tais, que tenhamos . . . $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$ . . . . $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$ . . . $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$ . . . . $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$.

Pelo que cada huma destas equações terá quatro raizes, que seraõ os valores das quatro quantidades a, b, c, d; e como cada huma daquellas he a mesma que a proposta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, as quantidades a, b, c, d seraõ tambem as suas raizes.

178 Logo em geral: 1.º *Huma equaçaõ de qualquer grão que seja, póde considerar-se como formada pelo producto de tantos factores binomios simples, tendo todos por termo commum a letra que representa a incognita, quantas saõ as unidades do mais alto expoente da mesma incognita.*

2.º *Os segundos termos dos binomios saõ as raizes da mesma equaçaõ, sendo cada huma tomada com sinal contrario.*

179 Havemos supposto, que a equaçaõ tinha alternadamente termos positivos e negativos: porém seja qual for a ordem dos sinais, como na equaçaõ $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, sempre se demonstrará do mesmo modo, que póde esta ser representada por $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$ sendo a, b, c, d as suas raizes.

180 Pois que temos . . $a + b + c + d = p$ . . . $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$ . . . $abc + abd + acd + bcd = r$ . . . $abcd = s$, e a, b, c, &c. saõ as raizes da equaçaõ; segue-se, que

que na equaçaõ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; e geralmente em toda a equaçaõ.

1.° *O coefficiente* $-p$ *do ſegundo termo, tomado com ſinal contrario, iſto he,* $+p$*, he igual á ſoma de todas as raizes.*

2.° *O coefficiente do terceiro termo he igual á ſoma dos productos das raizes multiplicadas duas a duas.*

3.° *O coefficiente do quarto termo, tomado com ſinal contrario, he igual á ſoma das raizes multiplicadas tres a tres*; e aſſim por diante até que *finalmente o ultimo termo he o producto de todas as raizes.*

Eſtas concluſoẽs ſaõ gerais, ſejaõ quais forem os ſinais dos termos da equaçaõ, com tanto que ſe tome ſempre com ſinal contrario o coefficiente de cada termo de numero par.

Aſſim na equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, a ſoma das tres raizes $= -2$, a ſoma dos productos, duas a duas $= -23$, e o producto de todas tres $= +60$. Com effeito, as tres raizes ſaõ $+5, -4, -3$, porque cada numero deſtes, ſendo ſubſtituido em lugar de x, reduz o primeiro membro a nada; e he evidente que $5 - 4 - 3 = -2$, $-20 - 15 + 12 = -23$, e $5 \times -4 \times -3 = 60$.

181 Logo: 1.° *Toda a equaçaõ, em que faltar o ſegundo termo, terá raizes poſitivas e negativas, e a ſoma de humas ſerá igual á ſoma das outras; e reciprocamente.*

2.° *Se algumas raizes forem* 0, *faltaraõ outros tantos termos ultimos da equaçaõ; e reciprocamente.*

3.°

3.º *Se todas as raizes forem negativas, seraõ positivos todos os termos da equaçaõ; e se todas forem positivas, os termos seraõ alternadamente positivos e negativos.*

E em huma equaçaõ, cujas raizes saõ reais, ha tantas positivas, quantas saõ as mudanças dos sinais; e tantas negativas, quantas saõ as repetições successivas do mesmo sinal.

Assim na equaçaõ $x^3 - 19x + 30 = 0$; porque falta o segundo termo, concluiremos que a soma das raizes positivas he igual á soma das negativas; com effeito as tres raizes saõ $+2$, $+3$, e -5.

Na equaçaõ $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$, em que faltaõ os dous ultimos termos, as raizes saõ -1, $+1$, $+3$, 0, 0.

Na equaçaõ $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$, em que se acha consecutivamente tres vezes o mesmo sinal $+$, ha tres raizes negativas -1, -2, -4; mas a equaçaõ $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, em que ha tres mudanças de sinal, tem tres raizes positivas $+1$, $+2$, $+4$.

Agora se póde perceber facilmente a razaõ, porque muitos numeros differentes podem satisfazer a huma equaçaõ. Propondo-se, por exemplo: *Achar hum numero tal, que se delle tirarmos* 5, *e lhe ajuntarmos successivamente* 3 e 4, *as duas somas multiplicadas entre si, e pelo resto, dem nada*; teremos, sendo x o numero desconhecido, $(x+4)(x+3)(x-5) = 0$, isto he, $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$. Vê-se pois, que este producto póde ser nada em tres casos, quando $x = -4$, quando $x = -3$, e quando $x = 5$; e que propondo-se a equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, naõ ha cousa que de-

K ter-

termine a preferir -4 a -3, ou a $+5$, pois que cada numero destes reduz igualmente o primeiro membro a nada, e por tanto satisfaz igualmente á equaçaõ.

182 As equações $a+b+c+d=p$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=q$, $abc+abd+acd+bcd=r$, $abcd=s$, conduzem á mesma equaçaõ, tanto para ter a, como para ter b, como &c. A razaõ he, porque a, b, c, d, estaõ dispostas da mesma maneira em cada huma das equacões, e por tanto naõ ha motivo, para que huma dellas seja determinada por operações differentes das que determinaõ a outra. Logo em geral: Se buscando muitas quantidades desconhecidas, formos obrigados para cada huma a fazer uso dos mesmos raciocinios, das mesmas operações, e das mesmas quantidades conhecidas, todas estas seraõ necessariamente raizes de huma mesma equaçaõ, e por consequencia o problema respectivo conduzirá a huma equaçaõ composta.

183 Huma equaçaõ tambem se póde considerar como formada pelo producto de muitos factores compostos. Assim, huma equaçaõ do terceiro gráo póde considerar-se como formada por hum factor do segundo x^2+ax+b, e outro do primeiro $x+c$; porque x^2+ax+b póde representar o producto de outros dous factores simples. Do mesmo modo huma equaçaõ do quinto gráo pode ser considerada como producto, ou de cinco factores simples, ou de dous do segundo gráo e hum do primeiro, ou de hum do terceiro e outro do segundo, ou finalmente de hum factor do quarto e outro do primeiro.

184 Como pois huma equaçaõ de qualquer gráo póde ser formada pelo concurso de hum ou de muitos

tos factores do segundo, e as equações deste grão pódem ter raizes imaginarias; segue-se que tambem aquellas as podem ter, ainda que de fórmas muito differentes das do segundo grão.

185 Do mesmo modo de considerar as equações se segue: 1.º Que huma equação do grão m não póde ter mais que m divisores do primeiro grão.

186 2.º Que o numero dos divisores, que póde ter do segundo grão, se exprime por $m.\frac{m-1}{2}$. Com effeito, hum factor do segundo grão he o producto de dous factores simples; logo como estes podem ser divisores, tambem aquelle o poderá ser. Mas (148) ha $m.\frac{m-1}{2}$ modos differentes de multiplicar m quantidades duas a duas; logo haverá $m.\frac{m-1}{2}$ divisores differentes do segundo grão.

Por exemplo, a equação . . . .

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

formada pelo producto de $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, póde considerar-se como formada pelo producto de dous factores do segundo grão, por estes seis differentes modos. . . . .

multiplicando $(x-a)\,(x-b)$ por $(x-c)\,(x-d)$
$(x-a)\,(x-c)$ . . $(x-b)\,(x-d)$
$(x-a)\,(x-d)$ . . $(x-b)\,(x-c)$
$(x-b)\,(x-c)$ . . $(x-a)\,(x-d)$
$(x-b)\,(x-d)$ . . $(x-a)\,(x-c)$
$(x-c)\,(x-d)$ . . $(x-a)\,(x-b)$

Concluamos pois, que querendo achar os valores de g e h tais, que $x^2 + gx + h$ seja divisor de huma equaçaõ proposta do gráo m, podemos ter a certeza, que g e h necessariamente se haõ-de determinar cada hum por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2}$. Porque sendo $x^2 + gx + h$ a expressaõ geral de hum factor do segundo gráo, h deve ser susceptivel de $m \cdot \frac{m-1}{2}$ valores differentes, e o mesmo se diz de g, que he a soma de todas as raizes: Logo cada huma destas quantidades ha-de ser dada por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Prova-se do mesmo modo, que no caso de se considerar huma equaçaõ como formada por factores do terceiro gráo, cada hum delles he susceptivel de $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ valores differentes, de maneira que se $x^3 + gx^2 + hx + k$ representar hum dos factores, k se determinará por huma equaçaõ do gráo $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$. Podem-se tirar consequenquencias analogas para os factores do quarto gráo, quinto &c.

187 De tudo o que fica dito se segue, que havendo achado huma raiz a, para ter as outras, podemos dividir a equaçaõ por $x - a$. A divisaõ se fará exactamente, e dará por quociente huma quantidade, na qual x estará hum gráo menos elevado; e esta, se a puzermos igual a nada, será a equaçaõ que devemos resolver para ter as outras raizes. Se fossem conhecidas duas raizes a e b, dividiriamos a equaçaõ por $(x - a)(x - b)$, e assim por diante.

Do modo de transformar as Equações.

188 ANtes de passarmos á resoluçaõ das equações, he conveniente que tratemos primeiramente das differentes fórmas que ellas podem ter.

189 *Se em huma equaçaõ mudarmos os sinais dos termos em que entraõ potencias impares, as raizes positivas se tornaraõ negativas, e as negativas se tornaraõ positivas.* Porque substituindo $-x$ em lugar de $+x$, as raizes da equaçaõ mudaõ de sinal, como tambem os termos, em que entraõ potencias impares, sem que porisso haja mudança nos termos de potencias pares.

190 *Para mudar huma equaçaõ affecta de coefficientes fraccionarios em outra que os naõ tenha, sem embaraçar com coefficiente o primeiro termo,* substitua-se em lugar da incognita, outra dividida pelo producto de todos os denominadores, e multiplique-se depois toda a equaçaõ pelo denominador, que entaõ terá o primeiro termo.

Por

Por exemplo, se tivermos $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{c}{n}x$ $\frac{d}{p} = 0$, faremos $x = \frac{y}{mnp}$, e substituindo virá $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; multiplicando pois por $m^3n^3p^3$, teremos a transformada $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

191 Se m, n, p fossem iguais, bastaria fazer $x = \frac{y}{m}$. Logo para mudarmos huma equaçaõ, que em todos os termos tem coefficientes inteiros, em outra que tenha o primeiro termo desembaraçado, sem que entrem fracções nos outros termos, faremos $x = \frac{y}{m}$, sendo m o coefficiente do primeiro termo. Com effeito a equaçaõ $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, sendo dividida por m, dá $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, a qual tem todos os denominadores iguais.

192 *Para fazer desaparecer o segundo termo de huma equaçaõ, substitua-se em lugar da incognita, outra augmentada com o coefficiente do segundo termo, tomado com sinal contrario, e dividido pelo expoente do primeiro.*

Para o mostrar, seja a equaçaõ geral . . . $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0$.

Supponhamos $x = y + s$, ſendo s huma indeterminada; teremos a transformada. . . . .

$$y^m + msy^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}s^2y^{m-2} + \&c. .. + k = 0$$
$$+ ay^{m-1} + (m-1)\,asy^{m-2} + \&c.$$
$$+ \qquad by^{m-2} + \&c.$$

Conſiderando y como incognita, para que neſta equaçaõ deſappareça o ſegundo termo, s deve ſer tal que tenhamos $ms + a = 0$, iſto he, deve ſer $s = \frac{-a}{m}$; logo $x = y - \frac{a}{m}$.

Por exemplo, para mudarmos a equaçaõ $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$ em outra que naõ tenha ſegundo termo, faremos $x = y - 2$; e ſubſtituindo, acharemos $y^3 - 15y + 26 = 0$, que naõ tem y^2.

Da reſoluçaõ das Equações compoſtas.

193 RESOLVER *geralmente huma equaçaõ* ordenada de qualquer gráo, como $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \&c \cdots + k = 0$, he achar para a incognita tantos valores, quantas ſaõ as unidades do ſeu maior expoente, ſendo cada hum delles expreſſo em letras p, q, &c. k combinadas entre ſi de qualquer modo; mas tal, que ſe o ſubſtituirmos na equaçaõ em lugar de x, reduza o primeiro membro a nada, independentemente de qualquer valor particular de p, q, &c.

Por exemplo, a regra que demos (100), reſolve geralmente as equações do ſegundo gráo $x^2 + px$

$+ q = 0$

$+q=0$, porque dá dous valores $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, e cada hum delles ſubſtituido na equaçaõ reduz tudo a nada, como he facil de ver.

Eſta expreſſaõ geral dos differentes valores de x he tanto mais difficil de ſe achar, quanto mais elevado he o gráo da equaçaõ. Para iſto bem ſe perceber, moſtraremos, que ſeja qual for a fórma dos valores da incognita, a reſoluçaõ geral de huma equaçaõ de gráo determinado deve incluir a reſoluçaõ das equaçóes gerais de todos os gráos inferiores.

Com effeito, a reſoluçaõ geral he huma equaçaõ do quinto gráo . . . $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$ deve dar a x cinco valores, cada hum delles expreſſo neceſſariamente em todas as letras p, q, r, s, t. Mas quando $t=0$, a equaçaõ ſe reduz a $(x^4+px^3+qx^2+rx+s)\,x=0$, e dá 1° $x=0$; 2° $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Logo hum dos cinco valores de x deve em tal caſo reduzir-ſe a nada, e os outros quatro devem ſer as raizes da equaçaõ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. E como ſendo eſta do quarto gráo, as ſuas raizes naõ podem deixar de ter a fórma propria das do quarto gráo; ſegue-ſe, que comprehendendo-ſe eſtas ao meſmo tempo nas do quinto, a reſoluçaõ geral deſte gráo ha-de comprehender a reſoluçaõ geral do quarto. Pelo meſmo modo ſe provará, que a reſoluçaõ do quarto gráo comprehende a do terceiro, e aſſim por diante. Logo a reſoluçaõ de huma equaçaõ de qualquer gráo deve comprehender a reſoluçaõ de todos os gráos inferiores.

Podemos pois concluir, que na expreſſaõ de huma raiz devem entrar ou explicita, ou implicitamente todas as eſpecies de radicais deſde o ſeu gráo até o primeiro. Com effeito he facil de ver, que

em

em qualquer grão devem entrar radicais desse mesmo grão, porque no caso particular de faltarem todos os termos excepto o primeiro e o ultimo, a expressaõ dos valores de x ha-de incluir hum radical semelhante (171); e como a fórma geral das raizes comprehende a fórma das raizes de todos os grãos inferiores, segue-se que deve incluir todos os radicais desde o seu grão até o primeiro.

194 Feitas estas reflexões sobre a fórma das raizes, expliquemos hum methodo de as achar, o qual consiste em considerar a equaçaõ proposta como o resultado de duas equações a duas incognitas.

Assim, supponde que a equaçaõ he . . . . $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \&c \ldots + k = 0$, sem segundo termo (192) para facilidade do calculo, tomaremos duas equações da fórma $y^m - 1 = 0$, e $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c. \ldots + x = 0$, das quais eliminando y, virá huma equaçaõ em x do grão m da proposta sem segundo termo. Determinando pois a, b, c, &c. pela comparaçaõ desta com a proposta, e substituindo os seus valores na equaçaõ $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c \ldots + x = 0$, como tambem todas as raizes de y, que der a equaçaõ $y^m - 1 = 0$, as quais se achaõ com facilidade; teremos todas as raizes, ou valores de x.

Applicaçaõ ao terceiro grão.

195 SEja $x^3 + px + q = 0$ a equaçaõ que se pertende resolver.

Tomemos $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, das quais eliminando y (167), vem

x^3

$$x^3 - 3abx + a^3 = 0$$
$$+ b^3$$

Comparando agora esta com a proposta, para que sejaõ as mesmas, deve ser $-3ab = p$, e $a^3 + b^3 = q$, das quais se tira $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$. Logo (173) $a = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, usando de hum só valor de a, por naõ haver necessidade de mais; e conseguintemente . . . .
$b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Resta achar os valores de y por meio da equaçaõ $y^3 - 1 = 0$. Esta dá $y = 1$, e dividindo (187) $y^3 - 1$ por $y - 1$ . . . . $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Substituindo pois successivamente estes tres valores de y, e os de a e b na equaçaõ $ay^2 + by + x = 0$, e advertindo que $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ se reduz a $\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}$, teremos as tres raizes da equaçaõ proposta . . . .

$$x = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$-\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

ás quais ſe póde dar a fórma ſeguinte . . .

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$- \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Se na equaçaõ $x^3 + px + q = 0$ ſuppuzermos $q = 0$, teremos $(x^2 + p)x = 0$, a qual dá $x = 0$, $x = +\sqrt{-p}$, e $x = -\sqrt{-p}$. O meſmo ſe deduz neſte caſo das tres formulas gerais das raizes.

196 A equaçaõ $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$ tem ſeis raizes; porem, ainda que uſemos de cada hum dos ſeis valores de a, como he licito, naõ reſultaraõ poriſſo 18 valores differentes para x: cada valor de a dá a x os meſmos tres valores, que dá outro qualquer.

Para o moſtrarmos, ſimplifiquemos o calculo, fazendo $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = m$ . . .

e $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = n$; a equaçaõ

$a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ ſe mudará neſtas duas

$a^3 = m^3$ . . . $a^3 = n^3$. A primeira dá . . .

$a = m$ . . . $a = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . . . .

$a = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; e a segunda dá . . . $a = n$ . . . $a = n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . . $a = n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$. E como temos $a^3 + b^3 = q$, será $m^3 + b^3 = q$, e $n^3 + b^3 = q$, isto he, substituindo os valores de m^3 e n^3 . . . $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = n^3$, e $b^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = m^3$. Logo a e b saõ tais, que $ab = mn$; de maneira que os valores que se correspondem, saõ os seguintes

$a = m$ . . . . $b = n$

$a = m\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ $b = n\left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$

$a = n$ . . . . $b = m$

$a = n\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ $b = m\left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$

Se substituirmos agora qualquer destas seis combinações em $x = -ay^2 - by$, e puzermos successivamente por y os seus tres valores, acharemos sempre estas tres raizes . . . . . . $x = -m - n$,

$x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} . m + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} . n$,

$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} . m + \frac{1+\sqrt{-3}}{2} . n$.

197 Reparando nos tres valores de x acima achados, vê-se claramente que quando $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2}$

$+ \frac{1}{27} p^3)$ for real, iſto he, quando p for poſitivo, ou quando for negativo, ſendo ao meſmo tempo $\frac{1}{4} q^2 > \frac{1}{27} p^3$, os dous ultimos valores de x ſeraõ imaginarios; porque ſendo entaõ os dous radicais cubos quantidades reais, e deſiguais, os ſeus productos pelas quantidades $\sqrt{-3}$, e $-\sqrt{-3}$ naõ ſe deſtruiraõ, e aſſim ſe conſervaraõ expreſſões imaginarias nos dous valores de x; pelo que ſómente o primeiro ſerá real.

198 Porem ſe $\sqrt{(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3)}$ for quantidade imaginaria, iſto he, ſe p for negativo e tal, que ſeja $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$, os tres valores de x ſeraõ reais.

Para o provarmos, ſupponha-ſe por abbreviar $\frac{1}{2} q = m$, e $\sqrt{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)} = n$; a quantidade que tem lugar neſte caſo . . . . . .
$\sqrt[3]{[\frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)}]}$, ou
$\sqrt[3]{[\frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)} \cdot \sqrt{-1}]}$
ſe mudará em $\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} =$

$$m^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{1}{3} \frac{n}{m} \sqrt{-1} + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} \sqrt{-1}$$

$$- \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5} \sqrt{-1} + \&c.)$$

Do mesmo modo se achará . . . .

$$\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3)}]}=\sqrt[3]{(m-n\sqrt{-1})}=$$

$$m^{\frac{1}{3}}(1-\tfrac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}+\&c.)$$

Mudaõ-se pois os tres valores de x em . . . .

$$x=-m^{\frac{1}{3}}(2+\frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$x=m^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$-m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}-\&c.)$$

$$x=m^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$+m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}-\&c.)$$

Expressoens, em que naõ ha termos imaginarios.

A pezar das grandes fadigas dos Algebristas, até o presente naõ se tem achado outro modo de dar neste caso hum valor algebrico real ás tres raizes: pelo que só podemos determinallas por series, ou approximadamente. Em razaõ da difficuldade, deo-se a este caso o nome de *caso irreduzivel.*

Se $\frac{1}{27}p^3$ for negativo e igual a $\frac{1}{4}q^2$, todos

os

os valores de x ſeraõ reais. Logo: Toda a equaçaõ do terceiro gráo tem pelo menos huma raiz real.

Exemplo I. *Achar as raizes da equaçaõ* $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$.

Faça-ſe (192) .. $y = x - 2$, e teremos a transformada ſem ſegundo termo $x^3 - 15x + 26 = 0$. Eſta comparada com a geral $x^3 + px + q = 0$, dá $p = -15$, $q = 26$; logo $\frac{1}{3}p = -5$, $\frac{1}{27}p^3 = -125$; $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; donde vem $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)} = \sqrt{44}$: a equaçaõ propoſta tem pois huma raiz real, e duas imaginarias.

A primeira he negativa... $x = -\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} - \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}$; as outras duas ſaõ . . . . .

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

Exemplo II. *Achar as raizes da equaçaõ* $x^3 - 9x - 10 = 0$.

Aqui temos $p = -9$, $q = -10$, e conſeguinguintemente $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}=\sqrt{-2}$; logo a equaçaõ pertence ao caſo irreduzivel. Fazendo uſo das ſeries precedentes, temos $m=-5$, $m^{\frac{1}{3}}=-1,7099$; $n=\sqrt{2}=1,4142$; e por conſequencia $\frac{n}{m}=-0,2828$: logo, ſubſtituindo ſómente na primeira ſerie, virá . . . . $x=+1,7099\left[2+\frac{2}{9}(0,2828)^2-\frac{20}{243}(0,2828)^4+\&c.\right]$; quantidade, na qual ſe devem fazer as operações indicadas.

Quando m for menor que n, formaremos ſeries proprias para eſte caſo (159). Se m e n differirem muito pouco entre ſi, ſerá neceſſario calcular grande numero de termos. Adiante veremos outro modo de achar os valores approximados de x.

199 Concluamos que ſe póde agora reſolver toda a equaçaõ a quatro termos da fórma $y^{3m}+py^{2m}+qy^m+r=0$; porque, fazendo $y^m=x$, temos $x^3+px^2+qx+r=0$, iſto he, huma equaçaõ do terceiro gráo. Se fizermos $y^m=x-\frac{1}{3}p$, deduziremos immediatamente huma equaçaõ do terceiro gráo ſem ſegundo termo.

Applicaçaõ ao quarto gráo.

200 PAra reſolvermos a equaçaõ geral do quarto gráo ſem ſegundo termo

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

to-

tomaremos as duas equações $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$.

Eliminando y (167), temos

$$\begin{array}{l} x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 = 0 \\ \quad - 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + b^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 4ab^2c \end{array}$$

Esta comparada termo por termo com a proposta, para que sejaõ as mesmas, dá ... $-4ac - 2b^2 = p$ ... $4a^2b + 4bc^2 = q$ ... $-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$.

Para ter b, substituiremos na terceira o valor de $a^4 + c^4$ tirado da segunda, e o de ac tirado da primeira; e acharemos a equaçaõ

$$\begin{array}{l} 64b^6 + 32pb^4 + 4p^2b^2 - qq = 0 \\ \qquad\qquad\qquad - 16rb^2 \end{array}$$

a qual he do sexto grão, mas resolve-se (199) á maneira do terceiro, considerando b^2 como incognita. Esta equaçaõ chama-se a *reduzida*, porque á sua resoluçaõ se reduz a das equações do quarto grão.

201 Por quanto o ultimo termo q^2 tem o sinal $-$, haverá (180) pelo menos hum factor da fórma $b^2 - n$, e conseguintemente (178) $b^2 = n$, isto he, $b = \pm\sqrt{n}$: logo b terá pelo menos dous valores reais; e dos seis que geralmente ha-de dar a equaçaõ, tres teraõ o sinal $+$, e tres o sinal $-$.

202 Para determinarmos a e c, recorreremos ás duas equações $-4ac - 2b^2 = p$, e $4a^2b$

$+4bc^2 = q$, as quais daõ $2ac = -\frac{1}{2}p - b^2$, e $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$; logo, ajuntando a primeira com a ſegunda, tirando-a tambem da ſegunda, e extrahindo a raiz quadrada da ſoma e da differença, teremos

$$a + c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$$

$$a - c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Naõ deduzimos a e c, o que ſeria facil (67), porque nos baſta ter os valores achados de $a + c$ e $a - c$.

Se ſubſtituirmos agora na ſegunda equaçaõ hypothetica $x = -ay^3 - by^2 - cy$ os valores de y deduzidos da primeira $y^4 - 1 = 0$, a ſaber (171, 187).. $y = \pm 1$, e $y = \pm\sqrt{-1}$, teremos os quatro valores de x, ou as quatro raizes da equaçaõ propoſta

$$x = -b - (a+c) = -b - \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = -b + (a+c) = -b + \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b + (a-c)\sqrt{-1} = +b + \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b - (a-c)\sqrt{-1} = +b - \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

as quais feraó fempre as mefmas, ou fe tome o final $+$, ou $-$ nos valores de $a+c$, e $a-c$.

203 He facil de vêr, que as raizes achadas naó mudaó, ou fe fubftitua $+b$, ou $-b$. Agora moftraremos, que cada hum dos tres valores de b que tiverem o final $+$, tambem naó dará mais que as mefmas quatro raizes.

Tirando da primeira das tres equaçóes $-4ac-2b^2=p$, $4a^2b+4bc^2=q$, e $-a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r$, o valor de $b^2=\frac{-p-4ac}{2}$, e fubftituindo-o na fegunda elevada ao quadrado, e na terceira, teremos $qq=-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2$, e $r=-a^4-c^4+\frac{pp}{4}+4pac+14a^2c^2$; valores que fendo fubftituidos na reduzida $64b^6+32pb^4+$ &c. daó

$$\begin{aligned}8b^6+4pb^4+2a^4b^2&+(p+4ac)(a^2+c^2)^2=0\\ +2c^4b^2&\\ -8pacb^2&\\ -28a^2c^2b^2&\end{aligned}$$

Efta equaçaó, pois que he $2b^2=-p-4ac$, tem (187) o divifor $2b^2+p+4ac$. Fazendo a divifaó, e igualando o quociente a nada, para ter os outros dous valores de b^2, acharemos $4b^4-8acb^2+a^4+c^4+2a^2c^2=0$; donde fe tira (173) $2b^2=2ac\pm(a+c)(a-c)\sqrt{-1}$, ou, multiplicando por 2, $4b^2=4ac\pm2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}=[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$, como fe póde verificar pela multiplicaçaõ; e conſeguintemente $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$, tomando ſómente o valor poſitivo, pois que o negativo conduz ás meſmas concluſões: logo os tres valores poſitivos de b ſaõ $b = +\sqrt{\frac{-p-4ac}{2}}$, $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$, e $b = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c) . \sqrt{-1}$.

Repreſentando o ſegundo por b', e o terceiro por b'', teremos $a+c = b'+b''$, e $(a-c)\sqrt{-1} = b'-b''$; e ſubſtituindo eſtes valores nos quatro de x, acharemos $x = -b - b' - b''$, $x = b + b' + b'' - 2b$, $x = b + b' + b'' - 2b''$, $x = b + b' + b'' - 2b'$. Aqui ſe vê, que ſe mudarmos, por exemplo, b em b', ſerá neceſſario mudar ao meſmo tempo b' em b, pois que em cada hum dos valores de x entraõ ſimultaneamente as tres raizes b, b', b''; logo eſta mudança dá os meſmos quatro valores de x, e por conſequencia a equaçaõ do quarto gráo naõ póde ter mais que quatro raizes.

204 Reparando bem nos valores $x = -b \pm (a+c)$, e $x = +b \pm (a-c)\sqrt{-1}$, offerecem-ſe tres caſos: ou as expreſſões $a+c$, e $(a-c)\sqrt{-1}$, ſaõ ambas reais, ou ambas imaginarias, ou huma he real, e a outra imaginaria. No caſo de ſerem ambas imaginarias, pódem reduzir-ſe ſempre á fórma $\sqrt{-m}$, ou $\sqrt{m} . \sqrt{-1}$, ſendo m huma quantidade real; por quanto he $a+c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, e $(a-c)\sqrt{-1} = \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$; e tendo ſempre b

(201) ao menos hum valor real do qual se póde fazer uso, he evidente que as mesmas quantidades só poderaõ ser imaginarias, quando for negativa a quantidade que está debaixo do radical actual. Naõ aconteceria assim, se b naõ tivesse algum valor real; porque sendo b imaginario da fórma $\sqrt{-k}$, as quantidades $a+c$ e $(a-c)\sqrt{-1}$ poderiaõ ser imaginarias da fórma $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}}-h\right)}$.

205 Isto posto, se $a+c$ e $(a-c)\sqrt{-1}$ forem ambas reais, caso em que tambem os quatro valores de x seraõ reais, os outros dous valores de $4b^2$, a saber $[(a+c)\pm(a-c)\sqrt{-1}]^2$, seraõ reais e positivos.

206 Se pelo contrario as duas quantidades $a+c$, e $(a-c)\sqrt{-1}$ forem ambas imaginarias, ou, que vem a ser o mesmo, se os quatro valores de x forem imaginarios, os outros dous valores de b^2 seraõ reais, mas negativos; porque suppondo $a+c=k\sqrt{-1}$, e $(a-c)\sqrt{-1}=l\sqrt{-1}$ (204), teremos $4b^2=-(k\pm l)^2$.

207 Finalmente se das mesmas quantidades sómente huma for real, ou se dos quatro valores de x dous forem reais e dous imaginarios, he evidente que os dous valores de $4b^2$ seraõ imaginarios.

208 Logo: 1° Se a reduzida, considerada como equaçaõ do terceiro gráo, tiver as suas tres raizes reais e positivas, a equaçaõ do quarto gráo terá todas as quatro raizes reais.

2° Se tiver todas reais, e sómente huma positiva, a equaçaõ do quarto gráo terá todas as suas quatro imaginarias.

3°

3º Finalmente se tiver sómente huma raiz real, das quatro da equaçaõ do quarto grão duas seraõ reais, e duas imaginarias.

209 Por quanto, em geral, a fórmula das raizes de huma equaçaõ do terceiro grão naõ as dá em fórma real (197), senaõ quando só huma dellas he real; concluiremos que nenhuma das raizes do quarto grão se deduzirá em fórma real, senaõ no caso unico de duas serem reais; e conseguintemente as fórmulas tanto do terceiro, como do quarto grão sómente tem applicaçaõ nas equações, em que ha duas raizes imaginarias.

210 Exemplo I. *Achar as raizes da equaçaõ* $x^4 + 3x^2 - 52x + 48 = 0$.

Temos $p = 3$, $q = -52$, $r = 48$; logo a reduzida será $64b^6 + 96b^4 - 732b^2 - 2704 = 0$, ou fazendo $4b^2 = u$ para simplificar, $u^3 + 6u^2 - 183u - 2704 = 0$, ou fazendo $u = z - 2$, $z^3 - 195z - 2322 = 0$, sem segundo termo.

Vê-se (197) que z naõ tem mais que hum valor real $z = -\sqrt[3]{(-1161 + \sqrt{1073296})}$ $-\sqrt[3]{(-1161 - \sqrt{1073296})} = \ldots\ldots$ $-\sqrt[3]{(-1161 + 1036)} - \sqrt[3]{(-1161 - 1036)}$ $= \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197} = 5 + 13 = 18$; e como he $4b^2 = z - 2$, será $b = 2$. Substituindo pois nas fórmulas (202) este valor de b, e os de p, q, r, teremos $x = -2 \pm \sqrt{-12}$, $x = +2 \pm 1$; logo os dous valores reais saõ $x = 3$, e $x = 1$.

Os numeros deste exemplo foraõ tais, que cada hum dos radicais pode avaliar-se exactamente. Porêm estes casos saõ rarissimos; o ordinario he

ava-

avaliar por approximaçaõ, quando queremos ter o valor numerico ſem radicais.

Exemplo II. *Achar as raizes da equaçaõ* $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$.

Fazendo (192) $y = x - 1$, virá $x^4 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$. Temos pois $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$; logo a reduzida ſerá $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$, ou fazendo (199) immediatamente $4b^2 = z - 2$, $z^3 + 9z - 30 = 0$.

Eſta equaçaõ (197) naõ tem mais que huma raiz real, e por tanto (208) a propoſta naõ tem mais que duas raizes reais.

Applicando as fórmulas (195), teremos $z = \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$, e conſeguintemente $b = \frac{1}{2}\sqrt{(z - 2)} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$. Logo os dous valores reais de x ſe comprehendem neſta equaçaõ

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]} \pm$$
$$\sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}} - 1\right.}$$
$$\left. - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}\right]$$

Re-

Reflexões sobre o Methodo precedente, e sobre a sua applicação ás Equações dos gráos superiores ao quarto.

211 A Equaçaõ que no quarto gráo deo b, naõ passou do sexto; porém se procurassemos directamente a ou c, chegariamos a huma equaçaõ do 24° gráo. Para nos convencermos disto, das duas equações $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2 = qq$, e $-a^4-c^4+\frac{p^2}{4}+4pac+14a^2c^2=r$, que achámos (203) na transformaçaõ da reduzida, multiplique-se a ultima por $8(p+4ac)$, e do producto tire-se a primeira; virá a equaçaõ

$$\begin{aligned}512a^3c^3+256pa^2c^2+40p^2ac+2p^3&=0\\ -32rac-8pr&\\ +qq&\end{aligned}$$

a qual sendo combinada com a segunda $-a^4-c^4+\&c=r$, a fim de eliminar c, dará (168) huma equaçaõ do 24° gráo. Mas independentemente deste calculo, podemos mostrar a mesma cousa pelo modo seguinte.

A equaçaõ $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2=qq$ dá $a^4+c^4=-\frac{qq}{8(p+4ac)}-2a^2c^2$. Substitua-se no segundo membro o valor de ac, tirado da equaçaõ do terceiro gráo $512a^3c^3+\&c.$; teremos $a^4+c^4=A$, chamando A á totalidade das quantidades conhecidas que formarem o segundo membro. Agora se ſe repreſentarmos por B o valor achado de ac, teremos $a^4 + \frac{B^4}{a^4} = A$, ou $a^8 - Aa^4 = - B^4$. Eſta equaçaõ dará oito valores de a; mas ac tem tres; logo viraõ tres equações do oitavo gráo, e conſeguintemente a terá 24 valores: logo a equaçaõ em a ſerá do 24º gráo.

212 He porém manifeſto, que os expoentes de todas as potencias de a que entrarem neſta equaçaõ, ſeraõ multiplos de 4, viſto ſer ella (183) o producto de tres quantidades da fórma $a^8 - Aa^4 + B^4$. Se fizermos pois $a^4 = u$, a equaçaõ transformada em u, que ſerá do 6º gráo, naõ incluirá de radicais mais que os quadrados e os cubos; porque a equaçaõ $a^8 - Aa^4 = - B^4$ dá $a^4 = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} A^2 - B^4\right)}$, quantidade na qual A e B, que dependem ſómente de huma equaçaõ do terceiro gráo, naõ podem conſtar ſenaõ de radicais quadrados e cubos.

213 Tambem eſtá claro, que a^3 no terceiro gráo, onde a reduzida he $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27} p^3$, inclue taõ ſómente radicais quadrados. Finalmente na equaçaõ do ſegundo gráo ſem ſegundo termo $x^2 + p = 0$, fazendo conforme o noſſo methodo $y^2 - 1 = 0$, e $ay + x = 0$, a reduzida $a^2 + p = 0$, dá para a^2 hum valor ſómente, ou hum radical do primeiro gráo, iſto he, huma quantidade ſem radical.

Logo concluiremos por analogia, que ſe a reduzida do quinto gráo incluir de expoentes de a

taõ

taõ ſómente os multiplos de 5, o valor de a^5 incluirá taõ ſómente radicais quartos, cubos, e quadrados. Se demonſtrarmos pois que pelo methodo actual eſta reduzida naõ póde incluir de potencias de a, ſenaõ aquellas cujos expoentes forem multiplos de 5, ſeguir-ſe-ha que o noſſo methodo reduz a difficuldade das equaçóes do quinto gráo á dos gráos inferiores: iſſo he o que vamos a fazer.

214 Seja $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ huma equaçaõ geral do quinto gráo. Fazendo $y^5 - 1 = 0$, $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0$, e praticando como no terceiro e quarto gráo, acharemos

$$\begin{array}{llllll}
x^5 & - 5adx^3 & + 5bd^2x^2 & - 5cd^3x & + a^5 & = 0 \\
 & - 5bcx^3 & + 5a^2cx^2 & - 5a^3bx & + b^5 & \\
 & & + 5c^2dx^2 & - 5b^3dx & + c^5 & \\
 & & + 5ab^2x^2 & - 5ac^3x & + d^5 & \\
 & & & + 5a^2d^2x & - 5a^3cd & \\
 & & & + 5b^2c^2x & - 5ab^3c & \\
 & & & - 5abcdx & - 5abd^3 & \\
 & & & & - 5bc^3d & \\
 & & & & + 5a^2bc^2 & \\
 & & & & + 5a^2b^2d & \\
 & & & & + 5b^2cd^2 & \\
 & & & & + 5ac^2d^2 &
\end{array}$$

Suppondo o coefficiente de $x^3 = p$ (entendemos por coefficiente a totalidade das quantidades que multiplicaõ huma meſma potencia de x), o de

x^2

$x^2 = q$, o de $x = r$, e a totalidade dos termos conſtantes $= s$, teremos quatro equações, as quais, fazendo $b = ga^2$, $c = ha^3$, $d = ka^4$, como he licito, ſe mudaraõ em outras quatro, que incluiraõ g, h, k, e ſómente a^5, a^{10}, &c. Logo, eliminando g, h, e k, a equaçaõ final naõ incluirá de a outras potencias mais, que as de expoentes multiplos de 5.

215 De tudo o precedente pois ſe ſegue, que em ordem ao primeiro coefficiente a da equaçaõ $ay^{m-1} + by^{m-2} + \&c. = 0$, a reduzida no ſegundo gráo he do gráo 1. 2; no terceiro he do gráo 1. 2. 3; no quarto, do gráo 1. 2. 3. 4: logo por inducçaõ, no quinto ſerá do gráo 1. 2. 3, 4. 5, ou do 120°; do 720° no ſexto gráo; e aſſim por diante.

E advirta-ſe, que o achar-ſe no quarto gráo huma reduzida que naõ paſſa do ſexto, he huma ſimplificaçaõ accidental, a qual provavelmente terá lugar por hum modo analogo nas equações, cujo expoente for numero compoſto, mas naõ naquellas em que for numero primo. Porque no quarto gráo vê-ſe claramente, que eſta ſimplificaçaõ procede de b ter em todas as equações, em que entra, relações ſemelhantes para a e c; ao meſmo tempo que a naõ tem para b as meſmas, que tem para c. Mas no quinto gráo a nenhuma das quantidades a, b, c, d ſe póde aplicar o meſmo que acabamos de dizer de b no quarto gráo, como he facil de vêr pelos coefficientes da equaçaõ $x^5 - 5(ad + bc)x^3 + \&c. = 0$.

216 Como todos os expoentes de a (214) que en-

entraõ na reduzida do quinto gráo, saõ multiplos de 5, se fizermos $a^5 = u$, a equaçaõ do 24° gráo, que entaõ teremos, incluirá taõ sómente $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[3]{}$, e $\sqrt{}$; devendo entrar na proposta os $\sqrt[5]{}$, que mostra a equaçaõ $a = \sqrt[5]{u}$.

Bem se vê agora de que modo devemos discorrer sobre os gráos superiores. Quem dezejar maiores individuações nesta materia, consulte as *Mem. da Acad. das Scienc. ann.* 1762 *e* 1765, onde se acharaõ muitas classes de equações susceptiveis de huma resoluçaõ algebrica facil, e outro methodo deduzido do nosso, o qual simplifica o trabalho nas equações, cujo expoente naõ for numero primo.

217 Naõ póde haver difficuldade em achar sempre todas as raizes da equaçaõ a dous termos $y^n - 1 = 0$, que requer o nosso methodo. Porque deduzindo-se ao menos huma pela simples extracçaõ da raiz do gráo n, isto he, tendo sempre $y = 1$, quando n he impar, e $y = 1$, $y = -1$, quando n he par, a difficuldade de achar as outras reduz-se, quando muito, a resolver huma equaçaõ do gráo $n - 1$, o que se reputa sabido, quando se passa á resoluçaõ de huma equaçaõ geral do gráo n. Mas a difficuldade nem ainda chega a ser desse gráo; he taõ sómente do gráo $\frac{n-1}{2}$, quando n he impar, e do gráo $\frac{n-2}{2}$, quando n he par. Porque, dividindo a equaçaõ $y^n - 1$ pela raiz $y - 1$, quando n he impar, ou por $y^2 - 1$, quando n he par, o quociente, ou a equaçaõ que deve

ve dar as outras raizes, ſerá ſempre da fórma $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \&c. \ldots + 1 = 0$, ſendo k hum numero par; eſta poderá ſempre reſolver-ſe em $\frac{k}{2}$ factores do ſegundo gráo da fórma $y^2 + by + i$; e a equaçaõ de que ſe ha-de deduzir b, naõ paſſará do gráo $\frac{k}{2}$. Naõ me demoro em demonſtrar a ultima propoſiçaõ, a qual ſe póde ver no *Tom. VI das Mem. de Petersburgo.*

Dos Diviſores commenſuraveis das Equações.

218 Quando huma equaçaõ tem raizes commenſuraveis, podemos achallas pelo methodo ſeguinte, com maior facilidade do que pela reſoluçaõ geral.

Como o ultimo termo (180) tem a proprieda-de de ſer o producto de todas as raizes, nenhum numero ſerá valor commenſuravel de x, ſe naõ for diviſor exacto do ultimo termo. Poderiamos pois tomar ſucceſſivamente todos os diviſores do ultimo termo, e ſubſtituillos em $+$ e em $-$ na equaçaõ em lugar de x, pois que as raizes igualmente podem ſer poſitivas e negativas: o diviſor que reduziſſe a equaçaõ a nada, ſeria o valor de x.

Porém, para naõ tentar tantas diviſões, vamos a dar o caracter, pelo qual ſe diſtinguem os diviſores uteis dos inuteis, enſinando primeiramente o modo de achar todos os diviſores de hum numero.

219 Divida-ſe ſucceſſivamente o numero propoſto pelos numeros primos, por que for diviſivel, co-

começando pelos mais ſimples, e continuando a dividir em quanto puder ſer. Eſcrevaõ-ſe á parte, e em linha todos eſtes numeros primos, repetidos tantas vezes quantas ſervîraõ de diviſores; e multipliquem-ſe depois dous a dous, tres a tres, quatro a quatro, &c.: eſtes productos, os numeros primos que ſe acháraõ, e a unidade formaraõ todos os diviſores procurados.

Proponha-ſe, por exemplo, achar todos os diviſores de 60.

Divido 60 por 2, tenho 30; 30 por 2, tenho 15; 15 por 3, tenho 5; 5 por 5, tenho 1. Aſſim os diviſores primos ſaõ

2, 2, 3, 5.

Multiplicando-os 2 a 2, tenho 4, 6, 10, 6, 10, 15.
Multiplicando-os 3 a 3, tenho 12, 20, 30, 30.
Multiplicando-os 4 a 4, tenho 60.

Logo, todos os diviſores de 60, entrando a unidade que he diviſor de todo o numero, ſaõ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220 Iſto poſto, para termos os diviſores commenſuraveis de huma equaçaõ (havendo-os), por exemplo, da geral do quarto gráo

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

ſupponhamos hum delles igual a $x + a$: a equaçaõ propoſta póde entaõ conſiderar-ſe (183) como produzida pela multiplicaçaõ de $x + a$ por hum factor do 3º gráo, como $x^3 + kx^2 + mx + n$. Multiplicando pois, teremos

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an &= 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx & \end{aligned}$$

a qual, devendo ſer igual á propoſta, dá

$k + a = p \ldots m + ak = q \ldots n + am = r \ldots$

an

$$an = s, \text{ ou } n = \frac{s}{a} \ldots m = \frac{r-n}{a} \ldots$$

$$k = \frac{q-m}{a} \ldots 1 = \frac{p-k}{a}.$$

Logo para ſaber ſe hum diviſor a do ultimo termo he admiſſivel, divida-ſe o ultimo termo da equaçaõ por eſſe diviſor; tire-ſe o quociente do coefficiente de x, e divida-ſe o reſto pelo meſmo diviſor; tire-ſe eſte ſegundo quociente do coefficiente de x^2, e divida-ſe tambem o reſto pelo meſmo diviſor; e continue-ſe aſſim, até que ſe chegue ao coefficiente do ſegundo termo da equaçaõ, o qual deve dar 1 por quociente. Se o diviſor ſatisfizer a todas eſtas diviſões, poderá ſeguramente tomar-ſe por a; mas para ſe conhecer a inutilidade do numero, baſta que huma das diviſões naõ ſe poſſa fazer exactamente.

Eſtá claro, que a unidade deve tambem entrar neſte exame, tanto em $+$, como em $-$; porém he mais commodo ſubſtituir $+1$ e -1 na equaçaõ em lugar de x: ſe de nenhuma deſtas ſubſtituições reſultar o, naõ póde ſer $a = 1$, nem $a = -1$.

Exemplo I. *Pergunta-ſe ſe a equaçaõ* $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$ *tem algum diviſor commenſuravel.*

Tendo achado os diviſores do ultimo termo 15, eſcrevo-os por ordem de grandeza, tomando-os em $+$ e em $-$, como aqui ſe vê na primeira linha dos numeros.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Divisores de 15 . . .	+ 15,	+ 5,	+ 3,	− 3,	− 5,	− 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	− 5,	− 3,	− 1
	− 21,	− 23,	− 25,	− 15,	− 17,	− 19
				+ 5		
				+ 18		
				− 6		
				− 3		
				+ 1		

Divido o ultimo termo + 15 por cada hum dos numeros da primeira linha, e eſcrevo os quocientes em ſegunda linha.

Tiro cada termo da ſegunda linha do coefficiente − 20 de x, e com os reſtos fórmo terceira linha.

Divido cada termo deſta pelo correſpondente da primeira linha, e vou eſcrevendo os quocientes exactos, que ſe forem achando. Como neſte exemplo ha ſómente hum, + 5, a equaçaõ naõ póde ter mais que hum diviſor commenſuravel. Porém ou ſe ache hum ſó diviſor exacto, ou ſe achem muitos, continue-ſe por eſta maneira.

Tiro cada quociente do coefficiente 23 de x^2, e eſcrevo os reſtos em quinta linha; aqui he + 18.

Divido, como precedentemente, cada reſto pelo termo correſpondente da primeira linha, e eſcrevo os quocientes por baixo; aqui he − 6.

Tirando eſtes do coefficiente − 9 de x^3, fórmo nova linha com os reſtos; aqui he − 3.

Finalmente, divido eſtes reſtos pelo termo correſpondente da primeira linha. No exemplo achamos + 1; donde concluo, que o termo correſpondente − 3 da primeira linha he a, e que $x - 3$ divide a equaçaõ: logo $x = 3$ he o valor commenſuravel de x na equaçaõ propoſta.

Se

Se quizermos ter ao mesmo tempo o quociente da equaçaõ, na columna que houver satisfeito, tomaremos os numeros que se acharem nas linhas de numero par, contando desde a primeira; estes formaráõ o ultimo termo, e os coefficientes successivos de x, x^2, x^3, &c. no segundo factor da equaçaõ. Applicando ao nosso exemplo, temos -5, $+5$, -6, $+1$; logo concluimos, que o segundo factor he $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, de maneira que a equaçaõ proposta he igual ao producto de $x - 3$ por $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Exemplo II. *Achar os divisores commensuraveis de* ... $x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$

Divisores de 14	$+14$,	$+7$,	$+2$,	-2,	-7,	-14
	$+1$,	$+2$,	$+7$,	-7,	-2,	-1
	-34,	-35,	-40,	-26,	-31,	-32
		-5,	-20,	$+13$		
		$+7$,	$+22$,	-11		
		$+1$,	$+11$			

Os divisores 7 e 2 saõ os unicos que sustentaõ a próva até a ultima linha; mas o segundo naõ satisfaz, porque dá 11 por ultimo quociente, devendo dar 1: logo o unico divisor commensuravel he $x + 7$.

221 Este methodo se applica do mesmo modo ás equações litterais. Se ellas saõ *homogeneas*, isto he, se tem o mesmo numero de dimensões em cada hum dos seus termos, escreveremos na primeira linha sómente os divisores do ultimo termo que forem de huma dimensaõ. Naõ sendo porém homogeneas, deverá supprir-se a homogeneidade, introduzindo huma letra, cujas potencias completem o numero de dimensões.

222 Se o primeiro termo tiver coefficiente, o divisor, em lugar de ser simplesmente $x + a$, será em geral $mx + a$, sendo m hum dos factores do dito coefficiente. Querendo praticar neste caso o methodo precedente, para cada factor em lugar da segunda linha, quarta &c., usaremos dellas multiplicadas por m, e admittiremos taõ sómente por a os termos da primeira, a que corresponder na ultima o segundo factor do primeiro termo da equaçaõ proposta: porém basta tomar em $+$ os m, em que se fizer a tentativa. Por outra parte este caso póde reduzir-se ao precedente, fazendo desapparecer o coefficiente (191).

223 Huma equaçaõ póde naõ ter divisor commensuravel do primeiro gráo, e com tudo tello do segundo. Achaõ-se estes por hum methodo analogo ao exposto, porém como os calculos saõ compridos, abbreviaremos desta maneira. O factor trinomio, representado por $x^2 + mx + n$ multiplique-se por outro factor tal, que produza huma quantidade do gráo da equaçaõ proposta, por exemplo, por hum do terceiro, como $x^3 + ax^2 + bx + c$, se a equaçaõ proposta for do quinto; e formando tantas equações quantas saõ as indeterminadas a, b, c, m, n, &c. eliminaremos a, b, c, m, e virá huma equaçaõ em n, de que se buscaráõ os divisores commensuraveis: assim ficará determinado o factor $x^2 + mx + n$.

He manifesto o que devemos fazer, para achar os factores commensuraveis dos gráos superiores.

Da

Da extracçaõ das raizes das quantidades parte commenſuraveis, e parte incommenſuraveis.

224 AS quantidades da fórma $\sqrt[r]{(C+\sqrt{D})}$, a que nos conduz a reſoluçaõ de algumas equações (173), pódem muitas vezes reduzir-ſe a outras expreſsões mais ſimples, que conſtem de quantidades racionais, e ſimples radicais quadrados; ou ſómente de radicais quadrados; ou deſtes multiplicados, ou divididos por hum radical ſimples do meſmo gráo do radical ſuperior. Comecemos pela reducçaõ das quantidades da fórma $\sqrt{(C+\sqrt{D})}$.

Seja $\sqrt{(C+\sqrt{D})}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$, ſendo m, e n duas incognitas; teremos $C+\sqrt{D}=m+2\sqrt{mn}+n$. Como podemos determinar huma das incognitas pela condiçaõ que quizermos, viſto haver taõ ſómente huma equaçaõ, ſupponhamos $2\sqrt{mn}=\sqrt{D}$; ſerá $C=m+n$, e conſeguintemente $C^2-D=m^2-2mn+n^2=(m-n)^2$. Logo C^2-D deve ſer hum quadrado perfeito, para que m e n ſejaõ commenſuraveis. As duas equações $(m-n)^2=C^2-D$, e $m+n=C$ daõ $m=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}$, e $n=\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}$; logo $\sqrt{(C+\sqrt{D})}=\ldots$ $\sqrt{[\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}+\sqrt{[\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}$.

Exemplo I. *Pede-ſe a raiz quadrada de* $7+\sqrt{48}$.

Temos aqui $C=7$, $D=48$, e $C^2-D=1$, que he hum quadrado perfeito; logo a expreſſaõ póde ſimplificar-ſe. Fazendo pois as ſubſtituições na formula achada, teremos $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$ $=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=2+\sqrt{3}$.

Se nos dessem $\sqrt{(11+6\sqrt{2})}$, reduziriamos (112) esta expressaõ a $\sqrt{(11+\sqrt{72})}$, e achariamos do mesmo modo, que a sua raiz he $3+\sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-se o valor de* . . . . $\sqrt{[4ac+2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}]}$.

Reduzindo esta expressaõ a $\sqrt{[4ac+\sqrt{(-4(a+c)^2(a-c)^2)}]}$, temos $C=4ac$, $D=-4a^4+8a^2c^2-4c^4$, e conseguintemente $\sqrt{(C^2-D)}=2(a^2+c^2)$; logo o valor pedido será $\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{[-(a-c)^2]}=a+c+(a-c)\sqrt{-1}$, como suppuzemos (203). Assim a mesma formula serve para extrahir a raiz quadrada das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Se em lugar de $\sqrt{(C+\sqrt{D})}$ tivessemos $\sqrt{(C-\sqrt{D})}$, a formula seria $\sqrt{[\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}C-\sqrt{(C^2-D)}]}$.

Pelo mesmo methodo se achará, que em geral a quantidade imaginaria monomia $A\sqrt{-1}$, sendo A huma quantidade real, tem a raiz binomia $(1+\sqrt{-1})\sqrt{\frac{1}{2}A}$. Por exemplo $\sqrt{2\sqrt{-1}}=1+\sqrt{-1}$.

225. Vejamos agora as quantidades da fórma $\sqrt[3]{(C+\sqrt{D})}$. Se $C+\sqrt{D}$ tem raiz cubica exacta, deverá esta ser huma quantidade da fórma $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$; porque se na raiz entrassem dous radicais quadrados, no cubo tambem entrariaõ dous, como se póde vêr, elevando $\sqrt{g}+\sqrt{h}$ ao cubo. Isto posto, supponhamos $\sqrt[3]{(C+\sqrt{D})}$

$= m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$; teremos $C + \sqrt{D} = m^3 k + 3mkn + (3m^2 k + kn)\sqrt{n}$, e igualando a parte racional á parte racional, e a irracional á irracional, deduziremos $\sqrt{D} = (3m^2 k + kn)\sqrt{n}$, e $C = m^3 k + 3mkn$, donde vem $(C^2 - D)k = (m^2 k - nk)^3$, ou $m^2 - n = \frac{\sqrt[3]{k(C^2 - D)}}{k}$. Logo para que $m^2 - n$ ſeja racional, ou para que $C + \sqrt{D}$ tenha huma raiz cubica, deve tomar-ſe pela quantidade arbitraria k hum numero tal, que faça $(C^2 - D)k$ hum cubo perfeito. Supponhamos por abbreviar $\frac{\sqrt[3]{k(C^2 - D)}}{k} = p$, teremos $m^2 - n = p$, ou $n = m^2 - p$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $C = m^3 k + 3mkn$, virá $4km^3 - 3pkm - C = 0$. Logo para que m, e n ſejaõ racionais, o valor de m, que ſe deduzir deſta equaçaõ, deve ſer racional. Buſcaremos pois os ſeus diviſores commenſuraveis (220), que acharemos todas as vezes que a quantidade propoſta for ſuſceptivel de huma raiz cubica da fórma $m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$. As duas outras raizes cubicas ſe acharaõ, buſcando todas as raizes da equaçaõ $4km^3$ — &c.

Exemplo I. *Pede-ſe o valor de* $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$.

Temos neſte caſo $C = 20$, $D = 392$; logo $C^2 - D = 8$, que he cubo perfeito, e por tanto poſſo fazer $k = 1$. Será pois $p = 2$, e a equaçaõ

$4km^3$

$4km^3 - 3pkm - C = 0$ ſe torna em $2m^3 - 3m - 10 = 0$, ou fazendo (191) $m = \frac{y}{2}$, em $y^3 - 6y - 40 = 0$. Eſta equaçaõ tem $y - 4$ por diviſor commenſuravel (220); ſerá pois $y = 4$, $m = 2$, e conſeguintemente $n = 2$; logo $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-ſe a raiz cubica de* $52 + 30\sqrt{3}$.

Como temos $C = 52$, $D = 2700$, ſerá $C^2 - D = 4$, que naõ he cubo perfeito. Façamos pois $k = 2$, ſerá $p = 1$, e $4km^3 - 3pkm - C = 0$ ſe reduzirá a $8m^3 - 6m - 52 = 0$, ou fazendo $2m = y$, a $y^3 - 3y - 52 = 0$, cujo diviſor commenſuravel $y - 4$ dá $y = 4$, $m = 2$, $n = 3$, e ultimamente $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}.\sqrt{3}$.

Do meſmo modo extrahiremos as raizes cubicas das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Donde vem, que naõ obſtante a fórma imaginaria que tem as raizes do terceiro gráo (198) no caſo irreduzivel, com tudo quando x he numero inteiro, com facilidade ſe acha exactamente o ſeu valor: naõ he neceſſario mais do que tomar o dobro da parte real da raiz cubica de $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$. Porque x, ou (195) $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q -}$

$\sqrt{}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]$ naõ poderá ſer inteiro ſe $-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ naõ for hum cubo perfeito, cuja raiz conſte de huma parte real, que repreſentaremos por A, e de outra imaginaria B. Será pois $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = A + B$, e conſeguintemente $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = A - B$; logo $x = 2A$.

Por exemplo, na equaçaõ (198) . . . $x^3 - 9x - 10 = 0$ temos $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = \sqrt[3]{(5 + \sqrt{-2})} = -1 + \sqrt{-2}$; logo ſerá $x = -2$. Se achaſſemos as outras duas raizes cubicas de $5 + \sqrt{-2}$, teriamos ſemelhantemente as outras duas raizes da equaçaõ.

Na extracçaõ das raizes mais elevadas diſcorreremos do meſmo modo, que havemos feito nos dous caſos precedentes.

Do modo de achar as raizes approximadas das Equações compoſtas.

226 O Methodo que vamos a expôr, ſuppõe que ſe conhece hum valor da incognita approximado até a ſua decima parte. Vejamos pois como ſe acha eſte primeiro valor, tomando para exemplo a equaçaõ $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Sub-

Substituaõ-se em lugar de x muitos numeros, tanto positivos, como negativos, até que duas substituições consecutivas dem dous resultados de sinais contrarios. Se os dous numeros que satisfizerem a esta condiçaõ, tiverem entre si de differença a decima parte de hum delles, ou menos, qualquer dos dous, ou hum meio entre elles, será o valor approximado que se procura. Se a differença porém for maior, praticaremos da maneira seguinte.

Substituiremos na equaçaõ $x^3 - 5x + 6 = 0$ os numeros $0, 1, 2, 3, 4$, &c.; porém reparando que todos elles daõ resultados positivos, e que isto continuaria assim até o infinito, passaremos a substituir $-1, -2, -3$, &c., o que nos dá os resultados seguintes.

Substituições.	Resultados.
0	$+6$
-1	$+10$
-2	$+8$
-3	-6

Concluiremos pois, que a raiz está entre -2 e -3. Mas como a differença entre estes numeros he 1, quantidade maior que a decima parte de cada hum, tomaremos o meio $-2{,}5$ entre elles, e substituindo-o na equaçaõ em lugar de x, acharemos $+2{,}875$, isto he, huma quantidade positiva; logo a raiz está entre $-2{,}5$, e -3.

Tomaremos o meio $-2{,}7$ entre $-2{,}5$, e -3, desprezando o que passar das decimas, e pela substituiçaõ teremos $-0{,}183$, isto he, huma quan-

quantidade negativa. Logo o valor de x eſtá entre $-2,5$, e $-2,7$; e como a differença 0,2 entre elles he menor que a decima parte de cada hum, tomando o meio, ſerá $-2,6$ o valor de x ſem erro de huma decima.

Supponha-ſe agora x igual ao numero achado mais huma nova incognita z, iſto he, no noſſo exemplo, $x = -2,6 + z$, e ſubſtitua-ſe na equaçaõ, deſprezando z^2, z^3, &c. como quantidades muito pequenas; teremos $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou $15,28z + 1,424 = 0$; logo $z = -\frac{1,424}{15,28} = -0,09$, levando a diviſaõ taõ ſómente até o primeiro algariſmo ſignificativo. Em geral, pára-ſe com a diviſaõ em tendo tantos algariſmos ſignificativos, entrando o primeiro que ſe acha, quantas ſaõ as caſas que medeiaõ entre eſte, e o primeiro algariſmo do primeiro valor approximado de x: no noſſo exemplo entre 9 (primeiro algariſmo ſignificativo do quociente 0,09) e 2, que he o primeiro algariſmo de 2,6, primeiro valor approximado de x, ha huma caſa unica, e por iſſo pára-ſe na primeira letra ſignificativa 9. Logo $x = -2,6 - 0,09 = -2,69$.

Se quizermos o valor de x mais approximado, ſupporemos actualmente $x = -2,69 + t$, e ſubſtituindo na equaçaõ, acharemos $-0,015109 + 16,7083\,t = 0$, donde ſe tira $t = 0,000904$, e conſeguintemente $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Se quizermos ainda maior exactidaõ, faremos $x = -2,689096 + u$, e continuaremos o calculo do meſmo modo.

To-

Tomemos por ſegundo exemplo a equaçaõ

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

O valor de x approximado até as decimas he 2,3. Faremos pois $x = 2,3 + z$, e acharemos $z = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$, parando nas centeſimas pela razaõ dada; logo $x = 2,27$.

Para maior approximaçaõ, faremos $x = 2,27 + t$, e ſubſtituindo acharemos $t = -0,0025$; logo $x = 2,2675$.

Reflexões ſobre o methodo precedente.

227 NO methodo de Newton, que acabamos de expôr, ſuppuzemos, que a raiz de huma equaçaõ ſe acha entre aquelles numeros, que ſendo nella ſubſtituidos daõ dous reſultados de ſinal contrario. Iſto he facil de demonſtrar. Porque, repreſentando o menor valor de x por a, e o proximamente maior por b, de maneira que $x - a$, e $x - b$ ſejaõ dous factores da equaçaõ, he claro, que ſe em lugar de x ſubſtituirmos hum numero poſitivo menor que a, $x - a$ ſe tornará negativo; e ſe ſubſtituirmos outro tambem poſitivo, mas maior que a, e menor que b, $x - a$ ſe tornará poſitivo, e o producto dos outros factores terá o meſmo ſinal, que tinha no primeiro caſo: logo como o factor $x - a$ he o unico que muda de ſinal, tambem o producto total mudará. O meſmo ſe demonſtraria, ſe o menor factor em lugar de $x - a$ foſſe $x + a$; mas deve entaõ fazer-ſe ſubſtituiçaõ de numeros negativos.

Pó-

Póde porém ſer, que ſe ſubſtituaõ por x todos os valores reais, tanto poſitivos, como negativos, comprehendidos entre o e o ultimo termo, e nem por iſſo venhaõ dous reſultados de ſinal contrario. Acontece iſto em tres caſos: 1º Quando as raizes ſaõ iguais duas a duas, quatro a quatro, &c.

2º Quando todas as raizes ſaõ imaginarias.

3º Quando ſaõ parte imaginarias, parte iguais duas a duas.

Por exemplo: a equaçaõ formada pelos quatro factores $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, iſto he, a equaçaõ $(x - a)^2 (x - b)^2 = 0$ naõ muda nunca de ſinal, ſeja qual for o numero poſitivo, ou negativo, que ſe ſubſtitua em lugar de x; porque ou $x - a$ ſeja poſitivo, ou negativo, o ſeu quadrado ſempre he poſitivo. O meſmo acontece a $x - b$.

Quando as raizes ſaõ imaginarias, os ſinais tambem naõ podem mudar; porque ſe mudaſſem, o valor de x eſtaria entre os dous numeros reais, que deſſem os dous reſultados de ſinal contrario, e por tanto naõ feriaõ imaginarios.

Finalmente o terceiro caſo ſegue-ſe dos dous que havemos examinado.

Vejamos como entaõ ſe pódem achar as raizes.

Do modo de achar as raizes iguais das Equações.

228 M*Ultiplique-ſe cada termo da equaçaõ pelo expoente que a incognita tiver no meſmo termo, e diminuindo eſte expoente de huma unidade, ſe forma-*

mará huma nova equaçaõ ; o maior diviſor commum entre ella e a propoſta ſe comporá das raizes iguais, mas elevadas a huma potencia diminuida de huma unidade.

Exemplo. Pedem-ſe as raizes iguais da equaçaõ formada pelo producto de $(x - a)^2$ por $(x - b)^2$, iſto he, da equaçaõ

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0 \\ - 2bx^3 &+ 4abx^2 - 2ab^2x \\ &+ b^2x^2 \end{aligned}$$

Multiplicando cada termo pelo expoente de x, e diminuindo o ſeu expoente de huma unidade, teremos

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6ax^2 &+ 2a^2x - 2a^2b = 0 \\ - 6bx^2 &+ 8abx - 2ab^2 \\ &+ 2b^2x \end{aligned}$$

cujo diviſor commum com a propoſta he $x^2 - ax - bx + ab = (x - a)(x - b)$, o qual tem os meſmos factores que $(x - a)^2 (x - b)^2$, mas diminuidos de huma unidade. Eis-aqui a demonſtraçaõ da regra.

Como (149) temos

$$(x + b)^m = x^m + mx^{m-1}b + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}b^2$$

$$+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3}b^3 + \&c.$$

ſe multiplicarmos cada termo do ſegundo membro pelo expoente de x, e diminuirmos eſte expoente de huma unidade, acharemos

$$m\left(x^{m-1}+(m-1)\,x^{m-2}b+(m-1)\frac{m-2}{2}\,x^{m-3}b^2+(m-1)\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\,x^{m-4}b^3+\&c.\right)$$
$$=m\,(x+b)^{m-1}.$$

Logo, quando aſſim ſe multiplicaõ os termos de que ſe compõe a potencia m do binomio $x+b$, cada hum pelo expoente do ſeu x, o producto he a potencia immediatamente inferior, multiplicada pelo expoente da potencia actual. Eſtá pois demonſtrada a regra no caſo de ſerem todas as raizes iguais.

Se as raizes porém naõ forem todas iguais, iſto he, ſe tivermos $(x+b)^m\,(x+d)^n$, multiplicaremos primeiramente os binomios deſenvolvidos hum pelo outro, e depois cada termo do producto pelo expoente do ſeu x; o reſultado ſerá $m\,(x+b)^{m-1}\,(x+d)^n+n\,(x+b)^m\,(x+d)^{n-1}$, cujo diviſor commum com $(x+b)^m\,(x+d)^n$ he $(x+b)^{m-1}\,(x+d)^{n-1}$; e aſſim por diante, qualquer que ſeja o numero dos factores $x+b$, $x+d$, &c.

Do modo de achar as raizes imaginarias das Equações.

229 AInda que as raizes imaginarias ſejaõ ſuſceptiveis de differentes fórmas, conforme o grão das equações, com tudo podemos reduzillas todas á fórma $x=a+b\sqrt{-1}$, ſendo a e b quan-

quantidades reais, poſitivas, ou negativas. Veja-ſe a demonſtraçaõ nas *Mem. da Acad. de Berlin*, *ann.* 1746, onde Mr. d'Alembert moſtra, que podendo ſempre hum dos valores de x repreſentar-ſe por $a + b\sqrt{-1}$, haverá outro da fórma $a - b\sqrt{-1}$. Donde ſe ſegue:

1° O numero das raizes imaginarias he ſempre par.

2° As equações de gráos pares ſaõ as unicas, que pódem ter todas as ſuas raizes imaginarias.

3° As raizes imaginarias, que dá a reſoluçaõ de huma equaçaõ, tem duas a duas a meſma quantidade debaixo do radical.

4° Toda a equaçaõ de gráo par, cujo ultimo termo he negativo, tem ao menos duas raizes reais.

5° Huma equaçaõ, que tem todas as raizes imaginarias, póde reſolver-ſe em factores do ſegundo gráo da fórma $(x - a - b\sqrt{-1})(x - a + b\sqrt{-1})$, iſto he, em factores reais do ſegundo gráo $x^2 - 2ax + aa + bb$.

Logo reſolvendo huma equaçaõ, que tiver todas as raizes imaginarias, em factores do ſegundo gráo (223) da fórma $x^2 + gx + h$, a equaçaõ em h terá ſeguramente algumas raizes reais, e conſeguintemente poderemos achallas ao menos por approximaçaõ. Concluamos pois, que ſeja qual for a equaçaõ, poderemos ſempre achar as ſuas raizes ou reais, ou imaginarias, ao menos por approximaçaõ.

SEC-

SECÇAÕ II.

DA APPLICAÇAÕ DA ALGEBRA A' ARITHMETICA E GEOMETRIA.

230 TEMOS visto nas applicações da Secçaõ precedente, que a resoluçaõ de hum problema, depois de formada a sua equaçaõ, se reduz a desembaraçar a incognita, ou incognitas; e que as regras porque isto se executa, ainda que sejaõ muito differentes as questões, e as quantidades que nellas se consideraõ, saõ as mesmas para todos os problemas do mesmo gráo.

Mostrámos em alguns exemplos, que estas regras dispensaõ de multiplicidade de raciocinios, que necessariamente se deviaõ fazer, senaõ recorressemos ás equações, e que independentemente do seu numero, muitas vezes pela sua natureza seriaõ superiores ás forças ordinarias da razaõ. Vimos tambem, quanto era vantajoso representar por sinais gerais as quantidades que entraõ nos problemas, e as operações que sobre ellas se praticaõ. Além destas vantagens a Analyse tem muitas outras de que vamos a tractar, considerando as equações em hum ponto de vista mais extenso do que temos feito até aqui.

As equações que exprimem de hum modo geral todas as condições de qualquer problema, saõ como outros tantos livros, em que se pódem ler com muita facilidade as differentes relações, que tem humas quantidades com as outras. A razaõ aban-

abandona o problema, e occupa-ſe unicamente com as equações, para applicar-lhes as regras que enſinámos, e dar-lhes novas fórmas, que melhor deixaõ perceber as relações. Em huma palavra, ſaõ as equações o depoſito das propriedades das quantidades que nellas entraõ, e das reſoluções geraes de hum grande numero de problemas, que naõ lembravaõ, nem ſe ſuſpeitava que dependeſſem do problema principal.

Com effeito, como o fim das regras porque ſe achaõ os valores das incognitas, he reduzir as equações a terem por primeiro membro cada huma das incognitas, e por ſegundo todas as outras quantidades; e como eſtas regras ſaõ applicaveis a qualquer das quantidades que entraõ nas equações, eſtá claro, que podemos ſempre chegar a ter qualquer dellas no primeiro membro, e todas as outras no ſegundo. Entaõ eſtamos reduzidos ao caſo, em que houveſſemos de reſolver o problema, no qual ſe deſſem eſtas ultimas, e aquella ſómente foſſe a incognita. Logo huma equaçaõ reſolve tantos problemas differentes, quantas ſaõ as quantidades que nelle entraõ. Moſtremos iſto em alguns exemplos.

Propriedades geraes das Progreſsões Arithmeticas.

231 SEja o valor numerico do primeiro termo de huma progreſſaõ arithmetica $= a$, o do ultimo $= u$, a differença commua, ou a razaõ $= d$, o numero total dos termos $= n$; o numero dos termos que precedem o termo u ſerá $n-1$;

logo

logo (Arith. 206) . . . $u = a + (n - 1) d$. Esta equaçaõ resolve o problema, em que sendo dada a razaõ de huma progressaõ, com o numero dos termos, e o valor do primeiro, se procura qual deve ser o ultimo termo. Mas como contém quatro quantidades, resolve quatro problemas gerais. Porque,

1° Considerando a como incognita, temos $a = u - (n - 1) d$, a qual ensina, que o primeiro termo de huma progressaõ arithmetica crescente se acha, tirando do ultimo termo a razaõ tomada tantas vezes menos huma, quantos saõ os termos todos.

2° Considerando n como incognita, temos $n = \frac{u - a}{d} + 1$, a qual mostra, que para achar o numero dos termos, dividiremos a differença entre o primeiro e o ultimo pela razaõ, e ajuntaremos huma unidade ao quociente. Por exemplo, se o primeiro termo for 5, o ultimo 37, e a razaõ 2, constará a progressaõ de 17 termos. Se o quociente naõ for numero inteiro, a questaõ será absurda.

3° Considerando d como incognita, temos $d = \frac{u - a}{n - 1}$, a qual ensina, que para achar a razaõ, tiraremos o primeiro termo do ultimo, e dividiremos o resto pelo numero dos termos menos hum; o que concorda com a regra que demos (Arith. 209).

Assim a equaçaõ $u = a + (n - 1) d$ dá a resoluçaõ de quatro problemas gerais, que se comprehendem neste: *Das quatro cousas, o primeiro* *termo, o ultimo, o numero dos termos, e a razaõ de huma progreſſaõ arithmetica, ſendo dadas tres, achar a quarta.*

232 Toda a progreſſaõ arithmetica póde repreſentar-ſe por $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d$, &c. que ſendo igual a $\div a \pm 4d . a \pm 3d . a \pm 2d . a \pm d . a$ a ſoma s dos termos de huma ſerá igual á ametade da ſoma de ambas juntas. Mas a ſoma de dous termos correſpondentes nas duas progreſsóes deve ſempre ſer a meſma, e igual á do primeiro e ultimo de huma dellas reunidos; logo a totalidade das duas ſe achará ſomando os extremos de huma, e multiplicando o reſultado pelo numero dos termos. Logo para acharmos a ſoma de todos os termos de huma progreſſaõ arithmetica, *multiplicaremos a ſoma dos extremos pela ametade do numero dos termos.* Por exemplo, a ſoma dos cem primeiros termos da progreſſaõ dos numeros impares $\div 1 . 3 . 5 . 7$ &c, cujo centeſimo termo $= 199$, he $(199 + 1)\frac{100}{2} = 10000$.

A traducçaõ algebrica deſta propriedade, conſervando as denominaçóes precedentes, dá a equaçaõ $s = (a + u)\frac{n}{2}$, a qual reſolve eſte problema geral, que comprehende quatro: *Das quatro couſas, primeiro termo, ultimo, a ſoma, e numero dos termos de huma progreſſaõ arithmetica, ſendo dadas tres, achar a quarta.*

Porque 1º conhecendo a, u, e n, a equaçaõ dá o valor de s. 2º Conhecendo a, u, e s, teremos

$n = \frac{2s}{a + u}$. 3° e 4° Conhecendo a, s, e n, ou u, s, e n, teremos $u = \frac{2s}{n} - a$, ou $a = \frac{2s}{n} - u$.

233 Os oito problemas gerais que acabámos de resolver por meio das duas equações, em que se traduzirаõ duas propriedades das progressões, mostraõ como a Algebra ensina a deduzir de hum principio todas as verdades que delle dependem. Naõ obstante a pouca utilidade de algumas, continuaremos a tractar dellas, pois que pela sua simplicidade saõ muito proprias para servirem de exemplo do uso das equações.

Até aqui havemos considerado sómente huma equaçaõ de huma vez. Porém se duas, ou mais equações contiverem algumas quantidades communas, poderemos com summa facilidade derivar maior numero de propriedades. Por exemplo, as duas equações fundamentais das progressões arithmeticas $u = a + (n - 1) d$, e $s = (a + u) \frac{n}{2}$ tem tres quantidades communas a, u, e n. Tomemos successivamente em cada huma o valor de qualquer das tres quantidades, e igualando os dous valores, teremos novas equações, as quais exprimiraõ a relaçaõ, que tem entre si as outras quatro quantidades independentemente da eliminada. Assim, considerando a como incognita, teremos . . .

$s = \frac{2nu - n(n-1)d}{2}$, a qual resolve quatro problemas. Se eliminarmos ou u, ou n, teremos ou

$$s = an + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2}, \text{ ou } s = \frac{a+u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d},$$

das quais nos ſerviremos para reſolver oito problemas, conforme forem conhecidas tais, ou tais quantidades.

Concluamos pois, que as duas equações fundamentais contem a reſoluçaõ de vinte problemas, que ſe podem propôr ſobre as progreſsões arithmeticas, ou enſinaõ a achar qualquer das cinco quantidades a, u, n, d, s, huma vez que ſejaõ dadas tres. Para fazermos algumas applicações,

234 Supponhamos que ſe pergunta, quantas balas inclue a baſe de hum monte triangular, a qual tem n balas por lado.

He claro que cada fileira parallela a qualquer dos lados tem huma bala de menos que a precedente, e que o numero das fileiras he igual a n. Reduz-ſe pois o problema a achar a ſoma dos termos de huma progreſſaõ arithmetica, cujo primeiro termo $= 1$, o ultimo $= n$, e o numero dos termos $= n$. Logo a ſoma ſerá $\frac{(n+1)n}{2}$; formula dos numeros triangulares, que ſempre dará hum numero inteiro, quer n ſeja par, quer impar. Se o lado AB (*Fig.* 2) conſtar de 6 balas, a baſe ABC terá 21.

235 O meſmo principio póde ſervir para achar a ſuperficie de qualquer trapezio, ou de hum triangulo. Com effeito, imaginando a altura dividida em huma infinidade de partes iguais por linhas rectas parallelas á baſe, ter-ſe-ha o trapezio total ABDC (*Fig.* 3) dividido em infinitos trapezios *bcih*, *cdki* infinitamente pequenos. E como todos elles

elles tem a meſma altura, tirando ce e bf parallelas a bk, a differença entre qualquer delles e o ſeu vezinho ſerá huma meſma quantidade $cefg$. Logo para acharmos a ſua totalidade, (232) multiplicaremos a ſoma dos extremos pela ametade do numero dos termos. Porém ſendo os trapezios infinitamente pequenos, póde cada hum ſuppôr-ſe igual á ſua baſe multiplicada pela ſua altura. Logo ſerá a ſuperficie do trapezio $= (\mathrm{CD}.\,b + \mathrm{AB}.\,b)\,\frac{n}{2} = \left(\frac{\mathrm{CD}+\mathrm{AB}}{2}\right) nb =$ $\left(\frac{\mathrm{CD}+\mathrm{AB}}{2}\right)\mathrm{IH} =$ á ſemiſoma dos lados parallelos multiplicada pela altura. Donde ſe ſegue, que ſe AB for nada, ou ſe o trapezio ſe converter em triangulo, multiplicaremos a baſe pela ametade da altura; o que tudo concorda com o que ſe demonſtra na Geometria.

Da ſoma das potencias dos termos de qualquer Progreſſaõ Arithmetica.

236 A Soma de muitas quantidades que creſcem, ou diminuem por huma lei, determina-ſe pelo conhecimento de algumas dellas, do ſeu numero, e da lei do augmento, ou diminuiçaõ que obſervaõ.

Sejaõ a, b, c, d, &c. muitos numeros em progreſſaõ arithmetica, cuja differença ſeja r. Teremos 1° $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2° Quadrando, teremos

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3° Elevando ao cubo, teremos

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$
$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Se ſomarmos as equações dos quadrados, acharemos $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$. Logo em geral, ſe o numero das quantidades a, b, c, d, &c. ſe repreſentar por n, a ultima por u, e a ſoma por s^I, teremos $u^2 = a^2 + 2r(s^I - u) + (n - 1)r^2$, donde vem a ſoma de todos os termos de huma progreſſaõ arithmetica

$$s^I = \frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2r} + u.$$

Do meſmo modo a ſoma dos cubos dará $e^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2(a + b + c + d) + 4r^3$, e em geral, ſendo s^{II} a ſoma dos quadrados, $u^3 = a^3 + 3r(s^{II} - u^2) + 3r^2(s^I - u) + (n-1)r^3 = a^3 + 3r(s^{II} - u^2) + 3r\,\frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2} + (n-1)r^3$.

Lo-

Logo ſerá a ſoma dos quadrados, ou . . . . .

$$s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)\,r^3}{6r}$$

Semelhantemente acharemos a ſoma das potencias mais elevadas.

237 Se a progreſſaõ for a ſerie dos numeros naturais 1, 2, 3, &c. ſerá $a = 1$, $r = 1$, $u = a + (n-1)\,r = n$, e conſeguintemente $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$.

Supponhamos que ſe pertende ſaber quantas balas inclue hum monte dellas quadrado, ſendo conhecido o numero que tem hum lado da baſe. Como todas as camadas parallelas á baſe ſaõ quadrados que vaõ diminuindo de huma bala por lado deſde a baſe, eſtá claro que a totalidade ſerá a ſoma dos quadrados da ſerie natural dos numeros, continuados até o numero n das balas do lado da baſe, e conſeguintemente terá por expreſſaõ $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$.

Praticaremos pois conforme eſta regra . . . *Ao numero das balas de hum lado da baſe, e ao ſeu dobro ajunte-ſe a unidade; multiplique-ſe huma ſoma pela outra, e o producto pelo meſmo numero de balas do lado da baſe; e tome-ſe a ſexta parte deſte ultimo producto.* Por exemplo, ſe o monte quadrangular tiver na baſe 6 balas por lado, a eſte numero e ao ſeu dobro 12 ajuntaremos 1, do que reſultará 7, e 13; o producto 91 multiplicado por 6 dará 546, cuja ſexta parte 91 ſerá o numero de balas do monte propoſto.

Se

Se o monte (*Fig.* 4.) tiver por baſe hum parallelogrammo DFGI, imagine-ſe dividido em hum monte quadrando DEAIH que ja ſe ſabe ſomar, e em hum priſma CBFEHG, cuja totalidade ſe achará, multiplicando o numero das balas do triangulo FBG (234) pelo numero das balas de BC, ou de AB — 1. Aſſim, ſe AB tiver m balas, o monte terá

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)(m-1)}{2}$$

$$=n\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{m+2(m+n-1)}{3}\right).$$

238 Suppondo que o numero dos termos he infinito, a formula $s^{II}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ſe reduz a $s^{II}=\frac{n^3}{3}=n^2\cdot\frac{n}{3}$; porque ſuppôr n infinito, he ſuppôr que n naõ póde ſer augmentado por quantidade alguma finita; hypotheſe que ſe exprime no noſſo calculo, deſprezando 1 em comparaçaõ de n e de $2n$. Iſto poſto, imagine-ſe huma pyramide compoſta de ſecções parallelas á baſe, e a altura ST (*Fig.* 5) dividida em huma infinidade de partes iguais. Como conſta da Geometria, que todas as ſecções ſaõ proporcionais aos quadrados das ſuas diſtancias reſpectivas St ao vertice S, eſtas formaraõ a progreſſaõ natural, e as ſecções a dos ſeus quadrados. Logo, pela formula $s^{II}=n^2\frac{n}{3}$, para achar a ſoma das ſecções, iſto he, a ſolidez da pyramide, deve multiplicar-ſe o ultimo quadrado, iſto

iſto he, a baſe, pela terça parte da altura, como ſe demonſtra na Geometria.

239 Em geral: Por quanto temos . . . .

$$e^m = d^m + md^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}d^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}d^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$d^m = c^m + mc^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}c^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}c^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}b^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}b^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$b^m = a^m + ma^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}r^3 + \&c.$$

ſe ajuntarmos eſtas quantidades, e repreſentarmos por $s\int^{m-1}$, $s\int^{m-2}$, $s\int^{m-3}$, &c., a ſoma das potencias $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c. de todos os termos, e por u o ultimo, acharemos $u^m = a^m +$ . . $mr\,(s\int^{m-1} - u^{m-1}) + m.\frac{m-1}{2}r^2\,(s\int^{m-2} - u^{m-2})$ + &c. da qual ſe deduzem formulas da ſoma de todas as potencias de huma progreſſaõ, pondo ſucceſſivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, &c. e advertindo que em lugar de $s\int^0 - u^0$ póde tomar-ſe $n-1$.

240 Agora he facil de achar a ſoma de muitas outras eſpecies de progeſsões. Por exemplo, os termos da progreſſaõ ÷ 3 . 7 . 11 . 15 . 19 &c. ſomados ſucceſſivamente formaõ a ſerie 3, 10, 21, 36, 55, &c. a qual ſe póde ſomar. Ajuntando do meſmo modo os termos deſta, teremos huma ſegunda ſerie 3, 13, 34, 70, 125, &c. que tambem he ſomavel, como igualmente a que ſe fórma pela addiçaõ dos termos da ultima, e aſſim por diante até o infinito.

Com

Com effeito, ſendo (233) a ſoma dos termos de huma progreſſaõ arithmetica $s = an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, e exprimindo s hum termo qualquer da primeira ſerie, reduz-ſe a queſtaõ a ſomar a ſerie das quantidades que reſultariaõ da expreſſaõ $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, ſe ſubſtituiſſemos ſucceſſivamente por n todos os termos da progreſſaõ natural 1, 2, 3, &c. E como a e r, ſeja n qual for, ſaõ ſempre as meſmas, para achar a ſoma das quantidades repreſentadas por an, baſta multiplicar a pela ſoma das quantidades repreſentadas por n, iſto he, pela ſoma da progreſſaõ dos numeros naturais; logo an ſerá a ſoma das quantidades $a.\frac{(n+1)n}{2}$. Do meſmo modo a ſoma das quantidades $\frac{r}{2}n = \frac{r}{2}\frac{(n+1)n}{2}$, e a das quantidades $\frac{r}{2}n^2 = \frac{r}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$. Logo a ſoma das quantidades $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, iſto he, a ſoma dos termos da primeira ſerie ſerá $a.\frac{(n+1)n}{2} + \frac{r}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) - \frac{r}{2}\frac{(n+1)n}{2} = \ldots$ $a\frac{(n+1)n}{2} + r\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. Somando tambem as differentes partes deſte reſultado, para o que naõ ſe requer mais do que ſomar as potencias da ſerie natural dos numeros, acharemos a ſoma dos termos da ſegunda ſerie; e aſſim até o infinito.

Quando $a = 1$, e $r = 1$, iſto he, quando a progreſſaõ primitiva he a ſerie dos numeros naturais, as ſeries cujos termos ſe formaõ pela addiçaõ dos termos da precedente, chamaõ-ſe *numeros figurados*: eſtes ſaõ *triangulares* ou da terceira ordem, *pyramidais* ou da quarta ordem, conforme pertencem á primeira, ou á ſegunda ſerie &c.

Se for $a = 1$, e fizermos r igual a 1, 2, 3, &c. reſultaraõ muitas progreſsões arithmeticas; as ſeries que ſe formaõ pela addiçaõ dos termos conſecutivos de cada huma deſſas progreſsões, chamaõ-ſe *numeros polygonos*, os quais ſeraõ *triangulares*, *quadrados*, *pentagonos*, *hexagonos*, &c. conforme a differença da progreſſaõ for 1, 2, 3, 4, &c.

Pela ultima formula póde achar-ſe o numero de balas de hum monte triangular; porque ſuppondo $a = 1$, e $r = 1$, teremos $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$, donde ſe deduz huma regra muito ſimples. Se for dado o numero total m das balas, ſerá n a raiz cubica do maior cubo que ſe contiver em $6m$.

Do meſmo modo acharemos a ſoma das ſeries que ſe formaõ ajuntando a ſerie dos quadrados, a dos cubos &c., e em geral daquellas ſeries, cujos termos ſe exprimem por quaiſquer potencias perfeitas de hum meſmo numero n, multiplicadas por quaiſquer numeros.

Das

Das propriedades, e uſo das Progreſsões Geometricas.

241 SEjaõ a, b, c, d, e, &c. os termos conſecutivos de huma progreſſaõ geometrica creſcente, cuja razaõ $= q$. Como pela propriedade deſtas progreſsões (Arith. 211) he $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, teremos $b + c + d + e = (a + b + c + d) q$, ou em geral, ſendo s a ſoma de todos os termos, e u o ultimo, $s—a = (s—u) q$, a qual dá $s = \frac{qu—a}{q—1}$. Se a progreſſaõ for deſcendente, a repreſentará o ultimo termo, e u o primeiro.

Logo: *A ſoma de todos os termos de huma progreſſaõ geometrica acha-ſe, multiplicando o maior termo pela razaõ, tirando do producto o menor, e dividindo o reſto pela razaõ diminuida de huma unidade.* Entendemos em geral pela palavra *razaõ* o numero de vezes que cada termo da progreſſaõ contem o immediatamente menor, de maneira que o noſſo enunciado convem tanto ás progreſsões creſcentes, como ás decreſcentes.

Se a progreſſaõ for decreſcente até o infinito, o ultimo termo ſerá infinitamente pequeno, e a formula ſe tornará em $s = \frac{qu}{q—1}$. Logo neſte caſo o producto da razaõ multiplicada pelo maior termo, ſendo dividido pela razaõ diminuida da unidade, dará a ſoma dos termos da progreſſaõ. Aſſim a ſoma dos termos deſta progreſſaõ $\dot{\dot{}}\!\dot{\dot{}}\ \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$ &c. continuada até o in-

infinito he $\frac{\frac{1}{2}.2}{2-1}=1$. Em geral, toda a progressaõ geometrica decrescente até o infinito da fórma $\div\frac{n}{n+1}:\frac{n}{(n+1)^2}:\frac{n}{(n+1)^3}$ &c. sendo n hum numero qualquer, tem por valor a unidade.

Naõ parecerá extranha esta conclusaõ a quem advertir, que tomando, por exemplo, os $\frac{2}{3}$ da linha AB (*Fig.* 6) que supponho ser de 1 pé, depois Cd, ou $\frac{2}{3}$ do resto CB, depois $\frac{2}{3}$ do resto dB, e assim por diante até o infinito, como exprime a progressaõ $\div\frac{2}{3}:\frac{2}{9}:\frac{2}{27}$ &c., isto he, $\div\frac{2}{3}:\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{9}$ &c., naõ se absorbe mais que a linha AB.

242 Seja o primeiro termo de huma progressaõ geometrica $=a$, qualquer termo della $=u$, a razaõ $=q$, o numero dos termos $=n$, será (Arith. 213) $u=aq^{n-1}$. Esta equaçaõ resolve este problema geral: Das quatro cousas, primeiro termo, ultimo, razaõ e numero dos termos de qualquer progressaõ geometrica, sendo dadas tres, achar a quarta. Porque da formula $u=aq^{n-1}$, a qual dá immediatamente o valor de u, se deduz $a=\frac{u}{q^{n-1}}$, e $q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Note-se que esta ultima concorda com a regra que demos na Arithmetica, para meter muitos meios proporcionais entre duas quantidades a e u. Quanto a n, a Algebra naõ dá meios directos para o achar; mas facilmente se resolverá a equaçaõ por meio dos logarithmos,

advertindo que se l representar as palavras *logarithmo de*, será (Arith. 227) $lab = la + lb$, e (Arith. 229) $la^n = nla$. Logo na equaçaõ $u = aq^{n-1}$ teremos $lu = la + (n-1)\, lq$, donde vem $n = 1 + \frac{lu - la}{lq}$.

Para fazermos algumas applicações, supponhamos que se deraõ 60000 libras a juro de 5 por 100, com a condiçaõ de se reputarem os interesses todos os annos como hum capital que igualmente vençe juro: pergunta-se quantos annos saõ necessarios para que o capital chegue a 1000000 libras.

Como o interesse he $\frac{1}{20}$ do capital do anno precedente, representando por a, b, c, d, e, os fundos successivos de cada anno, teremos $b = a + \frac{1}{20}a = \frac{21}{20}a$, $c = \frac{21}{20}b$, $d = \frac{21}{20}c$, $e = \frac{21}{20}d$. Logo os fundos annuos formaõ huma progressaõ geometrica, cujo primeiro termo $a = 60000$, o ultimo $u = 1000000$, a razaõ $q = \frac{21}{20}$, e procura-se o tempo, isto he, $n-1$. Neste caso he $n = \frac{l1000000 - l60000}{l21 - l20} + 1 = \frac{1{,}2218487}{0{,}0211893} + 1$ pelas Taboas, ou $n-1 = 57{,}7$ proximamente. Logo o capital 60000 lib. chegará a ser de 1000000 lib. no fim de 57 annos 8 mezes $\frac{1}{2}$, com pouca differença.

A equaçaõ $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ se resolve facilmente

por

por logarithmos; porque (Arith. 230, e 231) teremos $lq = \frac{lu - la}{n - 1}$. Applicando ao caſo precedente, acharemos $lq = \frac{1,2218487}{57,7} = 0,0211757$, logarithmo a que nas taboas correſponde o numero 1,0500 muito proximamente; donde concluiremos, que o intereſſe he $\frac{1}{20}$ proximamente.

Supponhamos por ſegundo exemplo, que a populaçaõ n de huma provincia tem de augmento ſucceſſivo todos os annos huma ſua parte deſignada por $\frac{1}{p}$; pergunta-ſe, em quantos annos virá a populaçaõ a conſtar de m peſſoas.

Sendo x o numero de annos que ſe procura, e diſcorrendo como no exemplo antecedente, vê-ſe claramente que a ſerie da populaçaõ annua fórma huma progreſſaõ geometrica, cujo primeiro termo he n, o ultimo m, a razaõ $\frac{1+p}{p}$, e o numero dos termos $x+1$; logo teremos $n\left(\frac{1+p}{p}\right)^x = m$, e por conſeguinte $x = \frac{lm - ln}{l(1+p) - lp}$.

Se for $p = 100$ e $m = 10n$, acharemos $x = \frac{l10}{l101 - l100} = \frac{10000000}{43214} = 231$. Logo ainda que a populaçaõ creſça em cada anno ſómente huma ſua centeſima parte, paſſados 231 annos eſtará dez vezes maior; paſſados 462 annos, ſe fará cem

ve-

vezes maior ; e mil vezes , paſſados 693 annos.

Com igual facilidade ſe achará o augmento annuo da populaçaõ. Se em cada ſeculo , por exemplo , o numero n de habitantes ſe fizer o duplo , teremos $\left(\frac{1+p}{p}\right)^{100} = 2$, e conſeguintemente $l\frac{1+p}{p} = \frac{1}{100}l2 = 0{,}0030103$; logo $p = 144$ poximamente : baſta pois que a populaçaõ creſça em cada anno a ſua $\frac{1}{144}$ parte.

No caſo de $n = 6$, como aconteceu na propagaçaõ da Terra depois do Diluvio , para que no fim de 200 annos houveſſe hum milhaõ de peſſoas , devia ſer $l\frac{1+p}{p} = \frac{1}{200} . l\frac{1000000}{6} = 0{,}0261092$, donde ſe tira $\frac{1+p}{p} = \frac{1061963}{1000000}$, e $p = 16$ proximamente. Se a progreſſaõ creſceſſe deſte modo por eſpaço de 400 annos , o numero de almas chegaria a $1000000 . \frac{1000000}{6} = 166666666666$.

243 A equaçaõ $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ dará tambem quatro formulas, as quais reſolveraõ eſte problema geral : Das quatro couſas , ſoma , razaõ , primeiro e ultimo termo de huma progreſſaõ geometrica , ſendo dadas tres , achar a quarta.

Finalmente , ſe combinarmos entre ſi as duas equações $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, e $u = aq^{n-1}$, reſolveremos

eſte

eſtoutro problema mais geral: Das cinco couſas, primeiro e ultimo termo, razaõ, ſoma e numero dos termos de huma progreſſaõ geometrica, ſendo dadas tres, achar as outras duas.

Da ſoma das Series Recurrentes.

244 DAmos o nome de *recurrentes* áquellas ſeries, em que hum termo qualquer ſe fórma de certo numero de termos precedentes, multiplicados, ou divididos por numeros determinados, poſitivos, ou negativos. Por exemplo, a ſerie 2, 3, 19, 101, 543, &c. he recurrente, porque para ſe formar hum termo, recorre-ſe aos dous precedentes, multiplicando o primeiro por 2, o ſegundo por 5, e ſomando os productos; aſſim $543 = 19 . 2 + 101 . 5$, e $101 = 3 . 2 + 19 . 5$.

Somaõ-ſe eſtas ſeries pelo methodo de que acima fizemos uſo, como vamos a moſtrar, applicando-o áquellas ſeries, cuja lei depende de duas quantidades ſómente, á maneira do exemplo propoſto.

Sejaõ a, b, c, d, e, f, &c. os termos conſecutivos de huma ſerie deſta eſpecie, m e p os numeros determinados de que depende a ſua formaçaõ. Logo teremos $c = ma + pb$, $d = mb + pc$, $e = mc + pd$, $f = md + pe$, e conſeguintemente $c + d + e + f = m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$, ou deſignando s a ſoma de tódos os termos, $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f)$; a qual dá . . . . $s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$, dependente

O dos

dos dous primeiros termos, dos dous ultimos, e das quantidades m e p. Se for $m = 0$, teremos $s = \frac{pf-b}{p-1} + a$, como deve ser, porque entaõ a serie torna-se em progressaõ geometrica.

Póde introduzir-se o numero dos termos, procurando a expressaõ geral de hum termo qualquer em quantidades a, b, m, p, e no numero dos termos n.

Da Construcçaõ Geometrica das Quantidades Algebricas.

245 AS linhas, as superficies, e os solidos; como saõ quantidades, admitem as mesmas operações, que se fazem sobre os numeros, e sobre as quantidades algebricas. Os resultados porém de dous modos se podem avaliar, ou em numeros, ou em linhas. O primeiro modo, que tem lugar, quando as quantidades dadas se exprimem em numeros, presentemente naõ tem difficuldade: substituem-se em lugar das letras as quantidades numericas que ellas representaõ, e fazem-se as operações indicadas pela disposiçaõ dos sinais, e das mesmas letras.

O segundo modo, o qual se chama *construcçaõ* das quantidades algebricas, ou do problema que as produzio, depende de se entender a significaçaõ de certas expressões fundamentais, a que se referem todas as outras. Trataremos das primeiras, e ensinaremos ao mesmo tempo o modo de reportar-lhes quaisquer outras expressões.

246 Para construir $\frac{ab}{c}$, he necessario achar huma quarta proporcional ás tres linhas conhecidas a, b, c. Isto se faz, formando (*Fig.* 7) hum angulo qualquer com duas linhas indefinidas AX, AZ, e tomando sobre AX a parte AB igual á linha representada por c, a parte AD igual a huma das duas a e b, a a por exemplo, e sobre AZ a parte AC igual a b; entaõ se tirarmos BC, e conduzirmos por D a parallela DE, esta (2. 6. Eucl.) determinará AE $= \frac{ab}{c}$. O mesmo se fará para construir $\frac{aa}{c}$, com a differença de tomar a em lugar de b.

Se tivermos $\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, construiremos primeiramente $\frac{ab}{d}$, que chamaremos m, e depois $\frac{mc}{e}$. Praticar-se-há do mesmo modo para construir $\frac{a^2b}{c^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, &c.

Se a expressaõ for $\frac{ab + bd}{c + d} = \frac{(a + d)\, b}{c + d}$, consideraremos $a + d$ como huma linha m, $c + d$ como outra n, e assim a expressaõ se reduz a $\frac{mb}{n}$. Do mesmo modo construiremos $\frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a + b)\,(a - b)}{c}$.

Consiste pois o artificio em resolver a quanti-

 dade

dade em porções da fórma $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{a^2}{c}$. Ainda que isto pareça difficultoso em algumas expressões que tem numeradores, ou denominadores complexos, com tudo facilmente se conseguirá por meio das transformações.

Por exemplo, para construir $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, supporemos $b^3 = a^2m$, e $c^2 = an$; então a expressão se transformará em $\frac{(a + m) a}{a + n}$, que he facil de construir, havendo determinado m e n pelas duas hypotheses.

Quando as expressões não são *homogeneas*, isto he, quando os termos do numerador, ou do denominador não tem o mesmo numero de factores, como na expressão $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$, parece que são inuteis as transformações. Porém como tais resultados sómente apparecem, quando o calculador por simplificar suppõe alguma quantidade igual á unidade; se esta se restituir em cada termo com expoente sufficiente para completar o numero das dimensões, a expressão se fará homogenea, e não haverá embaraço na sua construcção. Assim, para construir $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, suppondo que d he a linha que se tomou por unidade, escreveremos $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2}$, e faremos $b^2 = dm$, $c^2 = dn$, e $a^3 = d^2p$, o que mudará a expressão dada em $\frac{(p + b + n) d}{a + m}$.

De tudo isto se segue, que a construcçaõ das quantidades racionais, quando o numero das dimensões do numerador naõ exceder as do denominador em mais de huma unidade, se reduz a achar huma quarta proporcional a tres linhas dadas. Passemos agora ás quantidades, em que a differença das dimensões he de duas, e tres unidades: nunca o excesso póde ser maior, excepto quando se houver tomado alguma linha para unidade, ou quando alguns factores representarem numeros.

247 Quando a differença das dimensões he de duas unidades, a quantidade exprime huma superficie, e a sua construcçaõ se póde reduzir á de hum parallelogrammo, ou á de hum quadrado. Por exemplo, para construir $\frac{a^3 + a^2b}{a + c} = a \cdot \frac{a^2 + ab}{a + c}$, acharemos a linha $m = \frac{a^2 + ab}{a + c}$, e a expressaõ se tornará em $a.m$, que he a superficie de hum parallelogrammo que tem a por base, e m por altura: logo reciprocamente, esta superficie representará $a.m$, ou $\frac{a^3 + a^2 b}{a + c}$. Da mesma sorte $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, fazendo $bc = am$, e $d^2 = an$, se muda em $\frac{a(a^2 + mc + nd)}{a + c}$.

248 Se a differença entre as dimensões do numerador e do denominador for de tres unidades, a quantidade exprimirá hum solido e se construirá como hum parallelepipedo. Por exemplo,

a^3

$\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$ póde confiderar-fe como $\frac{ab(a^2 + ab)}{a + c}$ $= abm$, fendo m a linha que der a conftrucçaõ de $\frac{a^2 + ab}{a + c}$. E como ab reprefenta hum parallelogrammo, fe concebermos hum parallelepipedo, que tenha ab por bafe e m por altura, a fua folidez reprefentará $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$.

249 Quanto ás quantidades radicais do fegundo gráo, podem conftruir-fe, ou por huma meia proporcional entre duas linhas dadas, ou pela hypotenufa, ou por algum dos outros lados de hum triangulo rectangulo.

Por exemplo, para conftruir $\sqrt{ab}$, tira-fe (*Fig.* 8) a linha indefinida AB, na qual fe toma AC igual á linha a, CB igual a b, e fobre a totalidade AB como diametro forma-fe hum femicirculo, que cortando em D a perpendicular levantada em C, dará CD (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.) por valor de $\sqrt{ab}$.

Donde vem, que para transformar hum parallelogrammo em quadrado, tomaremos huma meia proporcional entre a bafe e a altura; para os triangulos, tomaremos huma meia proporcional entre a bafe e ametade da altura; para os circulos, tomaremos huma meia proporcional entre o raio e a femicircumferencia; e para qualquer figura rectilinea, reduzilla-hemos a rectangulo (45. 1. Eucl.), ao qual applicaremos o que acabámos de dizer dos parallelogrammos.

Para conftruir $\sqrt{(3ab + b^2)} = \sqrt{b(3a + b)}$, acharemos huma meia proporcional entre $3a + b$

e

e b. Do meſmo modo, ſe tivermos $\sqrt{(a^2-b^2)}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$, buſcaremos a meia proporcional entre $a+b$ e $a-b$. Se a expreſſaõ for $\sqrt{(a^2+bc)}$, fazendo $bc=am$, teremos $\sqrt{(a+m)a}$, que ſe conſtruirá como temos dito.

Podemos conſtruir do meſmo modo a quantidade $\sqrt{(a^2+b^2)}$; porém he mais ſimples deſcrever hum triangulo rectangulo (*Fig.* 9.), cujos lados AB, AC ſejaõ a e b; ſerá (47. 1. Eucl.) a hypothenuſa BC $=\sqrt{(a^2+b^2)}$. A meſma conſtrucçaõ póde ter $\sqrt{(a^2+bc)}$, fazendo $bc=m^2$.

A expreſſaõ $\sqrt{(a^2-b^2)}$ póde conſtruir-ſe tambem de outra ſorte; porque deſcrevendo (*Fig.* 11.) ſobre AB $=a$ como diametro hum ſemicirculo, e tirando de A a corda AC $=b$, ſerá (31. 3., e 47. 1. Eucl.) BC $=\sqrt{(a^2-b^2)}$.

Se a quantidade tiver mais de dous termos debaixo do radical, reduziremos a ſua conſtrucçaõ a algum dos methodos precedentes por meio das transformações. Tendo, por exemplo, $\sqrt{(a^2+bc+ef)}$, faremos $bc=am$, $f=an$, e conſtruiremos a transformada $\sqrt{(a+m+n)a}$; ou de outra ſorte, faremos $bc=m^2$, $ef=n^2$, e conſtruiremos $\sqrt{(a^2+m^2+n^2)}$, o que ſe conſegue, pondo $\sqrt{(a^2+m^2)}=h$, e $\sqrt{(h^2+n^2)}=i$.

O modo porém mais ſimples de conſtruir os radicais, que contém huma ſerie de quadrados poſitivos, como por exemplo $\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+\&c.)}$, conſiſte em conſiderar ſucceſſivamente cada hypothenuſa como hum lado. Aſſim, toma-ma-ſe (*Fig.* 10.) AB $= a$, e levantando a perpendicular AC $= b$, ſerá BC$^2 = a^2 + b^2$; levantando a perpendicular CD $= c$, teremos BD$^2 = a^2 + b^2 + c^2$; na extremidade de BD levantando a perpendicular DE $= d$, teremos BE$^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; e continuando aſſim por diante, a ultima hypothenuſa ſerá o valor de $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.)}$

Se em ſemelhantes expreſsões entrarem quadrados negativos, formar-ſe-ha hum quadrado m igual á ſoma dos quadrados poſitivos, outro n igual á ſoma dos negativos, e aſſim teremos para conſtruir $\sqrt{(m^2 - n^2)}$.

Finalmente, havendo fracções debaixo do radical, multiplicaremos ambos os termos dellas pelo denominador. Aſſim $a\sqrt{\frac{b+c}{d+e}}$ muda-ſe em $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, que he facil de conſtruir.

Por eſtes meſmos principios podemos muitas vezes ſimplificar as conſtrucções nos caſos particulares, attendendo ao que for proprio de cada problema. Eſta materia naõ admite regras gerais; ſómente advertiremos, que ſem embargo de que a conſtrucçaõ das quantidades radicais do ſegundo gráo ſe reduz a achar quartas proporcionais, meias proporcionais, e a conſtruir triangulos rectangulos; com tudo algumas vezes ſe conſeguem conſtrucções mais ou menos ſimples e elegantes, conforme o methodo de que uſarmos para achar as meias proporcionais: por tanto enſinaremos mais

dous

dous modos de tomar huma meia proporcional entre duas linhas dadas.

Consiste o primeiro em descrever sobre a maior AB (*Fig.* 11.) hum semicirculo, e tomando huma parte AD igual á menor, levanta-se a perpendicular DC, e tira-se AC, que será (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre AB e AD.

O segundo consiste em tirar (*Fig.* 12.) huma linha AB igual á maior, e tomando nella huma parte AC igual á menor, descreve-se sobre o resto BC hum semicirculo, cuja tangente AD (36. 3, e 17.6. Eucl.) he meia proporcional entre AB e AC.

Concluamos pois, que as quantidades racionais se constroem sempre por linhas rectas, e as radicais do segundo gráo pelo circulo e pela linha recta juntamente.

Quanto aos radicais de gráos superiores, a sua construcçaõ depende da combinaçaõ de differentes linhas curvas, das quais havemos de tratar, occupando-nos primeiramente com alguns problemas, cuja resoluçaõ depende de quantidades ou racionais, ou radicais do segundo gráo.

Problemas de Geometria, e reflexões tanto sobre o modo de os pôr em equaçaõ, como sobre as differentes soluções que daõ as equações.

250 PAra pôr os problemas de Geometria em equaçaõ, serve o mesmo principio que havemos dado (67). Porém a Analyse nesta parte, ou os raciocinios que se fazem para verificar a incognita, e deduzir assim a equaçaõ, dependem de serem conhecidas algumas propriedades da quantida-

de

de deſconhecida. Nas queſtões numericas ordinariamente baſta traduzir em linguagem algebrica o enunciado do problema ; mas na applicaçaõ da Algebra á Geometria he neceſſario fazer uſo de outros meios , que iremos enſinando pouco a pouco. Por ora baſta dizer , que para verificar huma quantidade , nem ſempre he neceſſario examinar ſe ella ſatisfaz immediatamente ás condições do problema ; faz-ſe muitas vezes eſta verificaçaõ commodamente , averiguando ſe a quantidade tem certas propriedades , que ſaõ eſſencialmente connexas com as ditas condições. Paſſemos aos exemplos , que ſe percebem melhor do que os preceitos gerais.

251 Probl. I. *Inſcrever hum quadrado* ABCD (*Fig.* 13.) *no triangulo dado* EHI.

Por *triangulo dado* entendemos hum triangulo, em que tudo he conhecido , lados , angulos , altura , &c.

Examinando o problema , vê-ſe que naõ ſe trata de mais , que de achar na altura EF hum ponto G , pelo qual conduzindo AB parallela a HI , ſeja AB = GF.

Supponhamos a altura conhecida EF $= a$, a baſe HI $= b$, e GF $= x$; ſerá EG $= a - x$. Sendo pois AB parallela a HI , teremos (2.6.Eucl.) EF : EG :: FI : GB :: HI : AB ; iſto he , $a : a - x :: b : \text{AB} = \dfrac{ab - bx}{a}$; e como AB deve ſer igual a GF , teremos $\dfrac{ab - bx}{a} = x$, da qual ſe tira $x = \dfrac{ab}{a + b}$.

Pa-

Para conſtruir eſta quantidade (246), conduza-ſe de F para O huma linha $FO = a + b = EF + HI$, e tire-ſe EO; tomando depois $FM = HI = b$, tire-ſe parallelamente a EO a linha MG, a qual encontrando EF no ponto G, determinará GF, ou x; pois que os triangulos ſemelhantes EFO, GFM daõ $FO\ (a+b) : FM\ (b) :: FE\ (a) : FG = \frac{ab}{a+b}$.

252 Probl. II. *Sendo dado o comprimento da linha* BC (*Fig.* 14.) *com os angulos* B *e* C, *que formaõ com ella as duas* BA *e* CA, *determinar a altura* AD, *em que eſtas ultimas linhas ſe haõ de encontrar.*

Por *angulo dado* entende-ſe dado o valor do ſeu ſeno, tangente, &c. que ſaõ as linhas, por meio das quais entraõ os angulos no calculo algebrico.

Seja $BC = a$, $AD = y$. No triangulo rectangulo ADC (Trig. 164.) temos $CD : DA\ (y) :: 1 : m$, ſendo m a tangente do angulo ACD, e ſuppondo o raio igual á unidade; logo $CD = \frac{y}{m}$.

Pela meſma razaõ $BD = \frac{y}{n}$, ſendo a tangente de $ABD = n$. Mas he $BD + DC = BC = a$; logo $\frac{y}{m} + \frac{y}{n} = a$, donde vem $y = \frac{amn}{m+n}$.

Eſta expreſſaõ póde ſimplificar-ſe, introduzindo em lugar das tangentes de C e B as ſuas cotangentes, que chamaremos p e q. Porque ſendo (Trig. 26. III.) $m = \frac{1}{p}$, e $n = \frac{1}{q}$, teremos

y

$y = \frac{a}{p+q}$, que he muito facil de conſtruir.

253 Se havendo pois revolvido hum problema com certas quantidades dadas, naõ chegarmos a hum reſultado taõ ſimples como ſe deſejar, he eſcuſado começar o calculo de novo com outras quantidades, a fim de tentar a ſimplificaçaõ: baſta, como no exemplo precedente, exprimir em equações as relações, que tem as quantidades em que eſtá reſolvido o problema, com aquellas que de novo ſe introduzem, e fazer ſubſtituições.

254 Probl. III. *Sendo dados os tres lados de hum triangulo* ABC (*Fig.* 15.), *achar a pependicular* BD, *e os ſegmentos* AD, DC.

Se conheceſſemos eſtas linhas, e as quizeſſemos verificar, no triangulo rectangulo BDC ſomariamos os quadrados de BD, DC, e veriamos ſe a ſoma era igual ao quadrado de BC (47. 1. Eucl.). O meſmo ſe praticaria no triangulo ABD.

Seja pois BD $= y$, CD $= x$, BC $= a$, AB $= b$, AC $= c$; ſerá AD $= c - x$. Logo teremos $x^2 + y^2 = a^2$, e $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = b^2$, as quais daõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, e por conſeguinte $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2} c$, que he muito facil de conſtruir (246).

Das muitas concluſões, que ſe podem tirar deſtas equações, exporemos algumas para exercitar os principiantes a ler em huma equaçaõ o que ella contém.

255 1º A equaçaõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, ou $c(2x-c) = (a+b)(a-b)$ dá (Arith. 180.) $c : a+b :: a-b : x-(c-x)$, isto he, AC : BC + AB :: BC − AB : CD − AD, como achámos (Trig. 181).

256 2º Se do ponto C com o raio BC descrevermos o arco BO, e tirarmos a corda BO, teremos $BO^2 = BD^2 + DO^2$, ou, por ser $DO = a-x$, $BO^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; mas he $y^2 + x^2 = a^2$; logo será $BO^2 = 2a(a-x) = 2a$ $\left(a + \frac{b^2-a^2-c^2}{2c}\right) = \frac{a}{c}\left(b^2-(c-a)^2\right) =$ $\frac{a}{c}(b+c-a)(b-c+a) = \frac{a}{c}(a+b+c-$ $2a)(a+b+c-2c) = \frac{4a}{c}(s-a)(s-c)$, representando por $2s$ a soma dos tres lados. Tirese de C para OB a perpendicular CI; no triangulo CIO teremos (Trig. 162.) CO (a) : OI ($\frac{1}{2}$ BO) :: R : *sen* OCI, e por conseguinte $BO^2 = \frac{4a^2}{R^2}(sen\ OCI)^2$. Igualando os dous valores de BO^2, acharemos $ac\,(sen\ OCI)^2 = R^2(s-a)(s-c)$, ou $ac : (s-a)(s-c) :: R^2 : (sen\ OCI)^2$, como se achou (Trig. 183).

257 3º Por quanto he $y^2 = (a+x)(a-x)$ $= \left(a + \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)\left(a + \frac{b^2-a^2-c^2}{2c}\right)$ $=$

$=\left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)\left(\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c}\right)$, ſerá $4c^2y^2 = 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)$, a qual dá a ſuperficie do triangulo ABC $= \frac{cy}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ... (Trig. 189. Caſo III.)

258 4° Da equaçaõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$ ſe tira $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$; porém ſe a perpendicular cahir fóra, teremos (*Fig.* 16.), conſervando as meſmas denominaçóes, $y^2 + x^2 = a^2$, e $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = b^2$, das quais ſe deduz $b^2 - a^2 = c^2 + 2cx$, ou $c : b+a :: b-a : c+2x$, iſto he, AC : AB + BC :: AB − BC : CD + AD ... (Trig. 181).

259 5° Pelas equaçóes $b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$ (258), e $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$ (254) ſe moſtra, que em hum triangulo o quadrado do lado oppoſto a hum dos angulos he maior, ou menor que a ſoma dos quadrados dos outros dous lados, conforme o angulo he agudo, ou obtuſo; e tambem como calculando os angulos de hum triangulo pelos lados, ſe vem no conhecimento da eſpecie do angulo que ſe procura.

260 6° Eſtas meſmas equaçóes confirmaõ o que havémos dito a reſpeito das quantidades negativas. O ſegmento CD tem ſituaçóes contrarias, conforme a perpendicular cahe dentro ou fóra do triangulo (*Fig.* 15. e 16.); e com effeito o termo

$2cx$

$2cx$ acha-ſe com ſinais contrarios nas duas equações. Logo reciprocamente, ſejaõ quais forem os calculos que ſe fizerem para hum deſtes triangulos, teremos os que convém aos caſos analogos do outro, mudando os ſinais ás partes, que em huma meſma linha tiverem ſituações oppoſtas.

261 Ainda que em geral a facilidade, e os recurſos, que ha para pôr em equaçaõ os problemas de Geometria, creſçaõ á proporçaõ do numero de propriedades, que conhecermos das linhas; com tudo, como a Algebra dá meios para achar eſtas meſmas propriedades, o numero das propoſições verdadeiramente neceſſarias vem a ſer muito limitado: póde dizer-ſe, que a 47 do 1°, e a 4 do 6° Livro de Euclides, ſaõ a baſe da applicaçaõ da Algebra á Geometria. O modo porém, porque ſe deve fazer uſo deſtas duas propoſições, varía muito conforme a natureza dos problemas, e naõ lembra de repente. Humas vezes devem produzir-ſe linhas até que ſe encontrem; outras vezes devem tirar-ſe linhas parallelas, ou que façaõ hum angulo dado com outra linha. Em huma palavra, neſta parte, como em qualquer outra, requer-ſe no Analyſta hum certo diſcernimento para a eſcolha e uſo dos meios. Como elle ſe adquire em parte com o exercicio, he conveniente que appliquemos eſtas obſervações a differentes exemplos.

262 Probl. IV. *Pelo ponto* A (*Fig.*17.) *dado de poſiçaõ a reſpeito de duas linhas* HD, DI, *que formaõ o angulo conhecido* HDI, *tirar huma recta* AEG *de maneira, que o triangulo intercepto* EDG *tenha huma ſuperficie dada, iſto he, huma ſuperficie igual á do quadrado conhecido* c^2.

Conduzamos por A a linha AB parallela a DH, DH, e a linha AC perpendicular a DG produzida; do ponto E onde AEG deve cortar DH, imaginemos tirada a perpendicular EF. Se DG e EF fossem conhecidas, ametade do seu producto deveria ser igual a c^2.

Supponhamos pois DG $= x$, e vejamos se EF póde exprimir-se em x, e quantidades dadas do problema.

Como a posiçaõ de A he dada, seraõ conhecidas as linhas BD e AC, que chamaremos a e b; e pois que os triangulos semelhantes ABG, EDG daõ BG : DG :: AG : EG, e os dous tambem semelhantes ACG, EFG daõ AG : EG :: AC : EF, será EF $= \frac{AC \,.\, DG}{BG} = \frac{bx}{a+x}$. Devendo pois ser EDG $= c^2$, teremos $\frac{bx}{a+x} \cdot \frac{x}{2} = c^2$, donde se tiraõ (100) para x estes dous valores $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$; mas o segundo he inutil no caso presente.

Para construir o primeiro, isto he $\frac{c^2}{b} +$ $\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, levanto em qualquer ponto C da linha indefinida PQ a perpendicular AC $= b$; tomo sobre CA e CP as duas CO e CM, cada huma igual a c, e tiro AM; a sua parallela ON dá CN $= \frac{c^2}{b}$, e por conseguinte $x =$ CN $+$ $\sqrt{[(\text{CN}+2a).\text{CN}]}$. Para achar $\sqrt{[(\text{CN}+2a).\text{CN}]}$, ou huma meia proporcional, sobre NC produzida to-

tomo $CQ = 2a$, e com o diametro NQ defcrevô hum femicirculo, que encontrará CA em V; fazendo entaõ NP igual á corda NV, ferá CP $= CN + \sqrt{[(CN + 2a).CN]} = x$. Se tomarmos pois (*Fig.* 17.) $DG = CP$, acharemos o ponto G, pelo qual e por A tirando AG, ferá EDG $= c^2$.

263 Em quanto á fignificaçaõ do fegundo valor de $x = \frac{c^2}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right).\frac{c^2}{b}\right]}$, note-fe, que os dados da queftaõ tanto pertencem ao angulo EDG (*Fig.* 17.); como ao feu igual $E'DG'$, formado pelas linhas GD, ED produzidas; e por tanto efte valor refolve o problema, em que fe propuzeffe fazer no angulo $E'DG'$ o mefmo que fizemos no angulo EDG. Com effeito, chamando x a DG', e confervando as outras denominações, os triangulos ABG', $E'DG'$ daõ $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; e abaixando a perpendicular $E'F'$ os triangulos ACG', $E'F'G'$ daõ $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; logo ferá $F'E' = \frac{AC'.DG'}{BG'} = \frac{bx}{a-x}$, e pelas condições $\frac{bx}{a-x} . \frac{1}{2} x = c^2$, a qual dá

$$x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)};$$ valores iguais aos do cafo precedente, com a differença unica dos finais, como deve fer.

A conftrucçaõ do cafo precedente tem tambem aqui lugar; a unica mudança que fe deve fazer he pôr $NK = NV$ para a parte de Q, e ferá $x =$

CK, porque no caſo preſente $x = \frac{-c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]} = -CN + NV = -CN + NK = CK$. Logo, fazendo DG′ igual a CK, e tirando por A e G′ a linha A G′E′, teremos o triangulo E′D G′ $= c^2$, iſto he, acharemos a ſegunda ſoluçaõ do problema.

264 Se o ponto A eſtiver por baixo de BG (*Fig.* 19.), a linha AC $= b$ ſerá negativa, e os dous primeiros valores de x ſeraõ $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$. Vê-ſe pois que o problema ſerá impoſſivel (98), quando for $2a > \frac{c^2}{b}$, e que os dous valores de x ſeraõ negativos, ſe for $2a < \frac{c^2}{b}$; ou por outras palavras, o problema he impoſſivel a reſpeito do angulo HDI, mas a reſpeito do igual E′DG′ tem duas ſoluções. Para as achar, ou para conſtruir $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, havendo determinado (*Fig.* 20.) como acima CN $= \frac{c^2}{b}$, deſcreveremos com o diametro NQ $= 2a$ hum ſemicirculo NVQ, ao qual tiraremos a tangente CV; e tomando de ambas as partes de C as linhas CP, e CK, cada huma igual a CV, as linhas NP e NK ſeraõ os dous valores de x; porque

que ſendo $CP = CK = CV = \surd(CQ.CN) = \surd\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]$, teremos $NP = \frac{c^2}{b} - \surd\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]$, e $NK = \frac{c^2}{b} + \ldots \surd\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]$. Como eſtas quantidades ſaõ os valores de x com ſinais contrarios, devemos tomallos de D para a parte de G (*Fig.* 19.), fazendo DG, e DG′ iguais reſpectivamente a NP, e NK. Feito iſto, ſe tirarmos pelo ponto A, e pelos pontos G e G′ as rectas EG, E′G′, cada hum dos triangulos EDG, E′DG′ ſerá igual a c^2.

265 Se o ponto A (*Fig.*21.) eſtiver dentro do angulo HDI, BD cahirá para a parte oppoſta, e os dous valores primitivos de x ſe tornaráõ em $x = \frac{c^2}{b} \pm \surd\left(\frac{c^4}{b^2} - \frac{2ac^2}{b}\right)$, os quais ſaõ os meſmos (mudando os ſinais) que acabámos de conſtruir. Devemos pois fazer a meſma conſtrucçaõ (*Fig.* 20.), tomando porém (*Fig.* 21.) NP e NK de D para I.

266 Finalmente, ſe o ponto A (*Fig.* 22.) eſtiver por baixo de BD, e dentro do angulo BDE′, a e b ſeraõ negativos, o que dará $x = -\frac{c^2}{b} \pm \surd\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)$, com ſinal contrario dos primeiros valores achados para x. Conſtruindo-os pois co-

como fizemos (*Fig.* 18.), ferá CK o valor pofitivo de x, e CP o negativo; pelo que tomaremos DG (*Fig.*22.) igual a CK para a parte de B, e DG' igual a CP para a parte oppofta.

Demoramo-nos nefte problema, para moftrar como huma equaçaõ comprehende todos os cafos de hum problema, como eftes fe deduzem pela fimples mudança dos finais, e como as fituações oppoftas das linhas fe defignaõ por finais contrarios, e reciprocamente.

267 Para moftrarmos ainda alguns ufos deftas foluções, fupponhamos que fe propõe efte problema: *Pelo ponto dado A (Fig. 23.) fóra ou dentro do triangulo dado DHI, tirar huma linha AF, que divida o triangulo em duas partes DEF, EFIH, as quais tenhaõ entre fi a razaõ conhecida de m : n.* A refoluçaõ defte problema inclue-fe na do precedente. Com effeito, como he dado o triangulo DHI, faberemos que parte delle deve fer o triangulo DEF, achando o quarto termo da proporçaõ $m + n : m :: \text{DHI} : \text{DEF} = \frac{m.\,\text{DHI}}{m+n}$;

Vifto pois poder-fe achar hum quadrado c^2 igual a efta fuperficie (249), reduz-fe a queftaõ a tirar por A huma linha AEF, que com os lados DH, DI forme hum triangulo igual ao quadrado c^2, que he o problema precedente.

268 Ao mefmo problema fe reduz efte: *Dividir em duas partes huma figura rectilinea (Fig. 24.) pela recta tirada por qualquer ponto A, de forte que tenhaõ entre fi huma razaõ dada.* Com effeito, fendo dada a figura BCDHK, faõ conhecidos todos

os

os ſeus angulos e lados; logo com facilidade (Trig. 189. Caſo I.) acharemos a ſuperficie do triangulo BLC formado pelos lados KB, DC produzidos, como tambem a porçaõ determinada EBCF da ſuperficie total. Pelo que reduz-ſe a queſtaõ a tirar AEF de maneira, que forme com KL e DL hum triangulo igual a hum quadrado. Finalmente, póde-ſe por eſte modo dividir huma figura em muitas partes, que tenhaõ entre ſi razões dadas.

269 Se huma equaçaõ naõ ſe alterar pela mudança, que fizermos nos ſinais de algumas quantidades conhecidas que nella entrarem; ou ſe da mudança de poſiçaõ na linha, ou linhas procuradas da figura naõ reſultar mudança, nem de poſiçaõ, nem de grandeza nas linhas dadas; entaõ entre os differentes valores de x, que der a equaçaõ, haverá ſempre hum que reſolverá particularmente o caſo indicado pela dita mudança. Vio-ſe por exemplo no Problema IV, que hum dos dous valores de x reſolvia directamente o caſo, em que a linha AEG (*Fig.* 17.) atraveſſaſſe o angulo HDI, como ſe havia ſuppoſto no calculo; mas vio-ſe ao meſmo tempo, que o ſegundo valor de x reſolvia o caſo, em que ſe conſideraſſe, naõ o angulo HDI, mas o ſeu verticalmente oppoſto. A razaõ diſto he, porque devendo-ſe empregar em cada caſo os meſmos dados, e fazer os meſmos raciocinios, chegaremos neceſſariamente a ter ſempre a meſma equaçaõ; logo a meſma equaçaõ deve reſolver ambos os caſos.

270 Probl. V. *Do ponto dado* A (*Fig.*25.) *fóra do circulo* BDC *tirar a recta* AE, *de ſorte que a parte* DE *intercepta no circulo ſeja igual a huma linha dada* c.

Pa-

Para ſaber de que modo ſe deve tirar AE, naõ he neceſſario mais do que buſcar, que grandeza deve ter AD, para que ſeja $DE = c$. Suppondo pois $AD = x$, $AB = a$, $AC = b$, teremos $AE . AD = AC . AB$ (Corol. 36. 3. Eucl.), ou $(x + c) x = ab$; logo $x = -\frac{1}{2} c \pm \sqrt{(\frac{1}{4} cc + ab)}$.

Para conſtruir ſem transformações o primeiro valor, que he o que ſatisfaz ao problema actual, tiraremos do ponto A a tangente AT, e o raio TO, que ſerá perpendicular a AT; entaõ tomando $TI = \frac{1}{2} c$, teremos $AI = \sqrt{(\frac{1}{4} c^2 + AT^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} cc + ab)}$ . . (36. 3. Eucl.). Logo para ter x, tomaremos $IR = TI$, e o arco RD deſcrito do ponto A com o raio AR determinará o ponto procurado D.

O ſegundo valor de $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab)}$ cahe para a parte contraria a AD. Para achar a queſtaõ que elle reſolve, noto, que ſuppondo a e b negativos, a equaçaõ $x^2 + cx = ab$ naõ padece mudança alguma; logo eſta equaçaõ reſolve tambem o caſo de ſer dado o circulo $B'D'E'C'$, e a elle pertence o ſegundo valor de x. Na conſtrucçaõ precedente pois ſe produzirmos AI de maneira, que ſeja $IR' = IT$, o arco deſcrito do ponto A com o raio AR' marcará o ponto E' tal, que a parte intercepta $E' D'$ ſerá igual a c.

Como os dous circulos ſaõ iguaes, e eſtaõ ſituados da meſma maneira, ambas as ſoluções podem pertencer ao meſmo circulo, de ſorte que deſcrevendo do ponto A com o raio AR' o arco $R'E$, a linha AE tambem reſolverá o problema. Porém

das

das duas ſoluções que dá o calculo, a primeira cahe da direita de A, e pertence ao ponto D da circumferencia convexa; a ſegunda cahe da eſquerda, e pertence ao ponto E′ da circumferencia concava.

271 Probl. VI. *Achar na direcçaõ da linha dada* AB (*Fig.*26.) *hum ponto* C *tal, que a ſua diſtancia ao ponto* A *ſeja meia proporcional entre a ſua diſtancia ao ponto* B, *e a linha toda* AB.

Seja $AB = a$, e $AC = x$; ſerá $BC = a - x$; e como deve ſer $AB : AC :: AC : CB$, teremos $x^2 + ax = a^2$; logo $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$.

Para conſtruirmos o primeiro valor de x, levantaremos (249) em B a perpendicular $BD = \frac{1}{2}a$, e tirando AD, diminuiremos deſta a linha BD, e teremos $AO = x$. Levando pois AO de A para a parte de B, determinaremos o ponto procurado C.

Se produzirmos AD até O′, de ſorte que ſeja $DO' = DB$, teremos AO′ por ſegundo valor de x; e levando eſta linha ſobre AB deſde A para a parte oppoſta áquella para que x tendia por ſuppoſiçaõ, teremos o ponto C′, que tambem ſatisfaz á queſtaõ.

Eſte problema he o que ſe reſolveu na Geometria (30. 6. Eucl.) pelo methodo ſynthetico.

272 Nos problemas precedentes havemos tomado para incognita huma linha, a qual depois de ſer conhecida podeſſe determinar todas as outras pelas condições da queſtaõ; e iſto he o que devemos ſempre praticar. Como porém muitas linhas podem ter a dita prerogativa, ſem que de todas ellas reſultem equações igualmente ſimples,

de-

deve preferir-se huma dellas. Para nos dirigirmos nesta escolha serve a regra seguinte.

273 *Se entre as linhas ou quantidades, cada huma das quais sendo tomada por incognita póde determinar todas as outras, se acharem duas que conduzaõ á mesma equaçaõ, ainda que esta tenha sinais differentes; escolheremos para incognita outra quantidade, que dependa igualmente de ambas;* por exemplo, a sua semisoma, ou a sua semidifferença, ou huma meia proporcional, &c. Assim teremos huma equaçaõ mais simples, como se verá no problema seguinte.

274 Probl. VII. *Pelo ponto* D (*Fig.*27.) *situado dentro do angulo recto* IAE, *e em igual distancia dos lados* IA, AE, *tirar huma recta* DB, *de maneira que a parte* CB *comprehendida dentro do angulo* EAB *seja igual a huma linha dada* c.

Tendo abaixado as perpendiculares DE, DI, qualquer das linhas CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB póde servir indifferentemente para incognita. Se tomarmos, por exemplo CE, entaõ supponda $CE = x$, e $DE = DI = a$, será $AC = a - x$, e pelos triangulos semelhantes DEC, CAB teremos $AB = \frac{aa - ax}{x}$; mas he $AB^2 + AC^2 = BC^2$, isto he $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x}\right)^2 = cc$; logo virá a equaçaõ do quarto gráo $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$.

Se em lugar de CE tomarmos IB por incognita, teremos a mesma equaçaõ, como se póde vêr fazendo $CE = x$, e imitando a soluçaõ precedente. Se tomarmos AB ou AC, acharemos huma ma meſma equaçaõ, exceptuando os ſinais; o meſmo acontece, tomando BD ou DC.

Tomemos pois (273) para incognita a ſoma das duas linhas BD e DC, a qual ſeja deſignada por $2x$; ſerá (Trig. 177.) $DB = x + \frac{1}{2}c$, e $DC = x - \frac{1}{2}c$; e como as parallelas DI, CA daõ $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, e $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$, teremos $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$, iſto he $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, equaçaõ, que ſendo ainda do quarto gráo, he com tudo mais facil de reſolver (173) do que a precedente. Se empregarmos duas incognitas, ſuppondo $AB + AC = 2x$, e $AB - AC = 2y$, iſto he, $AB = x + y$, e $AC = x - y$, teremos equações bem ſimples, que os principiantes acharáõ com facilidade.

A equaçaõ $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$ dá $x = \pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa \ldots \pm a\sqrt{(cc + aa)}\right]}$; porém deſtes quatro valores o que unicamente pertence ao problema, conſiderado do modo porque foi propoſto, he $x = +\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}\right]}$. O valor $x = +\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + ac)}\right]}$ re-

ſol-

ſolve o problema, no caſo de ſe pedir que a linha CB (*Fig*.28.) eſteja dentro do meſmo angulo EAI, em que eſtá o ponto D; e neſte caſo x repreſenta a ſemidifferença das linhas BD, DC. Com effeito, ſendo $2x$ eſta differença, ſerá $DB = \frac{1}{2}c + x$, e $CD = \frac{1}{2}c - x$; logo, continuando como acima, teremos $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, iſto he, a meſma equaçaõ que achámos para a ſoma das linhas BD e CD (*Fig*.27.). Como pois a meſma equaçaõ ſatisfaz aos dous caſos, huma das ſuas raizes deve dar a ſoma das ditas linhas, e outra a differença; bem entendido, que eſtas duas raizes ſaõ as meſmas que havemos indicado, porque as outras duas ſaõ negativas, e por tanto pertencem a caſos inteiramente oppoſtos, que paſſamos agora a conſiderar.

No problema preſente, ou ao menos na equaçaõ, naõ ſe determina ſe o ponto D (*Fig*.27.) eſtá por baixo de AI, e á eſquerda de AE, como ſe ſuppoz primeiramente, ou ſe eſtá pelo contrario por cima da primeira, e á direita da ſegunda, como ſe vê relativamente a A′I′ e A′E′. E porque neſte ultimo caſo a quantidade a ſe torna negativa, teremos a ſoluçaõ competente, pondo $-a$ em lugar de $+a$ na equaçaõ achada $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2$ &c.; mas eſta com iſſo naõ padece

mu-

mudança; logo a meſma equaçaõ reſolve eſtes dous caſos novos, e por conſeguinte dos outros dous valores de x hum dá a ſoma das linhas DB′, DC′ (*Fig.*27.), e o outro a ſua differença (*Fig.*28.). Com effeito, cahindo neſta nova poſiçaõ os pontos B e C para partes oppoſtas, a reſpeito daquellas para que antecedentemente cahiaõ, tanto a ſoma, como a differença das linhas DB′ e DC′ devem ſer negativas, e aſſim as dá a equaçaõ.

Para conſtruir a equaçaõ $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc \pm a\sqrt{(aa + cc)}]}$, tome-ſe na linha EA produzida (*Fig.* 27, e 28.) a parte AN $= c$, e tirando IN, tome-ſe ſobre DI produzida a parte IK $=$ IN, e ſobre DK como diametro deſcreva-ſe o ſemicirculo KLD, que encontra em L a recta AI produzida, ſe for neceſſario. Pelo meio H de AN tire-ſe IH, e tomando de IK (*Fig.* 27.) a parte IM $=$ IH, ſerá LM o primeiro valor de x. Na *Figura* 28 porém deſcreveremos do ponto L como centro, e com o intervallo IH hum arco, o qual cortando IK em M, dará IM pelo ſegundo valor de x. E como BD $= x + \frac{1}{2}c$, ſerá BD $=$ LM $+$ AH (*Fig.* 27.), e BD $=$ IM $+$ AH (*Fig.* 28.); deſcrevendo pois do ponto D como centro, e com o intervallo BD aſſim determinado hum arco, que corte IA produzida em hum ponto B, a recta BD terá as condições dadas.

A conſtrucçaõ do ſegundo valor de x ſuppõe que IH (*Fig.* 28.) naõ he menor que LI; ſe o foſſe, o problema ſeria impoſſivel: iſto meſmo ſe deduz tambem da equaçaõ.

A ſoma das linhas DB, e DC (*Fig.*27.), ou a ſua differença deu huma equaçaõ mais ſimples, do que CE, ou AC, ou AB, ou IB. A razaõ he, por-

porque a relaçaõ, que DB e DC tem com IB e AB, he femelhante áquella que as mefmas linhas DB e DC tem com AC e CE; ifto he, DB e DC podem determinar-fe por operaçoẽs femelhantes, quer fe faça ufo de IB e AB, quer de AC e CE. Em geral, as equaçoẽs, como incluem todas as relaçoẽs que as incognitas tem com as quantidades de que dependem, feraõ tanto mais fimples, quanto for menor o numero de relaçoẽs, que a quantidade efcolhida para incognita tiver com as outras. Eis-aqui hum exemplo na refoluçaõ feguinte do mefmo problema.

275 Por quanto o angulo CAB (*Fig.* 29.) he recto, o circulo defcrito fobre CB paffará por A; e fe tirarmos DA até encontrar a circumferencia em M, o angulo BAM $=$ DAI $= 45^o$ (5.1.Eucl.) terá por medida ametade de MB (20.3.Eucl.), e por confeguinte ferá o arco MB de 90^o; logo tirando o raio LM, o triangulo DLM ferá rectangulo, e confeguintemente abaixando fobre DM a perpendicular LN, ferá LM (Corol. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre DM e MN, ou (3. 3. Eucl.) entre DM e AN. Tomando pois AN para incognita, fupponhamos AN $= x$, DA $= d$; ferá DM $= d + 2x$, e confeguintemente $d + 2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$; logo $xx + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{8}cc$, a qual dá $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{8}cc\right)}$.

Para conftruirmos efta quantidade, tomemos nos lados AO, AI do angulo recto IAO as partes Am, An iguais cada huma a $\frac{1}{4}c$, e acabando o quadrado Ampn, tiremos a diagonal Ap que ferá per-

pen-

pendicular a DA, e igual a $\sqrt{\left(\frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$; logo tomando na linha AD a parte Ar igual a $\frac{1}{4}d$, ou $\frac{1}{4}$ AD, teremos $pr = \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$. Para ter pois o primeiro valor de x, defcrever-fe-há do ponto r como centro, e com intervallo rp hum arco, o qual cortando DM em N, dará $AN = -\frac{1}{4}d + \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{8}c^2\right)}$; de maneira que levantando no ponto N a perpendicular NL, a qual feja cortada em L por hum arco defcrito do ponto A como centro com o intervallo $\frac{1}{2}c$, determinará o ponto L, pelo qual e por D tirando DCB, teremos refolvido o problema.

Se conduzirmos (*Fig.* 30) rp de r para N, ferá AN o fegundo valor de x, e executando a refpeito de N o mefmo que fe fez para o ponto N na *Fig.* 29 fe achará o ponto L, o qual juntamente com D determinará BLD. Com effeito, chamando a An x (*Fig.* 30), e confervando as outras denominações, fe applicarmos a efta figura o que differmos da 29, teremos $2x - d : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, e ultimamente $x = \frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{8}c^2\right)}$. Aqui fe vê que hum dos valores de x he o mefmo que acima achámos, á excepçaõ dos finais, como deve fer.

Póde acontecer que o arco defcrito do ponto A (*Fig.* 30) naõ encontre a perpendicular NL, porque póde fer $\frac{1}{2}c < AN$; e iffo naõ obftante, a Algebra naõ moftra cafo algum de impoffibilidade, de, porque todos os termos debaixo do radical saõ positivos. Deve-se porém advertir, que a Algebra sómente declara a impossibilidade, quando ou explicita, ou implicitamente se exprime tudo o que o problema suppõe, e isso he o que naõ se fez neste caso; porque suppondo o problema tacitamente, que os tres pontos D, A, L naõ estaõ na mesma linha recta, sómente se exprimio que LM era meia proporcional entre DM, e NM, propriedade que tambem póde ter lugar, quando os tres pontos estaõ em linha recta. Com effeito se se propuzer este problema: *Achar na direcçaõ* DL (*Fig.*31) *o intervallo que deve haver entre duas rectas dadas* DA e ML, *para que* ML *seja meia proporcional entre* DM e MN, *sendo* N *o meio de* AM; he facil de vêr, que acharemos a mesma equaçaõ de cima, e que esta tem duas soluções, huma para o caso de estarem os pontos A e M entre D e L, e outra para o caso contrario. Naõ he pois de admirar, que a Algebra naõ declare em que caso o primeiro problema he impossivel, por quanto deve dar a soluçaõ do segundo problema, o qual he sempre possivel.

276 Pelo que devemos distinguir duas especies de problemas, a saber: *concretos*, e *abstractos*. Por problemas concretos entendemos aquelles, nos quais, como no penultimo, a quantidade procurada tem de particular alguma propriedade, condiçaõ, ou construçaõ, que a equaçaõ naõ exprime. Os problemas abstractos pelo contrario saõ aquelles, em que as quantidades saõ consideradas unicamente como quantidades, e cuja equaçaõ exprime quanto nelles se contem; desta natureza he o ultimo problema. Os abstractos tem tantas so-

luções, quantas saõ as raizes reais da equaçaõ; nos concretos porém o numero das soluções he em muitos casos ainda menor que o numero das raizes positivas da equaçaõ, como se verá no exemplo seguinte.

277 Probl. VIII. *Resolvendo-se todo o sector esferico CBAD (Fig. 32) em duas partes, das quais huma he o segmento esferico ABD, e outra a pyramide conica recta CBD; pergunta-se em que lugar será o segmento igual á pyramide.*

Sabemos pela Geometria, que o sector esferico he igual ao producto da superficie do segmento esferico BAD pelo terço do raio AC, e que a superficie do segmento se acha multiplicando a circumferencia ABED pela altura AP. Suppondo pois a razaõ do diametro para a circumferencia $= 1 : c$, AC $= a$, e AP $= x$, teremos ABED $= 2ca$; logo será a superficie do segmento esferico $= 2ca \cdot x$, e a solidez do sector $= \frac{2}{3} ca^2x$.

Para ter a solidez da pyramide, deve-se multiplicar a superficie do circulo cujo raio he BP pelo terço da altura CP. Mas BP $= \sqrt{(CB^2 - CP^2)}$ $= \sqrt{(2ax - xx)}$; logo será a solidez da pyramide $= 2c \sqrt{(2ax - xx)} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2ax - xx)} \cdot \frac{1}{3}(a - x)$ $= \frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx)$. Para que pois as duas partes do sector sejaõ iguais entre si, he necessario que este seja o dobro de huma daquellas; por tanto teremos $\frac{2}{3} caax = \frac{2}{3} c(a - x)(2ax - xx)$, ou $x^2 - 3ax = -a^2$, da qual se tira $x = \frac{1}{2} a(3 \pm \sqrt{5})$.

Para

Para construir o segundo valor, ou $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$, que he o que convem ao problema actual, descreveremos sobre $AM = \frac{3}{2}a$ o semicirculo AOM, e inscrevendo nelle a recta $AO = a$, se tirará OM, a qual sendo levada de M até P para a parte de A, determinará $AP = x$.

A outra soluçaõ $x = \frac{1}{2}a(3 + \sqrt{5})$ dá x maior que $2a$, e por tanto naõ pertence á esfera, mas a este problema abstracto: *Sendo dividida a linha* AN (*Fig.* 33) *em tres partes iguais nos pontos* B e D, *achar na sua direcçaõ hum ponto* P *tal, que a parte* AD *seja meia proporcional entre as distancias* AP e PN. Porque, seja $AD = a$, $AP = x$, teremos $PN = 3a - x$; e dando as condições $x : a :: a : a - x$, acharemos $x = \frac{1}{2}a(3 \pm \sqrt{5})$; valores que se construiraõ como acima, á excepçaõ de que se levará MO de M até P' para a parte de N, a fim de ter $AP' = \frac{1}{2}a(3 + \sqrt{5}) = x$.

Outras applicações da Algebra.

278 SEja c o numero 3,1415 &c, ou a circumferencia do circulo que tem a unidade por diametro; a circumferencia do circulo do raio a será $= 2ca$, e a superficie $= ca^2$. Donde se segue que as superficies dos circulos estaõ entre si como os quadrados dos seus diametros; porque tendo sempre

pre c o meſmo valor, ca^2 ſómente creſcerá como creſcer a^2.

Suppondo que he b a altura de hum cylindro, cujo raio da baſe he a, ſerá a ſua ſolidez $= ca^2b$. Segue-ſe pois que os cylindros eſtaõ entre ſi como os productos das alturas pelos quadrados dos raios das baſes. Se as alturas forem proporcionais aos raios das baſes, ou ſe for $b = ma$, ſendo m conſtante, ſerá a ſolidez $= cma^3$; iſto he, os cylindros eſtaraõ entre ſi como os cubos dos raios das baſes.

Em geral, ſe huma quantidade ſe exprimir por hum numero qualquer n de factores, os quais ſejaõ proporcionais huns aos outros, creſcerá a quantidade do meſmo modo que creſcer hum factor, elevado á potencia n. Seja, por exemplo, a quantidade $A = abcd$; ſe for $b = ma$, $c = pa$, e $d = qa$, ſerá $A = mpqa^4$, iſto he, proporcional a a^4. Iſto meſmo tem tambem lugar, quando as quantidades naõ ſe exprimem por monomios. Logo: 1º Todas as figuras ſemelhantes, pois que ſe podem conſiderar como compoſtas de triangulos ſemelhantes, ſaõ entre ſi como os quadrados de qualquer das ſuas duas dimenſões homologas. 2º Os ſolidos ſemelhantes, pois que ſe podem conſiderar como compoſtos de pyramides ſemelhantes, ſaõ entre ſi como os cubos de qualquer das ſuas tres dimenſões homologas.

Naõ póde agora haver difficuldade em comparar as quantidades expreſſas algebricamente, ou ellas ſejaõ da meſma, ou de differente eſpecie, com tanto que ſejaõ da meſma natureza. Por exemplo, ſendo V e v os volumes de dous corpos ſemelhantes, S e s as ſuas ſuperficies, L e l as linhas

nhas homologas; teremos $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{v} :: L : l$; e $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: L : l$; logo ſerá $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{v^2} :: S : s$, o que moſtra que as ſuperficies creſcem em razaõ menor do que os volumes.

279 Supponhamos a altura de huma pyramide conica truncada $= k$, a da pyramide inteira $= h$, e a da pyramide ſeparada $= h'$, a ſuperficie da baſe inferior $= s$, e a da ſuperior $= s'$; ſerá a ſolidez do tronco $= \frac{sh}{3} - \frac{s'h'}{3}$; mas he $h' = h\sqrt{\frac{s'}{s}}$ e $k = h - h' = h - h\sqrt{\frac{s'}{s}}$, ou $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$; logo ſerá a ſolidez do tronco $= \frac{k}{3} \cdot \frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$ $= \frac{k}{3}(s + \sqrt{ss'} + s')$. Donde ſe ſegue, que toda a pyramide conica truncada ſe compõe de tres pyramides igualmente altas, das quais huma tem por baſe a baſe inferior s, a outra a baſe ſuperior s', e a terceira huma meia proporcional $\sqrt{ss'}$ entre as duas baſes.

280 Suppondo o raio de huma esfera $= a$, ſerá a ſuperficie de hum dos ſeus circulos maximos $= ca^2$, a ſuperficie da esfera $= 4ca^2$, e a ſua ſolidez $= 4ca^2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}ca^3$.

Vio-ſe (277) que a ſolidez do ſector, cujo ſegmento tinha a altura x, era $= \frac{2}{3}ca^2x$, e que a

da

da pyramide conica $= \frac{c\,(2ax - xx)\,(a - x)}{3}$; logo a ſolidez do ſegmento $= \frac{2}{3} ca^2x - \frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx) = cx^2(a - \frac{1}{3}x)$. He pois a ſolidez do ſegmento igual ao circulo, que tem por ſemidiametro a altura do ſegmento, multiplicado pelo raio menos o terço da dita altura.

Tendo as expreſsões algebricas das quantidades, com muita facilidade ſe reſolvem os problemas, que ſobre ellas ſe podem propôr, como moſtraremos em dous exemplos.

Pertende-ſe formar huma pyramide conica que ſeja igual a huma esfera dada, e que tenha por baſe hum circulo maximo da meſma esfera: pergunta-ſe que altura ſe lhe deve dar. Seja x eſta altura, e a o raio da baſe, ſerá a ſolidez da pyramide $= \frac{ca^2}{3} x$; e como deve ſer igual á esfera do raio a, teremos $\frac{c}{3} a^2x = \frac{4}{3} ca^3$, donde ſe deduz $x = 4a$; Logo he neceſſario que a altura da pyramide ſeja o dobro do diametro da esfera, como conſta tambem pela Geometria.

281 *Achar o raio de huma esfera, cujo pezo he dado tanto no ar, como na agua.*

Demonſtra-ſe na Hydroſtatica, que todo o corpo mergulhado em hum fluido perde huma parte do ſeu pezo, igual ao pezo do volume do fluido deslocado. Iſto ſuppoſto, ſeja o pezo de huma pollegada cubica de agua $= p$, o pezo da esfera no ar $= P$, o pezo da meſma na agua $= P'$, o raio $= x$;

 ſerá

ſerá a ſolidez $= \frac{4}{3} cx^3$, e o pezo de igual volume de agua $= \frac{4}{3} cpx^3$; logo conforme o principio expoſto $P - \frac{4}{3} cpx^3 = P'$, donde ſe tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P-P')}{4cp}}$.

Se o globo no ar pezar 5 onças, e na agua 2; pezando hum pé cubico de agua 72 libras, ou ſendo $p = \frac{2}{3}$ de onça, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(5-2)}{\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot c}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8c}}$, que poſto em calculo por logarithmos dará

c	. . .	CL.	9,5028501
8	. . .	CL.	9,0969100
27	. . .	L.	1,4313638
lx^3	. .		0,0311239
lx	. .		0,0103746

Logarithmo a que correſponde o numero 1,0242; logo o raio da esfera ſerá de 1,0242 pollegadas.

Havemos ſuppoſto tacitamente que o globo entrava todo na agua em virtude do proprio pezo; ſe porém for neceſſario carregallo com algum pezo, para o mergulhar inteiramente, entaõ eſſe pezo additivo ſerá a quantidade que devemos tomar por P', o qual ſe fará negativo; iſto he, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(P+P')}{4cp}}$. Com effeito, ſendo neſte

caſo

caſo o pezo da esfera no ar menor que o pezo $\frac{4}{3}cpx^3$ de hum igual volume de agua, a differença, ou $\frac{4}{3}cpx^3 - P$ ſerá o peſo P′ que ſe deve ajuntar para a mergulhar totalmente; logo teremos $\frac{4}{3}cpx^3 - P = P'$, da qual ſe tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P+P')}{4cp}}$.

Das Linhas curvas em geral, e em particular das Secções Conicas.

282 DAs linhas curvas que a Geometria conſidera, em razaõ do grande uſo que tem na conſtrucçaõ das equações, e nas ſciencias Fiſico-Mathematicas, humas ſaõ tais que cada hum dos ſeus pontos ſe póde determinar pela meſma lei, iſto he, por calculos e operações ſemelhantes; em outras porém cada ponto ſe determina por lei differente; ainda que eſta meſma differença he ſujeita a huma lei.

As linhas traçadas ao acaſo, como, por exemplo, os raſgos de huma pena ſobre o papel, naõ podem ſer objecto de huma Geometria rigoroſa. Sem embargo, a theoria das curvas conduz a imitar delineamentos rebeldes; e a arte de achar approximadamente o nexo entre quantidades, cuja lei he ou deſconhecida, ou muito compoſta, naõ he a applicaçaõ menos util da Algebra á Geometria, como adiante veremos.

Para poder deſcrever as curvas de que trata a Geometria, he neceſſario conhecer a lei, a que eſ-

taõ

taõ ſujeitos os differentes pontos de ſeu perimetro. De muitos modos póde ella ſer dada, ou indicando-ſe o meio para deſcrever as curvas por movimento continuo, como v. g. a reſpeito do circulo ſe faz girar huma linha ao redor de hum ponto; ou antes enſinando-ſe huma propriedade que pertença conſtantemente a cada ponto da curva, como por exemplo, ſabendo-ſe que todo o angulo do ſemicirculo he recto (31. 3. Eucl.), podemos deſcrever o circulo do diametro dado AB (*Fig.* 34), tirando da extremidade A huma infinidade de linhas AC, AD, AE, &c., e conduzindo pela outra extremidade B as perpendiculares BC, BD, BE, &c., entaõ os pontos C, D, E, &c. perteneceraõ ao circulo que tem AB por diametro.

Finalmente a lei tambem póde ſer dada por huma equaçaõ, e aſſim o ſupporemos ſempre, porque os dous primeiros modos ſervem para achar a equaçaõ que exprime a lei. Reduz-ſe pois eſta theoria a repreſentar a natureza de qualquer curva por huma equaçaõ, a qual ſerve para deſcrever a curva, e moſtrar os ſeus uſos e propriedades. De tudo iſto vamos a dar hum exemplo no circulo, que ja conhecemos pela Geometria elementar.

283 Supponhamos que da curva AMB (*Fig.* 35) ſabemos taõ ſómente, que a perpendicular PM tirada de qualquer ponto M ſobre a linha AB he meia proporcional entre as duas partes AP e PB.

Para exprimir eſta propriedade em equaçaõ, ſeja $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; e teremos $AP\ (x) : PM\ (y) :: PM\ (y) : PB\ (a - x)$, iſto he $yy = ax - xx$.

Para

Para descrever agora a curva, concebamos AB dividida, por exemplo, em 10 partes iguais, e tiremos por cada ponto de divisaõ as perpendiculares *pm*, *pm*, &c. Está claro, que se na equaçaõ suppuzermos successivamente x igual a cada huma das linhas A*p*, A*p*, &c., será y igual a cada huma das linhas correspondentes *pm*, *pm*, &c.; porque a equaçaõ exprime, que para qualquer valor de x he sempre y meia proporcional entre x e $a - x$, e esta he a propriedade que suppomos a cada huma das perpendiculares *pm*. Logo pela equaçaõ acharemos successivamente cada ponto da curva, dando a x muitos valores, e calculando os correspondentes de y. Por exemplo, na hypothese de $a = 10$, a nossa equaçaõ torna-se em $yy = 10x - xx$, e teremos

$x = 0$;	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9;	10
$y = 0$;	± 3;	± 4;	$\pm 4,5$;	$\pm 4,9$;	± 5;	$\pm 4,9$;	$\pm 4,5$;	± 4;	± 3;	0

Tomando pois estes valores de y sobre as perpendiculares correspondentes aos valores 1, 2, 3, &c. de x, e fazendo o mesmo para a parte debaixo sobre as perpendiculares *pm'*, *pm'*, &c., determinaremos os pontos m, m, m', m', &c. pertencentes á curva que tem a propriedade dada.

Querendo ter maior numero de pontos, supporemos AB dividida em maior numero de partes, em 100, por exemplo, isto he, poremos $a = 100$; ou conservando o mesmo valor de $a = 10$, daremos a x os valores intermedios entre 1, 2, 3, &c., e calcularemos os correspondentes de y.

Os dous valores de $y = 0$ mostraõ que a curva encontra AB nos dous pontos de A e B, em hum

hum dos quais he $x = o$, e no outro he $x = 10$. A equaçaõ tambem moſtra o meſmo; porque nos lugares em que acontece o dito encontro, he $y = o$, e metendo eſte valor na equaçaõ, teremos $o = x(a - x)$: logo como eſte producto he nada, quando $x = o$, e quando $x = a$, ſegue-ſe que y ſerá nada neſtes meſmos caſos; iſto he, a curva encontrará a linha AB no ponto A em que $x = o$, e no ponto B em que $x = 10$.

284 Aſſim, para exprimir em equaçaõ a natureza de qualquer curva, reporta-ſe cada hum dos ſeus pontos m, m (*Fig.* 35) a duas rectas fixas AB, AOA que façaõ entre ſi hum angulo conhecido; porque he claro, que imaginando conduzidas pelos pontos m, m as linhas mp, e mp' parallelas a OAO, e AB, ſerá determinada a poſiçaõ de cada ponto, ſe forem conhecidos os valores das diſtancias mp' e pm, iſto he, de Ap e pm, ou o valor de huma, e a razaõ entre ella e a outra. A expreſſaõ analytica da razaõ que tem entre ſi as linhas Ap e pm para cada hum dos pontos m, dá a equaçaõ da curva, a qual que ſerá mais ou menos compoſta conforme o gráo mais ou menos elevado da equaçaõ.

As linhas Ap ou mp' chamaõ-ſe *abſciſſas*, e as linhas mp ou p'A chamaõ-ſe *ordenadas*; humas e outras tem o nome commum de *coordenadas da curva*. E como pertencem indifferentemente a qualquer ponto da curva, o ſeu comprimento varia a cada inſtante, pelo que tanto ellas, como as letras x, y, z, &c. que as repreſentaõ, ſe chamaõ *indeterminadas*. O ponto A donde ſe começaõ a contar as abſciſſas chama ſe a *origem das abſciſſas*, e o ponto donde ſe começaõ a contar as ordenadas Ap' ou pm, *origem das ordenadas*. Ainda que eſtes

dous

dous pontos na *Fig.* 35. naõ ſaõ differentes, com tudo naõ ha outra razaõ para contar as abſciſſas do meſmo ponto, de que ſe contaõ as ordenadas, mais que a da ſimplicidade. Como as abſciſſas ſe podem tomar de huma e de outra parte da origem, ſeraõ negativas aquellas que eſtiverem na parte do eixo contraria á que ſe conſiderar como poſitiva. Na poſiçaõ das ordenadas nada ha de eſſencial, ſe naõ o ſerem parallelas entre ſi; podem ſer perpendiculares, ou obliquas ao eixo das abſciſſas. As ordenadas tambem ſe diſtinguem em poſitivas e negativas, conforme eſtaõ para huma, ou para outra parte do eixo das abſciſſas.

285 Moſtremos agora como por meio da equaçaõ de huma curva ſe achaõ as ſuas propriedades.

1° Do meio C de AB tire ſe para qualquer ponto M a recta CM; o triangulo CPM ſerá ſempre rectangulo, e por conſequencia teremos $CM^2 = MP^2 + PC^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$; e como $yy = ax - xx$ (283), acharemos $CM = \frac{1}{2}a$, iſto he, todos os pontos M, *m* eſtaõ em igual diſtancia do ponto C; propriedade diſtinctiva da circumferencia do circulo.

2° Se conduzirmos por qualquer ponto M, e pelas extremidades A e B do diametro as rectas MA, MB, teremos $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2 = ax$, e $MB^2 = PM^2 + BP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = -ax + a^2$. Eſtas equações ſomadas daõ $AM^2 + MB^2 = a^2 = AB^2$, que he a propriedade do triangulo rectangulo; logo todos os angulos AMB ſaõ rectos.

3°

3° A equaçaõ $AM^2 = ax$ dá $x : AM :: AM : a$; logo na curva de que ſe trata, todas as cordas AM ſaõ meias proporcionais entre o diametro AD e o ſegmento correſpondente AP. Semelhantemente ſe acharáõ as outras propriedades.

Se contaſſemos as abſciſſas do centro, iſto he ſe tomaſſemos CP, Cp, &c. por abſciſſas, eſtá claro que repreſentando cada huma por z, teriamos $x = \frac{1}{2}a - z$, e conſeguintemente a equaçaõ do circulo ás coordenadas perpendiculares, contadas do centro, ſerá $yy = \frac{1}{4}aa - zz$.

Outra qualquer propriedade pertencente a todos os pontos da curva, ſendo traduzida algebricamente, dará a meſma equaçaõ ás meſmas coordenados. Se houver porém mudança na origem, ou na direcçaõ dellas, ou em ambas as couſas juntamente, poderá apparecer huma equaçaõ differente, ainda que ſerá ſempre do meſmo gráo. Havemos viſto, que pela mudança das abſciſſas, em lugar de $yy = ax - xx$ tivemos a equaçaõ $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ do meſmo gráo, a qual, como foi deduzida da primeira, tem a meſma propriedade por baſe. Porém ſe traduziſſemos a propriedade que tem MC de ſer ſempre a meſma, e igual a $\frac{1}{2}a$, entaõ conſervando as meſmas denominações, teriamos (47. 1. Eucl.) $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, iſto he $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, como deduzimos de outra propriedade.

Da

Da Ellipse.

286 Consideremos agora a curva que tem a propriedade de ser a soma $MF + Mf$ (*Fig.* 36.) das distancias de qualquer dos seus pontos M aos pontos fixos F e f, igual a huma linha dada a. Esta curva tem o nome de *Ellipse*, as distancias MF e Mf chamaõ-se *raios vectores*, e os pontos F e f, os *fócos*.

Para deduzir a equaçaõ, tome-se huma linha determidada, por exemplo Ff, para eixo das abscissas, cuja origem seja em A na distancia $CA = \frac{1}{2}a$ do meio C de Ff. Tire-se a ordenada MP, e faça-se $CB = CA$: seja $AP = x$, $PM = y$, $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm(x - c)$, conforme P cahir entre F e B, ou entre F e A; $fP = a - x - c$; e pela propriedade da curva, $Mf = a - z$.

Isto posto, os triangulos rectangulos FPM, fMP daõ $FM^2 = PM^2 + FP^2$, e $Mf^2 = PM^2 + fP^2$; ou $z^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, e $a^2 - 2az + z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ac + 2cx + c^2$, das quais se deduz $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; logo substituindo este valor na primeira equaçaõ, teremos . . . $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$.

287 Por esta equaçaõ podemos descrever a curva por pontos, como havemos feito (283) a respei

peito do circulo. Alem deſte methodo temos o ſeguinte.

288 Tomando $CA = CB = \frac{1}{2} a$, do ponto f como centro com o intervallo arbitrario Br deſcreve-ſe hum arco, e executa-ſe o meſmo do ponto F com o intervallo Ar; os pontos de interſecçaõ M e M' dos dous arcos pertenceraõ á ellipſe.

289 A propriedade fundamental de que deduzimos a equaçaõ da curva, dá hum meio muito ſimples para a deſcrever por movimento continuo. Fixem-ſe em dous pontos F e f as extremidades de hum fio FMf maior que Ff, o qual ſe eſtenda por meio de hum ponteiro M; entaõ o ponteiro movendo-ſe ao redor dos fócos, de maneira que o fio ſe conſerve ſempre eſtendido, irá marcando os pontos da ellipſe; porque em todos os pontos que elle deſcrever, a ſoma das diſtancias FM e fM ſerá a meſma.

290 Donde ſe ſegue, que tomando o fio FMf igual a AB, a curva paſſará pelos pontos A e B; porque $AF = Bf$; logo $AF + Af = AB$, e $BF + Bf = AB$. A equaçaõ moſtra iſto meſmo, porque, pondo-ſe $y = 0$, dá $x(a - x) = 0$, que quer dizer que a curva encontra a linha Ff produzida, quando $x = 0$, ou no ponto A, e quando $x = a$, ou no ponto B.

291 A equaçaõ $y = \pm \sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)}$ dá a cada abſciſſa duas ordenadas iguais com ſinais contrarios, e por tanto moſtra que a curva tem dous ramos iguais, hum de huma parte do eixo AB, e outro da outra parte; e que a perpendicular DD' (*Fig.* 37) conduzida por C divide a curva em duas partes iguais e ſemelhantes.

292

292 A linha AB he o *eixo maior* da ellipſe, DD′ o *eixo menor*, e o dobro mm' da ordenada que paſſa pelo fóco, o *parametro*. Os pontos A, B, D, D′ ſaõ os *vertices* dos eixos, e o ponto C he o *centro* da ellipſe.

293 Se ſuppuzermos $x = AF = c$, teremos $y = \pm \frac{2(ac - cc)}{a}$, e por conſequencia $mm' = \frac{4(ac - cc)}{a}$. Logo *o parametro he menor que o quadruplo da diſtancia* c *do vertice ao fóco.*

Seja $\frac{4ac - 4cc}{a} = p$; a equaçaõ da ellipſe ſe mudará entaõ neſta mais ſimples $yy = \frac{p}{a}(ax - xx)$.

294 Se ſuppuzermos $x = AC = \frac{1}{2}a$, teremos $yy = CD^2 = ac - cc = AF \times BF$; donde ſe tira $AF : CD :: CD : BF$. Logo *o ſemieixo menor he meio proporcional entre as diſtancias de hum dos fócos aos dous vertices.*

Seja $DD' = b$, ſerá $\frac{bb}{4} = ac - cc$, e a equaçaõ ſe mudará neſta de que ſe faz muito uſo . . . $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$.

Dos valores de p e b ſe deduz $pa = bb$, e conſeguintemente $a : b :: b : p$. Logo *o parametro he huma terceira proporcional aos eixos maior e menor.*

295 A equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ dá $yy : x(a - x) :: bb : aa$; logo *os quadrados das ordenadas ao eixo maior ſaõ para os productos das ſuas abſciſſas, como o quadrado do eixo menor he para o quadrado do eixo maior*; e conſeguintemente *os quadrados das ordenadas eſtaõ entre ſi como os productos das abſciſſas correſpondentes.*

296 Se ſobre AB (*Fig.* 38.) deſcrevermos o circulo AEBE′ teremos $PN^2 = ax - xx$; logo ſerá $yy = \frac{bb}{aa} PN^2$, a qual dá $y : PN :: b : a$, iſto he PM : PN :: CD : AC ou CE; logo *as ordenadas da ellipſe ſaõ proporcionais ás do circulo deſcrito ſobre o eixo maior.* Podemos pois deſcrever a ellipſe com muita facilidade por meio do circulo.

Donde ſe ſegue, que o circulo he huma ellipſe, cujos eixos a e b ſaõ iguais, ou cuja diſtancia do vertice ao fóco he igual á ametade do eixo maior, ou tambem cujo parametro he igual ao diametro; porque ſuppondo $b = a$, $c = \frac{1}{2}a$, e $p = a$, todas as tres equações da ellipſe ſe tornaõ na do circulo $yy = ax - xx$.

297 Vê-ſe pois claramente, que huma linha unica, iſto he o diametro, determina o circulo; mas naõ baſta o eixo maior AB (*Fig.* 37.) para determinar a ellipſe; he neceſſario alem diſſo conhecer ou o eixo menor b, ou o parametro p, ou a diſtancia c do vertice ao fóco. Havemos viſto como ſe deſcreve a ellipſe no caſo de ſer dado o ei-

eixo maior com a diſtancia do vertice ao fóco. Quando porém ſe derem os dous eixos, para deſcrever a curva por movimento continuo, he neceſſario determinar os fócos. Iſto he facil de fazer, deſcrevendo do ponto D como centro com o intervallo $AC = \frac{1}{2}a$ dous arcos, os quais cortaraõ o eixo maior nos pontos procurados F e *f*. Se for dado o eixo maior com o parametro, determinaremos o eixo menor, tomando huma meia proporcional (294) entre as duas linhas dadas, e aſſim reduziremos eſte caſo ao precedente.

298 Para tirarmos huma tangente a qualquer ponto M (*Fig.* 39.) da ellipſe, produziremos o raio vector *f*M até G, de ſorte que ſeja $MG = MF$; e tirando GF, conduziremos ſobre ella por M a perpendicular MT, a qual ſerá a tangente, iſto he, encontrará a curva unicamente no ponto M.

Porque ſe a encontra em outro ponto, por exemplo em N, entaõ tirando N*f* e NF, pela propriedade fundamental da ellipſe ſerá $FN + Nf = FM + Mf$, ou (4. e 5. 1. Eucl.) $NG + Nf = Gf$; mas iſto he abſurdo (20. 1. Eucl.); logo o ponto N naõ pertence á ellipſe.

299 O angulo $FMO = GMO = fMN$. Logo *na ellipſe os raios vectores formaõ angulos iguais com a tangente* Como ſe ſabe por experiencia, que hum raio de luz, quando encontra huma ſuperficie, ſe reflecte fazendo o angulo de reflexaõ igual ao angulo da incidencia; os raios que partirem do fóco luminoſo F, e encontrarem a ellipſe, iraõ reunir-ſe no outro fóco *f*; e reciprocamente.

Se

Se conduzirmos por M (*Fig.* 40.) ſobre a tangente MT a perpendicular MI, eſta linha que ſerá tambem perpendicular á curva, dividirá o angulo FMf em duas partes iguais; porque ſendo $IMT = IMT'$, ſe tirarmos os angnlos iguais FMT, fMT', reſtará $FMI = IMf$.

300 A linha PI chama-ſe a *Subnormal*, MI a *Normal*, PT a *Subtangente*.

Por quanto temos $FMI = IMf$, ſerá $Mf : MF :: fI : FI$ (3. 6. Eucl.), e conſeguintemente $Mf + MF\ (a) : Mf - MF\ (a - 2z) :: fI + FI\ (a - 2c) : fI - FI\ (a - 2c - 2FI)$ da qual ſe tira

$$FI = \frac{az - 2cz}{a} = \frac{a^2c - 2ac^2 + a^2x - 4acx + 4c^2x}{a^2};$$

logo $PI = FI - (x - c) = \frac{2a - 4x}{a^2}(ac - cc) = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a - x\right)$ (294).

301 A ſubtangente $PT = \frac{PM^2}{PI} = \frac{a^2y^2}{b^2\left(\frac{1}{2}a - x\right)} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$.

As expreſsões de PI e PT podem ſervir para tirar huma perpendicular, e huma tangente a qualquer ponto M da ellipſe.

302 Como PT naõ depende de b, todas as tangentes a pontos correſpondentes de todas as ellipſes, deſcritas ſobre AB como eixo maior, ſe encontraõ no meſmo ponto T do eixo. Pelo que a tangente ao ponto N do circulo deſcrito ſobre AB

como

como diametro (*Fig.* 38.) encontrará no mesmo ponto do eixo T a tangente ao ponto correspondente M da ellipse.

Porque he $CP = \frac{1}{2}a - x$ (*Fig.*40.), será CT $= CP + PT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{AC^2}{CP}$; logo CP : AC :: AC : CT ; proporçaõ, pela qual se determina com summa facilidade o ponto T, por onde passa a tangente MT.

303 O triangulo rectangulo TPM dá TM $= \sqrt{\left[\left(ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2\right)\frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}\right]}$.

304 A ellipse tem grande uso na Architectura Naval. A curvatura, por exemplo, da superficie exterior dos mastros, he a de huma porçaõ de ellipsoide, isto he, de hum solido gerado pela revoluçaõ da ametade de huma ellipse ao redor do seu eixo maior.

305 Se de qualquer ponto M tirarmos sobre o eixo menor a perpendicular ou ordenada MP′, e suppuzermos DP′ $= x'$, MP′ $= y'$, teremos $y = \frac{1}{2}b - x'$, e $x = \frac{1}{2}a - y'$. Substituindo estes valores na equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, acharemos $y'y' = \frac{aa}{bb}(bx' - x'x')$; equaçaõ semelhante a que se deduzio para o eixo maior; por tanto tiraremos conclusões analogas (295, 296).

306 Para termos as linhas P′I′, P′T′, CT′, MT′ pertencentes ao eixo menor, imitaremos o que fizemos a respeito do eixo maior, usando

das linhas correſpondentes, e dos triangulos ſemelhantes, que ſe reconhecem na Figura. Deſte modo acharemos valores em x' ſemelhantes aos deduzidos em x relativamente ao eixo maior.

Tambem damos hum *parametro* ao eixo menor, entendendo por eſta linha naõ o dobro da ordenada, que paſſa pelo fóco do eixo menor, porque naõ o ha; mas huma terceira proporcional aos dous eixos menor e maior (294).

307 Se quizermos contar as abſciſſas do centro C, poremos CP $= z$, e ſubſtituindo $\frac{1}{2}a - z$ em lugar de x na equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, e nos valores de PI, PT, CI, e TM, acharemos $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$, PI $= \frac{bbz}{aa}$, PT $= \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$, CT $= \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, e TM $= \sqrt{\left[\left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right)\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}\right]}$.

Como os valores de z começaõ em C, e acabaõ em A, parece que a equaçaõ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ dá ſómente ametade DAD′ da elipſe. Porém como devemos dar a z tanto valores poſitivos, como negativos, eſtá claro, que eſtes ultimos daraõ as ordenadas pm, que determinaõ a outra ametade DBD′; a qual he igual e ſemelhante á primeira DAD′, porque a quantidade $\pm\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ naõ muda de valor pela ſubſtituiçaõ de $-z$ em lugar de $+z$.

308 Dá-se o nome de *diametro* a toda a recta MCM′ (*Fig.* 41.), que passa pelo centro da ellipse, e termina nos dous pontos oppostos da curva. Se conduzirmos pelo centro a recta NCN′ parallela á tangente em M, seraõ NCN′ e MCM′ os *diametros conjugados*. As linhas *m*O parallelas á tangente em M saõ *ordenadas* ao diametro MCM′, e as partes MO saõ as *abscissas*. O parametro de qualquer diametro he huma terceira proporcional ao mesmo diametro e ao seu conjugado.

309 Para mostrarmos que as ordenadas a hum diametro tem propriedades semelhantes ás das ordenadas aos eixos, tirem-se as perpendiculares *mp*, OQ ao eixo AB, e a recta *ms* perpendicular a OQ. Seja $AB = a$, $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; teremos $AP = \frac{1}{2}a - z$, $PB = \frac{1}{2}a + z$, $Ap = \frac{1}{2}a - k - g$, $pB = \frac{1}{2}a + k + g$.

Os triangulos semelhantes TPM, *m*SO daõ $SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$, e outros dous CPM, COQ tambem semelhantes daõ $QO = \frac{ky}{z}$; logo $pm = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Mas pela propriedade da ellipse (295) $pm^2 \times AP.PB = PM^2 \times Ap.pB$; logo substituindo, e reduzindo, teremos $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg.$

Notemos de passagem, que quando a linha *m*O passa pelo centro, isto he, quando o ponto O cahe ſobre C, he $k = 0$, e $g = CR$; logo ſubſtituindo eſtes valores na equaçaõ achada, virá $CR^2 = \frac{1}{4}aa - zz = AP.\ PB$.

Fazendo agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $mO = y'$, $CO = z'$, os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$, e os dous CNR, mSO tambem ſemelhantes daõ $CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; logo $CR^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$; donde, igualando entre ſi os dous valores de CR^2, reſultará $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$. Subſtituindo pois os valores de gg e kk na equaçaõ $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, teremos $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, ſemelhante a que achámos a reſpeito dos eixos.

310 Pondo $y' = 0$, teremos $z' = \pm\frac{1}{2}a'$. Logo a curva encontra a linha MM' em dous pontos M e M' equidiſtantes do centro, e por conſequencia todos os diametros da ellipſe ſaõ cortados no centro em duas partes iguais.

311 A equaçaõ $y = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$ moſtra que qualquer diametro MCM' divide em duas partes iguais as ſuas ordenadas mom', ou as parallelas á tangente em M, e conſeguintemente tambem a ellipſe inteira.

312 Donde ſe ſegue, 1° que a tangente em

N he parallela ao diametro MM′; 2º que as ordenadas O*m* ao diametro MM′ saõ as ordenadas ao circulo do diametro MM′, diminuidas porém ou augmentadas na razaõ de $a' : b'$, e inclinadas debaixo de hum angulo igual ao comprehendido pelos diametros conjugados.

Para sabermos em que lugar $a' = b'$, ou onde as ordenadas saõ iguais ás do circulo, substituiremos CP (z) em lugar de CR na equaçaõ $CR^2 = \frac{1}{4}aa - zz$, e teremos $z = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, quantidade real e independente de b, a qual mostra, que cada ellipse tem dous diametros conjugados iguais, e que estes se determinaõ do mesmo modo em todas as ellipses que tiverem o mesmo eixo. Para os achar, descreva-se sobre o eixo maior como diametro (*Fig.* 38.) o semicirculo ANEB, e dividindo em duas partes iguais no ponto N o arco AE determinado pelo eixo menor CD produzido, abaixe-se NP, que corta a ellipse em M e M′; seraõ CM e CM′ os dous diametros conjugados iguais, pois que o triangulo rectangulo isosceles PCN dá $CP = CN\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

313 Se conduzirmos do centro C (*Fig.* 42.) a perpendicular CF sobre a tangente, será $CF = \frac{PM \cdot CT}{TM}$, e $CN = \frac{TM \cdot CR}{PT}$; logo

$$CF \cdot CN = \frac{PM \cdot CT \cdot CR}{PT} = \tfrac{1}{4}ab \ (307,\ 309);$$

isto he (tirando a tangente NT′ até encontrar TM em I) $CMIN = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b$. Logo *todos os parallelogrammos formados pelas tangentes nas ex-*

tre-

tremidades dos diametros conjugados saõ iguaes entre si, e ao rectangulo formado pelos eixos.

314 Os triangulos semelhantes TPM, CRN daõ $RN = \frac{CR \cdot PM}{PT} = \frac{bz}{a}$; mas pelos dous triangulos rectangulos CRN, CPM temos $CR^2 + RN^2 + CP^2 + PM^2 = CN^2 + CM^2$, logo substituindo nesta as expressões algebricas das linhas, será $CN^2 + CM^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$. Donde se segue, que *na ellipse a soma dos quadrados de dous quaisquer diametros conjugados he igual á soma dos quadrados dos dous eixos.*

315 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2z^2}{a^2}$, será (307) $TM^2 = CN^2 \left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2}\right)$. Porém os triangulos semelhantes TPM, MP′T′ daõ $MT' = \frac{P'M \times TM}{PT}$; logo $MT'^2 = \frac{CN^2 \times z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, e conseguintemente $TM \times MT' = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$ (308), sendo p' o parametro do diametro MM′; donde se tira $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

O circulo descrito sobre TT′ como diametro (*Fig.*43.) passará pelo ponto C, porque o angulo TCT′ he recto; se produzirmos pois CM até encontrar a circumferencia em V, teremos (35.3.Eucl.) $CM : TM :: MT' ; MV$; logo $MV = \frac{1}{2}p'$.

316

316 Daqui se infere, que para descrever a ellipse, quando saõ dados os dous diametros conjugados MM′, NN′, com o angulo que formaõ entre si, produziremos CM até V, de sorte que MV seja igual á ametade do parametro, e do meio X de CV levantaremos a perpendicular XZ, que encontra em Z a linha TT′ conduzida por M parallelamente a NN′; descrevendo entaõ do ponto Z como centro e com o intervallo ZC hum circulo, que cortará TT′ em dous pontos T e T′, as rectas TC, T′C conduzidas por elles para o centro seraõ as direcções dos dous eixos. A sua grandeza se determinará abaixando as perpendiculares MP, MP′, e tomando CA (302) igual a huma meia proporcional entre CT e CP; e CD igual a huma meia proporcional entre CT′ e CP′, como se deduz dos triangulos semelhantes TPM, TCT′.

317 Para resolvermos analyticamente este problema, seja MM′ $= m$, NN $= n$, e o angulo MCN $= \alpha$, teremos (314) $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, e (313) $mn \; sen \; \alpha = ab$, porque (Trig. 174.) CF $= m \; sen \; \alpha$ (*Fig.* 42.); logo $a = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \; sen \; \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \; sen \; \alpha)}$, e $b = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \; sen \; \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \; sen \; \alpha)}$.

Para acharmos a direcçaõ dos eixos, ou o angulo MCT, que representaremos por ϕ, temos no triangulo CMT (Trig. 173.) *sen* T ou $sen \, (\alpha - \phi)$: CM $(\frac{1}{2}m)$ :: *sen* TMC $(sen \; \alpha)$: CT $\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{CP}\right)$;

lo-

logo $CP = \frac{a^2 \, sen\,(\alpha - \phi)}{2m \, sen\,\alpha}$. Mas o triangulo rectangulo CMP (Trig. 162) dá $1 : \frac{1}{2}m :: cos\,\phi :$ CP ou $\frac{a^2 \, sen\,(\alpha - \phi)}{2m \, sen\,\alpha}$; logo teremos $m^2 \, sen\,\alpha \, cos\,\phi = a^2 \, (sen\,\alpha \, cos\,\phi - cos\,\alpha \, sen\,\phi)$ (Trig. 34), e dividindo por $cos\,\phi$, virá $tang\,\phi = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \, tang\,\alpha$, que se póde exprimir em m e n, substituindo por α o valor achado.

Da Hyperbola.

318 SE a curva (*Fig.* 44.) tiver a propriedade de que a differença $Mf - MF$ das distancias de cada hum dos seus pontos M a dous fixos F, f, seja sempre a mesma, e igual a huma linha dada a; para acharmos a sua equaçaõ, tomaremos huma linha Ff, por exemplo, para eixo das abscissas, cuja origem seja v. g. no ponto A em distancia $CA = \frac{1}{2}a$ do ponto C meio de Ff, e faremos $CB = CA$. Supponhamos $AP = x$, $PM = y$, $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm (c - x)$, $fP = c + a + x$, e pela propriedade da curva, $Mf = a + z$.

Os triangulos rectangulos FPM, fPM daõ $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$, e $c^2 + 2ac + a^2 + 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2$, das quais

quais ſe tira $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; logo ſubſtituindo eſte valor na primeira equaçaõ, teremos

$$yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx).$$

319 Eſta equaçaõ póde ſervir para deſcrever a curva por pontos, dando a x muitos valores. Tambem ſe podem achar ſucceſſivamente os meſmos pontos, tomando arbitrariamente huma parte Br maior que BF, e deſcrevendo do ponto f como centro, e com o intervallo Br hum arco, o qual ſeja cortado em M por outro arco deſcrito do ponto F como centro, e com o intervallo Ar.

Se quizermos porém deſcrever a curva por movimento continuo, fixaremos no ponto f huma regoa indefinida, que poſſa girar ao redor delle: em F, e em hum dos pontos Q da regoa ataremos as extremidades de hum fio FMQ, que ſeja igual a fQ — a. Depois, por meio de hum ponteiro applicaremos á regoa huma parte MQ do fio, e movendo o ponteiro de M para A, de ſorte que o fio ſe conſerve ſempre eſtendido, a regoa irá abaixando, a parte FM diminuindo, e o ponteiro deſcreverá a noſſa curva, á qual ſe dá o nome de *Hyperbola*. Com effeito, fM — FM ſerá ſempre igual a a.

320 A equaçaõ $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$ moſtra que a curva tem dous ramos AM, AM′ iguais e infinitos, hum de huma, e outro da outra parte da linha AB produzida, a qual ſe chama o *primeiro eixo.*

321 Se fizermos x negativo, ou ſe ſuppuzermos que P cahe porcima de A, $y = \pm\sqrt{\frac{4ac+4cc}{aa}(xx-ax)}$ ſerá imaginario em quanto for $x < a$, e por conſequencia naõ haverá curva deſde A até B; mas começando a ſer $x > a$, as ordenadas tornaõ a ſer reais, e aſſim começa em B huma nova porçaõ de curva mBm', a qual tambem tem como a primeira dous ramos infinitos, hum de huma, e outro da outra parte de AB produzida; e he perfeitamente igual á hyperbola *poſitiva*, pois que tomando $Bp = AP$, $xx - ax$ ou $Ap \times pB$ vem a ſer igual a $AP \times PB$, logo $pm = PM$.

322 Se na equaçaõ puzermos $y = 0$, acharemos que a curva encontra o eixo nos dous pontos A e B, em que $x = 0$, e $x = -a$.

323 Para termos o valor da ordenada Fm'', que paſſa por F (eſte ponto chama-ſe *fóco*, como tambem o ponto f) faremos $x = c$, e virá $y = \pm 2\left(\frac{ac+cc}{a}\right)$; logo ſerá o dobro deſta quantidade, ou $m''m''' = 4\left(\frac{ac+cc}{a}\right)$. Eſta linha chama-ſe o *parametro* da hyperbola. Se a repreſentarmos por p, teremos huma equaçaõ mais ſimples da curva . . . $yy = \frac{p}{a}(ax + xx)$.

Da equaçaõ $p = \frac{4ac+4cc}{a} = 4c + \frac{4cc}{a}$ ſe de-

deduz que *o parametro do primeiro eixo da hyperbola he maior, que o quadruplo da distancia do vertice A ao fóco F.*

324 Se do ponto C meio de AB se levantar a perpendicular $DD' = 2CD$, tal que seja $CD^2 = Af \times FA = ac + cc$, será DD' o *segundo eixo* da hyperbola. Represente-se este por b, teremos $bb = 4ac + 4cc$; e substituindo na equação da curva, virá . . . $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$.

Vê-se pois que as tres equações da hyperbola sómente differem das tres correspondentes da ellipse nos sinaes de cc e xx.

Da ultima equação achada se tira $yy\ (PM^2) : ax + xx\ (AP \times PB) :: bb\ (DD'^2) : aa\ (AB^2)$ Logo: *Na hyperbola os quadrados das ordenadas ao primeiro eixo são para os productos das suas abscissas, como o quadrado do segundo eixo he para o quadrado do primeiro*; e conseguintemente *os quadrados das ordenadas estão entre si como os productos das abscissas correspondentes.*

Quando $a = b$, a curva chama-se *hyperbola equilatera*, e a equação se torna em $yy = ax + xx$, a qual não differe da equação do circulo, senão no final de xx.

Por quanto he $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, e $bb = 4ac + 4cc$, será $ap = bb$, isto he $a : b :: b : p$. Logo o parametro do primeiro eixo he huma terceira proporcional ao primeiro e ao segundo eixo.

325 Se tirarmos por D a recta DA, no triangulo rectangulo DAC teremos DA $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a =$ CF. Logo, para acharmos os fócos quando forem dados os eixos, tomaremos CF = DA; e pelo contrario para acharmos o ſegundo eixo quando for dado o primeiro com os fócos, deſcreveremos do ponto A como centro, e com o intervallo CF hum arco, que cortará a perpendicular DD′ no ponto procurado D.

326 A deſcriçaõ da hyperbola depende pois de duas quantidades, a ſaber: ou dos dous eixos; ou do eixo maior e dos fócos; ou do eixo maior e do parametro; e pelo que havemos dito póde ſempre effeituar-ſe por algum dos methodos indicados. Se foſſe dado, por exemplo, o eixo maior com o parametro, procurariamos huma meia proporcional entre eſtas linhas, e teriamos o ſegundo eixo, o qual ſerviria para achar os fócos.

327 Se ſobre Mf (*Fig.* 45.) tomarmos a parte MG = MF, a perpendicular MT tirada de M ſobre FG ſerá tangente da hyperbola, iſto he, naõ encontrará a curva ſenaõ em hum ſó ponto M.

Porque ſe a encontra em algum outro ponto N de TM, tirando NF, Nf, e NG, ſerá NF = NG. Mas he Nf < NG + Gf, logo ſerá Nf — NF < Gf, iſto he, Nf — NF < Mf — MF; logo o ponto N naõ pertence á hyperbola.

Pela conſtrucçaõ FMO = OMG = NMQ. Logo ſe F for hum ponto luminoſo, os raios que delle ſahirem, e encontrarem a concavidade MAM′, ſe reflectiraõ como ſe partiſſem de f.

328 Por quanto temos (3. 6. Eucl.) fM $(z+a):MF\ (z)::fT\ (a+2c-FT):$ FT; ferá $FT=\frac{2c+a}{2z+a}z=\ldots\ldots$

$$\frac{(2c+a)\frac{2cx+ac+ax}{a}}{(2c+a)\frac{2x+a}{a}}=\frac{2cx+ac+ax}{2x+a}$$: logo

$PT=FT-c+x=\frac{ax+xx}{x+\frac{1}{2}a}$; valor da fubtangente da hyperbola, a qual differe fómente nos finaes da que fe achou para a ellipfe.

329 He pois a diftancia do vertice ao ponto em que a tangente encontra o eixo, ou $AT=PT-AP=\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}-x=\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$.

330 Efta expreffaõ moftra, que fem embargo de que os ramos da hyperbola fe eftendem até o infinito, com tudo as tangentes a cada hum dos feus pontos cortaõ o eixo em pontos T fituados entre A e C. Porque fe fubftituirmos em lugar de x todas as quantidades imaginaveis defde o até o infinito, o valor de AT crefce fómente defde o até $\frac{1}{2}a$. Logo a tangente na extremidade infinita de cada hum dos ramos AM, AM′ paffa pelo centro C; e como os ramos oppoftos Bm, Bm' faõ perfeitamente iguais áquelles, e os pontos A e B eftaõ em igual diftancia de C, fegue-fe que as ditas tangentes tambem o faõ nas extremidades infinitas dos ramos Bm, Bm', como fe reprefenta (*Fig.*46.) nas linhas CX, CY.

331

331 Dá-se a estes tangentes o nome de *Asymptotas*, as quais, como se vê, saõ humas linhas, que partindo do centro se avezinhaõ cada vez mais da hyperbola, sem que possaõ encontralla senaõ em huma distancia infinita, e por tanto saõ os limites das tangentes.

Se pelo vertice A conduzirmos At parallela a PM, os triangulos semelhantes TAt, TPM daraõ PT $\left(\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}\right)$: PM (y) :: AT $\left(\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}\right)$: $At = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x} = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax + xx)}}{a + x}$; onde se vê, que fazendo x infinito, he $At = \frac{1}{2}b =$ CD. Logo, para determinar a posiçaõ das asymptotas, conduziremos por A as rectas AL, AL′, perpendiculares a CA, e iguaes cada huma a CD; as linhas CL, CL′, conduzidas pelos pontos L, L′ e pelo centro C, seraõ as asymptotas da hyperbola, as quais se forem produzidas para a parte contraria, seraõ tambem as asymptotas da hyperbola opposta. Está claro, que na hyperbola equilatera o angulo LCL′ formado pelas asymptotas he recto.

332 Poisque he $CT = CA - AT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a + x}$, teremos esta proporçaõ CP : CA :: CA : CT, a qual póde servir para tirar huma tangente MT.

333 O triangulo rectangulo TPM dá MT $= \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 + ax + xx\right)\frac{ax + xx}{\left(\frac{1}{2}a + x\right)^2}\right]}$.

334 Se tirarmos a normal MI (*Fig.47.*), teremos TP $\left(\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x}\right)$: PM (y) :: PM (y) : PI; logo a ſubnormal PI $=\frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a+x)$.

335 Para acharmos agora a equaçaõ ás coordenadas do ſegundo eixo DD′, conduzamos a perpendicular MP′, e fazendo MP′ $=y'$, DP′ $=x'$, teremos $y=\frac{1}{2}b-x'$, e $x=y'-\frac{1}{2}a$. Subſtituindo eſtes valores na equaçaõ $yy=\frac{bb}{aa}(ax+xx)$, virá $y'y'=\frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb-bx'+x'x')$, a qual naõ he ſemelhante á relativa ao primeiro eixo.

336 Se quizermos ter a equaçaõ em ordem a AB, contando as obſciſſas do centro, ſupporemos CP $=z$, e ſubſtituindo $z-\frac{1}{2}a$ em lugar de x, acharemos $yy=\frac{bb}{aa}(zz-\frac{1}{4}aa)$.

Se referirmos a curva ao ſegundo eixo DD′, fazendo CP′ $=z'$, teremos $x'=\frac{1}{2}b-z'$, e ſubſtituindo na equaçaõ reſpectiva (335), virá $y'y'=\frac{aa}{bb}(z'z'+\frac{1}{4}bb)$.

337 Reportando da meſma ſorte ao centro as expreſsões de PT, CT, PI, e MT, teremos PT $=\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{z}$, CT $=\frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, PI $=\frac{bbz}{aa}$, e

$$MT=\sqrt{\left[\left(\frac{bbzz}{aa}+zz-\frac{1}{4}aa\right)\frac{zz-\frac{1}{4}aa}{zz}\right]}.$$

Se

Se produzirmos MT até encontrar o ſegundo eixo em T′, os triangulos ſemelhantes TPM, TCT′ daraõ $CT' = \frac{CT \times PM}{PT} = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{CD^2}{CP'}$; logo $CP' : CD :: CD : CT'$.

338 Toda a recta MCM′ (*Fig.*48.) que paſſa pelo centro, e termina de huma e outra parte na hyperbola, chama-ſe *diametro*. As rectas Om parallelas á tangente em M ſaõ ordenadas ao diametro; MO e OM′ ſaõ as ſuas abſciſſas.

Para moſtrarmos que as ordenadas mO tem as meſmas propriedades que tem as ordenadas MP, tirem-ſe mp, OQ perpendiculares ao eixo AB, e conduza-ſe mS parallela a AP. Seja $PM = y$, $CP = z$, $Qp = g$, $CQ = k$; ſerá $AP = z - \frac{1}{2}a$, $BP = z + \frac{1}{2}a$, $Ap = k - g - \frac{1}{2}a$, $Bp = k - g + \frac{1}{2}a$.

Os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $QO = \frac{ky}{z}$; e os outros dous TPM, mSO daõ $SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; logo $mp = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$. Porém (324) $pm^2 \times AP . PB = PM^2 \times Ap . pB$; logo ſubſtituindo, e reduzindo, teremos $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$.

No-

Notemos antes de paſſar adiante, que ſe tomarmos ſobre AB a parte CR tal que ſeja $CR^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, e levantando a perpendicular RN' terminada em N' pela linha NN' conduzida pelo centro parallelamente a TM, ſe fizermos $CN = CN'$; entaõ NN' he o *diametro conjugado* de MM', e huma terceira proporcional a MM' e NN' he o *parametro* do meſmo diametro MM'.

Supponhamos agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $CO = z'$, $Om = y'$; os triangulos ſemelhantes CPM, CQO daõ $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$, e os outros dous tambem ſemelhantes mSO, $CN'R$ daõ $g^2 = y'y' \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$; logo ſubſtituindo os valores de g^2 e k' na equaçaõ $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, teremos $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, equaçaõ ſemelhante á das coordenadas do primeiro eixo.

339 Fazendo $y' = 0$, acharemos $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; logo a curva encontra a linha MM' nos dous pontos oppoſtos M e M' em diſtancia do centro igual a $\frac{1}{2}a'$; e aſſim todos os diametros ſe cortaõ no centro em duas partes iguais.

340 A equaçaõ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$ moſtra, que ſe produzirmos mO de maneira que $Om' = Om$, o ponto m' pertencerá á curva; por tan-

tanto cada diametro divide em duas partes iguaîs as rectas parallelas á tangente que passa pela origem do mesmo diametro.

341 Da equaçaõ $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$ se tira $y'y'$ (mO^2) : $z'z' - \frac{1}{4}a'a'$ (MO $\times$ OM') :: $b'b'$ (NN'^2) : $a'a'$ (MM'^2); logo *o quadrado de huma ordenada a qualquer diametro terminado na curva está para o producto das suas abscissas, como o quadrado do diametro conjugado está para o quadrado do primeiro diametro.*

342 Se do centro C (*Fig.* 49) abaixarmos sobre TM a perpendicular CF, os triangulos semelhantes CFT, TPM daraõ $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$, e os dous tambem semelhantes CRN', TPM daraõ CN' ou $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; logo $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$; e substituindo os valores achados (336, 337, e 338) teremos $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. Se produzirmos agora MT até a asymptota em I, será MI = CN, como abaixo se mostrará, e conseguintemente CIMN será hum parallelogrammo, cuja superficie = $CF \times MI$ = $CF \times CN$; logo *o parallelogrammo construido sobre os diametros he igual ao rectangulo dos eixos.*

343 Os triangulos semelhantes TPM, CRN' daõ $RN' = \frac{PM \times CR}{PT} = \frac{bz}{a}$; e os dous triangu-

gulos rectangulos CPM, CRN′ daõ $CM^2 - CN'^2 = CP^2 + PM^2 - CR^2 - RN'^2$; ſubſtituindo pois os valores achados, teremos $CM^2 - CN^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Logo *a differença dos quadrados de dous diametros conjugados he ſempre a meſma, e igual á differença dos quadrados dos dous eixos.* Donde ſe ſegue, que na hyperbola equilatera hum diametro qualquer he igual ao ſeu conjugado.

344 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN'^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$, ſubſtituindo no valor de TM (337), acharemos $TM = CN\sqrt{\left(\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}\right)}$. Mas (*Fig.* 47) os triangulos MPT, MP′T′ daõ $T'M = \frac{P'M \times TM}{PT} = \frac{CN \times z}{\sqrt{(zz - \frac{1}{4}aa)}}$; logo teremos $TM \times T'M = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$, ſendo p' o parametro do diametro MM′, e conſeguintemente $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

345 Donde ſe ſegue, que para achar os eixos a fim de deſcrever a hyperbola, quando ſaõ dados os diametros conjugados com o angulo por elles comprehendido; tomaremos ſobre MC (*Fig.* 50) a linha $MH = \frac{1}{2}p'$, e no meio I de CH levantaremos huma perpendicular IK, a qual cortará em K a linha MT′ conduzida por M parallelamente ao conjugado NN′. Do ponto K como centro e com o intervallo KC deſcreveremos hum circulo, o qual encontrará MT nos dous pontos T e T′; entaõ as linhas TC, CT′ tiradas por elles e pelo

centro, feraõ as direcções dos eixos; porque o angulo T'CT he recto, e temos (Cor.36.3.Eucl.) CM : TM :: T'M : MH ou $\frac{1}{2}p'$.

A grandeza dos eixos fe determinará abaixando de M as perpendiculares MP, MP', e tomando huma meia proporcional CA (337) entre CP e CT, e outra CD entre CP' e CT'.

Naõ póde haver difficuldade em achar a foluçaõ analytica defte problema, depois do que havemos dito (317) a refpeito da ellipfe.

Da Hyperbola entre as Afymptotas.

346 A Hyperbola confiderada em ordem ás afymptotas tem propriedades importantes, de que exporemos as principais, lembrando-nos primeiramente do que fica dito (331) fobre o modo de determinar as afymptotas.

Para referirmos cada hum dos pontos E da curva (*Fig.* 51) ás afymptotas CLO, CL'o, tiremos por E a linha EQ parallela a huma dellas; OEo parallela ao fegundo eixo DD'; ES parallela a CLO; e pelo vertice A a linha AG parallela a CL'o. Seja CA $= \frac{1}{2}a$, CD $=$ AL $=$ AL' $=$ $\frac{1}{2}b$, CP $= z$, PE $= y$, AG $= m$, GL $= n$, CQ $= t$, QE $= u$.

Os triangulos femelhantes CPO, CAL daõ PO $=$ Po $= \frac{bz}{a}$; logo EO $= \frac{bz}{a} - y$, Eo $=$

$= \frac{bz}{a} + y$; donde vem $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy$
$= \frac{bbzz}{aa} - \frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa) = \frac{1}{4}bb$, isto he, $EO \times Eo = CD^2 = AL^2$; propriedade que pertence a qualquer ponto E da hyperbola.

347 Os triangulos semelhantes QEO, ESo, e AGL daõ AL : EO :: AG : EQ, e AL : Eo :: GL : ES; logo $AL^2 : EO \times Eo :: AG \times GL : EQ \times ES$; mas $EO \times Eo = AL^2$; logo $ut = mn$, equaçaõ da hyperbola entre as asymptotas.

Donde se vê, que para o ponto A teremos $AG \times CG = AG \times GL$; logo CG = GL. Mas por causa do angulo recto A, o circulo descrito sobre CL ha de passar pelo ponto A; logo CG = AG = GL, isto he, $m = n$, e conseguintemente $ut = m^2$.

Este quadrado constante m^2, ou CG^2, ou $\frac{1}{4}(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)$, a que o producto ut sempre he igual, chama-se a *potencia* da hyperbola.

348 Se pelo ponto E tirarmos de qualquer maneira huma recta REr terminada nas asymptotas, as partes RE, mr, interceptas entre a curva e as asymptotas, seraõ iguais entre si.

Porque, tirando por m a linha hmH parallela a OEo, os triangulos semelhantes REO, RmH daõ ER : Rm :: EO : Hm, e os dous tambem semelhantes rhm, roE daõ Er : mr :: Eo : mh; logo $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$. Mas (347) $EO \times Eo = CD^2 = Hm \times mh$; logo $ER \times Er = Rm \times mr$, ou $ER (Em + mr) = (ER + Em) mr$, e reduzindo, $ER = mr$.

349

349 Donde se segue, que huma tangente Tt, (*Fig.*52) terminada nas asymptotas, he dividida em duas partes iguais no ponto do contacto M.

350 Se por M conduzirmos IMi parallela a DD', e tirarmos por qualquer ponto E a linha REr parallela á tangente Tt, e OEo parallela a DD'; os triangulos semelhantes TMI, REO daraõ $TM : MI :: RE : EO$, e os outros dous Mit, Eor daraõ Mt ou $TM : Mi :: Er : Eo$; logo $TM^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$, e por conseguinte (347) $TM^2 = RE \times Er$.

351 Tire-se pelo centro C o diametro CMV, o qual dividirá em duas partes iguais a linha Rr parallela a Tt, porque (349) passa pelo meio M de Tt; e seja $CM = \frac{1}{2}a'$, $TM = \frac{1}{2}q$, $CV = z'$, $VE = y'$. Os triangulos semelhantes CMT, CVR daraõ $VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; logo $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, e $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$. Substituindo estes valores na equaçaõ $RE \times Er = TM^2 = \frac{1}{4}qq$, como tambem o valor de $y'y'$ (338), teremos $q = b'$, e conseguintemente $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, ou, $MT = CN$, sendo CN o semidiametro conjugado de CM; logo (*Fig.*49.) $MI = CN$, que he o que prometemos (342) demonstrar.

352 Para todas as rectas pois REr (*Fig.*52) parallelas ao conjugado CN, temos $RE \times Er = CN^2$.

353 Donde se mostra, que muito facilmente podemos descrever a hyperbola por pontos, quando forem dados os dous semidiametros conjugados CM,

CM, CN (*Fig*.53) com o angulo por elles comprehendido. Porque, tirando pela origem M do ſemidiametro CM a linha TM*t* parallela a CN, e tomando de huma e outra parte de M as partes MT, M*t* iguais cada huma a CN, as linhas CT, C*t* (349, 351) ſeraõ as aſymptotas. E ſe pelo ponto M tirarmos arbitrariamente as rectas PMQ, PMQ que quizermos, e em cada huma tomarmos PO = MQ, todos os pontos O aſſim achados pertenceráõ (348) á hyperbola. Cada hum dos pontos O póde depois ſervir para acharmos outros como V, V, &c., tirando as rectas ROS, ROS, &c., e fazendo SV = RO.

354 Com igual facilidade ſe deduz o methodo de deſcrever entre duas linhas dadas para aſymptotas huma hyperbola, que paſſe por hum ponto dado dentro dellas.

355 Finalmente, dividindo tanto o angulo das aſymptotas, como o ſeu ſupplemento, em duas partes iguais, acharemos as direcções dos dous eixos, cuja grandeza ſe determinará como ſe diſſe (345); e aſſim temos outro meio para reſolver a queſtaõ propoſta no meſmo lugar.

Da Parabola.

356 COnſideremos agora a curva, em que a diſtancia FM (*Fig*. 54) de cada hum dos ſeus pontos M ao ponto fixo F he igual á diſtancia MH do meſmo ponto a huma recta XZ dada de poſiçaõ.

Para acharmos a equaçaõ deſta curva, que ſe chama *Parabola*, tiremos ſobre XZ a perpendicular FV, e dividindo eſta em duas partes iguais no no ponto A, ſerá A hum ponto da parabola, porque AV = AF. Sirva eſte ponto, que ſe chama *o vertice*, de origem das abſciſſas, e ſeja AV ou AF $= c$, AP $= x$, PM $= y$; teremos MF $=$ MH $=$ PV $= c + x$, e FP $= \pm (x - c)$.

O triangulo rectangulo FPM dá $FP^2 + PM^2 = MF^2$, iſto he, $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; logo a equaçaõ da curva he $yy = 4cx$, a qual nos moſtra o ſeguinte.

1° Como temos $y = \pm \sqrt{4cx}$, ſegue-ſe que a curva tem dous ramos AM, AM′ perfeitamente iguais e ſemelhantes, hum de huma, e outro de outra parte da linha AFP, a qual ſe chama *o eixo*; e que os meſmos ramos ſe eſtendem até o infinito, porque creſcendo x, tambem creſce y.

2° Fazendo x negativo, temos $y = \pm \sqrt{-4cx}$, valor imaginario; logo a curva naõ paſſa para cima do ponto A.

3° Pondo $x = c$, temos $y = \pm 2c$, iſto he, o valor da ordenada que paſſa pelo fóco F, ou Fm $= 2c$; logo $mm' = 4c$: eſta linha chama-ſe o *parametro* do eixo da parabola. Aſſim *o parametro do eixo da parabola he quadruplo da diſtancia* AF *do vertice ao fóco.*

4° Seja p o parametro, teremos $4c = p$, e a equaçaõ da curva ſe mudará em . . . $yy = px$.

357 Por meio da equaçaõ facilmente ſe deſcreve a parabola por pontos, os quais ſe achaõ dando ſucceſſivamente a x muitos valores, e calculando os correſpondentes de y.

358

358 Tambem se póde descrever por pontos desta maneira. Havendo escolhido o ponto A para vertice, e a linha VP por direcçaõ do eixo, tomem-se as partes AV, AF iguais cada huma a $\frac{1}{4}p$; será F o fóco. Conduzaõ-se por cada ponto do eixo as perpendiculares MM', e descrevendo do ponto F como centro e com o intervallo VP dous arcos, que cortem as perpendiculares em dous pontos M e M', pertenceráõ estes á parabola; porque sendo VH perpendicular ao eixo, he FM = VP = MH. A recta XVH chama-se a *directriz*.

359 Ultimamente a parabola póde descreverse por movimento continuo, usando de hum esquadro VHf, e de hum fio FMf = fH, cujas extremidades se prendem em f, e no fóco F. Entaõ applicando a fH por meio do ponteiro M huma parte Mf do fio, se fizermos mover o outro lado do esquadro sobre a linha ZX, de maneira que o fio se conserve sempre estendido; o ponteiro descreverá a parabola MA.

360 A equaçaõ $yy = px$ mostra, que para qualquer ponto M *o quadrado da ordenada* MP *he igual ao producto da abscissa correspondente pelo parametro*; ou que *os quadrados das ordenadas estaõ entre si como as suas abscissas*.

A equaçaõ da ellipse $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$, suppondo a infinito, reduz-se a $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = 4cx$, que he a equaçaõ da parabola. Logo *a parabola he huma ellipse, cujo eixo maior he infinito*.

361 Se do ponto M (*Fig.* 55) conduzirmos ſobre FH a perpendicular MOT, eſta ſerá tangente da parabola.

Porque ſe encontra a curva em algum outro ponto N, tirando as linhas NF, NH, e NZ perpendicular a XZ, ſerá NZ = NF; mas por outra parte he NZ < NH, NH = NF, e por conſeguinte NZ < NF; logo o ponto N naõ pertence á curva.

362 O angulo FMO = OMH = *f*MN; logo os raios luminoſos que ſahirem de F, e encontrarem a concavidade M'AM, ſe reflectiráõ parallelamente ao eixo; e reciprocamente os parallelos ao eixo ſe reuniráõ no fóco F.

363 Por quanto HO = OF, os triangulos HOM, TOF ſeraõ iguais; logo FT = MH = PV = $x + c$, e conſeguintemente PT = FT + FP = $2x$. Logo *a ſubtangente* PT *da parabola he dupla da abſciſſa.*

364 Se por M tirarmos MI perpendicularmente á tangente MT, os triangulos ſemelhantes TPM, PMI daraõ $PI = \frac{PM^2}{PT} = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$.

Logo *a ſubnormal da parabola he a meſma em todos os pontos, e igual á ametade do parametro.*

365 As propriedades da parabola tem muitas applicaçóes nas Artes e Sciencias. Quem quizer vêr o ſeu uſo na conſtrucçaõ dos navios, póde conſultar o noſſo original.

366 Toda a linha MX (*Fig.* 56) parallela ao eixo QA chama-ſe hum *diametro*; o ſeu *parametro*

he

he em geral o quadruplo da diſtancia da origem M ao fóco; as ſuas *ordenadas* ſaõ as rectas mO parallelas á tangente em M; MO ſaõ as *abſciſſas*.

Para achar a equaçaõ ás coordenadas do diametro MX, tirem-ſe dos pontos m, M, O as linhas mp, MP, OQ perpendiculares ao eixo AP, e conduza-ſe mS parallela ao meſmo eixo. Seja $AP = x$, $PM = y$, $Qp = g$, $AQ = k$; teremos $Ap = k - g$.

Os triangulos ſemelhantes TPM, mSO daraõ $SO = \frac{gy}{2x}$; logo $pm = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$.

Mas (360) he $pm^2 \times AP = PM^2 \times Ap$; logo $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Fazendo agora $MO = x'$, $mO = y'$, ſerá $x' = k - x = \frac{gg}{4x}$, ou $gg = 4xx'$. Mas o triangulo rectangulo mSO dá $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$; logo $(4x + p)\,x' = y'y'$. Sendo pois p' o parametro do diametro MX, iſto he, $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$, teremos $y'y' = p'x'$; equaçaõ ſemelhante á relativa ás coordenadas do eixo. Logo *o quadrado da ordenada* mo *a qualquer diametro* MX *he igual ao producto da abſciſſa pelo parametro do meſmo diametro*; e conſeguintemente *os quadrados das ordenadas ſaõ entre ſi como as abſciſſas correſpondentes*.

367 Do que havemos dito ſe ſegue, que para deſcrevermos a parabola, quando for dada a linha indefinida MX por diametro, com o ſeu parametro p', e o angulo que o meſmo diametro faz com

as

as ordenadas, tiraremos pela origem M huma linha NMT que faça com MX o angulo NMX igual ao angulo dado, e outra MF que faça com MT o angulo FMT = NMX; entaõ tomando MF = $\frac{1}{4}p'$, o ponto F ſerá o fóco (362, e 366). Conduzindo pois por F huma linha TFQ parallela a MX até encontrar TM em T, ſerá TFQ a direcçaõ do eixo, cujo vertice A ſe determinará abaixando a perpendicular MP, e dividindo PT em duas partes iguais no ponto A (363). Tendo aſſim achado o fóco e o vertice, a curva ſe deſcreverá com facilidade (358, e 359).

Para darmos a ſoluçaõ analytica deſte problema, ſeja o angulo dado MOm = MTP = a; e conſervando as outras denominaçóes, no triangulo rectangulo MTP teremos $1 : tang.\ a :: PT\ (2x) : PM\ (\sqrt{px})$, e conſeguintemente $x = \frac{p}{4\ tang^2\ a}$; mas $p' = 4x + p$, logo $p = p'\ ſen^2 a$, e aſſim teremos o parametro. A origem A do eixo AL ſe determinará pelas equaçóes $x = \frac{1}{4}p'\ coſ^2 a$, e $y = \pm \frac{1}{4}p'\ ſen\ 2a$.

368 As tres curvas de que havemos tratado, tem o nome de *Secções Conicas*, porque reſultaõ de huma pyramide conica cortada por hum plano. Por exemplo, ſe a pyramide conica CHI (*Fig.* 57) for cortada pelo plano AMm, de maneira que eſte encontre os dous lados CH e CI, temos a ellipſe AMmB: deve exceptuar-ſe unicamente o caſo em que o plano faça com CI hum angulo igual aquelle que o outro lado CH forma com a baſe, porque entaõ a ſecçaõ ſerá hum circulo.

Se ao contrario o plano naõ encontrar hum dos la-

lados CH (*Fig.* 58), senaõ no prolongamento deste, teremos a hyperbola.

Finalmente se o plano for parallelo a hum dos lados CH (*Fig.* 59), teremos a parabola.

Para o demonstrar, concebamos a pyramide conica CHI (*Fig.* 57, 58) cortada por hum plano que passe pelo eixo; a secçaõ será hum triangulo. Corte-se tambem a mesma pyramide por tres planos AM*m*, FMG, H*m*I perpendiculares ao triangulo, sendo os dous ultimos parallelos á base da pyramide; as duas secções FMG, H*m*I seraõ circulos, os quais encontraõ a secçaõ AM*m* em M e *m*, e teraõ por diametro as intersecções FG, HI dos seus planos com o triangulo; e as intersecções PM, *pm* dos circulos com o plano MA*m* (19. 11. Eucl.) seraõ perpendiculares ao plano do triangulo, e conseguintemente seraõ ordenadas communas dos circulos, e da secçaõ AM*m*.

Isto posto, os triangulos APG, A*p*I daõ AP : A*p* :: PG : *p*I, e os dous BFP, BH*p* daõ PB : *p*B :: FP : H*p*; logo AP $\times$ PB : A*p* $\times$ *p*B :: FP $\times$ PG : H*p* $\times$ *p*I, ou pela natureza do circulo, AP $\times$ PB : A*p* $\times$ *p*B :: PM^2 : *pm*^{2}. Estaõ pois os quadados das ordenadas da secçaõ AM*m* entre si como os productos das abscissas; e porque estas se achaõ de huma e outra parte da ordenada (*Fig.* 57), e da mesma parte (*Fig.* 58), AM*m* será na *Fig.* 57 huma ellipse, e na *Fig.* 58 será huma hyperbola.

Na *Fig.* 59 temos pela propriedade do circulo PM^2 = FP $\times$ PG, e *pm*^{2} = H*p* $\times$ *p*I = FP $\times$ *p*I;

pI ; logo $PM^2 : pm^2 :: PG : pI :: AP : Ap$, pelos triangulos ſemelhantes APG, ApI. Eſtaõ pois os quadrados das ordenadas entre ſi como as abſciſſas, e conſeguintemente a curva he huma parabola.

Reflexões ſobre as Equações das Secções Conicas.

369 TEm-ſe demonſtrado (309) que na ellipſe, ſendo x a abſciſſa CO (*Fig.* 41) contada do centro ſobre o diametro MM′, e y a ordenada mO parallela ao conjugado CN, a equaçaõ ás coordenadas dos diametros he $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, ſeja qual for o angulo comprehendido pelos diametros. Logo ſe por m conduzirmos mO' parallela a MM′, a qual ſerá huma ordenada ao diametro NN′; fazendo $CO' = x'$, $mO' = y'$, teremos $y = x'$, e $x = y'$, e por conſequencia $yy = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - x'x')$. Donde ſe ſegue, que contando as abſciſſas do centro, a equaçaõ da ellipſe em ordem a qualquer diametro tem ſempre a meſma fórma, em quanto as ordenadas ſe tomarem parallelas ao diametro conjugado.

Se $b = a$, temos $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, a qual he a equaçaõ do circulo (285), no caſo de ſerem as ordenadas perpendiculares ao diametro; porque ſe forem obliquas, a equaçaõ pertence á ellipſe reportada aos diametros conjugados iguais.

Quan-

Quanto á hyperbola, ſendo x a abſciſſa CO (*Fig.* 48) contada do centro ſobre o diametro MM′ terminado na curva, e y a ordenada mO parallela ao conjugado NN′, teremos (338) $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$ por equaçaõ ás coordenadas do primeiro diametro, ſeja qual for o angulo comprehendido pelos diametros conjugados. Mas ſe por m' conduzirmos m'O′ parallela ao diametro CM, a qual ſerá huma ordenada ao diametro NN′; fazendo CO′ $= x'$, e m'O′ $= y'$, teremos $x' = y$, e $y' = x$, e conſeguintemente $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$. Logo na hyperbola a equaçaõ ás coordenadas do diametro conjugado NN′ naõ he ſemelhante áquella que ſe acha para o diametro MM′ terminado na curva.

Na parabola, contando as abſciſſas da origem de hum diametro ſobre elle meſmo, e tomando as ordenadas parallelas á tangente no vertice do meſmo diametro, a equaçaõ (366) he ſempre $yy = px$, ſendo y a ordenada, x a abſciſſa, e p o parametro do diametro.

Em fim, na hyperbola entre as aſymptotas, contando as abſciſſas x do centro ſobre huma das aſymptotas, e tomando as ordenadas y parallelas á outra aſymptota, a equaçaõ he $xy = aa$, ſendo a a potencia da hyperbola.

370 He porém de advertir, que ſe huma das indeterminadas, y por exemplo, naõ ſe contar da meſma linha ſobre que ſe contaõ os x, poderemos ter huma equaçaõ ſemelhante ás mencionadas, a qual nem poriſſo pertença aos diametros conjuga-

dos

dos, no caſo de ſer a curva reſpectiva huma ellipſe, ou huma hyperbola; ou naõ exprima a relaçaõ entre as abſciſſas e as noſſas ordenadas, no caſo de ſer huma parabola. Sejaõ, por exemplo, CM′, CN (*Fig*. 60) dous ſemidiametros conjugados da ellipſe; ſuppondo $CM' = \frac{1}{2}a$, $CN = \frac{1}{2}b$, $CQ = x$, $QM = y$, a equaçaõ he $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. Tire-ſe pelo centro C huma recta FCE, e pelo ponto B, tomado na diſtancia conhecida $BC = m$, conduza-ſe BF parallela a QM; ſuppondo $CE = z$, e $CF = n$, os triangulos ſemelhantes CBF, CQE daraõ $x = \frac{mz}{n}$; logo teremos $yy = \frac{bbmm}{aann}\left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz\right)$. Donde ſe vê, que eſta equaçaõ ainda que tenha a meſma fórma da relativa aos diametros conjugados, com tudo naõ lhes pertence; porque as abſciſſas z tomaõ-ſe ſobre CE, e as ordenadas y ou QM contaõ-ſe do ponto Q, onde a linha QM parallela a CN ſe encontra com CM′.

371 Segue-ſe pois, 1° que huma equaçaõ do ſegundo gráo a duas indeterminadas, contando-ſe huma dellas da meſma linha ſobre que ſe conta a outra, pertencerá á ellipſe reportada aos diametros conjugados, ou ao circulo, quando nella naõ entrarem outras potencias das indeterminadas mais que os quadrados, e eſtes tiverem differentes ſinais em differentes membros: bem entendido que o termo conhecido deve ter o ſinal + no membro em que eſtiver o quadrado da indeterminada com o ſi-

final —; porque a equaçaõ $yy = \frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa - xx)$ naõ exprime linha poſſivel (98).

372 2° Se os quadrados das indeterminadas tiverem o meſmo ſinal em differentes membros, e dellas naõ entrarem outras potencias mais que os quadrados, a equaçaõ pertencerá ſempre á hyperbola reportada ou a hum diametro terminado na curva, ou ao ſeu conjugado, conforme o termo conhecido tiver o meſmo ou differente ſinal do que tiverem os quadrados das indeterminadas.

373 3° Se a equaçaõ conſtar ſómente de dous termos, dos quais hum ſeja o quadrado de huma indeterminada, e o outro ſeja o producto da outra indeterminada por huma quantidade conhecida, pertencerá á parabola reportada a hum dos diametros, quando os dous termos em differentes membros tiverem o meſmo ſinal; porque ſe o tiverem differente, a equaçaõ naõ exprimirá linha poſſivel.

374 4° Em fim ſe a equaçaõ conſtar ſómente de dous termos, dos quais hum ſeja o producto das duas indeterminadas, e o outro ſeja huma quantidade conhecida, exprimirá a hyperbola reportada ás aſymptotas.

375 Quando huma equaçaõ a duas indeterminadas tiver as condiçóes expoſtas, com facilidade ſe poderá conſtruir a ſecçaõ conica a que pertencer.

Por exemplo, ſe tivermos a equaçaõ $ncd - qyy = gxx$, eſcreveremos primeiramente $qy^2 = ncd - gxx = g\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$, e depois $yy = \frac{g}{q}$

 (ncd

$\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$. Vê-se pois que a equaçaõ proposta pertence (309, e 371) a huma ellipse, na qual a razaõ dos quadrados dos dous diametros conjugados ou $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, e o quadrado do diametro sobre que se contaõ os x ou $a^2 = \frac{4ncd}{g}$. Destas duas equações se tiraõ os valores dos dous diametros conjugados, a saber $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, e $b = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$. E como o angulo por elles comprehendido he igual ao comprehendido pelas linhas x e y, o qual se supõe conhecido pelo problema de que se houver deduzido a equaçaõ $ncd - qyy = gxx$; temos as tres cousas (316), com as quais podemos descrever a ellipse.

Isto mesmo se praticará nos outros casos. Em geral: Toda a equaçaõ do segundo gráo a duas indeterminadas, se exprime huma linha possivel, e naõ he resoluvel em dous factores do primeiro gráo da fórma $ax + by + c$, e $dx + fy + g$, pertence a huma secçaõ conica. Para o demonstrar, ensinaremos a reduzir qualquer equaçaõ desta natureza á fórma de alguma das equações que havemos considerado. Antes porém de entrarmos nesta materia, faremos para maior clareza as reflexões seguintes.

376 Por quanto os problemas resolvidos por Algebra conduzem sempre a huma ou mais equações, podemos considerar qualquer equaçaõ a duas interminadas u e t, como procedida de hum proble-

ma,

ma, em que as meſmas indeterminadas repreſentaſſem duas incognitas. E como dando ſucceſſivamente a huma das incognitas, a *u* por exemplo, muitos valores, e calculando pela equaçaõ os correſpondentes de *t*, naõ ha embaraço para marcar na linha AR (*Fig.* 60, 61, 62) os valores AP, AP, &c. que ſe derem a *u*, e tirar por P, P, &c. debaixo de hum angulo determinado as linhas PM, PM, &c parallelas entre ſi, e iguais aos valores calculados de *t*; vindo deſta ſorte os pontos M, M, &c. a formar huma curva, cuja natureza dependerá da razaõ que houver entre as linhas AP e PM, a qual ſe exprime pela equaçaõ de que ellas ſe deduziraõ: ſegue-ſe que a meſma equaçaõ exprime a natureza de huma curva, e por tanto ſeja qual for o problema, póde conſiderar-ſe a ſua equaçaõ como pertenecente a huma curva.

Imaginemos que a curva he huma ſecçaõ conica: eſtá claro que como ſe ignorava, ou podia ignorar-ſe, que detal uſo da equaçaõ reſultaſſe huma ſecçaõ conica, naõ ſe havia tratado de diſpor as linhas AP e PM de maneira, que tendo huma a ſua direcçaõ ſobre o diametro, a outra foſſe parallela á tangente no vertice delle, como era neceſſario para que a equaçaõ tiveſſe alguma das fórmas acima expoſtas. Pelo que póde a equaçaõ naõ ter nenhuma das meſmas fórmas, e ſem embargo pertencer a huma das ſecções conicas.

377 Vejamos agora como toda a equaçaõ do ſegundo grão a duas indeterminadas póde reduzir-ſe a alguma das fórmas que tem as equações das ſecções conicas em ordem ás linhas, a que as havemos reportado (369).

378 Para praticarmos pelo methodo que vamos a expôr, devemos lembrar-nos (192) de que o segundo termo de huma equaçaõ do segundo gráo se faz desaparecer, igualando a incognita mais ou menos a ametade do coefficiente do segundo termo, conforme for positivo ou negativo, a huma nova incognita, havendo antes desembaraçado o quadrado da incognita.

Assim na equaçaõ $4x^2 + 12x = 9$, faremos $x + \frac{3}{2} = z$, e teremos a equivalente $zz = \frac{18}{4}$, em que naõ ha segundo termo. Se tivessemos $x^2 - 4x = 7$, fariamos $x - 2 = z$, e achariamos $zz = 11$.

379 Podemos tambem igualar a incognita augmentada ou diminuida da ametade do coefficiente do segundo termo, a huma nova incognita multiplicada ou dividida por huma quantidade arbitraria.

Por exemplo na equaçaõ $x^2 - 4x = 7$, fazendo $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos $\frac{kk}{nn} zz = 11$, a qual dá para x o mesmo valor da operaçaõ precedente, seja k e n o que se quizer; porque sendo $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$, e $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos como acima $x - 2 = \sqrt{11}$.

Methodo de reduzir ás Secções Conicas toda a equaçaõ indeterminada do ſegundo gráo.

380 SUpponhamos que a equaçaõ geral do ſegundo gráo a duas indeterminadas $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$ pertence a huma curva MM (*Fig.* 60, 61), cujas coordenadas ſejaõ AP e PM. Para moſtrarmos que eſta curva he ſempre huma ſecçaõ conica, e enſinarmos o methodo de a conſtruir, ſimplifiquemos a equaçaõ, fazendo (378) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; teremos $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$. Suppondo para maior facilidade $ffdd - 4hd^3 = r$, $2cfd - 4ged = q$, e $cc - 4de = m$, a equaçaõ ſe reduz á fórma $4ddyy = r + qu + muu$, na qual m, q, r podem ſer quantidades poſitivas ou negativas.

Faça-ſe agora a meſma operaçaõ em ordem a u, dando á equaçaõ a fórma $uu + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, e (379) pondo $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (*); teremos $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, da qual ſe deduz $yy = \frac{qq}{16mn^2d^2}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$. Como

(*) Introduzimos a quantidade arbitraria n, a fim de reduzir directamente a equaçaõ aos diametros conjugados. Se igualaſſemos (378) ſimplesmente a x, a equaçaõ final eſtaria no caſo que havemos examinado (370).

Como q, n, e d estaõ no quadrado, os sinais da equaçaõ sómente mudaráõ, quando m ou r se tornarem de positivos em negativos. Porém a mudança de sinal em r naõ influe nos sinais de xx e yy; logo della naõ resulta mudança na curva. Quanto a m, se for negativo, teremos $yy = \frac{qq}{16mnndd}\left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right)$. Logo a curva será huma hyperbola, quando m for positivo (372); e pelo contrario será huma ellipse, quando m ou $cc - 4de$ for negativo (371), isto he, quando $4de$ for maior que cc, tanto no caso de d e e serem ambos positivos, como no caso de serem ambos negativos.

381 *Para sabermos pois em que casos huma equaçaõ indeterminada do segundo grão* $dtt + cut + euu + fdt + geu + hdd = 0$, *pertence á ellipse ou á hyperbola, examinaremos se o quadrado* cc *do coefficiente do termo* ut *menos o quadruplo do producto de dos coefficientes de* tt *e* uu *dá huma quantidade positiva ou negativa; no primeiro caso a curva será hyperbola, e no segundo huma ellipse, com tanto que naõ seja* $d = e$, *porque entaõ a curva póde ser hum circulo, como logo mostraremos.*

Deve exceptuar-se desta regra o caso da ellipse, em que r for negativo e maior que $\frac{qq}{4m}$; porque entaõ $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ torna-se em $nn - \frac{4mrnn}{qq}$ ou $nn\left(1 - \frac{4mr}{qq}\right)$; a qual he negativa quando

for

for $\frac{4mr}{qq} > 1$, ou $r > \frac{qq}{4m}$, e conſeguintemente (371) a curva ſerá imaginaria.

Reſta agora enſinar o modo de conſtruir as curvas reconhecidas. Comecemos pella ellipſe, conſtruindo as duas equações reſpectivas $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, pois que m na ſuppoſiçaõ actual he negativo, e n póde ſuppor-ſe indifferentemente poſitivo ou negativo.

382 Quanto á primeira, conduza-ſe pela origem A dos u e t (*Fig.*60) a linha $AB = \frac{1}{2}f$ parallela ás linhas PM ou t, e tire-ſe BKI parallelamente á linha AR ſobre que ſe contaõ os u; ſerá $IM = t + \frac{1}{2}f$. Para termos pois $y = IM + \frac{cu}{2d}$, tome-ſe ſobre BI a linha BK de grandeza arbitraria, e conduzindo $KL = \frac{\frac{1}{2}c \cdot BK}{d}$ parallelamente a AB, ſe tirarmos pelos pontos B e L huma linha BLQ, teremos dous triangulos ſemelhantes BKL e BIQ, que daõ $IQ = \frac{cu}{2d}$; logo $QM = IM + IQ = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Donde ſe ve vê (370) que QLB deve ſer a direcçaõ de hum dos diametros, para que a equaçaõ pertença aos conjugados. Determinemos o centro.

A ſegunda equaçaõ $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ moſtra, que ſe ſobre AP tomarmos $AG = \frac{q}{2m}$, ſerá GP

$= u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; logo tirando por G a linha NGC parallela a PM, o ponto C ferá a origem dos x, e conſeguintemente o centro da ellipſe. Com effeito, os x devem contar-ſe ſobre LQ, e pela equaçaõ $GP = \frac{qx}{2mn}$, quando $GP = 0$, tambem $x = 0$; logo os x começaõ ao meſmo tempo que as linhas GP; mas iſto ſómente póde ter lugar quando os x começarem em C; logo ſendo QM os y, as linhas CQ ſeraõ os x.

Da equaçaõ $GP = \frac{qx}{2mn} = \frac{AG \times CQ}{n}$ ſe tira $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mas, pela propriedade das parallelas, $BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; logo $n = BC$; iſto he, para que a noſſa equaçaõ pertença aos diametros conjugados, cujas direcções ſaõ QB e CN, deve introduzir-ſe por n o valor de BC, determinado pelas conſtrucções precedentes.

A grandeza dos diametros determina-ſe, comparando as duas equações $yy = \frac{qq}{16mddnn}\left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right)$ e $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, do que reſulta $a = \sqrt{\left(4nn + \frac{16mrnn}{qq}\right)}$, e $b = \sqrt{\left(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}\right)}$. E como n, m, q, r, ſaõ quantidades conhecidas, teremos os valores dos

dos diametros, com os quais e com o angulo comprehendido BCN, que se suppõe determinado nas operacões precedentes, descreveremos (316) a ellipse a que pertence a nossa equação.

383 Se $a = b$, e o angulo BCN $= 90°$, a curva será hum circulo. Para determinarmos quando isto tem lugar, 1° na nossa equação supporemos $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, que dá $nn = \frac{qq}{16mdd} = BC^2$; 2° se o angulo BCD he recto, temos $BC^2 + CD^2 = BD^2 = AG^2$, ou $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqee}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, porque os triangulos semelhantes BCD, BLK dão $CD = \frac{qe}{4md}$; logo he necessario que $m + ee = 4dd$, isto he, $-ce + 4de + ce = 4dd$, ou $d = e$.

384 He pois manifesto, que *para saber se a curva he circulo, ellipse, ou hyperbola*, he escusado attender aos tres ultimos termos fdt, geu, e hdd, da equação $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$: esta averigoação depende sómente dos tres primeiros termos, de maneira que se d, c, e e forem tais, que $cc - 4de$ seja positivo, a curva será huma hyperbola; se pelo contrario for negativo, a curva será huma ellipse, exceptuando sómente o caso em que seja ao mesmo tempo $d = e$, isto he em que os dous quadrados u^2 e t^2 tenhão o mesmo coefficiente, porque então a curva será hum circulo, se for recto o angulo das novas coordenadas.

385 Tudo o que temos dito, á excepção do numero 383, se applica igualmente á hyperbola, isto

isto he, á equaçaõ $yy = \frac{qq}{16mnndd} \cdot \left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq} \right)$, fazendo a devida correcçaõ nos sinais. Assim tornando a ler o precedente, e applicando-o á *Figura* 61, naõ ha outra mudança a fazer mais do que tirar AG para a parte opposta de AP, como indica a equaçaõ $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (380). Quanto ao mais, tudo he o mesmo, mudando a palavra *ellipse* em *hyperbola*.

Nos casos particulares as quantidades AG, BK, AB, KL (*Fig.* 60, 61) podem ter disposiçaõ differente da que havemos representado; porém tais mudanças seraõ sempre indicadas pelos sinais das quantidades d, c, f, m, q &c. nas equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que se formaõ para fazer desaparecer o segundo termo.

386 Passemos a examinar os dous casos que restaõ: a saber 1° quando $cc - 4de = 0$; 2° quando $d = 0$, e $e = 0$.

No primeiro caso, isto he quando $cc - 4de = 0$, ou quando os tres termos tt, ut, e uu formaõ hum quadrado perfeito, faremos desaparecer o segundo termo em ordem a t, e teremos $yy = \frac{r + qu}{4dd}$. Se suppuzermos pois este segundo membro igual a huma nova indeterminada x multiplicada por hum numero arbitrario n, virá a equaçaõ $yy = nx$, a qual pertence (369) á parabola reportada a hum dia-

diametro. Para a defcrever, conftruiremos as equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $\frac{r + qu}{4dd} = nx$. Como ja fe conftruio a primeira, applicando exactamente á *Figura* 62 o que fe diffe (382) a efte refpeito para a *Figura* 60, as linhas QM feraõ os y, e teremos BLQ pela direcçaõ do diametro, fobre que devem contar-fe os x.

A origem dos x, e confeguintemente o vertice do diametro fe determina recorrendo á fegunda equaçaõ $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, a qual moftra que fe tomarmos para a parte contraria de AP a quantidade $AG = \frac{r}{q}$, ferá $GP = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$. Logo fe por G conduzirmos GCD parallela a PM, o ponto de encontro C com QLB ferá a origem dos x.

O parametro $n = \frac{q \,.\, GP}{4d^2 \,.\, CQ} = \frac{q \,.\, AG}{4d^2 \,.\, BC} = \frac{r}{4d^2 \,.\, BC}$. Logo fendo conhecido o parametro do diametro, com a origem C do mefmo diametro, e o angulo MQC das coordenadas, facilmente fe conftruirá a parabola (367).

387 Por quanto a equaçaõ geral pertence á parabola quando $c^2 = 4de$, fegue-fe que todas as vezes que faltar o producto ut, deve neceffariamente faltar hum dos quadrados u^2 e t^2, para que a equaçaõ pertença á parabola; porque fendo entaõ $c = 0$, a equaçaõ $cc = 4de$ moftra, que d ou $e = 0$.

388 Se ambos os quadrados ſe acharem na equaçaõ, e faltar ut, a conſtrucçaõ (382) ſerá mais ſimples; porque neſte caſo $c = 0$; logo $KL = 0$ (*Fig.* 60, 61), e conſeguintemente BK ſerá hum diametro, cujas coordenadas ſeraõ parallelas aos u e t. Podemos tambem entaõ fazer deſaparecer o ſegundo termo em ordem a u ſem uſar de n, porque BD ou AG $\left(\frac{q}{2m}\right) = BC\ (n)$, e por conſequencia

$$u + \frac{q}{2m} = x.$$

Donde ſe ſegue, que no caſo preſente, alem das condições expoſtas (384), o angulo das coordenadas u e t deve ſer recto, para que a curva ſeja hum circulo.

389 Se houver ut na equaçaõ primitiva, e naõ aparecer outra potencia de u ſenaõ o quadrado depois de ſe fazer deſvanecer o ſegundo termo em ordem a t, entaõ naõ he neceſſario outra operaçaõ ſemelhante em ordem a u; mas nem poriſſo eſtamos diſpenſados de huma transformaçaõ, a qual conſiſte em ſuppor $u = \frac{lx}{n}$, ſendo $\frac{l}{n}$ huma fracçaõ, que ſe determinará de hum modo analogo ao que havemos enſinado (382), como abaixo moſtraremos.

390 Se dos tres termos t^2, ut, e u^2 faltar ſómente hum dos quadrados, a equaçaõ pertencerá ſempre á hyperbola, ou naõ exprimirá curva alguma; porque ſe for d ou $e = 0$, a quantidade cc ſerá ſempre poſitiva (384).

391 Finalmente ſe faltarem ambos os quadrados t^2 e u^2, iſto he, ſe a equaçaõ tiver a fórma

$gut + ht - ku - l = 0$, pertencerá á hyperbola entre as aſymptotas, como ſe vai a vêr na conſtrucçaõ ſeguinte.

Faça-ſe $t - \frac{k}{g} = y$; teremos a transformada $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$. Faça-ſe $u + \frac{h}{g} = x$; teremos $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, equaçaõ que pertence á hyperbola, cuja potencia (347) he $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$.

Conduzamos pois pela origem A (*Fig.* 63) dos u e t parallelamente a PM ou t, a linha AB $= \frac{k}{g}$, e depois por B a linha CBQ parallela a AP, teremos QM $= t - \frac{k}{g} = y$.

Produza-ſe AP para G até que ſeja AG $= \frac{h}{g}$, e tire-ſe GS parallela a PM, o ponto C de encontro com BQ ſerá o centro da hyperbola, cujas abſciſſas ſaõ as linhas CQ, e aſymptotas as linhas CQ, CS. Com eſtas e com a equaçaõ facilmente ſe deſcreverá a curva (354).

Se a equaçaõ naõ tiver os tres primeiros termos t^2, ut e u^2, pertencerá á linha recta, cuja conſtrucçaõ naõ tem difficuldade.

392 Aſſim, recapitulando o que temos dito, 1° toda a equaçaõ indeterminada do ſegundo gráo, ſe

ſe naõ ſe reſolve em dous factores do primeiro, exprime ſempre huma ſecçaõ conica, ou naõ exprime linha alguma poſſivel. 2º A curva he ellipſe, hyperbola, ou parabola, conforme for poſitivo, negativo, ou cifra o quadrado do coefficiente do producto ut das duas indeterminadas menos o quadruplo do producto dos coefficientes dos dous quadrados u^2 e t^2; e em particular póde ſer circulo no caſo de ſer negativo o producto, quando os coefficientes de u^2 e t^2 forem iguais entre ſi. 3º E para reduzirmos qualquer equaçaõ, que pertença a huma ſecçaõ conica, ás equações que havemos dado quando ſe tratou deſtas curvas, devemos praticar pelo modo que ſe enſinou (380, 386, 388, 389, e 391). Paſſemos a moſtrar o uſo das noſſas transformações.

Applicaçaõ á reſoluçaõ de alguns problemas indeterminados.

393 PRobl. I. *Achar a curva* DME (*Fig.*64) *tal que as diſtancias de cada hum dos ſeus pontos* M *a dous fixos* A *e* B *tenhaõ entre ſi a razaõ dada de* g : h.

Tire-ſe ſobre AB a perpendicular MP, e ſeja AP $= u$, PM $= t$, AB $= c$; ſerá BP $= u - c$.

Iſto ſuppoſto, os triangulos rectangulos APM BPM daõ AM $= \sqrt{(uu + tt)}$, e BM $= \sqrt{(uu - 2cu + cc + tt)}$. E como deve ſer AM : BM :: $g : h$, teremos $(g^2 - h^2)\,u^2 + (g^2 - h^2)\,tt - $

$2g^2cu$

$2g^2cu + g^2c^2 = o$; equaçaõ que pertence ao circulo (384).

Para a reduzirmos á fórma $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, basta ſuppor primeiramente $t = y$, e teremos $uu - \frac{2g^2cu}{g^2 - h^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - h^2} - yy$. Seja agora $u - \frac{g^2c}{g^2 - h^2} = x$; teremos $yy = \frac{h^2g^2c}{(g^2 - h^2)^2} - xx$. Comparando pois as duas equações, virá o valor do raio ou $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}$. Quanto á determinaçaõ do centro, que eſtá na linha AP, tome-ſe $AC = \frac{g^2c}{g^2 - h^2}$; ſerá $CP = u - \frac{g^2c}{g^2 - h^2} = x$. Deſcrevendo pois hum circulo do ponto C como centro e com o intervallo $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$, cada hum dos ſeus pontos M terá a propriedade de que ſe trata.

Podemos ainda mais facilmente achar o centro e o raio. Porque fazendo $y = o$ na equaçaõ $uu - \frac{2g^2cu}{g^2 - h^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - h^2} - yy$, teremos $u = \frac{g^2c}{g^2 - h^2} \pm \frac{ghc}{g^2 - h^2} = \frac{gc(g \pm h)}{g^2 - h^2}$, a qual dá $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, e $u = \frac{gc}{g - h} = AE$; logo a ſemidifferença ou $\frac{DE}{2}$ determinará o centro, e o raio CE.

394 Probl. II. *Sendo dada a linha* AR (*Fig.* 65) *achar fóra della todos os pontos* M, *tais que as rectas* MA,