã seguinte .

1.º Ordenem-se os termos do dividendo e do divisor relativamente a huma mesma letra , isto he , escolha-se huma letra que seja commua a ambos , e escrevaõ-se por ordem de grandeza os termos , em que a dita letra tiver expoentes consecutivamente mais pequenos .

2.º Havendo posto em huma linha tanto o dividendo como o divisor com os termos assim ordenados , separe-se hum do outro por meio de huma risca , e proceda-se á divisaõ , tomando sómente o primeiro termo do dividendo para dividir conforme as regras acima dadas (30 , 31 , 34) pelo primeiro termo do divisor , e escrevendo o quociente debaixo do divisor .

3.º Multipliquem-se successivamente todos os termos do divisor pelo quociente achado , e escreva-se o producto debaixo do dividendo , mudando os finais .

4.º Passando huma risca por baixo de tudo isto , e fazendo a reduccã , escreva-se o resto , e comece-se segunda divisaõ com este novo dividendo

do, tomando por primeiro termo aquelle que tiver maior expoente.

He preciso notar, que se deve attender aos finais dos termos do dividendo e do divisor. A regra he a mesma, que demos para a multiplicação, isto he

Se o dividendo e o divisor tiverem o mesmo final, o quociente será positivo.

Se pelo contrario tiverem finais diferentes, o quociente será negativo.

Porque, como (Arith. 74) multiplicando o quociente pelo divisor, deve sahir no producto o dividendo, he preciso que o quociente tenha finais tais, que sendo multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo com os mesmos finais; condição, da qual se deduz necessariamente a regra que acabamos de dar.

Passemos aos exemplos, e para procedermos com ordem, começaremos pelos finais, depois dividiremos os coefficients, e por fim as letras.

Exemplo 1.

Se houvermos de dividir $a^2 - b^2$ por $b + a$, ordenaremos estas quantidades relativamente a huma das letras a, b , a a , por exemplo, escrevendo como aqui se vê.

Dividendo - -	$aa - bb$	$a + b$	Divisor
	$-aa - ab$	$a - b$	Quociente
Resto - - -	$-ab - bb$		
	$+ab + bb$		
Resto - - -	- - - - -	o	Ten-

Tendo o primeiro termo aa do dividendo o mesmo final, que o primeiro termo a do divisor, escreveremos $+$ no quociente; mas como pertence ao primeiro termo, podemos omitti-lo. Dividindo aa por a , temos a por quociente, que escreveremos debaixo do divisor,

Multipliquem-se successivamente os dous termos a e b do divisor pelo primeiro termo a do quociente, e escrevaõ-se os productos aa e ab debaixo do dividendo com o final — contrario ao que deo a multiplicação, pois que estes productos devem ser tirados do dividendo.

Faça-se a reducção, riscando os dous termos aa e $-aa$ que se destroem, e resta $-ab$, que com a parte $-bb$, que ainda resta do dividendo, compõe tudo o que ainda falta para dividir.

Continuaremos pois a divisaõ, tomando $-ab$ por primeiro termo do novo dividendo.

Dividindo $-ab$ por a , escreveremos $-$ no quociente, porque os finais são diferentes: em quanto ás letras o quociente he b , que escreveremos no seu lugar.

Multipliquem-se os dous termos a e b do divisor pelo termo $-b$ do quociente; os productos são $-ab$, e $-b^2$. Escreveremos pois $+ab + b^2$ debaixo do segundo dividendo; e como fazendo a reducção, não ha resto, concluiremos, que o quociente he $a - b$.

Igualmente se poderia ter ordenado o dividendo e o divisor relativamente a b . Nesse caso teriamos para dividir $-b^2 + a^2$ por $b + a$, e fazendo-se a operação da mesma sorte, achariamos $-b + a$, que he o mesmo que $a - b$.

Exem.

Exemplo II.

$$\begin{array}{r}
 a^3 - b^3 \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \end{array} \right. \\
 - a^2 + a^2b \\
 \hline
 + a^2b - b^3 \\
 - a^2b + ab^2 \\
 \hline
 + ab^2 - b^3 \\
 - ab^2 + b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Exemplo III.

$$\begin{array}{r}
 8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 + 5ab + b^2 \\ 2a^2 - 3ab \end{array} \right. \\
 - 8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 \\
 \hline
 - 12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 \\
 + 12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Exemplo IV.

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\ \frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b \end{array} \right. \\
 - \frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 \\
 \hline
 \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 \\
 - \frac{1}{6}a^2b + \frac{3}{20}b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Exem.

Exemplo V.

$$\begin{array}{r}
 a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4 \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 - c^2 \end{array} \right. \\
 - a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 \\
 \hline
 + a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - c^4 \\
 - a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 \\
 \hline
 - a^2c^2 - b^2c^2 - c^4 \\
 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Quando a divisaõ se não pôde fazer exactamente, não querendo indica-la (29), continuaremos a operaçaõ até onde nos parecer, assim como se pratica na Arithmetica. Havendo de dividir, por exemplo, a por $b + c$, escreveremos

$$\frac{a}{b+c}, \text{ ou } \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \&c.\&c.\text{sem fim.}$$

Deste modo se resolvem geralmente todas as fracções em series infinitas.

37 Se havendo ordenado o dividendo e o divisor relativamente a huma letra, se acharem outros termos, nos quais a dita letra tenha o mesmo expoente, estes se disporaõ em huma columna vertical, como se mostra no exemplo seguinte; e nesta disposiçaõ se deveraõ ordenar todos os termos de cada columna respectivamente a outra letra.

Exem-

Exemplo.

Para dividir $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ por $-3ab - 5a^2 + b^2$, ordenaremos o dividendo e o divisor relativamente a a , e teremos $-20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ para dividir por $-5a^2 - 3ab + b^2$; mas como no dividendo ha dous termos affectos de a^3 , dous affectos de a^2 , e dous affectos de a , devemos dispo-los da maneira seguinte, ordenando-os em cada columna relativamente a b .

$$\begin{array}{l}
 \text{Divid. } \left\{ \begin{array}{l} -20a^4 + 13a^3b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ \quad - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + b^2 \\ \hline 4a^2 - 5ab + 2a \end{array} \\
 \hline
 + 20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2 \\
 \hline
 \text{Resto } \left\{ \begin{array}{l} + 25a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ - 25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Resto } \left\{ \begin{array}{l} - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ + 10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Resto } \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0
 \end{array}$$

Para ordenar as quantidades, he ordinariamente mais commodo escolher a letra, que tem o mesmo expoente em muitos termos.

38 Se huma quantidade póde ter a fórma de producto, como acontece muitas vezes, principal-

palmente quando resulta de differentes operações , he util indicar a multiplicação entre os seus factores. Aindaque o methodo de os achar depende de conhecimentos , que só adiante daremos , com tudo quem se familiarizar com a multiplicação e divisão , com facilidade os achará em muitos casos. Por exemplo , havendo de somar $5ab - 3bc + a^2$ com $3ab + 3bc - 2a^2$, teremos $8ab - a^2$, que por causa da letra a , que he factor commum dos dous termos $8ab$ e a^2 , póde considerar-se como producto da multiplicação de $8ab$ por a , e representar-se por $(8b - a) a$. He muito util o exercicio neste genero de resoluções .

Do modo de achar o maior divisor commum de duas quantidades litterais.

39 **O** Methodo he o mesmo que havemos dado para os numeros (Arith. 95) , e a demonstração funda-se nos mesmos principios. Havendo ordenado as duas quantidades , divide-se a maior pela menor : se houver resto , por elle se dividirá o divisor , e pelo novo resto o novo divisor , e assim por diante , até chegar a huma divisão exacta : o ultimo divisor será o que se busca .

Para facilitar o uso desta regra , notaremos que duas quantidades A e B conservaõ o seu maior divisor commum , aindaque se multiplique ou divida huma dellas , v.g. A , por huma quantidade que não tenha divisor commum com B . Por exemplo , ab e ac tem o divisor commum a ; e se multiplicarmos ab por d , entre o producto abd e ac haverá

verá o mesmo divisor commum a , que havia entre ab e ac . Não aconteceria o mesmo, se multiplicássemos ab por huma quantidade, que fosse divisor de ac , v. g. por c ; porque o divisor commum entre o producto abc e ac he ac , e não a . Do mesmo modo, se multiplicássemos ab por cd , que tem hum factor commum com ac ; teríamos $abcd$, cujo divisor commum com ac he ac . Em geral, $a + b$ e $a^2 - b^2$, $am + bm$ e $a^2n - b^2n$ tem o mesmo maior divisor commum; e reciprocamente.

40 Donde se seguem as duas reflexões seguintes, que tem ambas lugar no progresso das divisões successivas, que exige a regra dada. I. Conhecendo que huma das duas quantidades tem hum factor, que não he divisor da outra, podemos supprimi-lo, e ficará o calculo mais simples. II. A fim de fazer a divisaõ exacta, podemos multiplicar huma das duas quantidades por huma grandeza conveniente, com tanto que esta não seja divisor da outra quantidade.

Exemplo I.

Supponhamos que se pede o maior divisor commum de $a^2 - 3ab + 2b^2$ e $a^2 - ab - 2b^2$

$$\begin{array}{r}
 1.^{\circ} \text{ Divid. } a^2 - 3ab + 2b^2 \left\{ \begin{array}{l} a^2 - ab - 2b^2 \quad 1.^{\circ} \text{ Divisor} \\ \hline 1 \quad 1.^{\circ} \text{ Quociente} \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad - a^2 + ab + 2b^2 \\
 \hline
 1.^{\circ} \text{ Resto } \quad \quad - 2ab + 4b^2
 \end{array}$$

Devemos agora dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-2ab + 4b^2$, porque o expoente de a no resto he menor, que

que o expoente de a no divisor; mas como o resto tem o factor $2b$, que não he factor do novo dividendo, bastará dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-a + 2b$, supprimindo $2b$. Temos pois

$$\begin{array}{r}
 2.^\circ \text{ Divid. } a^2 - ab - 2b^2 \\
 - a^2 + 2ab \\
 \hline
 + ab - 2b^2 \\
 - ab + 2b^2 \\
 \hline
 \text{Resto } - - - - 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 - a + 2b \quad 2.^\circ \text{ Divisor} \\
 - a - b \quad 2.^\circ \text{ Quociente}
 \end{array}
 \right.$$

Logo $-a + 2b$ he o maior divisor commum.

Exemplo II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \left\{ 7a^2 - 23ab + 6b^2 \right.$$

Como 5 não he divisivel por 7, e alem disso este numero não he factor commum dos termos da segunda quantidade, multiplicaremos a primeira por 7, e teremos - - - - -

$$\begin{array}{r}
 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 \\
 - 35a^3 + 115a^2b - 30ab^2 \\
 \hline
 - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\
 \hline
 5a
 \end{array}
 \right.$$

A operaçõ se continuará ainda pelo mesmo divisor, multiplicando o resto por 7, e omittindo o factor b .

$$\begin{array}{r} -77a^2 + 329ab - 294b^2 \\ + 77a^2 - 253ab + 66b^2 \\ \hline 76ab - 228b^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ \hline -11 \end{array} \right.$$

Devemos agora dividir $7a^2 - 23ab + 6b^2$ por $76ab - 228b^2$, ou melhor, por $a - 3b$.

$$\begin{array}{r} 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ - 7a^2 + 21ab \\ \hline - 2ab + 6b^2 \\ + 2ab - 6b^2 \\ \hline \text{Resto} \text{ ---- } 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a - 3b \\ \hline 7a - 2b \end{array} \right.$$

Logo $a - 3b$ he o maior divisor commum das duas quantidades propostas.

Pelo habito de calcular (38) se descobre em muitos casos o maior divisor commum de duas quantidades com maior facilidade, do que pelo methodo geral. Por exemplo, nas quantidades $a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$, e $2a^2c + 4bc^2 - 2a^3 - 4abc$, ou $a^2(a^2 + b^2) - c^2(a^2 + b^2)$, e $c(2a^2 + 4bc) - a(2a^2 + 4bc)$, he claro que a primeira he o mesmo que $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$, e a segunda o mesmo que $(2a^2 + 4bc)(c - a)$. Mas $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$ he (24) o mesmo que $-(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)$, e $c^2 - a^2$ he divisivel (25) por $c - a$; logo $c - a$ he divisor das duas quantidades. Fazendo

do a divisaõ, os quocientes saõ $-(a^2 + b^2)(a + c)$ e $2a^2 + 4bc$, que naõ tem divisor commum: logo $c - a$ he o maior divisor commum das quantidades propostas.

Das Fracções Litterais.

41 **A**S fracções litterais calculaõ-se pelas regras das fracções numericas, fazendo-se a applicaõ do que havemos dito a respeito das quatro operações algebricas.

42 A fracção $\frac{a}{b}$ pode transformar-se sem alteraçaõ de valor em $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{a^2}{ab}$, ou $\frac{a^2 + ab}{ab + b^2}$, e assim por diante (Arith. 88).

43 A fracção $\frac{a^2c}{abc}$ he o mesmo que $\frac{a}{b}$, assim como $\frac{6a^3 + 3a^2b}{12a^3 + 9a^2c}$ e $\frac{2a + b}{4a + 3c}$ tem o mesmo valor (Arith. 89).

Esta reducçaõ das fracções á expressaõ mais simples comprehende-se no que havemos dito (33).

44 A regra mais geral para reduzir huma fracção aos seus menores termos, consiste em dividir tanto o numerador como o denominador pelo maior divisor commum, que elles podem ter (39).

45 A expressaõ $a + \frac{bd}{c}$ pode mudar-se na fracção unica $\frac{ac + bd}{c}$, e do mesmo modo $a + \frac{cd - ab}{b - d}$ se reduz a $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$, isto he, a $\frac{cd - ad}{b - d}$ (Arith. 86).

46 A quantidade $\frac{3ab + ac + cd}{a}$ póde reduzir-se

vir-se a $3b + c + \frac{cd}{a}$, e semelhantemente .

$\frac{a^2 + 4ab + 4b^2 + c^2}{a + 2b}$ se reduz a $a + 2b + \frac{c^2}{a+2b}$ (Arith. 85).

47 As três fracções $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, sendo reduzidas ao mesmo denominador, tornaõ-se em $\frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$,

e do mesmo modo as duas $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$ se mudaõ

em $\frac{ab+ac-b^2-bc}{a^2-b^2}$ e $\frac{a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}$ (Arith. 90, 91).

48 Se os denominadores tiverem factor commum, praticaremos conforme a regra dos numeros (Arith. 91 §§). Por exemplo $\frac{a}{bc}$ e $\frac{d}{bf}$ se reduzem a $\frac{af}{bcf}$ e $\frac{cd}{bcf}$. Do mesmo modo as tres fracções

$\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$ se reduzem a $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{d cg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

49 Para somar as fracções $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$, observaremos a regra dada (Arith. 102), e teremos

$$\frac{ab+ac-b^2-bc+a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}, \text{ que se reduz a } \frac{2ab-ac-b^2-3bc+a^2}{a^2-b^2}.$$

Pelo contrario, havendo de tirar a segunda da primeira, acharemos $\frac{ab+ac-b^2-bc-a^2+2ac-ab+2bc}{a^2-b^2}$,

que se reduz a $\frac{3ac-b^2+bc-a^2}{a^2-b^2}$ (Arith. 105).

50 Se nesta operaçaõ mudassemos juntamente os finais do numerador e do denominador, haveriamos

fomado as fracções e não diminuindo ; porque $\frac{a}{b}$ não he differente de $\frac{-a}{-b}$ (36).

51 Para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ac}{bd}$, como tambem $\frac{1}{2} a$ multiplicado por $\frac{1}{2} b$ dá $\frac{1}{4} ab$, e $\frac{a}{b}$ multiplicado por c dá $\frac{ac}{b}$ (Arith. 106, 107). No caso de serem complexos os termos da fracção, praticaremos conforme a regra da multiplicação dos polynomios.

52 Querendo dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ad}{bc}$, e para dividir $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{c+d}{a-b}$, escreveremos $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, que se reduz a $\frac{a^2 - b^2}{(c+d)^2}$. Finalmente $\frac{a}{b}$ dividido por c dá $\frac{a}{bc}$ (Arith. 109, 110).

Das Equações.

53 **P** ara significar que duas quantidades são iguais, he costume separa-las pelo final $=$, que se pronuncia *igual*, ou *he igual a*; pelo que, a expressão $a = b$ quer dizer *a* igual a *b*, ou que *a* he igual a *b*.

O concurso de duas, ou de muitas quantidades assim separadas pelo final $=$ tem o nome de *Equação*. A totalidade das quantidades, que estão á esquerda do dito final, fórma o *primeiro membro* da equação; e a totalidade das que estão á direita, constitue o *segundo membro*.

Na equação $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ fórma o primeiro membro, e $2x + 7$ o segundo.

To

Toda a queſtaõ, que pôde reſolver-ſe por Algebra, envolve no enunciado hum certo numero de condições, as quaes ſaõ outros tantos meios para perceber as relações, que ha entre as quantidades, que ſe buscaõ, a que ſe dá o nome de *incognitas*, e as conhecidas do problema. Estas relações pôdem exprimir-ſe ſempre por equações, em que as *incognitas* ſe achaõ combinadas com as quantidades conhecidas de hum modo mais ou menos compoſto, confôrme a queſtaõ he mais ou menos difficuloſa.

Aſſim para reſolver por Algebra as queſtões, que pôdem propor-ſe ácerca das quantidades, ſaõ neceſſárias tres couzas.

1.º Perceber na propoſição, ou na natureza do problema as relações, que ha entre as quantidades conhecidas e as incognitas. Sobre eſta faculdade, que o noſſo eſpirito adquire com o uſo, naõ ſe pôdem dar regras geraes.

2.º Exprimir cada huma das relações por huma equação. Eſte requisito pôde reduzir-ſe a huma unica regra; mas a ſua applicação he mais ou menos facil, confôrme a natureza das queſtões, e confôrme a capacidade e exercicio do Analyſta.

3.º Reſolver a equação ou as equações, iſto he, deduzir o valor das incognitas. Sobre eſte ponto ſe pôde dar hum numero determinado de regras, que vamos a expôr.

Como as queſtões pôdem conduzir a equações mais ou menos compoſtas, tem-ſe eſtas dividido em muitas claſſes ou grãos, os quaes ſe diſtinguem pelo expoente da quantidade ou das quantidades incognitas, que nellas entraõ. Começamos agora a tratar das *Equações do primeiro grão*, ou *Lineares*, que ſaõ aquellas, em que as incognitas naõ eſtaõ

multiplicadas nem entre si, nem por si mesmas;

*Da resolução das Equações do primeiro grão a
huma incognita.*

54 **R**esolver huma equação he reduzi-la a outra, na qual a incognita se ache só em hum membro, e no outro estejaõ sómente quantidades conhecidas. Feito isto, fica o problema resolvido, porque huma quantidade igual a quantidades conhecidas he conhecida.

Daqui por diante representaremos as incognitas por algumas das ultimas letras x , y , z do Alfabeto, para as distinguirmos das quantidades conhecidas, que representaremos ou por numeros, ou pelas primeiras letras do Alfabeto.

55 A incognita pôde achar-se misturada com as quantidades conhecidas de tres modos: 1.º por addição ou subtracção, como na equação $x + 3 = 5 - x$. 2.º Por addição, subtracção, e multiplicação, como na equação $4x - 6 = 2x + 16$. 3.º Finalmente por addição, subtracção, multiplicação, e divisão, como na equação $\frac{9}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$; ou pelas duas operações ultimas, ou sómente pela ultima.

Eis-aqui as tres regras, porque se desembaraça a incognita nestes differentes casos.

56 *Para fazer passar qualquer termo de hum membro da equação para o outro, risque-se o dito termo, e escreva-se no outro membro com sinal contrario.*

Por exemplo, na equação $4x + 3 = 3x + 12$, querendo fazer passar o termo $+ 3$ para o segundo mem-

membro, escreveremos $4x = 3x + 12 - 3$, ou, reduzindo, $4x = 3x + 9$. Se quizermos agora mudar o termo $3x$ para o primeiro membro, escreveremos $4x - 3x = 9$, que pela reducção dá $x = 9$.

Da mesma sorte na equação $5x - 7 = 21 - 4x$, querendo transpôr o termo -7 , escreveremos $5x = 21 - 4x + 7$, isto he $5x = 28 - 4x$; e se depois disso quizermos transpôr $-4x$, escreveremos $5x + 4x = 28$, ou $9x = 28$. Brevemente veremos, como se acaba a resolução desta equação.

Estas transformações fundaõ-se, em que duas quantidades se conservaõ iguais, se a ambas ajuntarmos, ou de ambas tirarmos a mesma quantidade.

57 Por esta regra se podem transportar ao mesmo tempo todos os termos affectos da incognita para hum membro, e todas as quantidades conhecidas para o outro. Assim da equação $7x - 8 = 14 - 4x$ se conclue $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Do mesmo modo a equação $ax + bc - cx = ac - bx$ se transforma em $ax - cx + bx = ac - bc$.

58 Se depois da transposição, e reducção, o termo affecto de x tiver o final $-$, mudaremos os finais de ambos os membros. Por exemplo, se tivermos $3x - 8 = 4x - 12$, transpondo e reduzindo, acharemos $-x = -4$: deduziremos pois $x = 4$; porque igualmente poderiamos transpôr os x para o segundo membro, e teriamos $4 = x$, que he o mesmo que $x = 4$.

59 Quando a equação he numerica, ou quando sendo litteral inclue quantidades semelhantes, pode abbreviar-se a reducção, riscando huma dellas, e tirando outro tanto da outra, ou somando, conforme elles tiverem o mesmo, ou differente final em differentes

tes membros. Por exemplo, na equação $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, riscaremos $2x$ no primeiro membro, e escreveremos somente x no segundo; riscaremos $5a$ no segundo, e somaremos $4a$ com $5a$, o que dará immediatamente $6b - 9a = x$. Do mesmo modo a equação $5a + 2b = 5a + x$ se reduz immediatamente a $2b = x$.

60 Feita a transposição, para ter o valor da incognita no caso de não entrarem fracções na equação, executaremos a regra seguinte: *Escreva-se unicamente a incognita em hum membro, e divida-se o outro pelo multiplicador que ella tinha.*

Por exemplo, da equação $7x - 8 = 14 - 4x$, que dá $11x = 22$, deduzimos $x = \frac{22}{11}$; porque se $11x = 22$, a undecima parte de $11x$, ou x será tambem igual á undecima parte de 22.

Do mesmo modo a equação $12x - 15 = 4x + 25$, ou $8x = 40$, dá $x = 5$.

A regra he a mesma para as equações litterais, qualquer que seja o numero dos termos affectos da incognita depois da transposição. A equação $ax = bc$ dá $x = \frac{bc}{a}$. A equação $ax + bc - cx = ac - bx$, ou $ax - cx + bx = ac - bc$ dá $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$, dividindo o segundo membro pela totalidade das quantidades $a - c + b$.

61 Para conhecermos pois o valor de x , quando depois da transposição ha muitos termos affectos da dita incognita, dividiremos o segundo membro pela totalidade das quantidades que multiplicão x no primeiro, tomando-as com os finais, com que nelle se achão.

Por exemplo, na equação $ax = bc - 2x$, ou

ax

$ax + 2x = bc$, teremos $x = \frac{bc}{a+2}$. Da mesma sorte a equação $x - ab = bc - ax$, ou $x + ax = bc + ab$, dá $x = \frac{bc+ab}{1+a}$ (5).

62 Se houver alguma quantidade, que seja factor comum de todos os termos da equação, para simplificar, dividiremos por elle todos os termos. Por exemplo, na equação $15b^2 = 27ab + 6bx$ dividiremos todos os termos pelo seu factor commum $3b$, e teremos $5b = 9a + 2x$, da qual (56, 60) se tira $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63 As regras, que acabamos de dar, podem applicar-se ás equações, em que entraõ denominadores, com tanto que estes não contenhaõ a incognita; mas como ellas se executaõ ordinariamente com mais facilidade, quando não ha fracções, por isso ajuntaremos a regra seguinte.

64 Para transformar huma equação na qual entraõ denominadores, em outra que os não tenha, multiplique-se cada hum dos termos, que não tem denominador, pelo producto de todos os denominadores; e o numerador de cada huma das fracções pelo producto dos denominadores das outras sômente.

Por exemplo, se tivessemos a equação $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, multiplicariamos os termos 4 e 12 por $3 \cdot 5 \cdot 7$ ou 105, e teriamos 420, e 1260. Depois multiplicariamos $2x$ por $5 \cdot 7$ ou 35, $4x$ por $3 \cdot 7$ ou 21, e $5x$ por $3 \cdot 5$ ou 15, e teriamos $70x$, $84x$, $75x$; e conseguintemente a equação proposta se muda em $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$. Applicando agora a esta as regras precedentes, teremos $x = \frac{840}{61} = 13 \frac{47}{61}$.

Com

Com effeito , as tres fracções da equação propoſta , ſendo reduzidas ao meſmo denominador conforme as regras da Arithmetica , dão $\frac{70x}{105}$, $\frac{84x}{105}$, $\frac{75x}{105}$, que realmente ſão o meſmo que as primitivas. Se reduzirmos tambem os dous termos inteiros a fracções , cujos denominadores ſejaõ 105 , teremos $\frac{420}{105}$ e $\frac{1260}{105}$; de maneira que a equação propoſta ſe transforma em $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$. Mas quantidades iguais , ſendo multiplicadas pelo meſmo numero , conſervão ainda a igualdade ; logo multiplicando ambos os membros por 105 , iſto he , ſupprimindo o denominador commum , ſerá verdadeira a equação , iſto he , teremos , como acima , $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$.

Se os denominadores tiverem hum factor commum , ſimplificaremos eſta operação , como enſinamos (Arith. 91 §§).

65 A regra he a meſma para as equações litterais , com tanto que ſe obſervem as regras da multiplicação algebraica. Affim , a equação $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$ ſe transforma em $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, donde ſe tira $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

Se tivermos $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, multiplicaremos (48) cx por c , dx por b , e virá - - - $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, iſto he , $c^2x + bdx = abce$; da qual tiraremos $x = \frac{abce}{c^2 + bd}$.

66 No caso de serem complexos os denominadores, he mais commodo de ordinario indicar primeiramente as operações, e executa-las depois.

Por exemplo, se tivessemos $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$, escreveriamos $ax(3a+b) + 4b(a-b)(3a+b) = cx(a-b)$; e fazendo agora as operações indicadas, acharemos $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$, e conseguintemente . . .

$$x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}.$$

Aplicação dos principios precedentes a resolução de alguns Problemas.

67 **A** Inda que reservamos os usos da Algebra para a segunda Secção, com tudo, afim de fazermos a tempo algumas observações uteis, applicaremos os principios precedentes a alguns problemas muito faceis.

As regras, que acabamos de dar, são sufficientes para resolver qualquer problema do primeiro gráo, que esteja expresso em equação: resta saber como esta se ha-de formar.

Para pôr hum problema em equação, represente-se por huma letra cada huma das quantidades que se buscão, e havendo examinado o estado da questão, por meio dos sinais algebricos façaõ-se sobre as quantidades dadas, e as incognitas as mesmas operações, e os mesmos raciocinios, que se fariaõ para verificar as incognitas no caso de serem conhecidos os seus valores.

Os problemas seguintes dirigiraõ a applicação

ção desta regra geral , ainda que pela sua simplicidade não precisa da Algebra para se resolverem.

Problema I. *Hum pai e hum filho tem entre ambos cem annos; o pai tem quarenta mais que o filho; pergunta-se , qual he a idade de cada hum.*

Pouca attenção basta para ver , que o problema se reduz a achar duas quantidades , cuja soma seja 100 , e a differença 40. Tambem he manifesto , que , se for conhecida huma destas quantidades , a segunda o será com facilidade ; se a maior , por exemplo , for conhecida , tirando della 40 , teremos a mais pequena.

Representemos pois a maior por x .

Ora , se este valor fosse conhecido , e o quizessemos verificar , tirariamos delle 40 para ter o numero menor ; depois disso somariamos o maior com o menor para ver se davaõ 100. Imitemos pois este modo de obrar.

O numero maior he - - - - - x

Logo o menor será - - - - - $x - 40$

Estes dous numeros somados daõ - $2x - 40$

Mas pelas condições da questaõ devem dar 100 ,

Logo eis-aqui o problema posto em equação - - - - - $2x - 40 = 100$

Havendo assim traduzido o problema em linguagem algebrica , para ter x , não se trata de mais , que de applicar as regras dadas (53 e 56). A primeira dá $2x = 100 + 40 = 140$, e a segunda $x = \frac{140}{2} = 70$. Logo o numero menor será $70 - 40 = 30$; e consequentemente o pai tem 70 annos , e o filho 30. Com effeito , $70 + 30 = 100$.

Reflectindo sobre o modo , porque nos conduzimos para resolver este problema , ve-se claramente

mente, que os raciocinios, que fizemos, não são dependentes dos valores particulares dos numeros 100, e 40 da questão, e que se em lugar destes fossem dados outros quaisquer, sempre procederíamos pela mesma forma. Assim, se o problema se propuzesse deste modo geral: *Sendo dada a soma a de duas quantidades, e a sua differença b, achar cada huma das mesmas quantidades.*

Representando a maior por - - - - - x

A menor será - - - - - $x - b$

E a soma de ambas - - - - - $2x - b$

Mas esta, conforme a questão, deve ser - - - a

Logo - - - - - $2x - b = a$;

equação, de que se tira $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Quer dizer, que para termos a maior, ajuntaremos a semisoma com a semidifferença, como se achou (Trig. 177) por outro modo.

Como a menor he $x - b$, será $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$,

isto he, $\frac{a + b - 2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Logo, para termos a

menor, da semisoma tiraremos a semidifferença (Trig. 177). Esta traducção dos resultados finais deve ser hum dos principais cuidados do Analysta.

Fica pois manifesto, como representando em geral, isto he, por letras, as quantidades conhecidas, que entraõ nos problemas, descobrimos regras gerais para a resolução de todos os problemas da mesma especie.

Muitas vezes os problemas parecem differentes á primeira vista, mas depois de hum leve exame se acha, que não differem mais que no modo de se enunciarem. Por exemplo, se nos propuzerem:

Di-

Dividir o numero dado a em duas partes , das quais huma exceda, ou seja excedida da outra na quantidade dada b . He facil de ver , que este problema he o mesmo que o precedente.

Probl. II. Dividir o numero 720 em tres partes tais , que a maior exceda a menor em 80 , e a media exceda a menor em 40.

Se me dissessem qual era a parte menor , e a quizesse verificar , deveria ajuntar-lhe 40 para ter a segunda , e depois 80 para ter a maior ; a soma das tres partes seria 720.

Chamemos pois á parte menor - - x

Logo a media he - - - - - $x + 40$

E a maior - - - - - $x + 80$

Ora estas tres partes reunidas daõ - - $3x + 120$

E como o problema exige que dem - - - - 720

Logo - - - - - $3x + 120 = 720$

Applicando as regras precedentes , teremos $x = 200$; logo a segunda parte he 240 , e a maior 280: estas tres partes juntas fazem com effeito a soma de 720.

Tambem aqui he manifesto , que se os numeros propostos , em lugar de serem 720 , 40 , e 80 , fossem outros quaisquer , a questãõ poderia resolver-se do mesmo modo. Pelo que , para resolver todos os problemas , nos quais se trate de dividir hum numero dado a em tres partes tais, que o excesso da maior sobre a menor seja hum numero qualquer b , e o excesso da media sobre a menor seja c , discorreremos do mesmo modo , como aqui se mostra,

Seja a parte menor - - - - - x
 A media será - - - - - $x + c$
 E a maior - - - - - $x + b$
 A soma dá - - - - - $3x + b + c$
 Mas deve dar - - - - - a
 Logo será $3x + b + c = a$;

Donde se tira $x = \frac{a - b - c}{3} = \frac{a - (b + c)}{3}$

Quer dizer esta formula, que para ter a parte menor tomaremos o terço da differença entre o numero, que se quer dividir, e a soma dos dous excessos. Assim, havendo de repartir 642 em tres partes tais, que a media exceda a menor em 75, e a maior exceda a menor em 87; tiraremos $75 + 87$ ou 162 de 642, e teremos 480; cujo terço 160 he a parte menor, e consequentemente as outras duas são $160 + 75$ ou 235, e $160 + 87$ ou 247.

Probl. III. *Repartir hum numero dado, por exemplo 14250, em tres partes tais, que sejam entre si como os numeros 3, 5, e 11.*

Se conhecessemos huma das partes, v. g. a primeira, para a verificarmos, buscaríamos (Arith. 194) hum numero que fosse para ella :: 5 : 3, e este seria a segunda parte. Buscaríamos tambem outro numero, que fosse para a mesma primeira parte :: 11 : 3; e este seria a terceira parte. A soma destas tres partes formaria 14250. Procedendo pois desta maneira

Seja a primeira parte - - - - - x
 Será (Arith. 194) a segunda - - $\frac{5x}{3}$
 E a terceira - - - - - $\frac{11x}{3}$
 A soma destas dá - - - - - $x + \frac{16x}{3}$
 Mas conforme a questáo deve dar - - - - - 14250
 Logo, $x + \frac{16x}{3} = 14250$ Esta

Esta equação se muda (64) em $19x = 42750$; Logo (60) --- $x = 2250$. A segunda parte será pois $\frac{5 \times 2250}{3}$ ou 3750, e a terceira 8250. Com effeito os tres numeros 2250, 3750, 8250, somados fazem 14250, e estão entre si como 3, 5, e 11, como he facil de ver, dividindo-os por 750, com o que (Arith. 170) não se altera a razão.

Se o numero que se quer dividir, em lugar de ser 14250, fosse em geral a , e os numeros proporcionais ás partes, em lugar de 3, 5, 11, fossem em geral m, n, p , imitariamos o que acabamos de fazer.

Assim, representando a primeira parte por x

A segunda será $\frac{nx}{m}$

E a terceira $\frac{px}{m}$

Cuja soma faz $x + \frac{nx + px}{m}$

Mas deve fazer a

Logo $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Esta equação dá $mx + nx + px = ma$, e consequentemente $x = \frac{ma}{m+n+p}$.

Para traduzirmos esta solução, e enunciarmos huma regra geral, note-se, que se tivéssemos $m + n + p : m :: a ::$; o quarto termo (Arith. 179)

seria $\frac{am}{m+n+p}$; e como x he expresso nesta quanti-

dade, segue-se, que para termos a primeira parte, calcularemos o quarto proporcional ao numero proposto, á primeira das partes dadas, e á soma de todas estas (Arith. 197).

Probl. IV. *Despachou-se de Dreux para Breßlum Postilhaõ, cuja velocidade he tal, que em hu-*
ma

na hora anda duas leguas. Oito horas depois se despachou outro de Paris para Brest, cuja velocidade he de tres leguas por hora. Pergunta-se, onde se haõ de encontrar, sabendo-se tambem, que a distancia de Paris a Dreux he de 17 leguas.

Se me dissessem, quantas leguas devia andar o segundo Postilhaõ para se encontrar com o primeiro, eis-aqui como verificaria este numero. Buscaria que jornada teria feito o primeiro no tempo, em que o segundo tinha feito a sua, calculando o quarto termo desta proporçaõ $3 : 2 ::$ o numero de leguas corridas pelo segundo he para o numero de leguas, que o primeiro terá andado no mesmo tempo. A este quarto termo ajuntaria o numero de leguas, que o primeiro Postilhaõ devia ter andado nas 8 horas de anticipaçãõ da partida, como tambem as 17 leguas do intervallo de Paris a Dreux, que elle tinha igualmente de avanço; a soma daria o numero de leguas corridas pelo segundo. Procedendo pois desta maneira

Seja o numero de leguas corridas pelo segundo x

No mesmo tempo o primeiro andarã - - - $\frac{2}{3} x$

È nas 8^h de avanço - - - - - 16

È pela distancia de Paris a Dreux - - - - 17

Estas tres quantidades fazem a soma $\frac{2}{3} x + 33$

isto he, o numero de leguas que deverã andar o segundo, para se encontrar com o primeiro

Logo $\frac{2}{3} x + 33 = x$, e conseguintemente $x = 99$ quer dizer, que os dous Postilhões deverã encontrar-se a 99 leguas de Paris.

Com effeito, no tempo em que o segundo andar 99 leguas, o primeiro andarã 66, estas jun-

tamente com as 16 leguas de adiantamento em razão das 8 horas, e com as 17 leguas de avanço, por partir de Dreux, fazem a soma de 99: logo estarão ambos ao mesmo tempo no mesmo lugar.

Em geral, seja o intervallo dos lugares da partida $= a$, a differença entre os tempos da partida $= b$, a velocidade do primeiro Postilhaõ $= c$, a do segundo $= d$, o espaço que deve andar o segundo para se encontrar com o primeiro $= x$: discorrendo, como havemos feito precedentemente, teremos $x = \frac{cx}{d} + bc + a$, donde se tira $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, que dá a solução de todos os problemas desta especie, pelo menos em quanto se suppõe, que os dous Postilhões vão para a mesma parte, e que a partida do que anda menos precede á do mais veloz.

Para mostrarmos o uso desta formula, tornemos ao exemplo precedente. Como neste caso $a = 17'$, $b = 8'$, $c = 2'$, $d = 3'$, o valor geral de x se torna em $x = \frac{17.3 + 8.2.3}{3 - 2} = 51 + 48 = 99'$, como acima.

O uso pois das soluções gerais he tal, que se substituirmos em lugar das letras os numeros, que ellas representaõ, e fizermos as operações indicadas pela disposição e finais das mesmas letras, acharemos a resolução de todos os problemas particulares da mesma especie.

Por exemplo, se nos propuzessem este problema: *A agulha das horas de hum relógio corresponde a 17', e a dos minutos a 24', isto he, são 3^b 24^l; pergunta-se, quando estarão as duas agulhas humas sobre a outra.*

Como as duas agulhas se movem ao mesmo tempo, a quantidade b he cifra neste caso; a ou o espaço

paço que a agulha dos minutos deve correr desde a vigesima quarta divisaõ do quadrante até a decima septima, he igual a 53 divisões; $c = 5$, $d = 60$. Temos pois $x = \frac{53 \cdot 60}{60 - 5} = 57 \frac{9}{11}$, isto he, deverá a agulha dos minutos correr ainda 57 divisões e $\frac{9}{11}$; e como ella correspondia á vigesima quarta divisaõ, deverá corresponder a 81 divisões e $\frac{9}{11}$, ou, pois que huma circumferencia consta de 60 divisões, as duas agulhas estaraõ huma sobre a outra aos $21' \frac{9}{11}$ da hora seguinte; isto he, ás $4^b 21' \frac{9}{11}$.

Alem da vantagem exposta das soluções litterais, ha outra, a qual consiste em que muitas vezes as formulas, precedendo certas preparações, admittem o enunciarem-se de hum modo simples, e facil de se conservár na memoria. Por exemplo, a formula ultimamente achada $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, na qual a quantidade d he factor commum dos dous termos do numerador, pôde escrever-se por este modo, $x = \frac{(a + bc)d}{d - c}$, onde se vê, que x he o quarto termo da proporção, cujos tres primeiros seriaõ $d - c : d :: a + bc$. Porem $d - c$ denota a differença das velocidades dos dous Postilhões; d denota a velocidade do segundo; e $a + bc$ compõe-se do intervallo a dos dous lugares da partida, e da quantidade bc , que exprime o espaço corrido pelo primeiro Postilhaõ no tempo que tem de avanço, de maneira que $a + bc$ representa a jornada que tem feito o primeiro até o instante,

D em

em que o segundo começa a sua , ou todo o avanço que o primeiro ganhou em rasão de partir mais cedo , e de hum lugar mais adiantado. Logo a resolução do problema pode reduzir-se a este enunciado : Havendo multiplicado a velocidade do primeiro Postilhaõ pelo tempo que tem de avanço , some-se o producto com o intervallo dos lugares da partida ; e buscando depois o quarto proporcional á differença das velocidades , á velocidade do segundo , e á soma achada , elle determinará o lugar do encontro. Pelo que no nosso primeiro exemplo , tendo o primeiro Postilhaõ 8^b de avanço , e 2^l de velocidade , somaremos 16^l com 17^l intervallo dos dous lugares , o que dá 33 ; e calculando o quarto termo da proporção $3 - 2$ ou $1 : 3 :: 33 :$, acharemos 99 , como acima.

Ultimamente , ainda que entrem fracções , a regra sempre he a mesma. Por exemplo , se o primeiro Postilhaõ andasse 7^l em 4^b , o segundo 13^l em 5^b ; se o primeiro se antecipasse 15^b , e o intervallo dos dous lugares da partida fosse de 42^l ; diriamos : andando o primeiro 7^l em 4^b , vem a andar $\frac{7}{4}$ de legua por hora , e por tanto esta he a velocidade do primeiro ; do mesmo modo a velocidade do segundo he de $\frac{13}{5}$ de legua por hora. Assim multiplicando $\frac{7}{4}$ por 15 , e somando o producto $\frac{105}{4}$ com 42 , teremos $\frac{273}{4}$; calculando pois o quarto termo da proporção $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} :: \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; este

quarto termo $\frac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou $\frac{3549}{20}$, ou $\frac{3549}{17}$, ou $208\frac{13}{17}$

he o numero de leguas , que o segundo Postilhaõ
deverá andar.

*Reflexões sobre as quantidades positivas,
e negativas.*

69 **A**S formulas gerais servem naõ sómen-
te para resolver todos os problemas analagos por
simples substituições , mas tambem para achar em
muitos casos a soluçãõ de outros , cujas condi-
ções sejaõ em tudo oppostas áquellas , a que se ha-
via satisfeito primeiramente ; e para isso basta or-
dinariamente huma simples mudança de $+$ em $-$,
ou de $-$ em $+$ nos finais das quantidades. Mas an-
tes de mostrarmos este novo uso dos finais , con-
sideremo-los em outro ponto de vista.

As letras naõ representaõ mais que os valores
absolutos das quantidades. Os finais $+$ e $-$ naõ
tem representado até aqui mais do que as opera-
ções da addiçãõ e subtracçãõ ; porem podem re-
presentar tambem em muitos casos a existencia
relativa de humas quantidades a respeito de outras.

Huma quantidade pôde considerar-se em dous
sentidos oppostos, ou como capaz de augmentar ou-
tra quantidade , ou como capaz de a diminuir ; mas
em quanto ella se representa meramente por hu-
ma letra , ou por hum numero , naõ se saberá em
qual dos dous sentidos se considera. Por exemplo ,
se hum homem tiver tantos bens como dividas , o
mesmo numero pôde servir para exprimir a quanti-
dade numerica de ambas as cousas , porem este nu-
mero naõ mostrará a differença que ha entre ellas. O
meio mais natural de a declarar he designa-las por
hum final , que indique o effeito que humas podem

produzir sobre as outras ; e como o effeito das dividas he diminuir os bens , que cada hum possuiue , fica muito natural delignar aquellas , applicando-lhes o sinal $-$.

Do mesmo modo , se considerarmos huma linha recta (*Fig. 1*) como gerada pelo movimento de hum ponto A na direcção perpendicular á linha BC , he claro , que ainda que se represente por a o espaço AD ou AE , que elle tem corrido , não se determina com isso absolutamente a sua situação , pois que o ponto tanto pôde mover-se de A para D , como de A para E . O meio de a fixar he indicar por algum sinal , se a quantidade a está á direita ou á esquerda , e para isso são muito proprios os sinais $+$, e $-$; por quanto referindo o movimento do ponto A a outro ponto L conhecido , e considerado como termo fixo , quando o ponto A se move para D , a linha que descreve tende a augmentar LA , e quando se move para E , a linha que descreve tende a diminuir LA , e consequentemente he natural o representar AD por $+a$, ou simplesmente por a , e AE por $-a$. Seria o contrario , se reportassemos o movimento do ponto A ao ponto O .

Tem pois as quantidades negativas huma existencia tão real como as positivas ; a unica differença , que ha entre ellas , he o tomarem-se no calculo em sentido contrario , e por tanto as regras , que havemos dado para as differentes operações sobre as quantidades , são as mesmas , seja qual for o ponto de vista , em que estas se consideraõ . Tanto humas como outras podem achar-se , e muitas vezes se achão misturadas juntamente no mesmo calculo . Acontece isto , não só porque certas operações

ções conduzem a tirar certas quantidades de outras, como havemos visto; mas também porque muitas vezes no calculo ha necessidade de exprimir as differentes accepções, em que se tomaõ as quantidades.

70 Pelo que, se na resolução de hum problema o valor da incognita sahir negativo; por exemplo, se chegarmos a hum resultado como $x = -3$; concluiremos que a quantidade designada por x não tem as propriedades, que lhe attribuímos, ou supuzemos no calculo, mas outras em tudo contrarias. Propondo-se, por exemplo, este problema: *Achar hum numero, que sendo junto a 15 dê 10, o qual he evidentemente impossivel; se representarmos o numero buscado por x , teremos $x + 15 = 10$, e conseguintemente $x = -5$.* Esta ultima conclusão pois nos mostra, que x , o qual se tinha considerado como devendo ajuntar-se a 15 para formar 10, deve pelo contrario ser tirado. Deste modo toda a soluçãõ negativa indica alguma supposiçãõ falsa no enunciado do problema; mas indica ao mesmo tempo a correcçãõ, mostrando que a quantidade procurada se deve tomar em hum sentido totalmente opposto áquelle, em que d'antes havia sido tomada.

71 Concluamos pois, que havendo resolvido hum problema, no qual algumas quantidades se tenhaõ tomado em hum sentido, se o quizermos resolver, tomando as mesmas quantidades em sentido totalmente opposto, bastará mudar os sinais, que actualmente tem as mesmas quantidades. Por exemplo, no problema quarto, resolvido geralmente para o caso em que os Postilhões caminhafsem para a mesma parte, se quizermos ter a resolu-

lução de todos os problemas, que se pôdem propôr no caso em que elles venhão de partes oppostas a encontrar-se hum com o outro, mudaremos o final de c no valor achado $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$. Com effeito, neste caso o primeiro Postilhão, como em lugar de se apartar se avizinha do segundo, diminue a jornada que este devia fazer, e diminue-a em razão da sua velocidade c , ou do espaço que corre em huma unidade de tempo; devemos pois exprimir, que c em lugar de augmentar diminue, isto he, escrever $-c$ em lugar de $+c$. Esta mudança dá $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; porque $+bcd = +bd(+c)$; logo, mudando o final, teremos $+bd(-c) = -bcd$.

Confirmemos tudo isto com hum exemplo. Supponhamos que dous Postilhões vem de partes contrarias, e sahem de dous lugares, cujo intervallo he de 100 leguas: o primeiro parte 7 horas antes do segundo, e tem velocidade de 2^l por hora; o segundo anda 3^l por hora. Seja x a jornada, que este deve fazer para se encontrar com o primeiro. He claro, que x será igual á differença entre a distancia total, e o espaço corrido pelo primeiro; e como este espaço se compõe do que elle pôde andar nas sete horas, isto he, de 14^l, e do que tiver andado em quanto o segundo caminhar, isto he, de $\frac{2}{3}x$; teremos $x = 100 - 14 - \frac{2}{3}x$, e conseguintemente $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. Ora se na formula $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, a qual, como dissemos, pertence a este caso, substituiremos 100 por a ;

7 por b , 3 por d , e 2 por c , teremos do mesmo modo $x = 51 \frac{3}{5}$.

A' medida que nos formos adiantando, teremos o cuidado de fixar cada vez mais a idéa, que se deve fazer das quantidades negativas.

72 Como convem muito adquirir facilidade de pôr os problemas em equação, ajuntamos aqui alguns simples para exercicio dos principiantes, contentando-nos com dar os resultados, os quais serviraõ para confirmar as suas tentativas. Depois de os terem resolvido nos numeros em que saõ propostos, deveraõ substituir letras aos numeros, e exercitar-se na resolução litteral: imitando assim as soluções particulares, se adquire a facilidade de generalizar, e estender as idéas.

Achar hum numero, que sendo successivamente junto a 5, e a 12, dê duas somas, as quais sejaõ entre si como 3 para 4 Resp. 16.

Achar hum numero tal, que reunindo a sua metade, terço, e $\frac{2}{5}$, se forme huma soma, a qual tenha 7 de excesso sobre o numero procurado . . Resp. 30.

Andaõ trabalhando tres officiais, dos quais o primeiro faz 5 braças de obra por dia, o segundo 7, e o terceiro 8: em que tempo faraõ 100 braças, trabalhando juntamente todos tres? Resp. 5^d.

Ajustou-se hum official preguiçozo a razão de 24 soldos por cada dia em que trabalhasse; mas com condição de se lhe descontarem 6 soldos por cada dia, em que não trabalhasse. Passados 30 dias fez-se-lhe a conta, e achou-se que nada tinha de receber. Quantos dias trabalhou? Resp. 6^d.

Hum homem comprou hum cavallo, que vendeo com 100 libras de ganho: sabe-se que o lucro foi de 10 por

por cento. Por quanto o comprou? . . Resp. por 900^l.

Pagou-se certa quantia em 15 pagamentos, que se fizeram sempre progressivamente com augmento da mesma quantidade; o primeiro pagamento foi de 7 lib., e o ultimo de 37. Quanto era o augmento de cada hum?

Resp. de $2\frac{1}{7}$.

Temos agua do mar, que em 32 libras contem huma de sal. Que porção de agua doce se deverá ajuntar-lhe, para que em 32 libras do misto não haja mais que duas onças de sal? . . . Resp. 224 libras.

Das Equações lineares a muitas incognitas.

73 **Q**ualquer que seja o numero das incognitas, o methodo de pôr o problema em equação (67) he sempre o mesmo. Mas em geral, he necessario formar tantas equações, como permitirem as condições. Se todas estas forem distinctas, e independentes humas das outras, e se alem disso cada huma se poder exprimir por huma equação, o problema não poderá ter mais que huma solução, no caso de serem as equações todas do primeiro gráo, e de serem ao mesmo tempo tantas as equações quantas as incognitas. Se porem alguma das condições se achar implicita ou explicitamente comprehendida em alguma das outras, ou se o numero das condições for menor que o numero das incognitas; teremos menos equações que incognitas, e por tanto a questão poderá ter huma infinidade de soluções, excepto quando o numero destas for limitado por alguma condição particular, que não possa exprimir-se por equação. De tudo isto daremos exemplos. Sup.

Suppondo primeiramente duas equações, e duas incognitas, a regra que se deve ajuntar ás que havemos dado ácerca das equações a huma incognita, he a seguinte.

74 Tome-se em cada equação o valor de huma mesma incognita, e igualando os dous valores, teremos huma equação á segunda incognita. Sendo achado o valor desta pelas regras precedentes, faça-se substituição d'elle em qualquer dos dous valores, que se tomaraõ pela primeira operação, e assim determinaremos a segunda incognita.

Exemplo I. Tendo as duas equações $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$, tomaremos em ambas o valor de x , e acharemos na primeira $x = \frac{24 - y}{2}$, e na segunda $x = \frac{65 - 3y}{5}$. Igualando estes dous valores, teremos $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$. Esta equação não inclue mais do que a segunda incognita y , e dá $y = 10$.

Para termos x , substituiremos em lugar de y o seu valor 10 no primeiro valor de x , que he o mais simples, e acharemos $x = 7$.

75 Exemplo II. Se tivermos $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, e $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$; acharemos primeiramente $x = \frac{60 + 25y}{24}$, e $x = \frac{228 - 9y}{8}$. Logo $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$, e conseguintemente $y = \frac{624}{52} = 12$.

Substituindo este valor na segunda expressão de x , teremos $x = \frac{120}{8} = 15$.

76 Exemplo III. Se forem propostas as duas equa-

equações $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, e $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$; deduziremos $x = \frac{20y - 420}{7} = \frac{55y - 420}{56}$, ou $4y - 84 = \frac{11y - 84}{8}$, da qual se tira $y = \frac{588}{21} = 28$. Substituindo este valor na equação $x = \frac{20y - 420}{7}$, teremos $x = 20$.

77 Exemplo IV. Em geral, as duas equações $ax + by = c$, e $dx + fy = e$, em que a, b, c, d, e, f denotão quantidades conhecidas, positivas, ou negativas, dão $x = \frac{fc - be}{af - bd}$, e $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

78 Quando as duas incognitas não se acharem ambas em cada uma das equações, o calculo não differirá dos precedentes, senão em ser mais simples.

Por exemplo, se tivermos $5ax = 3b$, e $cx + dy = e$, a primeira dará $x = \frac{3b}{5a}$, e a segunda $x = \frac{e - dy}{c}$: logo $\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$, donde se tira $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Das Equações lineares a tres, e mais incognitas.

79 **D**O que fica dito se deduz facilmente o methodo de resolver as equações, quando for mais consideravel o numero das incognitas, suppondo que ha igual numero de humas e outras.

Se tivermos tres equações, tome-se em cada hu-

huma o valor de huma mesma incognita, e iguale-se o primeiro ao segundo, e o primeiro ao terceiro; ou o primeiro ao segundo, e o segundo ao terceiro, e assim se reduzirá este caso ao precedente (74).

Sejaõ, por exemplo, as tres equações,

$$3x + 5y + 7z = 179$$

$$8x + 3y - 2z = 64$$

$$5x - y + 3z = 75$$

Da primeira tiro $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

Da segunda . . . $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Da terceira . . . $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Igualando o primeiro ao segundo, tenho - - -

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$$

Igualando o primeiro ao terceiro, tenho - - -

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$$

Observando agora nestas duas equações a regra dada (74), acharemos $z = 15$, e $y = 10$.

Para ter x , substituaõ-se estes valores em huma das suas expressões, e teremos $x = 8$.

8o O calculo será mais simples, quando as incognitas não entrarem todas juntamente em cada huma das equações.

Sejaõ, por exemplo, as tres equações, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$.

A primeira e a terceira daõ $x = \frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$,

e combinando esta ultima com a segunda, acharemos $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81 Sendo maior o numero das equações, tome-se em cada equação o valor de huma mesma incogni-

gnita, iguale-se hum destes valores a cada hum dos outros, e haverá de menos huma equação e huma incognita. Tratem-se estas novas equações como as primeiras, e haverá tambem de menos huma equação e huma incognita. Continue-se assim por diante, até que finalmente se chegue a não ter mais que huma incognita.

82 Tambem podemos determinar os valores das incognitas pelo methodo seguinte, que he util em muitas occasiões.

Sejaõ as duas equações $3x + 4y = 81$, e $3x - 4y = 9$. Se tirarmos a segunda da primeira, teremos $8y = 72$, e conseguintemente $y = 9$: se pelo contrario as ajuntarmos, teremos $6x = 90$, e conseguintemente $x = 15$. He pois manifesto, que quando o coefferente de huma das incognitas he o mesmo em cada huma das duas equações, estas muito facilmente por meio da addição, ou da subtracção se reduzem a não terem mais que huma incognita.

83 Pode-se dar sempre o mesmo coefferente á mesma incognita, multiplicando huma das duas equações por hum numero conveniente, o qual se achará da maneira seguinte.

Sejaõ as duas equações $4x + 3y = 65$, e $5x + 8y = 111$. Representando por m o numero de que se trata, multiplique-se por elle huma das duas equações, a segunda, por exemplo, e teremos $5mx + 8my = 111m$. Ajuntando esta com a primeira, acharemos $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Agora para eliminar x , supporemos que o numero m he tal, que $4 + 5m = 0$, donde se tira $m = -\frac{4}{5}$. Esta hypothese reduz a equação a

$$(3 + 8m)y = 65 + 111m, \text{ que dá } y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$$

$$= \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7. \text{ O mesmo aconteceria, se multi-}$$

plicássemos a primeira por 5, coeſſiciente de x na ſegunda, e eſta por 4, coeſſiciente de x na primeira, e tirássemos o ſegundo producto do primeiro. Se quiſeſſemos porem eliminar y , ſupporiamos $3 + 8m = 0$, que dá $m = -\frac{3}{8}$; e conſeguintemente a

$$\text{equação ſe reduziria a } (4 + 5m)x = 65 + 111m,$$

$$\text{donde ſe tira } x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m} = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11.$$

84 Se tivermos tres equações, e tres incognitas; multiplicaremos a ſegunda por hum numero m , e a terceira por outro n ; e ajuntando os productos com a primeira, ſupporremos o coeſſiciente de cada huma de duas das incognitas x , y , e z igual a nada, e teremos aſſim duas equações para determinar m e n , as quaes ſe tratarão como no caſo precedente.

Tomemos para exemplo as tres equações

$$3x + 5y + 7z = 179$$

$$8x + 3y - 2z = 64$$

$$5x - y + 3z = 75$$

Multiplicando a ſegunda por m , a terceira por n , e ajuntando os productos com a primeira, teremos $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Para achar o valor de z , ſupporremos $3 + 8m + 5n = 0$, e $5 + 3m - n = 0$; e a equação ſe re-

reduzirá a $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$,
 donde se tira $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$.

Determinemos agora m e n por meio das duas equações hypotheticas, multiplicando, como no caso precedente, a segunda por p , e ajuntando o producto com a primeira. Esta operação dará $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$, a qual, suppondo $8 + 3p = 0$, ou $p = -\frac{8}{3}$ afim de ter n , se reduzirá a $3 + 5p + (5 - p)n = 0$; logo $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p} = \frac{31}{23}$. Semelhantemente acharemos $m = -\frac{28}{23}$. Substituindo pois estes valores na expressão de z , teremos $z = 15$.

Pelo que fica dito se percebe o modo, porque deveríamos praticar, se em lugar de z quizessemos ter x ou y . Porem, havendo determinado huma das incognitas, he escusado começar de novo hum calculo semelhante para cada huma das outras; basta substituir o valor achado em todas as equações propostas menos huma, e assim se determinaõ os outros valores como no caso de haver huma equação de menos. No nosso exemplo, tendo achado $z = 15$, substituiremos este valor tanto na segunda equação como na terceira, e entãõ por meio de duas equações a duas incognitas acharemos $y = 10$, e $x = 8$.

85 Por qualquer dos dous métodos expostos se pódem deduzir formulas gerais, que representem os valores das incognitas em todos os casos imaginaveis. Assim, exprimindo geralmente duas equações do primeiro grão a duas incognitas por $ax + by + c = 0$, e $a'x + b'y + c' = 0$, como he

he sempre possível, transpondo todos os termos para hum membro; acharemos

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Do mesmo modo, representando tres equações do primeiro grão a tres incognitas por $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, acharemos que os valores de x , y , e z se exprimem da maneira seguinte.

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Para 4 equações, e 4 incognitas achariamos quatro fracções, as quais terião 24, isto he, 1. 2. 3. 4 termos no numerador, e outros tantos no denominador. Para 5 incognitas se acharião 120, ou 1. 2. 3. 4. 5 termos, 720 ou 1. 2. 3. 4. 5. 6 para 6; e assim por diante.

Podemos porem abbreviar hum calculo tão longo, reflectindo na fórmula dos valores achados, e nos que se acharião do mesmo modo para quatro equações, e quatro incognitas. Porque 1.º seja qual for o numero das incognitas x , y , e z , os seus valores tem todos o mesmo denominador.

2.º O numerador de qualquer dos valores se fórmula do seu denominador, trocando neste o coefferente da incognita respectiva pela ultima letra d da equação, e mudando os finais. Por exemplo, se no denominador de x ultimamente achado mudarmos

mos a em d , a' em d' , a'' em d'' , e fizermos mudança dos finais, teremos o numerador.

Para achar a regra que dá o denominador comum, noto 1.º que no caso de huma equação, e huma incognita, como em $ax + b = 0$, o denominador he a . 2.º No caso de duas equações, e duas incognitas, he $ab' - a'b$. 3.º No caso de tres equações, e tres incognitas, he $(ab' - a'b) c'' + (a''b - ab'') c' + (a'b'' - a''b') c$.

Noto mais, que o denominador $ab' - a'b$ no caso de 2 incognitas, se fórma de a denominador no caso de huma incognita, multiplicando a por b' , depois mudando em ab' , ' em o, e o em ' (por o entendemos o accento da letra não accentuada) e ultimamente fazendo mudança de $+$ em $-$.

Semelhantemente, o denominador no caso de 3 incognitas se fórma do denominador no caso de 2 incognitas: 1.º multiplicando este por c'' : 2.º mudando '' em ', e ' em '', e tambem os finais: 3.º mudando neste ultimo resultado ' em o, e o em ', e os finais.

Logo o denominador para 4 incognitas se achará 1.º multiplicando o que convem a 3 por d''' : 2.º mudando ''' em '', e '' em ''', e os finais: 3.º mudando neste segundo resultado '' em ', e ' em '', e os finais: 4.º mudando neste terecero ' em o, o em ', e os finais. Bem se vê o que se devia fazer no caso de ser maior o numero das incognitas.

Temos pois huma regra geral, por meio da qual se podem determinar separadamente os valores das incognitas nas equações do primeiro gráo.

E ainda que se devaó calcular todos os denominadores, que pertencem a todas as equações de

menor numero de incognitas , com tudo a regra não conduz a calculos superfluos ; tudo o que por ella se calcula , entra necessariamente na quantidade , que se busca. Veja-se a *Theoria geral das Equações* , que publicamos em 1779.

Appliação á resolução de alguns Problemas.

86 **P** Robl. I. *Hum homem tem duas especies de moeda; 7 peças da especie de maior valor com 12 da segunda valem 288 libras; e 12 da primeira especie com 7 da segunda fazem 358'. Quanto vale cada especie de moeda?*

Se o soubessemos , multiplicando o valor de huma peça da primeira especie por 7 , e o de huma peça da segunda por 12 , a soma dos productos daria 288 libras. Do mesmo modo , multiplicando o valor de huma peça da primeira especie por 12 , e da segunda por 7 , a soma dos productos daria 358'.

Isto posto , seja o numero de libras , ou o valor de huma peça da primeira especie = x , e o da segunda = y . Logo $7x + 12y = 288$, e $12x + 7y = 358$.

Para acharmos agora x e y , tomaremos em ambas as equações o valor de x , e igualando os dois valores teremos $x = \frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$; donde se tira $y = 10$, e conseguintemente $x = 24$: logo as maiores peças eraõ de 24' , e as menores de 10' . Com effeito ; 7 peças de 24' valem 168' , e estas com 12 de 10' , ou com 120' fazem a soma de 288' . De mais , 12 peças de 24' , que fazem 288' , com 7 de 10' valem 358' .

E

Probl. II.

Probl. II. *Fes-se hum misto de ouro e prata, cujo volume he de 12 pollegadas cubicas, e o pezo de 100 onças. A pollegada cubica de ouro peza 12 onças $\frac{2}{3}$, e huma pollegada cubica de prata peza $6\frac{8}{9}$. Pergunta-se, que quantidades de ouro e prata entrãrão nesta liga.*

Seja x o numero de pollegadas cubicas de ouro, e y o numero de pollegadas cubicas de prata; teremos $x + y = 12$. Por outra parte, pezando cada pollegada cubica de ouro $\frac{38}{3}$ de onça, o numero x de pollegadas cubicas pezarã $\frac{38x}{3}$. Pela mesma razaõ, y de pollegadas cubicas de prata pezarã $\frac{62y}{9}$. Logo o ouro e a prata pezarãõ juntamente $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9}$, e conseguintemente teremos $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$.

Destas duas equações se tira $x = 12 - y$
 $= \frac{450 - 31y}{57}$; logo $57(12 - y) = 450 - 31y$,
 que dá $y = 9$, e conseguintemente $x = 3$, isto he, misturaraõ-se 3 pollegadas cubicas de ouro com 9 de prata. Com effeito, $9 + 3 = 12$, e $38 + 62 = 100$.

Se as duas materias que se misturaraõ tivessem gravidades especificas diferentes das suppostas (por gravidade especifica entendemos o pezo de hum determinado volume), e se tanto o pezo total do misto, como o seu volume fossem outros quaifquer; o methodo para achar as quantidades de cada especie de materia, naõ deixaria porisso de ser o mesmo. Assim, para incluir todas as soluções dos problemas deste genero em huma unica, seja

A quantidade da primeira materia - - - - - x

A da segunda - - - - - y

A do composto - - - - - a

Reportando-se a , x e y à mesma unidade de volume, por exemplo, a pollegadas cubicas.

O pezo total do misto - - - - - b

A gravidade especifica, ou o pezo da unidade adoptada de volume, da primeira materia - c

A da segunda - - - - - d

Expressando-se b , c , d na mesma unidade de pezo; v. g. em onças.

Isto posto; teremos $x + y = a$, e $cx + dy = b$;

logo $x = \frac{b - ad}{c - d}$, e $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Estes valores dão huma regra susceptivel de huma enunciaçãõ commoda. Porque, sendo $b - ad = a \left(\frac{b}{a} - d \right)$, e $ac - b = a \left(c - \frac{b}{a} \right)$, as nossas formulas podem reduzir-se a - - - - -

$x = \frac{a \left(\frac{b}{a} - d \right)}{c - d}$; e $y = \frac{a \left(c - \frac{b}{a} \right)}{c - d}$; isto he, ás duas analogias.

$$c - d : \frac{b}{a} - d :: a : x$$

$$c - d : c - \frac{b}{a} :: a : y$$

É como $\frac{b}{a}$ he o pezo da unidade de volume do composto, ou a sua gravidade especifica, podemos enunciar a regra geral para resolver todos os problemas desta especie da maneira seguinte.

Como a differença entre as gravidades especificas dos simples para a differença entre as gravidades especificas do composto e do simples mais leve, assim a

quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais pezado.

Como a differença entre as gravidades especificas dos simples para a differença entre as gravidades especificas do composto e do simples mais pezado, assim a quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais leve.

Esta regra he a mesma a que (Arith. 200) demos o nome de *Regra de Liga Inversa*, cuja demonstração reservamos para esta parte.

Ao mesmo problema se podem reduzir infinitos outros, que á primeira vista não parecem da mesma especie. Por exemplo este: *Fazer de 522 libras 42 peças, humas de 24^l, e outras de 6^l*; porque vem a ser o mesmo que o de hum misto, cuja quantidade (*a*) he 42, e o pezo (*b*) 522, sendo a gravidade especifica (*c*) do primeiro simples = 24, e a (*d*) do segundo = 6. Conforme a regra, acharemos que são necessarias 15 peças de 24^l, e 27 de 6^l.

A mesma regra serviria tambem para resolver o problema seguinte. *Pezando hum pē cubico de agua do mar 74^l, e hum de agua da chuva 70^l; quanto se deve misturar de huma e outra, para fazer agua que peze 73^l por pē cubico?*

Daqui se vê, quanto he util, como ja dissemos, o representar em geral as quantidades dadas que entraõ nos problemas, e interpretar ou traduzir os resultados algebricos das soluções.

Probl. III. *Temos tres barras, em cada huma das quais entra ouro, prata, e cobre. A liga da primeira he tal, que em 16 onças ha 7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre. Na segunda em 16 onças ha 5 de ouro, 7 de prata, e 4 de cobre. Na terceira em 16 onças ha 2 de ouro, 9 de prata, e 5 de cobre.*

Per-

Pertende-se compôr huma quarta barra, com diferentes porções destas tres ligas, tal que em 16 onças entrem 4 onças $\frac{15}{16}$ de ouro, $7\frac{10}{16}$ de prata, e $3\frac{7}{16}$ de cobre.

Representemos por x , y , e z o numero de onças, que se deve tomar respectivamente da primeira, segunda, e terceira barra.

Como 16 onças da primeira contem 7 de ouro, x conterà $\frac{7x}{16}$ do mesmo metal. Semelhantemente, tomando y da segunda e z da terceira, tomamos $\frac{5y}{16}$ e $\frac{2z}{16}$ de ouro. Teremos pois pela primeira condi-

ção do problema $\frac{7x + 5y + 2z}{16} = 4\frac{15}{16}$.

Logo - - - - - $7x + 5y + 2z = 79$

Do mesmo modo a se-

gunda condição dá - - - - - $8x + 7y + 9z = 122$

E a terceira - - - - - $x + 4y + 5z = 55$

Eliminando x , teremos

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z.$$

Eliminando agora y , teremos

$$\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$$

Logo $z = 3$, $y = 9$, e $x = 4$: isto he; devemos tomar 4 onças da primeira barra, 9 da segunda, e 3 da terceira, para que a nova barra tenha 4 onças e $\frac{15}{16}$ de ouro, $7\frac{10}{16}$ de prata, e $3\frac{7}{16}$ de cobre.

Com effeito, tendo a primeira em 16 onças

7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre, 4 onças conterão $\frac{28}{16}$ de ouro, $\frac{32}{16}$ de prata, e $\frac{4}{16}$ de cobre. Do mesmo modo, 9 onças da segunda terão $\frac{45}{16}$ de ouro, $\frac{63}{16}$ de prata, e $\frac{36}{16}$ de cobre, assim como 3 onças da terceira terão $\frac{6}{16}$ de ouro, $\frac{27}{16}$ de prata, e $\frac{15}{16}$ de cobre.

Reunindo as tres porções de cada metal, teremos $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, ou $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ e $3\frac{7}{16}$ pelas quantidades de ouro, prata e cobre, que haõ de entrar na quarta barra,

Dos casos, em que os problemas ficam indeterminados, ainda que haja igual numero de equações, e de incognitas.

87 **T** Em isto lugar, quando algumas condições differem taõ sómente na apparencia. Entaõ as equações, que as exprimem, ou são multiplas humas das outras, ou, em geral, algumas dellas se compõem de huma ou de muitas outras somadas ou diminuidas, multiplicadas ou divididas por certos numeros. Por exemplo, hum problema que conduzisse a estas tres equações

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 17 \\ 8x + 2y + 4z &= 20 \\ 18x + 8y + 8z &= 54 \end{aligned}$$

ficaria indeterminado, isto he, seria susceptivel de hum numero indefinido de soluções; porque a ul-

tima equação compõe-se da segunda somada com o dobro da primeira, isto he, segue-se necessariamente das duas primeiras, e por tanto não exprime condição nova: estamos pois realmente no caso de ter sómente as duas primeiras, e tres incognitas, no qual cada huma destas, como veremos, he susceptivel de hum numero indefinido de valores.

88 Quando huma equação se comprehende nas outras, o calculo sempre o declara, conduzindo-nos a huma equação *identica*, isto he, a huma equação, na qual os dous membros constaõ de termos iguais e semelhantes: de maneira que apparecerãõ tantas equações identicas, quantas forem as inuteis das propostas.

Por exemplo, as duas equações $6x + 8y = 12$, e $x + \frac{4}{3}y = 2$ daõ $x = \frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, e conseguintemente $12 - 8y = 12 - 8y$, equação identica, a qual não dá a conhecer o valor de y , porque depois das operações ordinarias achamos $0 = 0$. Logo huma equação he inutil: com effeito, a segunda se fórma da primeira dividida por 6.

Do mesmo modo as tres equações de cima daõ $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{20 - 2y - 4z}{8}$, e $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{54 - 8y - 8z}{18}$, donde eliminando y , se deduz a equação identica $\frac{36 + 4z}{14} = \frac{36 + 4z}{14}$; não temos pois neste caso mais que duas equações realmente distinctas.

Mas

Mas se tivéssemos as tres equações seguintes

$$5x + 3y + 2z = 24$$

$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$

$$15x + 9y + 6z = 72$$

Acharíamos

$$600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z,$$

$$\text{e } 360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z;$$

equações identicas, das quais não se pôde tirar nem y , nem z . Logo, propriamente fallando, ha huma unica equação; e bem se vê como as duas ultimas se fórmaõ da primeira.

89 Nos casos de que acabamos de tratar, tanto o numerador como o denominador de cada hum dos valores (85) das incognitas x , y , z se reduzem a 0; e assim deve ser. Podemos pois por meio das mesmas formulas gerais conhecer se humas equações se comprehendem nas outras.

Dos casos em que os problemas são impossiveis.

90 **A** Impossibilidade de hum problema, cujas equações não passaõ do primeiro grão, conhece-se por algum resultado absurdo, a que chegamos no decurso do calculo.

Se tivermos, por exemplo, $5x + 3y = 30$, e $20x + 12y = 135$, igualando os dous valores de x , acharemos $600 = 675$; logo o problema, que conduziisse ás duas equações propostas, feria impossivel, e absurdo.

O mesmo acontecerá, quando o numero das equações for maior que o das incognitas, e nenhuma dellas se comprehender nas outras.

91 As soluções negativas indicaõ huma especie de impossibilidade ; porem esta naõ he absoluta , he somente relativa ao sentido , em que se tomaraõ as quantidades ; de forte que ha sempre hum , no qual as soluções saõ naturais, e admissiveis (70). Os resultados incompativeis com as condições mostraõ tambem, que o problema he impossivel ; como, por exemplo , se acharmos hum resultado fraccionario , devendo ser inteiro.

Dos Problemas indeterminados.

92 **D**amos o nome de *Problema indeterminado* a todo aquelle , a que se satisfaz por muitos modos , sem que se possa determinar , qual he de todos elles o que tem particularmente lugar. Nestes problemas há sempre menos condições que incognitas ; e ficando huma quantidade a arbitrio do Analysta , saõ infinitas as soluções , salvo se forem limitadas , como muitas vezes acontece , por algumas condições , as quais naõ podendo exprimir-se em equações , naõ determinaõ directamente o numero de soluções , que o problema pôde ter.

Propondo-se , por exemplo , *Achar dous numeros , cuja soma seja 24* ; representando hum e outro por x e y , teremos $x + y = 24$, donde se tira $x = 24 - y$. Bem se vê que este problema he susceptivel de huma infinidade de soluções , se por x , e y entendermos indifferentemente quaisquer numeros inteiros ou quebrados , positivos ou negativos : porque para satisfazer á questãõ basta dar a y o valor que quizermos , e calcular o de x na equaçãõ $x = 24 - y$. Deste modo, suppondo successiva-

men

mente $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, &c.
 teremos $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$, &c.

Querendo porem somente numeros inteiros e positivos, he muito limitado o numero das soluções, porque entao y não deve ser maior que 24, e a equação não pôde ter mais que 25 soluções, contando o; de maneira que suppondo successivamente $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, &c. teremos $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, &c.

Todos os problemas indeterminados podem reduzir-se á equação $ax + by = c$.

93 Para mostrar o modo de resolver estes problemas em numeros inteiros e positivos, quando seja dada huma tal condição, servem de muito os exemplos seguintes, porque nem sempre he isso tão facil como no precedente,

Probl. I. Pergunta-se por quantos modos se podem pagar 542 libras, dando peças de 17^l, e recebendo em troco outras de 11^l.

Seja x o numero de peças de 17^l, e y o numero de peças de 11^l, os quais devem ser numeros inteiros. Como dando x peças de 17^l se pagão 17 x ^l, e aceitando y peças de 11^l se recebem 11 y ^l, he claro que se pagão 17 x — 11 y ; e porque o pagamento deve ser de 542^l, teremos 17 x — 11 y = 542. Tirando desta o valor da incognita, que tem menor coeſſiciente, acharemos $y = \frac{17x - 542}{11}$, que

se reduz pela divisaõ a $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$.

De

Devendo y ser hum numero inteiro, tambem $\frac{6x-3}{11}$ o deverá ser. Representemos por E hum

numero inteiro; teremos $\frac{6x-3}{11} = E$, e conse-

guintemente $x = \frac{11E+3}{6} = E + \frac{5E+3}{6}$. Como

x tambem deve ser hum numero inteiro, he preci-

so que $\frac{5E+3}{6}$ seja hum numero inteiro. Represen-

te-se este por E' ; teremos $\frac{5E+3}{6} = E'$, e conse-

guintemente $E = \frac{6E'-3}{5} = E' + \frac{E'-3}{5}$.

He pois necessario que $\frac{E'-3}{5}$ seja hum nume-

ro inteiro: representando-se este por E'' , tere-

mos $\frac{E'-3}{5} = E''$, donde se tira $E' = 5E'' + 3$.

A operaçáo não passa adiante, porque tomando por E'' o numero inteiro que se quizer, teremos sempre para E' , que não tem denominador, hum numero inteiro como a questaó requer.

Voltando agora aos valores de x e y , como te-

mos $E = \frac{6E'-3}{5}$, ferá $E = 6E'' + 3$, e conse-

guintemente $x = 11E'' + 6$, e $y = 17E'' - 40$.

O valor de x dá a liberdade de tomar por E'' hum numero inteiro qualquer, mas o de y não permite

que se tome E'' menor que 3; porque y não será

positivo, senáo for $17E'' > 40$, ou $E'' > \frac{40}{17}$; isto he,

$E'' > 2$.

Podem

Podemos pois satisfazer a este problema por huma infinidade de modos diferentes, substituindo por E'' todos os numeros inteiros positivos desde 3 até o infinito. Assim, pondo successivamente $E'' = 3$, $E'' = 4$, $E'' = 5$, $E'' = 6$, $E'' = 7$ &c. teremos os valores correspondentes de x , e de y , como aqui se mostra.

$$\begin{array}{rcl} x = 39 & \dots & y = 11 \\ = 50 & & = 28 \\ = 61 & & = 45 \\ = 72 & & = 62 \\ = 83, \text{ \&c.} & & = 79 \end{array}$$

Em geral, $x = 39 + 11m$, e $y = 11 + 17m$.
Cada hum delles he tal, que dando o numero x de peças de 17^l , e recebendo o numero correspondente y de peças de 11^l , pagaremos 542^l .

Probl. II. Fazer 741 lib. em 41 peças de tres especies; de 24^l , de 19^l , e de 10^l .

Sejaõ x , y , e z os numeros de cada huma das tres especies; teremos $x + y + z = 41$, e $24x + 19y + 10z = 741$.

Eliminando huma das incognitas, x por exemplo, teremos $x = 41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$;

logo $5y + 14z = 243$; e tomando o valor de y , acharemos $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$.

Como y e z devem ser numeros inteiros, he necessario que $\frac{3 - 4z}{5}$ seja hum numero inteiro E :

logo $\frac{3 - 4z}{5} = E$, e $z = -E + \frac{3 - E}{4}$. Deve pois
fer

ser $\frac{3-E}{4} = E'$, donde se tira $E = 3 - 4E'$.

Fazendo agora as substituições necessarias nos valores de x , y , e z , teremos $z = 5E' - 3$, $y = 57 - 14E'$, e $x = 9E' - 13$.

Nestes tres valores em lugar de E' podemos substituir o numero inteiro que quizermos, com tanto que resultem numeros positivos para x , y , e z . Esta condição envolve as tres seguintes. 1.º Que seja

$9E' > 13$, ou $E' > 1\frac{4}{9}$. 2.º Que seja $57 >$

$14E'$, ou $E' < 4\frac{1}{14}$. 3.º Que seja $5E' > 3$, ou

$E' > \frac{3}{5}$; como acontecerá, todas as vezes que se

houver satisfeito á primeira condição. Por este modo o numero das soluções he tão limitado, que não passa de tres: para as achar daremos por valores a E' os numeros 2, 3 e 4, que são os unicos admissiveis. Logo as 741' não podem fazer-se em 41 peças das tres especies propostas de outra sorte, que não seja tomando os seguintes valores de x , y , e z .

$$x = 5 \dots 14 \dots 23$$

$$y = 29 \dots 15 \dots 1$$

$$z = 7 \dots 12 \dots 17$$

No progresso das divisões, que fazemos para reduzir o valor da indeterminada a hum numero inteiro, podemos tomar o quociente por cima do verdadeiro valor, e assim abbreviaremos muito o calculo em alguns casos.

Por exemplo, tendo a equação $19y = 52x + 139$, em lugar de concluir $y = 2x + 7 + \frac{14x+6}{19}$, concluiremos $y = 3x + 7 - \frac{5x+6}{19}$; por-

porque, sendo $3x$ o quociente mais proximo; o excesso $5x$, a que por compensação damos o final $-$, tem hum coeſſiciente menor, e conſequentemente o calculo ſe acabará mais depressa. Fazendo pois $\frac{-5x+6}{19} = E$, concluiremos pela meſma razão $x = 1 - 4E + \frac{1+E}{5}$; e fazendo $\frac{1+E}{5} = E'$, teremos $E = 5E' - 1$; logo $x = 5 - 19E'$, e $y = 21 - 52E'$. Deſte modo dando por valores a E' todos os numeros negativos, acharemos todas as ſoluções positivas da equação. Se quizermos uſar de numeros positivos, faremos $\frac{-5x+6}{19} = -E$, e depois $\frac{-E+1}{5} = -E'$, como he permittido, e teremos $x = 19E' + 5$, $y = 52E' + 21$.

Do meſmo modo, no problema II. onde devia ſer $\frac{3-4z}{5} = E$, podemos tomar $-z + \frac{3+z}{5} = E$, e concluir $z = 5E - 3$.

Abbreviaõ-ſe muito eſtes calculos, ſomando ou diminuindo, multiplicando ou repartindo as quantidades, que devem ſer numeros inteiros, por outros numeros inteiros. No problema I., multiplicando $\frac{6x-3}{11}$ por 2, teremos $\frac{12x-6}{11} = E$, e ſubtrahindo $\frac{11x}{11}$, acharemos $x = 11E + 6$, $y = 17E - 40$.

Probl. III. Sendo o Circulo Solar huma revolução periodica de 28 annos, o Lunar ou Aureo Numero outra de 19 annos, e renovando-ſe a Indicção Romana todos os 15 annos; pergunta-ſe qual he o anno da Era Vulgar, que tem tida 10 de Circulo Solar, 8 de Lunar, e 11 de Indicção.

Re-

Reduz-se o problema a achar hum número, que sendo dividido por 28, 19, e 15 dê os restos 10, 8, e 11. Sendo pois x este número, teremos $\frac{x-10}{28}$

$= E$, $\frac{x-8}{19} = E'$, e $\frac{x-11}{15} = E''$. As duas primeiras dão $E = 19E' + 4$, e $x = 532E' + 122$. Substituindo este valor de x na terceira, teremos $E' = 15E'' + 12$, e conseguintemente $x = 7980E'' + 6506$.

Suppondo $E'' = 0$, $E'' = 1$, &c. teremos . . .
 $x = 6506$, $x = 14486$, &c.

Para reduzir á Era vulgar estes annos, que pertencem ao Periodo Juliano, tiraremos de cada hum delles 4713, isto he, o anno do Periodo a que corresponde o principio da nossa Era. Fazendo pois esta applicação á primeira epoca, acharemos 1793. Logo desde o principio do mundo, conforme a Chronologia ordinaria, o anno de 1793 tem sido o unico, que reunio 17 de Circulo Solar, 6 de Numero Aureo, e 5 de Indicção. O anno de 9773 da nossa Era será o unico, que no intervallo de 1793 até 9773 poderá satisfazer ás mesmas condições.

Das Equações do segundo gráo a huma incognita.

94 **C**hamamos *Equações do segundo gráo* a todas aquellas, em que a mais alta potencia da incognita he esta incognita multiplicada por si mesma, ou elevada ao quadrado. A equação $5x^2 = 125$ he do segundo gráo, porque no termo $5x^2$

a quantidade x está multiplicada por si mesma. Do mesmo modo $x^2 + px = q$ he huma equação geral do segundo gráo, sendo p e q quaisquer quantidades conhecidas, positivas, ou negativas.

95 Quando $p = 0$, isto he, quando a equação não inclue outra potencia da incognita, mais que o quadrado, resolve-se esta com muita facilidade, desembaraçando o dito quadrado (56, 60, e 64) de tudo o que a multiplica ou divide, e tirando depois a raiz quadrada de cada membro.

Por exemplo, da equação pura do segundo gráo $5x^2 = 125$, dividindo pelo multiplicador 5, concluo $x^2 = 25$, e tirando a raiz quadrada de cada membro, $x = 5$; porque as raizes quadradas de quantidades iguais são também iguais. Do mesmo modo, se tivermos $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, acharemos pelas regras ordinarias $13x^2 = 105$, e depois $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$, isto he, igual á raiz quadrada de $\frac{105}{13}$.

Usamos deste *final radical* para significar, que se deve tirar a raiz quadrada. Havendo esta de extrahir-se de huma fracção, como no caso presente, devem as pernas do final $\sqrt{\quad}$ descer para baixo da risca, que separa o numerador do denominador; querendo porém representar a raiz quadrada de hum termo sómente da fracção, o radical deve ficar todo por cima, ou por baixo da risca da divisaõ. Assim para notarmos que a raiz quadrada de 40 se ha-de dividir por 3, escreveremos $\frac{\sqrt{40}}{3}$. Se for complexa a quantidade, de que quizermos extra-

extrahir a raiz quadrada, daremos ao radical huma caudas com que se cubra toda a quantidade, ou tambem encerraremos esta entre parentheses: por exemplo, para representarmos a raiz quadrada de

$3ab + b^2$, escreveremos $\sqrt{3ab + b^2}$, ou . . .
 $\sqrt{(3ab + b^2)}$.

96 Como (24) de $+$ \times $+$, e de $-$ \times $-$ resulta igualmente $+$, segue-se, que á raiz quadrada de toda a quantidade que tiver o final \sqrt , se deve dar indifferentemente $+$, ou $-$. Assim na equação precedente $x^2 = 25$, podemos dizer com igual razão, que a raiz quadrada he $+5$, ou que he -5 , porque cada numero destes multiplicado por si mesmo dá $+25$. A resolução pois da equação $x^2 = 25$ se deve escrever desta sorte $x = \pm 5$, que se lê dizendo *x igual a mais ou menos 5*, e equivale a estas duas equações $x = 5$, e $x = -5$; valores diferentes, não obstante serem representados pela mesma letra x , pois sendo esta hum final pelo qual se exprime a quantidade que se busca, pôde designar quantidades diferentes.

Da mesma sorte, da equação geral $x^2 = q$ deduziremos $x = \pm \sqrt{q}$. Se dessemos ao primeiro membro o final ambiguo \pm , teriamos $\pm x = \pm \sqrt{q}$, da qual se tirão as quatro equações $+x = +\sqrt{q}$, $+x = -\sqrt{q}$, $-x = +\sqrt{q}$, e $-x = -\sqrt{q}$. Como porém as duas ultimas não differem das duas primeiras, basta dar o final \pm ao segundo membro.

97 Se tivermos de extrahir a raiz quadrada de huma quantidade precedida do final $-$, affectaremos tudo com o radical, dando-lhe tambem o final \pm . Assim se tivessemos $x^2 = -4$, escreveriamos $x = \pm \sqrt{-4}$, ou $x = \pm \sqrt{(-4)}$;
 F ain-
 e

ainda que a raiz de 4 seja 2, não se segue que devamos escrever $x = \pm 2$; he essencial o attender ao final — da quantidade que está debaixo do radical.

98 Todas as vezes que huma equação conduzir deste modo a tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, concluiremos, que he impossivel o problema que deo tal equação. Com effeito, huma quantidade negativa não pôde ter raiz quadrada, nem exacta, nem approximada, porque não he possivel achar huma quantidade, que multiplicada por si mesma dê producto negativo. He verdade, que -4 , por exemplo, pôde resultar de $+2$ multiplicado por -2 ; mas tendo estas quantidades differente final, não são iguais, e consequentemente o seu producto não he hum quadrado. Pelo que, quando se propõe tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, propõe-se hum absurdo, e consequentemente será impossivel todo o problema, que depender de semelhante operação. Tal he o caracter, porque se distingue a impossibilidade dos problemas do segundo gráo.

— Não deve porém reputar-se como inutil a consideração das raizes quadradas das quantidades negativas: muitas vezes o problema he possivel, e sem embargo disso sómente admite resolução pelo concurso desta especie de quantidades, nas quais por fim desaparece o absurdo. As raizes quadradas das quantidades negativas chamaõ-se *quantidades imaginarias*. Assim $\sqrt{-1}$. . . $\sqrt{-2}$. . . $\sqrt{-a}$. . . $a + b\sqrt{-1}$. . . $a + \sqrt{-b}$ são todas quantidades imaginarias.

99 Passando agora ás equações completas do segundo gráo, nas quais não he $p = 0$, como em $x^2 - 4x = 12$, he claro que se podermos preparar

o primeiro membro a fim de ser hum quadrado perfeito, tirando depois a raiz quadrada de cada membro, ficará a equação reduzida ao primeiro gráo, e não terá difficuldade a sua resolução. Esta preparação requer tres cousas: 1.º que se passem para hum membro (56) todos os termos affectos de x , e para o outro todas as quantidades conhecidas: 2.º que o termo x^2 se faça positivo (58): 3.º que este se desembarace (60, 64) de todo o multiplicador, ou divisor. Feito isto, se ajuntarmos a cada membro o quadrado da ametade da quantidade conhecida que multiplica x , ficará completo (25) o quadrado do primeiro membro.

Por exemplo, para preparar a equação . . .

$4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$ que se pertende resolver;

1.º passaremos todos os x para o primeiro membro, escrevendo x^2 em primeiro lugar, e teremos

$-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2.º faremos x^2 positivo,

mudando todos os finais, e teremos $\frac{3}{5}x^2 - 6x$

$= -4$; 3.º desembaraçaremos x^2 , multiplican-

do todos os termos por $\frac{5}{3}$, e teremos $x^2 - 10x$

$= -\frac{20}{3}$.

Reduzido assim o primeiro membro de qualquer equação do segundo gráo á forma $x^2 \pm px$, noto que esta quantidade tem já hum quadrado x^2 , que se pôde considerar como o quadrado do primeiro termo x de hum binomio. Tem mais o termo px , que se pôde considerar como o dobro de x

multiplicado por outra quantidade, que devé ser a ametade do multiplicador p de x . Logo para completar o quadrado, nada mais falta do que ajuntar o quadrado desta segunda quantidade $\frac{1}{2} p$, isto he, ajuntar $\frac{1}{4} p^2$. Deste modo a equação geral $x^2 + px = q$ se transforma em $x^2 + px + \frac{1}{4} p^2 = q + \frac{1}{4} p^2$. Extrahiremos pois a raiz quadrada exactamente do primeiro membro, tirando as raizes separadamente dos dous termos extremos x^2 , e $\frac{1}{4} p^2$, e interpondo o final que tiver o termo medio, porque o quadrado de $a \pm b = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Quanto ao segundo membro, tira-se, ou indica-se a sua raiz quadrada; e assim teremos $x + \frac{1}{2} p = \pm \sqrt{\left(q + \frac{1}{4} p^2 \right)}$ logo
 $x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 + q \right)}$.

100 Desta formula se deduz a regra seguinte, que observaremos na resolução das equações do segundo gráo.

Havendo preparado a equação, iguale-se a incognita x á ametade do seu multiplicador, tomado com final contrario, mais ou menos a raiz quadrada da mesma ametade elevada ao quadrado, e da quantidade conhecida que constitue o segundo membro.

Por exemplo, tendo a equação $x^2 + 6x = 16$, como esta se acha preparada, concluiremos immediatamente $x = -3 \pm \sqrt{(9 + 16)}$, igualando x á ametade -3 do coeﬃciente 6 de x tomado com

com final contrario, mais ou menos a raiz quadrada do quadrado 9 do mesmo 3, e do termo conhecido 16 da equação. Logo $x = -3 \pm 5$, isto he $x = 2$, ou $x = -8$.

Do mesmo modo a equação $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, que preparada (99) se muda em $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$, dá $x = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{20}{3}} = 5 \pm \sqrt{\frac{55}{3}}$.

Aplicação a alguns Problemas do segundo gráo.

101 **S**Eja qual for o gráo dos problemas, a regra para os pôr em equação he a mesma que havemos dado (67).

Probl. I. *Achar hum numero tal, que sendo junto 8 vezes ao seu quadrado, faça a soma de 33.*

Seja x o numero procurado; o seu quadrado será x^2 ; logo $x^2 + 8x = 33$. Desta se deduz conforme a regra (100) ... $x = -4 \pm \sqrt{16 + 33} = -4 \pm 7$, e consequentemente teremos estes dous valores, $x = 3$, e $x = -11$.

O primeiro satisfaz ao problema; porque ajuntando 8 vezes 3, ou 24 a 9, quadrado de tres, temos a soma 33.

O segundo, como he negativo, indica que ha outro problema, no qual, tomando x em sentido contrario, teremos 11 por solução; isto he, o segundo valor de x deve satisfazer a este problema:

Achar

Achar hum numero tal , que sendo tirado 8 vezes do seu quadrado , o resto seja 33 ; e com effeito , de 121 quadrado de 11 tirando 8 vezes 11 , ou 88 , o resto he 33.

Para confirmar o que havemos dito sobre as quantidades negativas (70), note-se que este segundo problema , sendo posto em equação dá $x^2 - 8x = 33$, donde se tiraõ os dous valores $x = 11$, e $x = -3$, que faõ o contrario dos do primeiro problema.

102 Deste modo toda a equação do segundo gráo a huma incognita tem duas soluções , porque ambos os valores 11 e -3 , sendo substituidos em lugar de x na equação $x^2 - 8x = 33$, a resolvem igualmente , isto he , reduzem igualmente o primeiro membro a 33 , como he facil de ver. Mas nem sempre o problema , que conduzio á equação , tem duas soluções ; porque no caso presente o segundo valor -3 resolve unicamente o problema contrario. Muitas vezes as duas soluções da equação faõ tambem soluções do problema , como veremos adiante.

Probl. II. *Deviaõ repartir-se 175 lib. por hum certo numero de pessoas , mas duas por ausentes não tem parte. Esta circumstancia dá hum augmento de 10^l á parte de cada hum dos presentes : pergunta-se quantos haviaõ de ser entaõ os participantes.*

Representando este numero por x , a parte de cada hum , se todos estivessem presentes , seria $\frac{175}{x}$; mas como faltaõ dous , ferá $\frac{175}{x-2}$; logo , conforme o problema , $\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10$, isto he , $-10x^2 + 20x = -350$.

Esta

Esta equação sendo preparada (99) dá $x^2 - 2x = 35$, e conseguintemente (100)... $x = 1 \pm \sqrt{(35 + 1)}$
 $= 1 \pm 6$; logo $x = 7$, e $x = -5$. O primeiro valor
 he o que se procura; porque $\frac{175}{5} - \frac{175}{7} = 10$.
 O segundo porém resolve o problema, em que se
 tratasse de repartir 175^l por duas pessoas mais, de
 maneira, que com esta circumstancia a parte, que
 havia de caber sem isso a cada hum, tivesse huma
 diminuição de 10^l.

Probl. III. *Comprou-se hum cavallo, o qual se vendeo depois por 24 dobras, perdendo-se tanto por 100, como tinha custado: pergunta-se por quanto se havia comprado.*

Seja x o numero buscado, isto he, o numero de dobras que custou o cavallo; logo, fazendo a proporção $100 : x :: x :$; o quarto termo $\frac{x^2}{100}$ ferá a perda, e conseguintemente $x - \frac{x^2}{100} = 24$.

Preparando esta equação, acharemos $x^2 - 100x = -2400$, donde (100) se tira $x = 50 \pm \sqrt{(2500 - 2400)} = 50 \pm 10$; isto he, $x = 60$, e $x = 40$. Podia pois o preço do cavallo ser igualmente de 60, ou de 40 dobras, porque o enunciado da questão não determina qual dos dous tem lugar. Com effeito, suppondo que o cavallo custou 60 dobras, a perda foi de 36, logo vendeo-se por $60 - 36 = 24$. No segundo caso, a perda foi de 16 dobras, logo vendeo-se por $40 - 16 = 24$.

103 As duas soluções, que tem toda a equação do segundo gráo, podem ser ambas positivas, como neste problema: ou huma negativa, e outra posi-

litiva, como nos dous precedentes: ou tambem ambas negativas, quando o enunciado da questãõ he vicioso; porque cada huma destas soluções mostra, que a incognita se deve tomar em sentido contrario ao do enunciado. Propondo-se, por exemplo: *Achar hum numero tal, que ajuntando-se ao seu quadrado nove vezes o mesmo numero, e mais 50, a soma seja igual a 30*; teremos a equação $x^2 + 9x + 50 = 30$, ou $x^2 + 9x = -20$, que dá $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} - 20\right)} = \frac{-9 \pm 1}{2}$; logo $x = -4$, e $x = -5$. O problema pois deve mudar-se neste: *Achar hum numero tal, que ajuntando-se 50 ao seu quadrado, e tirando-se da soma 9 vezes o mesmo numero procurado, o resto seja 30*.

104. Assim tem a Algebra a vantagem não somente de resolver as questões, mas tambem de ensinar a distinguir se são bem ou mal propostas, e até (98) se são impossiveis. Por exemplo, resolva-se o problema III., suppondo 26 dobrões em lugar de 24, e acharemos $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; logo o problema nesta hypothese he impossivel. Acontece isto todas as vezes que for q negativo, e ao mesmo tempo maior que $\frac{1}{4} p^2$ (98, 99).

PROB. IV. *Humã companhia de dous negociantes ganhou 18 dobrões e $\frac{3}{4}$, tendo entrado nella o primeiro com 30 dobrões por 17 mezes, e o segundo com a sua parte 5 mezes depois do primeiro, ou por 12 mezes; esta he tal, que somada com o lucro respectivo faz 26 dobrões. Qual he a entrada do segundo, e qual o ganho de cada hum?*

Se conhecessen. os a entrada do segundo, com facilidade se acharia o ganho de cada hum. Representen-

sentando pois a dita entrada por x , e reduzindo a sociedade a hum mez de duração, a entrada do primeiro valerá 510 dobrões por hum mez, e a do segundo $12x$ pelo mesmo tempo. Logo (Arith. 197)

$$510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x : \text{ganho do segundo}$$

$$= \frac{75x}{170 + 4x}; \text{ e conseguintemente pelas condições}$$

$$x + \frac{75x}{170 + 4x} = 26.$$

Preparando esta equação para se resolver, teremos $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; logo $x = -\frac{141}{8} \pm$

$$\sqrt{\left(\frac{19881}{64} + 1105\right)} = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}; \text{ isto he no pro-}$$

blema actual, $x = \frac{160}{8} = 20$. O segundo negociante pois entrou com 20 dobrões, e conseguintemente ganhou 6, e o primeiro $12\frac{3}{4}$.

Probl. V. *Dividir hum numero a em duas partes tais, que o producto de m vezes a maior por n vezes a menor seja igual a b.*

Representando por x huma das duas partes, a outra será $a - x$; e teremos a equação $m(a - x)nx = b$, logo $x^2 - ax = \frac{-b}{mn}$, e conseguintemente

$$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{b}{mn}\right)}. \text{ Se for } b > \frac{mna^2}{4}, \text{ o problema será impossivel.}$$

106 Quando as equações litterais tiverem a fôrma muito composta, para as reduzirmos a tres termos, igualaremos a huma quantidade a soma de todas as que multiplicarem x , e todas as quantidades conhecidas a outra. Por exemplo, se tivermos

mos a equação $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 + ab^2 - acx$, preparando acharemos $x^2 + \frac{ac + bc}{a - b}x = \frac{a^2b + ab^2}{a - b}$, a qual, suppondo $\frac{ac + bc}{a - b} = p$, e $\frac{a^2b + ab^2}{a - b} = q$, se reduz á forma $x^2 + px = q$.

107 Porem estas transformações somente se devem fazer, quando o calculo que se seguir, não usando dellas, venha a ser muito complicado. Neste mesmo exemplo depois de dar á equação propos-

ta a forma $x^2 + \frac{ac + bc}{a - b}x = \frac{a^2b + ab^2}{a - b}$, indicando o quadrado, deduziremos (100) com summa facilidade

$$x = \frac{-ac - ab}{2a - 2b} \pm \sqrt{\left(\frac{ac + bc}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b + ab^2}{a - b}}$$

108 Havendo concluido o valor de x , podemos conservar o radical no mesmo estado em que se acha, até se fizerem as applicações numericas. Mas melhor será simplificar, reduzindo ao mesmo denominador as duas partes que estão debaixo do radical, conforme as observações que fizemos (48).

Por exemplo, tendo $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$, mul-

tiplicaremos $\frac{c}{a}$ por $4a$, e teremos $\sqrt{\left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)}$

$= \frac{\sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$ (Arith. 142). Logo se na equa-

ção geral do segundo gráo p for huma fracção, ou se

se a equação for $ax^2 + bx = c$, teremos . . .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$$

Da Extracção da Raiz quadrada das quantidades litterais.

109 **A** Resolução das equações do segundo gráo conduz, como acabamos de ver, a tirar a raiz quadrada, ou das quantidades numericas, ou das litterais. Pelo que respeita ás primeiras, não temos que acrescentar ao que dissemos na Arithmetica; resta tratar das ultimas.

Por quanto hum producto de quantidades monomias (18) inclue todas as letras dos factores, e estes são os mesmos na formação de hum quadrado; segue-se que em todo o quadrado monomio cada letra da raiz deve ser duas vezes factor, e o expoente de cada letra de hum quadrado monomio deve ser o dobro do expoente, que a mesma letra tiver na raiz. Logo: *Para tirar a raiz quadrada de hum monomio, deve-se tomar a ametade dos expoentes de cada huma das suas letras.* Assim, $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a^6} = a^3$, $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$, $\sqrt{a^4b^6c^8} = a^2b^3c^4$.

110 Se houver algum expoente impar, a quantidade proposta não será quadrado perfeito. Então, conforme a regra, se introduzirá hum expoente fraccionario, o qual designa que resta tirar a raiz quadrada á quantidade que o tiver. Por exemplo

$$\sqrt{a^2b^3c^4} = ab^{\frac{3}{2}}c^2 = abb^{\frac{1}{2}}c^2; \text{ porque } a^2b^3c^4 = a^2b^2bc^4.$$

Destá

Deſta forte o expoente fraccionario tem o meſmo uſo que o final $\sqrt{\quad}$; de maneira que $abb^{\frac{1}{2}}c^2$ ou $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ equivale a $abc^2\sqrt{b}$. Reciprocamente, em huma quantidade affecta do final $\sqrt{\quad}$ poderá ſupprimir-ſe o radical, com tanto que ſe tome a ametade de cada hum dos expoentes; transformaçãõ de grande utilidade.

111 Podemos pois em muitos caſos ſimplificar as quantidades affectas do final $\sqrt{\quad}$. Exemplos, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \dots \sqrt{a^2 b^3 c} = ab\sqrt{bc} \dots \sqrt{a^5 b^4 c^3} = a^2 b^2 c \sqrt{ac} \dots \sqrt{\frac{a^3}{f}} = a\sqrt{\frac{a}{f}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$, multiplicando o numerador e denominador por f .

112 Donde vem, que para tirarmos para fora do radical os factores que delle puderem ſahir, tomaremos a ametade dos ſeus expoentes; e pelo contrario, para meter hum factor dentro do radical, dobraremos o ſeu expoente, iſto he, levantaremos o meſmo factor ao quadrado. Affim, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \dots a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2 b}{a}} = \sqrt{ab} \dots (a + b)\sqrt{c} = \sqrt{(a + b)^2 c}$.

113 Se a quantidade tiver coeſſiciente, e eſte for quadrado perfeito, tiraremos a ſua raiz conforme as regras da Arithmetica. Affim, $\sqrt{9a^2 b^3} = 3ab\sqrt{b}$, $\sqrt{1024 a^2 b^3 c} = 32ab\sqrt{bc}$.

114 Mas ſe o coeſſiciente não for hum quadrado perfeito, veremos ſe he poſſivel reſolvello em dous factores, dos quais hum ſeja quadrado perfeito; tiraremos entãõ a raiz deſte, e deixaremos o outro debaixo do radical. Affim, $\sqrt{48a^2 b^3} = \sqrt{16} \cdot 3a^2 b^3 = 4ab\sqrt{3b}$; $\sqrt{512 a^3 b^2} = 16ab\sqrt{2a}$.

115 Se a quantidade affecta do final $\sqrt{\quad}$ for poly-

lynomio, mas não quadrado perfeito, examinaremos se pode resolver-se em dous factores, dos quais hum seja quadrado para lhe tirar a raiz, deixando o outro dentro do radical. Este factor quadrado facilmente se descobre, quando he monomio. Por exemplo, $\sqrt{(4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5)} =$

$$\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)b^2} = b\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)}.$$

116 Mas quando o factor quadrado he polynomio, ou quando a quantidade complexa que está debaixo do radical he quadrado perfeito, não pareça que se lhe extrahe a raiz, tirando-a separadamente a cada hum dos termos. Por exemplo, se tendo $a^2 + b^2$ tomássemos $a + b$ pela sua raiz quadrada, cahiriamos em grande erro, pois o quadrado de $a + b$ não he $a^2 + b^2$, mas $a^2 + 2ab + b^2$, de sorte que $a^2 + b^2$ não tem raiz exacta em letras. O methodo que então devemos observar he o seguinte, o qual se funda na formação do quadrado (25).

117 Seja a quantidade $36ab + 36a^2 + 25b^2$ de que se pede a raiz quadrada. Disporemos os termos, como na divisaõ, em ordem a huma das suas letras, de a , por exemplo.

$$\begin{array}{r} 36a^2 + 60ab + 25b^2 \\ - 36a^2 \\ \hline + 60ab + 25b^2 \\ - 60ab - 25b^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6a + 5b \text{ Raiz} \\ 12a + 5b \end{array} \right.$$

A primeira parte da raiz se achará, tomando a de $36a^2$; e como $\sqrt{36a^2} = 6a$, escreveremos $6a$ na raiz. Subtrahindo o quadrado $36a^2$ da quantidade pro-

posta, resta $60ab + 25b^2$. E porque $60ab$ deve ser o producto do dobro da primeira parte $6a$ da raiz multiplicada pela segunda, para acharmos esta, dividiremos $60ab$ por $12a$; escrevendo pois o quociente $5b$ adiante da raiz, teremos $6a + 5b$ pela raiz buscada. Para confirmarmos esta operacão, escreveremos $5b$ adiante de $12a$, e multiplicaremos o total $12a + 5b$ pelo mesmo quociente $5b$; e como tirando este producto da quantidade $60ab + 25b^2$, não resta nada, concluiremos que $6a + 5b$ he a raiz quadrada exacta de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Tomemos por segundo exemplo a quantidade $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Ordenando relativamente a a , e obrando como aqui se mostra, acharemos, que a raiz he $2a - 3b + 4c$.

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 - 4a^2 \\
 \hline
 \text{I. Resto} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 \quad + 12ab \quad \quad - 9b^2 \\
 \hline
 \text{II. Resto} + 16ac - 24bc + 16c^2 \\
 \quad - 16ac + 24bc - 16c^2 \\
 \hline
 \text{Ultimo Resto} - - - - - 0
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 2a - 3b + 4c \text{ Raiz} \\
 4a - 3b \\
 4a - 6b + 4c
 \end{array} \right.$$

Do mesmo modo se achara, que as raizes quadradas das tres quantidades . . . $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$. . . $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$. . . $a^6 - 4a^3c^3 + 8a^3e^3 + 4c^6 - 16c^3e^3 + 16e^6$, são $4a^2 + 5ab$. . . $6b^2 - 5ab - 3c^2$. . . $a^3 - 2c^3 + 4e^3$.

*Do Calculo das quantidades affectas
do final $\sqrt{}$.*

118 **O** Calculo destas quantidades irracionais se pratica por meio das mesmas quatro operações, que temos mostrado nas outras quantidades. Somam-se, ou diminuem-se duas, ou mais quantidades radicais, unindo-as com o final $+$; ou $-$, no caso de não serem semelhantes; porem se o forem, e houver sómente differença nos coefficients numericos que estão fora do radical, reduzem-se pelo methodo ordinario. Por exemplo, $3a\sqrt{b}$ somado com $4b\sqrt{c}$ dá $3a\sqrt{b} + 4b\sqrt{c}$; $4ab\sqrt{c}$ somado com $5ab\sqrt{c}$ dá $9ab\sqrt{c}$; $3a\sqrt{b}$ tirado de $4b\sqrt{c}$ dá $4b\sqrt{c} - 3a\sqrt{b}$. Supponmos, que os radicais se tem reduzido antes da operação ás expressões mais simples (112); porque se tivessesmos para ajuntar $4b\sqrt{a^3c}$ com $6a\sqrt{ab^2c}$, reduziriamos o primeiro a $4ab\sqrt{ac}$, e o segundo a $6ab\sqrt{ac}$, os quais somados dão $10ab\sqrt{ac}$.

A multiplicação executa-se como se não entrassem radicais, e depois affecta-se o producto com o final $\sqrt{}$. Por exemplo $\sqrt{a} \times \sqrt{c} = \sqrt{ac}$, multiplicando a por c , e dando ao producto ac o final $\sqrt{}$. Do mesmo modo $\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{ac} = \sqrt{(a^3c + ab^2c)}$; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $(4 + 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4$; $\sqrt{(a + b)} \times \sqrt{(a + b)} = a + b$; $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{-ab}$; $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = -\sqrt{ab}$.

Pareceria neste ultimo exemplo, que o producto conforme a regra devia ser \sqrt{ab} , ou antes $\pm \sqrt{ab}$; mas como $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$, e $\sqrt{(-b)}$

$\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, ferá $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{ab} \cdot (+1) = +\sqrt{ab}$; porque a existencia actual do final $-$ em $\sqrt{(-1)^2}$ declara a operação porque chegamos ao quadrado $(-1)^2$; de que pretendemos tirar a raiz, e conseguintemente não havendo duvida se elle procede de $(+1)$ $(+1)$, ou de (-1) (-1) , não tem aqui lugar a ambiguidade do final \pm . Não se confunda pois $\sqrt{(-a)^2}$ com $\sqrt{-a^2}$; o primeiro he . . . $\sqrt{(-a \times -a)} = -a$, e o segundo he . . . $\sqrt{(-a \times +a)}$, ou huma quantidade imaginaria $a \sqrt{-1}$. Isto posto, não pode haver difficuldade em multiplicar os polynomios, que tem termos affectos de imaginarios.

Donde se segue, que para quadrar huma quantidade affecta de $\sqrt{\quad}$, basta supprimir este final. Assim querendo quadrar $\sqrt{a^2 + b^2}$, escreveremos $a^2 + b^2$. Do mesmo modo $\sqrt{(a^2b + b^3)^2} = a^2b + b^3$.

¶ 119 Logo com muita facilidade podemos desembaraçar huma equação dos finais $\sqrt{\quad}$ que ella tiver. Por exemplo, na equação $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, deixaremos \sqrt{ax} foyente em hum membro, e teremos $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; entãõ quadrando cada membro, teremos $x^2 - 4ax - 2bx + 4a^2 + 4ab + b^2 = ax$, ou $x^2 - (5a + 2b)x = -(2a + b)^2$.

¶ 120 Para dividir huma quantidade radical por outra, dividiremos como se não houvesse o final $\sqrt{\quad}$, e daremos este ao quociente, ou á fracção. Querendo, por exemplo, dividir \sqrt{a} por \sqrt{b} , dividiremos a por b que dá $\frac{a}{b}$, e applicando o radical teãõ

teremos $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Do mesmo modo, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{ab}{a}}$
 $= \sqrt{b}$; $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a + x)}} = \sqrt{(a - x)}$; $\frac{ab\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}}$
 $= b\sqrt{c}$.

Estas fracções podem transformar-se em outras, que tenham o denominador racional; porque se o denominador da fracção for, por exemplo, $a \pm \sqrt{b}$, multiplicando tanto este, como o numerador por $a \mp \sqrt{b}$, o novo denominador será $a^2 - b$.

Affim $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $1 - \sqrt{2}$; e . . .
 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{a - b}$.

121 Se ou o dividendo, ou o divisor for racional, separaremos hum do outro por huma risca, para significar que hum delles não he affecto do radical.

Affim, para dividir a por \sqrt{a} , escreveremos $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

Quando houver semelhança nas letras do dividendo e divisor, he conveniente em muitos casos dar á quantidade racional (112) a forma de radical, porque deste modo se facilita as simplificações.

No ultimo exemplo, mudaremos a em $\sqrt{a^2}$, e teremos $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. Do mesmo modo . . .

$$\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a + x} = \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a + x)^2}} = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

Se tivermos $\frac{a^2}{b \pm \sqrt{(b^2 - a^2)}}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $b \mp \sqrt{(b^2 - a^2)}$, acharemos $b \mp \sqrt{(b^2 - a^2)}$.

Da formação das potencias dos monomios, e extracção das suas raizes.

122 **O** Numero que denota a potencia a que se quer elevar huma quantidade, chama-se *expoente da potencia*.

123 Do que havemos dito (19, e 20) se segue, que para se elevar qualquer monomio a huma potencia dada, multiplicar-se-ha o expoente actual de cada letra da quantidade proposta pelo expoente da potencia. Assim para elevar $a^2 b^3 c$ á quarta potencia escreveremos $a^8 b^{12} c^4$, multiplicando os expoentes 2, 3, 1 de a , b , c pelo expoente 4 da potencia. Em geral a potencia m de $a^n b^p c^q$ he $a^{mn} b^{mp} c^{mq}$.

124 Se a quantidade proposta for huma fracção, elevaremos á potencia tanto o numerador, como o denominador. Assim, a quinta potencia de $\frac{a^2 b^3}{cd^2}$

he $\frac{a^{10} b^{15}}{c^5 d^{10}}$, e geralmente a potencia m de $\frac{a^n b^p}{c^q d^r}$

he $\frac{a^{mn} b^{mp}}{c^{mq} d^{mr}}$.

125 No caso de haver coeſſiciente, elevallo-he-

hemos á potencia proposta, multiplicando-o por si mesmo consecutivamente. Assim a quinta potencia de $4a^3b^2$ he $1024a^{15}b^{10}$, ou indicando a operação, $4^5a^{15}b^{10}$.

126 Pelo que respeita aos finais, se o expoente da potencia for par, o resultado terá sempre $+$; mas se for impar, terá $+$, ou $-$, conforme for $+$, ou $-$ o final da quantidade proposta (24).

127 Em qualquer potencia pois o expoente actual de cada letra contem tantas vezes o expoente da sua raiz, quantas são as unidades do expoente da mesma potencia. Na quarta potencia, por exemplo, o expoente de cada letra he quadruplo do que era na quantidade primitiva, que he a raiz da dita potencia.

O numero que exprime o gráo da raiz, chama-se *expoente da raiz*.

128 Logo para voltar de qualquer potencia á sua raiz, isto he, *para tirar a raiz de hum gráo proposto de qualquer monomio*, dividiremos o expoente actual de cada huma das suas letras pelo expoente da raiz. Assim a raiz terceira de $a^{12}b^6c^3$ he a^4b^2c ; a raiz quinta de $a^{20}b^{15}c^5$ he a^4b^3c . Em geral a

raiz m de $a^n b^p$ he $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}$.

O final da raiz será indifferentemente $+$, ou $-$, se o gráo for par; mas se for impar, a raiz terá o final da quantidade proposta.

129 Se a quantidade for huma fracção, tiraremos separadamente a raiz de ambos os seus termos.

130 Havendo coefficients, tiraremos a sua raiz pelos methodos da Arithmetica.

131 Quando o expoente da raiz não dividir exactamente cada hum dos expoentes da quantida-

de proposta, não será esta huma potencia perfeita do grão de que se trata. Neste caso o expoente fica fraccionario, e designa que ainda resta extrahir huma raiz. Assim a raiz cubica de $a^2b^3c^4$ he $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{3}}c^{\frac{4}{3}}$, onde o expoente $\frac{1}{3}$ denota, que ainda resta extrahir a raiz cubica de c .

132 O sinal $\sqrt{\quad}$ tambem serve para indicar as extracções de raizes superiores ao segundo grão, escrevendo-se na abertura delle o expoente da raiz. Assim, para significar a raiz cubica de a , podemos

escrever $\sqrt[3]{a}$, de maneira que $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. Para

significar a raiz setima de a^4 escreve-se $\sqrt[7]{a^4} = a^{\frac{4}{7}}$.

133 Se a quantidade for complexa, não se deve praticar a divisaõ em cada hum dos expoentes; mas considera-se a totalidade das suas partes como huma quantidade simples, cujo expoente he naturalmente 1, e divide-se este pelo expoente da raiz.

Por exemplo, em lugar de $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)}$, ou $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$

escreveremos $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$, ou $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$. Se a quantidade total que está debaixo do radical tiver ja hum expoente, este se dividirá pelo da raiz.

Assim em lugar $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$ podemos escrever

$$(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$$

Do Calculo dos radicais, e dos expoentes.

134 **A**S regras que havemos dado (118) para somar, e diminuir as quantidades radicais do segundo

gundo grão, igualmente se applicão ás dos grãos

$$\text{superiores. Deste modo } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} + \frac{f}{g} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \\ \frac{ag + bf}{bg} \sqrt[m]{\frac{c}{d}}; \text{ e } \frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} - \frac{f}{g} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \\ \frac{ag - bf}{bg} \sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

135 No multiplicar e dividir as quantidades radicais do mesmo grão, tambem se pratica como

$$\text{nos radicais do segundo grão. Assim } \sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} \\ = \sqrt[7]{a^8} = a \sqrt[7]{a} \dots \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \dots \\ \sqrt[5]{5} \frac{a}{b} \times \frac{f}{g} \sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{f}{g} \sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}.$$

Para dividir $\sqrt[7]{a^5}$ por $\sqrt[7]{a^3}$ escreveremos $\sqrt[7]{a^2}$.

$$\text{Do mesmo modo } \frac{\sqrt[n]{ab}}{\sqrt[n]{acd}} = \sqrt[n]{\frac{b}{cd}} \dots \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} \\ = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}; \text{ porque em}$$

geral toda a potencia, ou toda a raiz da unidade he a unidade.

136 Para elevar as quantidades radicais a quaisquer potencias, multiplicaremos os seus expoentes pelos das potencias, a que as quizermos elevar. Assim $(\sqrt[7]{a^2 b^3})^4 = \sqrt[7]{a^8 b^{12}}$

$$= ab \sqrt[7]{ab^5}; \text{ porque } \sqrt[7]{a^2 b^3} = a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}} \text{ (132),}$$

$$\text{e } \left(a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}} \right)^4 = a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} \text{ (123), ou } ab \sqrt[7]{ab^5}.$$

Do

Do mesmo modo $(\sqrt[5]{2(\frac{a}{b})^m})^3 = \sqrt[5]{8(\frac{a}{b})^{3m}}$.

Logo, quando o expoente do radical he o mesmo que o da potencia proposta, basta tirar o radical. Assim $(\sqrt[m]{a})^m = a$; e com effeito, o fim he reduzir a quantidade ao primeiro estado.

137 Para extrahir huma raiz qualquer das quantidades radicais, deve-se multiplicar o expoente actual do radical pelo expoente da nova raiz. Assim, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$, multiplicando 5 por 3; e

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p}$; porque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{n}}} = \sqrt[mn]{a^p}$.

138 Se os radicais propostos forem de differente gráo, para se fazerem sobre elles as duas operações de multiplicar e dividir, primeiramente se reduzirão ao mesmo gráo. Isto se consegue, multiplicando os expoentes de cada hum dos radicais, e os das quantidades que estão debaixo delles, pelo producto dos expoentes de todos os outros radicais.

Deste modo para reduzir ao mesmo gráo os tres radicais $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, $\sqrt[8]{a^7}$, multiplicaremos o expoente 5 do primeiro radical, e o expoente 3 da quantidade respectiva a^3 , pelo producto 8.7, ou 56 dos expoentes dos outros radicais, e teremos $\sqrt[280]{a^{168}}$. Fazendo o mesmo a respeito dos outros dous, acharemos $\sqrt[280]{a^{30}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$. Porque, sen-

sendo $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$, e $\sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$,

para reduzirmos as tres fracções $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$ ao mesmo denominador, devemos multiplicar os dous termos de cada huma pelos productos dos denominadores de todas as outras.

Segue-se pois (135) que $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{mq}}$; e $\frac{a}{b} \sqrt[m]{\frac{s}{t}} : \frac{c}{d} \sqrt[n]{\frac{y}{z}} = \dots$
 $\frac{ad}{bc} \sqrt[mn]{\frac{s^ny^m}{t^my^n}}$.

139 Logo, quando o expoente do radical, e o da quantidade delle affecta tem hum divisor commum, podemos simplificar a expressaõ, dividindo ambos os expoentes por esse divisor. Assim, $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

140 Donde vem, que se o expoente da raiz que se pertende tirar, for producto de dous, ou mais numeros, podemos fazer successivamente a extracção da maneira seguinte. Supponhamos que se pede a raiz sexta de a^{24} ; podemos tirar primeiramente a raiz quadrada, depois a cubica, e teremos a raiz sexta; porque (139) $\sqrt[6]{a^{24}} = \sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[2]{a^4} = a^2$, que he o mesmo que se tomassemos immediatamente a raiz sexta de a^{24} , dividindo 24 por 6 conforme a regra geral (128).

Todas as operações precedentes se podem executar ainda mais commodamente por meio dos expoentes fraccionarios, que fazem as vezes dos rad-

dicais, e são muito próprios para o cálculo.

Havendo de multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformaremos esta operação em $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, e (20) teremos $a^{\frac{7}{5}} = a \cdot a^{\frac{2}{5}} = a \sqrt[5]{a^2}$. Do mesmo modo $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^4} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{35}{35}} \sqrt[35]{a^6}$. Em geral . . .
 $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s} = \sqrt[qm]{a^{qn + mr} b^{pq + ms}}$.

O mesmo se praticará na divisão. Por exemplo,

$$\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}} \quad (31), \text{ ou } \sqrt[5]{a}; \quad \frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}} = \dots$$

$$\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = \sqrt[35]{a^{11} b^{11}}. \text{ Em geral, } \frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \dots$$

$$\sqrt[qm]{a^{qn - mr} b^{pq - ms}}$$

141 Neste ultimo exemplo se for $\frac{r}{q} > \frac{n}{m}$, o expoente de a será negativo, e o mesmo acontecerá ao de b , se for $\frac{s}{q} > \frac{p}{m}$. Geralmente nas

divisões, ou fracções, se o expoente da letra do denominador for maior que o da letra correspondente do numerador, a differença entre elles com o sinal — será o expoente da mesma letra no numerador; de maneira que a toda a fracção algebrica se pode dar a forma de inteiro. Por exemplo, em

em lugar de $\frac{a^3}{b^2}$ podemos escrever $a^3 b^{-2}$.

Com effeito, concebendo que a contem a b hum certo numero m de vezes, inteiro, ou fraccionario, será $a = mb$, e conseguintemente $\frac{a^3}{b^2} = \frac{m^3 b^3}{b^2} = m^3 b$. Mas tambem $a^3 b^{-2} = m^3 b^3 b^{-2} = m^3 b (20)$. Logo $\frac{a^3}{b^2} = a^3 b^{-2}$.

Em geral: *Pode huma quantidade passar do denominador para numerador, ou do numerador para denominador sem alteraçã da fracção, escrevendo-se como factor no termo em que não estava, mas com o expoente de final contrario do que tinha.*

Exemplos . . . $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$. . . $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$. . .

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m} \dots \frac{c}{f} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}} \dots \frac{a^m b^n}{c^p d^q} =$$

$$a^m b^n c^{-p} d^{-q} \dots \frac{a^i + b^j}{a^2 + b^2} = (a^i + b^j) (a^2 + b^2)^{-1}$$

$$b^2)^{-1} \dots \frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$$

142 E reciprocamente: *Se huma quantidade constar de partes affectas de expoentes negativos, poderão estas passar com expoentes positivos, para denominador, ou para numerador, conforme se acharem no numerador, ou no denominador.*

Def-

Deste modo $a^3 b^{-4} = \frac{a^3}{b^4} \dots a^{m-3} =$

$$\frac{a^m}{a^3} \dots \frac{a}{b^{-2}} = ab^2 \dots \frac{p^{-2} q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \frac{mn}{p^2 q^3},$$

e assim por diante.

Tal he a idéa que devemos formar dos expoentes negativos.

Da formação das potencias das quantidades complexas.

143 **D**O que havemos dito a respeito das potencias se segue, que para elevar qualquer quantidade complexa a huma potencia proposta, devemos multiplicar a quantidade por si mesma tantas vezes, quantas são as unidades do expoente da mesma potencia. Mas como este calculo he as mais das vezes longo, e sempre indirecto, por isso vamos a dar hum methodo livre destes inconvenientes, considerando primeiramente a propriedade dos productos das quantidades binomias, porque destes depende a formação das potencias das quantidades mais compostas.

144 Sejaõ $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. muitas quantidades binomias, todas com o termo x commum.

Multiplicando $x + a$
 por $x + b$
 teremos $x^2 + ax + ab$
 $+ bx$

Mul-

Multiplicando este producto por $x + c$, teremos

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 + abx + abc \\ + bx^2 + acx \\ + cx^2 + bcx \end{array}$$

Multiplicando este segundo producto por $x + d$, teremos

$$\begin{array}{r} x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd \\ + bx^3 + acx^2 + abdx \\ + cx^3 + adx^2 + acdx \\ + dx^3 + bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{array}$$

e assim por diante. Reflectindo nestes productos, e tomando por hum termo todas as quantidades que estaõ em huma mesma columna, noto o seguinte.

1.º O primeiro termo de cada producto he o primeiro termo x de cada binomio, elevado a huma potencia designada pelo numero dos binomios; de maneira que se este fosse m , o primeiro termo seria x^m .

2.º As potencias de x vaõ ao depois diminuindo continuamente de huma unidade até o ultimo termo, em que naõ entra x .

3.º Em quanto aos multiplicadores dos diferentes termos, o do primeiro he constantemente a unidade; o do segundo he a soma dos segundos termos $a, b, c, \&c.$ dos binomios; o do terceiro he a soma dos productos das quantidades $a, b, c, \&c.$ multiplicadas duas a duas; o do quarto he a soma dos productos das mesmas quantidades $a, b, c, \&c.$ multiplicadas tres a tres; e assim por diante até o ultimo termo, que he sempre o producto das ditas quantidades. Estas consequencias saõ evidentes, seja qual for o numero dos binomios $x + a, x + b, \&c.$ que se tem multiplicado.

145 Se as quantidades $a, b, c, d, \&c.$ forem todas iguais a a , os productos serão as potencias successivas de $x + a$. Substituindo pois a em lugar de $b, c, d, \&c.$ os productos se mudarão em

$$\begin{aligned}x^2 + 2ax + a^2 &= (x + a)^2 \\x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 &= (x + a)^3 \\x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 &= (x + a)^4\end{aligned}$$

Logo se o expoente da potencia, a que se pertende elevar o binomio, for m , as potencias successivas de x serão $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, \&c.$

146 Pelo que respeita á lei dos coefficients, ou á dependencia que tem de m , como o multiplicador do segundo termo (144) he igual á soma das quantidades $a, b, c \&c.$, no caso de ellas serem iguais a a , será a tomado tantas vezes, quantas forem as mesmas quantidades. Logo para m quantidades o multiplicador será ma , isto he, será o coefficiente m igual ao expoente do primeiro termo da potencia. Isto com effeito se acha nas tres potencias que acima expuzemos.

Nos outros termos, cada huma das quantidades $ab, ac, ad, \&c.$ se reduz a a^2 na supposição presente, como tambem $abc, abd, \&c.$ se mudaõ em a^3 , e assim por diante. Logo o multiplicador do terceiro termo se reduz a a^2 tomado tantas vezes, quantos são os productos que podem dar as letras $a, b, c, \&c.$, multiplicadas duas a duas. Da mesma sorte, o multiplicador do quarto termo se reduz a a^3 tomado tantas vezes, quantos são os productos das mesmas letras multiplicadas tres a tres; e assim por diante. Teremos pois os coefficients, se determinarmos quantos productos pôde dar o numero m de

de letras , multiplicadas duas a duas , tres a tres , &c.

147 Se combinarmos hum numero m de letras por todos os modos imaginaveis , isto he , duas a duas , tres a tres , quatro a quatro , &c. , sem que haja repetição de huma mesma letra em huma mesma combinação , acharemos :

1.º Que o numero de combinações de muitas letras duas a duas he o dobro do numero de productos realmente diferentes , que se podem formar , multiplicando as letras duas a duas. Por exemplo , a e b daõ duas combinações ab , ba , mas estas naõ saõ dous productos diferentes. Logo o numero de

productos he igual a $\frac{1}{1.2}$ do numero destas combinações.

2.º O numero de combinações tres a tres he o sextuplo do numero de productos realmente distintos. Por exemplo , as tres quantidades a , b , c , sendo dispostas de todos os modos possiveis , daõ seis combinações abc , acb , bac , bca , cab , cba , que naõ saõ productos diferentes. Logo o numero

de productos he igual a $\frac{1}{1.2.3}$ de tais combinações.

Semelhantemente , quatro quantidades saõ susceptiveis de 24 combinações , cada huma das quais he o mesmo producto ; e conseguintemente o numero de productos diferentes , que se podem formar combinando muitas letras 4 a 4 , he $\frac{1}{1.2.3.4}$

do numero total destas combinações. Da mesma sorte o numero de productos diferentes , que se podem

dem formar combinando muitas letras 5 a 5, 6 a 6, 7 a 7, &c. he $\frac{1}{1.2.3.4.5}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$, &c. isto he, huma fracção que tem por numerador o numero total das combinações, e por denominador o producto dos numeros 1, 2, 3, 4, &c. até o que designa de quantas letras se compõe o producto.

148 Resta achar o numero das combinações 2 a 2, 3 a 3, &c. que pode dar o numero m de letras.

Em quanto ás combinações duas a duas, he evidente, que não devendo multiplicar-se huma letra por si mesma, será $m - 1$ o numero de letras, por que elle se ha-de multiplicar, e conseguintemente cada letra dará $m - 1$ combinações: logo m letras darão $m(m - 1)$ combinações, e por tanto o numero de productos de duas letras realmente dis-

tinctos será $m \cdot \frac{m - 1}{2}$.

Nas combinações tres á tres he necessario, que cada huma das combinações duas a duas seja combinada com cada letra que ella não inclue, isto he com $m - 2$ letras, e conseguintemente huma mesma combinação de duas letras dará $m - 2$ combinações de tres letras: logo, como ha $m \cdot \frac{m - 1}{2}$ combinações de duas letras, o numero total das combinações de tres letras será $m \cdot \frac{m - 1}{2} \cdot \frac{m - 2}{3}$, e por tanto (147) o numero dos productos real-

mente differentes será $m \cdot \frac{m - 1}{2} \cdot \frac{m - 2}{3}$.

Acha

Acharemos do mesmo modo, que o numero das combinações 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. he $m \cdot \overline{m-1}$
 $\cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$, $m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$
 $\cdot \overline{m-4}$, $m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot \overline{m-4}$
 $\cdot \overline{m-5}$, &c. : Logo o numero de productos dis-
 tintos, que se podem formar, multiplicando m le-
 tras 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. será representado
 por $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}$; por $m \cdot \frac{m-1}{2}$
 $\cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$; por $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$
 $\cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$; e assim por diante.

Donde se segue (146) que o coeſſiciente de qual-
 quer termo da potencia de hum binomio he igual
 ao coeſſiciente do precedente multiplicado pelo ex-
 poente de x no mesmo termo precedente, e divi-
 dido pelo numero dos termos precedentes.

149 Concluamos pois que

$$(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} \\
+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \\
\cdot \frac{m-3}{4} a^4 x^{m-4} + \&c.$$

Por esta formula elevaremos hum binomio qual-
 quer a huma potencia dada, substituindo em lu-
 gar de x o primeiro termo do binomio proposto,
 em lugar de a o segundo, e por m o expoente da
 potencia.

Querendo, por exemplo, formar a setima poten-
 cia

cia de $x + a$, acharemos $x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5$
 $+ 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$.

Porque, $m = 7$; logo $x^m = x^7$; $max^{m-1} =$
 $7ax^6$; $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot a^2 x^{m-2} = 7 \cdot \frac{6}{2} a^2 x^5 = 21a^2 x^5$;

$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} = 21 \cdot \frac{5}{3} a^3 x^4 =$

$35a^3 x^4$; e assim por diante até o termo

$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6} \cdot \frac{m-6}{7}$

$\cdot a^7 x^{m-7}$, o qual se reduz a a^7 . Os termos se-

guintes são nada, porque no coeficiente de to-

dos elles entra $m - 7 = 0$ na nossa hypothese.

Em geral o calculo não passa adiante do numero

$m + 1$ de termos, e o ultimo terá a fórmula

$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \dots \frac{m-(m-1)}{m} a^m$.

Se em lugar de $x + a$ tivermos $x - a$, mu-

daremos os sinais (126) nos termos em que en-

traão potencias impares de a , de maneira que re-

unindo ambos os casos, será $(x \pm a)^m = x^m$

$\pm max^{m-1} + m \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} \pm m \cdot \frac{m-1}{2}$

$\cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \&c$;

150 Por quanto (142) $x^{m-1} = \frac{x^m}{x}$, x^{m-2}

$= \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, e assim por diante, po-

demos mudar a nossa formula em $(x \pm a)^m$

$= x^m (1 \pm m \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} \pm m$

$\cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} + \&c.)$

donde se deduz o methodo seguinte para achar commodamente a serie dos termos, de que deve constar qualquer potencia, cujo expoente m seja numero positivo ou negativo, inteiro ou fraccionario, de hum binomio ou simples como $x \pm a$, ou composto como $x^2 \pm a^2$, $x^3 \pm a^3$, &c.

151 Escrevaõ-se em huma linha as quantidades

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \&c.$$

$$\pm m \frac{a}{x} \pm m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} \pm m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3}$$

$$\pm m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{a^4}{x^4}, \&c.$$

Assentando depois a unidade por baixo, e mais para a esquerda, forme-se a serie inferior por esta lei.

Multiplique-se a unidade pelo primeiro termo da serie superior, e tambem por $\pm \frac{a}{x}$, conforme o segundo termo do binomio for positivo, ou negativo, e teremos o segundo termo da serie inferior.

Multiplique-se este segundo termo pelo segundo da serie superior, e por $\pm \frac{a}{x}$, e teremos o terceiro termo da serie inferior.

Multiplique-se este terceiro termo pelo terceiro da serie superior, e por $\pm \frac{a}{x}$, teremos o quarto da serie inferior; e assim por diante.

Ajuntando todos os termos da serie inferior, e multiplicando a totalidade por x^m , teremos o valor de $(x \pm a)^m$.

152 Se o binomio fosse $x^2 \pm a^2$, ou $x^3 \pm a^3$, ou &c. multiplicariamos successivamente os termos por $\pm \frac{a^2}{x^2}$ ou por $\pm \frac{a^3}{x^3}$, em geral, pelo segundo

termo do binomio dividido pelo primeiro; e a totalidade se multiplicaria depois pelo primeiro termo do binomio, elevado á potencia proposta.

Para fazermos huma applicação, busquemos a sexta potencia de $x^3 + a^3$.

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

Tendo achado a serie inferior pelo methodo antecedente, multiplicaremos a totalidade por $(x^3)^6 = x^{18}$, e teremos $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

153 Se em lugar de binomio houvermos de elevar hum polynomio a huma potencia proposta, por exemplo, o trinomio $a + b + c$ á terceira potencia, faremos $b + c = p$, e (149) teremos $(a + p)^3 = a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Como $(b + c)^2$, e $(b + c)^3$ são potencias de binomios, não ha difficuldade em as achar. Aca-

bando o calculo, teremos $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

154 Isto mesmo se pôde achar pelo methodo

do seguinte, que se deduz da formula do binomio. Faça-se $b + c = p$; teremos $(a + p)^3 =$

$$a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$$

Escreva-se debaixo de cada termo o expoente de p , e multiplique-se cada termo pelo numero correspondente, mudando hum p em b , o que dá

$$3a^2b + 6abp + 3bp^2$$

Escreva-se debaixo desta quantidade a ametade de cada expoente de p , e multiplique-se cada termo pelo numero correspondente, mudando hum p em b ; teremos

$$3ab^2 + 3b^2p$$

Escreva-se debaixo de cada termo o terço do expoente de p , e multiplicando como dantes, mudando tambem hum p em b , teremos b^3

Ajuntando estas quatro linhas, e mudando p em c , acharemos

$$a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 9abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3.$$

Multiplicaremos pois cada termo da primeira linha pelo expoente de p ; cada termo da segunda pela ametade do expoente de p nesta linha; cada termo da terceira pelo terço do expoente de p nesta terceira, mudando hum p em b em todas as linhas, menos na primeira em que não ha mudança; e mudando ultimamente em c todos os p que restarem. Esta regra se applica da mesma sorte aos quadrimomios, quinquinomios, &c.

Da extracção das raizes das quantidades
complexas.

155 **D**O que vamos a dizer sobre a raiz quinta se deduzirá o que devemos executar nos outros grãos.

Por quanto $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, he manifesto, que para achar o primeiro termo da raiz quinta de huma quantidade litteral, havendo ordenado todos os termos da potencia dada, tiraremos a raiz quinta do primeiro termo; e para achar o segundo termo da raiz, dividiremos o segundo termo da quantidade proposta pelo quintuplo da quarta potencia

da raiz achada. Com effeito $\sqrt[5]{a^5} = a$, e $\frac{5a^4b}{5a^4} = b$, que he o segundo termo da raiz. Para verificarmos esta operação, depois de ter o segundo termo, elevaremos ao quinto grão a raiz achada, e tiraremos o resultado da quantidade proposta.

Exemplo. Pede-se a raiz quinta de

$$\begin{array}{r} 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \\ - 32a^5 \\ \hline \text{Resfo} + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Raiz} \\ 2a + 3b \\ 80a^4 \end{array} \right.$$

Tiro a raiz quinta de $32a^5$ que he $2a$, e escrevo-a na raiz. Elevo $2a$ á quinta potencia, e tirando da quantidade proposta o producto $32a^5$, destróc-se o primeiro termo.

Ele-

Elevo a raiz $2a$ á quarta potencia, tenho $16a^4$; escrevo o quintuplo $80a^4$ por baixo da raiz $2a$, e per elle divido o primeiro termo $240a^4b$ do resto; esta operação dá $3b$, que escrevo na raiz. Elevo pois $2a + 3b$ á quinta potencia, e fazendo a subtracção nada resta; logo a raiz he exactamente $2a + 3b$.

Se a raiz houvesse de constar de mais de dous termos, appareceria algum resto depois desta primeira operação. Então considerando $2a + 3b$ como huma só quantidade, com ella se continuaria a operação para achar o terceiro termo, da maneira que se praticou com $2a$ para achar o segundo.

156 Pelo que respeita ás quantidades numericas, para extrahirmos a raiz do gráo m , separaremos o numero dado em classes de m letras, começando pela direita. Da ultima classe á esquerda, que póde ter menos letras do que as outras, tiraremos a raiz do gráo m , a qual não constará de mais de huma letra, e será a primeira da raiz. Para junto do resto abaixaremos a classe seguinte, e separando $m - 1$ letras á direita, dividiremos a parte que ficar á esquerda por m vezes a raiz achada, elevada á potencia $m - 1$; e assim por diante.

Esta regra que ja ensinamos (Arith. 156 §§), se percebe aqui com muita facilidade, advertindo que $(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b$ &c, e que se a representar dezenas, e b unidades, a^m não póde incluir-se nos m ultimos algarismos, nem $ma^{m-1}b$ nos $m - 1$ ultimos. Na quinta potencia,

cia, por exemplo $(10)^5 = 100000$, e $(10)^4 = 10000$; logo a^5 não se contem nos cinco ultimos algarismos, nem $4a^4$ nos quatro ultimos.

Do modo de ter a raiz approximada das potencias imperfeitas das quantidades litterais.

157 **Q**Uando a quantidade complexa não he potencia perfeita do grão de que se pede a raiz, não he possivel que esta se ache exactamente; devemos porem approximalla tanto para o verdadeiro valor, quanto exigir o problema que depender dessa extracção. Pelo methodo que acabamos de expôr para as potencias perfeitas, poderiamos achar as raizes approximadas; porque teriamos huma serie de termos fraccionarios, dos quais aproveitariamos sómente hum numero limitado, desprezando os outros, que diminuirião continuamente de valor. Podemos porem chegar ao mesmo resultado por hum caminho muito mais breve, fazendo uso da formula do binomio, para o que devemos lembrar-nos (133) que as quantidades irracionais se pôdem escrever em fôrma de potencias com expoentes fraccionarios,

ou que $\sqrt[m]{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{m}}$.

Exemplo I. Pede-se a raiz quadrada de $a+x$, isto he, o valor de $(a+x)^{\frac{1}{2}}$

Escreveremos (151) a serie

$$\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}, \frac{\frac{1}{2} - 2}{3}, \frac{\frac{1}{2} - 3}{4}, \frac{\frac{1}{2} - 4}{5}, \&c.$$

a qual se reduz a

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}, \&c.$$

Formaremos depois a segunda serie

$$1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{8} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{x^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{x^4}{a^4} \\ + \frac{7}{256} \frac{x^5}{a^5} - \&c.$$

E multiplicando a totalidade por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{8} \frac{x^2}{a^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \frac{x^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{x^4}{a^4} + \frac{7}{256} \frac{x^5}{a^5} - \&c. \right)$$

a qual se pôde continuar com facilidade até onde quizermos, e muito melhor, se escrevermos os coefficients, indicando sômente a multiplicação. Deste modo

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{x^2}{a^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{x^5}{a^5} - \&c. \right)$$

Na qual os numeradores se fórmão dos numeros pares multiplicados entre si, e os denominadores de productos dos numeros impares.

Da mesma sorte acharemos

$$\sqrt{(a-x)} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{x^2}{a^2} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^4}{a^4} - \&c. \right)$$

158 Para mostrarmos o uso destas approximações nas quantidades numericas, supponhamos que se pede a raiz quadrada de 101. Partiremos este numero em duas partes, huma das quais seja quadrado perfeito, por exemplo, em 100 e 1; entã suppondo $a = 100$, e $x = 1$, teremos $\frac{x}{a} = 0,01$, e $\sqrt{(a + x)} = \sqrt{101} = 10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{2 \cdot 4} + \frac{3(0,01)^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{3 \cdot 5(0,01)^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \&c. \right)$

Querendo esta raiz approximada sômente até as decimas-millesimas, basta tomar os tres primeiros termos, porque o quarto $\frac{(0,01)^3}{16}$ se reduz a 0,000000625, e ainda que este termo se deva multiplicar por 10, como todos os outros, não dá por isso mais do que 0,00000625, quantidade muito menor que huma decima-millesima. Os termos seguintes por mais forte razão serão muito menores; porque são continuamente multiplicados pela fracção 0,01. O valor pois de $\sqrt{101}$ se reduz a

$10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} \right) = 10 \left(1 + 0,005 - 0,000125 \right) = 10,0499$, parando nas decimas-millesimas.

Exemplo II. Pede-se a raiz quinta de $a^5 - x^5$, isto he, o valor de $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$.

A serie neste caso he

$$\frac{1}{5}, -\frac{4}{10}, -\frac{9}{15}, -\frac{14}{20}, -\frac{19}{25}, \&c.$$

Logo teremos

$$\sqrt[5]{(a^5 - x^5)} = a \left(1 - \frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1}{5} \frac{4}{10} \frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5 \cdot 10 \cdot 15} \frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20} \frac{x^{20}}{a^{20}} - \&c. \right)$$

159 Advirta-se que nestas series, e em todas as que se podem formar do mesmo modo, devemos tomar para primeiro termo o maior da quantidade proposta. Por exemplo, em $\sqrt{(a + x)}$ havemos tomado a por primeiro termo; mas se x fosse maior que a , deveríamos tomar x . A razão he, porque sendo $x > a$, he $\frac{x}{a} > 1$, a serie . . .

$$a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{a} - \frac{1}{8} \frac{x^2}{a^2} + \&c. \right) \text{ he divergente}$$

te, ou os seus termos vão sempre crescendo, e consequentemente não se deve parar em hum certo numero delles. Porém se neste mesmo caso tomarmos x para primeiro termo, virá a serie convergente

$$a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{x} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{x^2} + \&c. \right), \text{ cujos termos vão diminuindo cada vez mais.}$$

160 Por quanto toda a fracção algebrica he susceptivel da forma de inteiro (141), segue-se que pela formula do binomio podemos tambem reduzir a serie toda a fracção, que tiver o denominador complexo, com maior facilidade do que pela divisaõ.

Por exemplo se tivermos $\frac{a}{b+x}$, que he o mesmo que $a(b+x)^{-1}$, elevaremos (151) $b+x$

à potencia — 1. Formando pois a serie . . .

$$- 1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4}, \&c.$$

ou . . . — 1, — 1, — 1, — 1, &c.

$$\text{teremos } (b+x)^{-1} = b^{-1} \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^3}{b^3} + \frac{x^4}{b^4} - \&c. \right) = \frac{1}{b} - \frac{x}{b^2} + \frac{x^2}{b^3} - \frac{x^3}{b^4} + \frac{x^4}{b^5} - \&c. \text{ Logo } a(b+x)^{-1} = \frac{a}{b+x} = \frac{a}{b}$$

$$- \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c.$$

$$\text{Do mesmo modo } \frac{a^2}{a^2-x^2} = a^2(a^2-x^2)^{-1} =$$

$$a^2 \cdot a^{-2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c. \right) =$$

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.$$

Se tivéssemos para reduzir $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$ em serie, considerariamos esta quantidade como $a^2(a^2+x^2)^{-3}$. Do mesmo modo em lugar de

$$\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}} \text{ escreveremos } a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}; \text{ e}$$

af-

assim nos outros casos.

As quantidades irracionais, e fraccionarias tambem se transformão em series infinitas pelo *Methodo dos Coefficientes indeterminados*, de que vamos a dar idêa em alguns exemplos.

Supponhamos que se quer reduzir em serie a fracção $\frac{a}{b+x}$.

Sejaõ as quantidades $A, B, C, D, E, \&c.$ tais, que tenhamos

$$\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Isto supposto, multiplicando o segundo membro pelo denominador, e transpondo, será . . .

$$0 = Ab + Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 + Ebx^4 + \&c.$$

$$- a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$$

Se igualarmos cada columna a nada, o segundo membro se destruirá como deve ser, e teremos tantas equações, quantas são as quantidades indeterminadas $A, B, C, \&c.$ Deste modo será $- a$

$$+ Ab = 0 \dots Bbx + Ax = 0 \dots Cbx^2 + Bx^2 = 0 \dots Dbx^3 + Cx^3 = 0 \dots Ebx^4 + Dx^4 = 0 \dots \&c.$$

A primeira equação dá $A = \frac{a}{b}$. Substituindo este valor na segunda, teremos $B = -\frac{a}{b^2}$. Substituindo este na terceira, teremos $C = \frac{a}{b^3}$. Da mesma forte se achará $D = -\frac{a}{b^4} \dots E = \frac{a}{b^5}$. Logo substituindo todos estes valores na serie, acharemos

$$\text{mos } \frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c.$$

Querendo extrahir a raiz quadrada de $a+x$ suppremos $\sqrt{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$ e teremos (119) $a+x = A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 + 2AEx^4 + \&c.$
 $+ B^2x^2 + 2BCx^3 + 2BDx^4 + \&c.$
 $+ C^2x^4 + \&c.$

a qual dá $A^2 = a \dots 2AB = 1$, donde vem $A = a^{\frac{1}{2}}$, $B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$, e formando huma equação de ca-

da columna, $C = -\frac{1}{8aa^{\frac{1}{2}}} \dots D = \frac{1}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} \dots$

$E = -\frac{5}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} \dots$, &c. Logo teremos . . .

$$\sqrt{a+x} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{8aa^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^3}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} -$$

$$\frac{5x^4}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} + \&c., \text{ e multiplicando todos os nu-}$$

meradores e denominadores por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos como acima

$$\sqrt{a+x} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^3}{16a^3} - \frac{5x^4}{128a^4} + \&c. \right)$$

O mesmo resultado se acharia immediatamente depois da substituição dos coefficients, se reduzissemos o binomio proposto a ter a unidade por primeiro termo, isto he, se dessemos a $\sqrt{a+x}$ a fórma $\sqrt{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{a}}$, multiplicando e dividindo ao mesmo tempo os dous termos por \sqrt{a} , e tratassemos depois $\frac{x}{a}$ como huma só quantidade.

161 Havemos supposto que a fórmula que deo o calculo para as potencias perfectas de hum binomio, ou para m inteiro, e positivo, podia também servir para formar as potencias imperfeitas, ou para m fraccionario, positivo, ou negativo. Para mostrarmos agora a legitimidade desta applicação a todos os expoentes, comecemos pelo caso de ser m huma fracção positiva.

Seja em geral $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, sendo $\frac{m}{n}$ positivo. Devemos provar que

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. \right)$$

Com effeito, reduzindo o primeiro termo do binomio a ser 1, e elevando ambos os membros á potencia n , temos

$$\left(1 + \frac{b}{a} \right)^m = \left(1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right)$$

$$\left(+ \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. \right)^n,$$

isto he,

$$m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. =$$

$$m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m^3}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

Porém $m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2}$, que he a

totalidade do que multiplica $\frac{b^2}{a^2}$ no segundo

membro, reduz-se a $m \left(\frac{m-n}{2n} + \frac{mn-m}{2n} \right) = m$

$\cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2}$, que he o multiplicador de $\frac{b^2}{a^2}$ no primeiro membro.

Do mesmo modo, $m \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} + \frac{2m^2}{n^2}$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m^3}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}, \text{ que he a}$$

totalidade do que multiplica $\frac{b^3}{a^3}$ no segundo membro, se reduz a

$$m \left(\frac{(m-n)(m-2n) + 3m(m-n)(n-1) + m^2(n-1)(n-2)}{2n \cdot 3n} \right) =$$

$$m \left(\frac{m^2 - 3m + 2}{2 \cdot 3} \right) = m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}, \text{ que he o}$$

multiplicador de $\frac{b^3}{a^3}$ no primeiro membro.

Se levassemos as series adiante do cubo, achariamos da mesma fórte termos identicos. Logo he verdadeira a equação

$$(a + b)^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. \right)$$

Serve pois a formula do binomio para elevar a huma potencia, cujo expoente seja hum numero fraccionario positivo.

Para provarmos agora que a mesma formula póde applicar-se a hum expoente negativo, devemos mostrar que

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. \right)$$

isto he, que

$$1 = \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c. \right)$$

Com effeito desenvolvendo $\left(1 + \frac{b}{a} \right)^{\frac{m}{n}}$, e multiplicando as duas series, sem passar do cubo, acharemos

$$\begin{aligned} 1 = & 1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c; \\ & + \frac{m}{n} \frac{b}{a} - \left(\frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^3}{a^3} + \&c; \right) \\ & + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \frac{b^3}{a^3} + \&c; \\ & + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 1}{2} \cdot \frac{\frac{m}{n} - 2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \&c; \end{aligned}$$

isto

isto he; fazendo o calculo, $1 = 1$.

Logo a formula do binomio tem toda a generalidade que havemos supposto.

Das Equações Superlineares a duas incognitas.

162 **D** Izemos que huma equação a huma incognita he do terceiro, quarto, quinto, &c. gráo, quando a mais alta potencia da incognita he a terceira, quarta, quinta, &c.; mas álem desta podem entrar todas as potencias inferiores. Assim as equações $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$ são todas do terceiro gráo.

Porém se a equação incluye duas ou mais incognitas, dizemos que he superlinear, não sómente quando huma das incognitas passa do primeiro gráo, mas tambem quando algumas dellas estão multiplicadas entre si: geralmente, o gráo de huma equação se determina pela maior soma dos expoentes das incognitas em hum mesmo termo. A equação $x^i + y^i = a^2 b$ he do terceiro gráo; a equação $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ tambem he do terceiro gráo, porque os expoentes de x e y no termo x^2y fazem a soma de 3.

163 Para resolver os problemas que conduzem a estas equações, devemos, como se pratica no primeiro gráo, reduzillas todas a huma, em que não haja mais que huma incognita.

Se tivermos duas equações e duas incognitas, e huma destas não passar do primeiro gráo em huma das equações, tome-se o valor desta incognita, como se tudo o mais fosse conhecido; e substituindo-

do-se o seu valor na outra equação, se formarã affim huma nova, em que não entrará mais que huma incognita.

Exemplo I. Achar dous numeros, cuja soma seja 12, e o producto 35. Representando estes dous numeros por x e y , teremos $x + y = 12$, e $xy = 35$.

A primeira dá $x = 12 - y$, e substituindo na segunda, acharemos $12y - y^2 = 35$, isto he, $y^2 - 12y = -35$. Logo $(100)y = 6 \pm 1$, isto he, $y = 7$, ou $y = 5$; e como $x = 12 - y$, teremos $x = 5$, ou $x = 7$; e consequentemente os dous numeros buscados são 5 e 7, ou 7 e 5.

Exemplo II. Se tivermos $x + 3y = 6$ e $x^2 + y^2 = 12$, substituindo na segunda o valor de $x = 6 - 3y$, que dá a primeira, teremos $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$, isto he, $10y^2 - 36y + 24 = 0$, donde se deduzirá o valor de y .

Exemplo III. Se as duas equações forem $xy + y^2 = 5$, e $x^3 + x^2y = y^2 + 7$, tomando na primeira o valor de $x = \frac{5 - y^2}{y}$, e substituindo na

segunda virá $\frac{(5 - y^2)^3}{y^3} + \frac{(5 - y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$; isto he, a equação do quinto grão $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, que incluye sómente y .

164 Se huma das incognitas não passar do segundo grão em huma das duas equações, tome-se nesta o valor do seu quadrado, e fazendo-se substituições successivas na outra equação até que a incognita se ache no primeiro grão, tire-se o valor della, e substitua-se na primeira equação.

Por exemplo, se tivermos $x^2 + 3y^2 = 6x$, e

$2x^2 - 3y^2 = 8$, tomaremos na primeira o valor de $x^2 = 6x - 3y^2$, e substituindo na segunda, teremos $2x(6x - 3y^2) - 3y^2 = 8$; isto he, $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Como nesta ainda ha x^2 , substitua-se outra vez o mesmo valor, e virá $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Parando com as substituições, porque esta equação tem x sómente no primeiro gráo, tomaremos nella o valor de . .

$x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$, o qual substituido na primeira $x^2 + 3y^2 = 6x$ dá $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$.

165 Semelhantemente podemos reduzir as equações de grãos mais elevados a huma, em que entre huma só incognita; porém a equação final subirá a humi gráo mais elevado do que deve ser. Pelo que vamos a expôr outro methodo, que não he sujeito a este inconveniente.

166 Toda a equação a duas incognitas pôde reduzir-se á fórmula . . . $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + T = 0$, sendo m o gráo a que x está elevado; porque podemos representar por huma letra a totalidade das quantidades, que multiplicação huma mesma potencia de x . Assim, a equação geral do segundo gráo a duas incognitas $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, pôde ter a fórmula $ax^2 + (by + d)x + cy^2 + ey + f = 0$, ou por abbreviar, $Ax^2 + Bx + C = 0$, com tanto que depois de havermos feito o uso para que se deo esta nova fórmula, substituamos em lugar das letras A, B, C o que ellas representaõ. Isto posto, sejaõ . . .

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots T = 0$$

$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \dots T' = 0$$

I 2 du-

duas equações do mesmo gráo, das quaes se pretende eliminar x .

Multiplicaremos a primeira por A' , a segunda por A , e tirando o segundo producto do primeiro, teremos huma equação do gráo $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x + B'$, a segunda por $Ax + B$, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos segunda equação do gráo $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x^2 + B'x + C'$, a segunda por $Ax^2 + Bx + C$, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos terceira equação do gráo $m-1$.

Continuando do mesmo modo, até que o multiplicador seja do gráo $m-1$, teremos m equações, cada huma do gráo $m-1$.

Consideraremos pois em cada huma dellas as diferentes potencias x^{m-1} , x^{m-2} , x^{m-3} &c. como se fossem outras tantas incognitas do primeiro gráo; e determinando (85) os seus valores por meio de $m-1$ equações, os substituiremos na ultima.

Affim virá huma equação sem x , e repondo nesta os valores de A , B , C &c. e A' , B' , C' &c. teremos huma equação em y .

Se tivermos, por exemplo, as duas equações . . .

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

as quaes podem representar todas as equações de duas incognitas, não passando huma destas do segundo gráo; formaremos pela multiplicação, e subtracção as duas equações

$$(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$$

$$(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0 \quad A$$

A primeira dá $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, e substituindo na segunda teremos $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$, equação em que não entra x .

Se tivermos

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

formaremos as tres equações

$$(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + A'D - AD' = 0$$

$$(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$$

$$(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + C'D - CD' = 0$$

Considerando pois x^2 e x como incognitas do primeiro gráo, determinaremos os seus valores por meio de duas quaisquer destas equações, e os substituiremos na terceira.

167 Se as equações não forem do mesmo gráo, ou se os expoentes de x forem m em huma equação, e n na outra, então suppondo que m he o maior, multiplicaremos a equação do gráo n por x^{m-n} , e deste modo a reduziremos ao mesmo gráo. Obraremos pois como no caso precedente, continuando as multiplicações até que o multiplicador chegue ao gráo $n-1$, e teremos n equações, cada huma do gráo $m-1$. Em todas ellas substituiremos successivamente por todas as potencias superiores a x^n o valor de x^n tirado da equação do gráo n , até que a mais alta potencia que restar seja x^{n-1} , o que he sempre possível; e deste modo teremos n equações cada huma do gráo $n-1$. Por meio do numero $n-1$ destas equações determinaremos os valores de x^{n-1} , x^{n-2} , x^{n-3} , &c. como se fossem incognitas do primeiro gráo, e os substituiremos na ultima.

Se-

Sejaõ, por exemplo, $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$ duas equações, de que se pretende eliminar y .

Multiplicando a segunda por y , a primeira por a , e tirando hum producto do outro, teremos $by^2 + xy + a = 0$.

Multiplicando a primeira por $ay + b$, a segunda por y^2 , e tirando hum producto do outro, teremos $xy^2 + ay + b = 0$.

Tendo assim tres equações com y^2 , y , e x , se as tratarmos como se fossem do primeiro gráo a tres incognitas, acharemos

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$$

Do mesmo modo se tivéssemos $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, formaríamos as tres equações

$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$

$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$$

$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

as quais juntamente com a segunda das propostas $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$ serviriaõ para eliminar as tres quantidades y^3 , y^2 , y , e acharíamos. . .

$$x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 = 0$$

$$- 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4$$

$$+ b^4$$

$$+ 2a^2c^2$$

$$- 4ab^2c$$

Este methodo he geral , e admite simplificação em muitos casos. Por exemplo , tendo as duas equações acima $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, com muita facilidade deduziremos as duas equações do segundo gráo , multiplicando a segunda por y , e substituindo nella o valor de y^3 tirado da primeira ; e fazendo depois o mesmo á que resulta desta operação. Não nos demoraremos em individuar estes casos ; advertiremos sómente , que nas multiplicações successivas por A' e A , por $A'x + B'$ e $Ax + B$, &c. he escusado multiplicar o primeiro , os dous primeiros , &c. termos das duas equações propostas , e em geral tantos primeiros termos , quantos são os do multiplicador , porque os productos se anniquilão pela subtracção.

168 Se determinarmos os valores das diferentes potencias de x pela regra que demos para as equações do primeiro gráo a muitas incognitas , a equação final em y não passará do gráo mn , suppondo que os maiores expoentes de x , e de y são m em huma equação , e n na outra.

Mas se os expoentes de x e de y forem desiguais em cada huma das equações , de maneira que sendo os de x ainda m e n , os de y sejaõ porém $m + p$, e $n + q$, a equação final em y não passará do gráo $mn + mq + np$. Veja-se a demonstração nas *Mem. da Acad. das Sciencias*, ann. 1764. Podem consultar-se tambem as *Mem. da Acad. de Berlin*, ann. 1748 , e a *Analyse das linhas curvas de Cramer*.

169 Em muitos casos se consegue a eliminação mais brevemente , do que pelos methodos preceden-

cedentes. Por exemplo se tivéssemos $bxy = a^2x - a^3$ e $x^2 - ax = by$, tomando na primeira . . . $x = \frac{a^2x - a^3}{by}$, e na segunda . . . $x = \frac{by}{x - a}$; e multiplicando huma pela outra, acharíamos $x = \pm a$.

Tambem para eliminar y das equações $ay^2 - 2x^2y = ax^2$, e $a^2y^2 - 2a^2xy = x^4$, acharemos primeiramente $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$, e

$y = x \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$; e igualando de

pois os dous valores, virá $x = a$.

Se as equações fossem $x + y + z = a$, $xy + xz + yz = b$, e $xyz = c$, multiplicando a primeira por x^2 , a segunda por x , tirando o segundo resultado do primeiro, e ajuntando ao resto a terceira, acharíamos $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Se em lugar de multiplicar por x e x^2 , multiplicássemos por y e y^2 , ou por z e z^2 , acharíamos da mesma forte equações semelhantes em y , ou em z .

Das

*Das Equações Superlineares a mais de
duas incognitas.*

170 **H** Avendo mais de duas equações , e mais de duas incognitas , tres por exemplo , podemos pelo mesmo methodo eliminar huma das incognitas por meio da primeira e segunda equação , e eliminalla outra vez por meio da primeira e terceira , ou da segunda e terceira. Feito isto , teremos duas equações e duas incognitas , que se trataraõ pelo methodo precedente.

Porém devemos advertir, que este methodo sendo applicado a mais de duas incognitas, tem o inconveniente de conduzir a equações mais elevadas do que deve ser. O meio de o evitar consiste em eliminar combinando as equações , não duas a duas , mas tres a tres , quando são tres , e quatro a quatro , quando são quatro , &c. ; combinação que exige huma escolha particular. V. as *Mem. da Acad. das Sciencias*, ann. 1764, onde tambem se acharaõ muitas indagações sobre o gráo da equação final. Sem embargo de que estes methodos abaixaõ consideravelmente o gráo em comparação de outros ; com tudo he provavel que elle ainda se possa diminuir mais , e que isto sómente se consiga , quando se achar hum methodo para eliminar simultaneamente todas as incognitas menos huma , como se tem descoberto para o primeiro gráo.

Das

Das Equações a dous termos.

171 **C**hamamos *Equações a dous termos* áquellas em que entra huma só potencia da incognita.

Por exemplo, a equação $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ he huma equação a dous termos, pois que dando-se-lhe a fórma $(a + b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, $a + b$ pôde reduzir-se a huma só quantidade p , e $a^4b^2 - a^3b^3$ a outra q , de maneira que a equação pôde representar-se por esta . . . $px^5 = q$.

Estas equações são muito facéis de resolver: Havendo desembaraçado a potencia da incognita, como nas outras equações, não resta mais que tirar a raiz do gráo designado pelo expoente da incognita. Assim a equação $px^5 = q$ se mudará em

$$x^5 = \frac{p}{q}, \text{ e tirando a raiz quinta, teremos } x = \sqrt[5]{\frac{p}{q}}.$$

Em geral, a equação $px^m = q$ dá

$$x = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}.$$

172 Se m he impar, a incognita tem sempre hum unico valor real, o qual será positivo ou negativo, conforme for o segundo membro positivo ou negativo. Se m he par, a incognita tem, como no segundo gráo, dous valores, hum positivo, e outro negativo, os quais serão ambos reais, ou ambos imaginarios, conforme for o segundo membro positivo, ou negativo; pelo que nas equações a dous ter-

termos a incognita não pode ter mais que dous valores reais. Por exemplo, a equação $x^5 = 1024$ dá $x = \sqrt[5]{1024}$, porque há hum unico valor real 4, que sendo elevado á quinta potencia possa produzir 1024. Porém a equação $x^4 = 625$ dá . . .

$x = \pm \sqrt[4]{625}$; porque $- \times -$ hum numero par de vezes produz o mesmo que $+ \times +$. Pelo contrario a equação $x^4 = -625$ dá $x = \pm \sqrt[4]{-625}$, isto he, dous valores imaginarios, porque não ha numero positivo ou negativo, que sendo multiplicado por si mesmo hum numero par de vezes, produza huma quantidade negativa.

Aplicação. Achar dous meios proporcionais entre 5 e 625.

Representando os dous numeros desconhecidos por x e y , teremos $\div : 5 : x : y : 625$, donde se deduz

$$5 : x :: x : y,$$

$$x : y :: y : 625$$

Estas duas proporções dão $5y = x^2$, e $625x = y^2$; donde vem $y = \frac{x^2}{5}$, e $x^3 = 15625$; logo $x = 25$, e $y = 125$.

Das Equações que podem resolver-se á maneira das do segundo gráo.

173 **E** Stas equações não devem incluir mais que duas potencias diferentes de x , mas o expoente de huma deve ser o dobro do expoente da outra; tais são $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$,

e em geral a equação a tres termos da fórma $x^{2m} + px^m = q$. Resolvem-se estas como as do segundo gráo ; porque fazendo $x^m = y$, teremos $y^2 + py = q$, equação do segundo gráo, da qual se tira $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, isto he, $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; logo (171)..

$$x = \sqrt[m]{\left[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}\right]}.$$

Aplicação. Achar dous numeros, cujo producto seja 6, e a soma dos cubos faça 35.

Teremos $xy = 6$, e $x^3 + y^3 = 35$, as quais daõ (163) $y = \frac{6}{x}$, e $x^6 - 35x^3 = -216$; logo $x = \sqrt[3]{\left[\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216}\right)}\right]}$
 $= \sqrt[3]{\left(\frac{35 \pm 19}{2}\right)}$, isto he, $x = \sqrt[3]{27} = 3$,
e $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 2$; e conseguintemente $y = 2$,
e $y = 3$.

Se m for par, a equação poderá ter até quatro raizes reais.

Da Composição das Equações.

174. **T** Oda a equação dá tantos valores para a incognita, ou tem tantas raizes, quantas são as unidades do mais alto expoente da incognita; bem entendido.

dido, que humas dellas podem ser positivas, outras negativas, humas reais, outras imaginarias.

175 Para o mostrarmos, he preciso notar, que em toda a equação se transpuzermos todos os seus termos para hum membro, e os ordenarmos relativamente a x (preparação que daqui por diante suppremos sempre feita); pôde este membro considerar-se como o resultado da multiplicação de muitos factores binomios simples, que tenham x por termo commum. Por exemplo, na equação $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, depois de se lhe dar a fórma $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, pôde $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ considerar-se como resultado de tres factores binomios simples $x - a$, $x - b$, $x - c$. Porque estes multiplicados entre si, dão . .

$$x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$$

$$- bx^2 + acx$$

$$- cx^2 + bcx$$

e para que as duas equações sejaõ as mesmas, basta que seja . . . $a + b + c = 8$. . . $ab + ac + bc = 7$. . . $abc = 9$, as quais dão (169) . . . $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$, $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, e $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Daqui se deduzem as proposições seguintes.

176 1.º Por quanto não ha differença entre as equações que devem dar os valores de a , b , c , os quais por outra parte não podem ser iguais entre si; qualquer das tres equações necessariamente ha-de dar os valores de a , b , c ; logo cada humas dellas deve ter tres raizes a , b , c .

2.º E como cada huma das tres equações he a mesma que a proposta $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, com a differença unica de a , ou b , ou c se mudar em x ; tambem esta deve ter tres raizes, as quais feraõ os valores de a , b , c ; e conseguintemente as quantidades que se devem substituir em lugar de a , b , c nos factores $x - a$, $x - b$, $x - c$, para produzirem $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, feraõ as raizes da mesma equaçãõ.

177 Estas consequencias feriaõ as mesmas; ainda que os coefficients das differentes potencias de x fossem outros quaisquer numeros, e a equaçãõ fosse de outro qualquer grão. Assim se tivermos em geral a equaçãõ $x^4 - px^3 + qx - rx + s = 0$, sendo p , q , r , s numeros conhecidos, poderemos consideralla como formada pelo producto de quatro factores simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ou suppolla igual a ;

$$\begin{aligned}
 x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\
 - bx^3 + acx^2 - abdx & \\
 - cx^3 + adx^2 - acdx & \\
 - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\
 + bdx^2 & \\
 + cdx^2 &
 \end{aligned}$$

Para isso, formando quatro equações como no caso precedente, $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, e $abcd = s$; a , b , c , d devem ser tais