ERRATAS.

Pag.	Linh.	Errat.	Emend.
14	18	*en*	*ſen*
82	4	12*MN*K	12*MNK.FG*
83	14	*mnk*	*mn*K
85	1 e 2	$-3y$	$-3x$
86	3	gravidaoe	gravidade
89	13	$\wedge$	γ
99	23	*AHB*K	$\wedge HBP$
130	30	Adx	$-Adx$
138	1	ſobre fundo	ſobre o fundo
151	20	mais a agua	mais agua
156	12	Xdt	Xdx
160	12	213	313
163	7	$H=$	$=H$
170	11	Q^2	G^2
179	19	$D:D$	$D:D'$
185	11	OK.2FO	OQ.2FO
194	37	$\sqrt{2}, \sqrt{3}$	$\sqrt{1{,}889}$ e $\sqrt{2{,}778}$
222	30	xy	Xx
ibid.	30 e 34	yXY	xXR
256	21	RA	RH
298	14	$\frac{\cos m^2}{\cos p^2}$	$\frac{\cos m^3}{\cos p^2}$
302	17	$2 \cos q\, \mathrm{sen}\, q$	$2 \cos q\, \mathrm{sen}\, q^2$
307	10	dM	$dM=$

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA
POR
M. BOSSUT

DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS de París, Examinador dos Ingenheiros &c. &c.

TRADUZIDO E ABBREVIADO do Francez.

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

1775

M.DCC.LXXV.

Por Ordem de Sua Mageſtade, e com Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abollir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quais os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita Abolliçaõ ficáraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta de Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para ra a ſobredita Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu o havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo, a eſte fim a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſo he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quais ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos da Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultra-marinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais Peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guar-

dar-

dar sem duvida, ou embargo algum; qualquer que elle seja, naõ obstante a sobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil setecentos sessenta e sinco, que tenho revogado ao sobredito fim na parte, que só respeita ás sobreditas impressoens; ficando para tudo o mais em seu vigor, e inteira validade. E este valerá como se passasse pela Chancellaria, posto que por ella naõ ha de passar; e o seu effeito haja de durar hum, e muitos annos; naõ obstantes as Ordenaçoens em contrario, as quais Hey por derogadas para este effeito sómente. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda em deseseis de Dezembro de mil setecentos setenta e tres.

REY.

Marquez de Pombal.

Alvará, porque Vossa Magestade pelos motivos nelle expressos: He servido transferir para a Universidade de Coimbra o Privilegio exclusivo para as impressoens dos Livros Classicos dos Estudos Mathematicos; havendo cessado

cessado o fim, com que antes fora Concedido, e Doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA

TABOA

Das materias que se contêm neste Tratado.

HYDROSTATICA

CAPITULO I.

CAPITULO II.

Theo-

CAPITULO III.

HYDRAU-

HYDRAULICA.

CAPITULO I.

CA-

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

C A-

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

CA-

CAPITULO VIII.

CAPITULO IX.

CAPITULO X.

TRATADO
DE
HYDRODYNAMICA.

DEFINIÇOENS, E NOÇOENS GERAIS.

I

A *HYDRODYNAMICA* em geral he a Sciencia, que tem por objecto as leis do Equilibrio, e do Movimento dos Fluidos. A parte della, que conſidera o equilibrio, chama-ſe *Hydroſtatica*; e a que trata do movimento, *Hydraulica*.

2 *Fluido* he o corpo, que ſe compoem de moleculas tenuiſſimas, independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o ſentido. Tal he o vinho, a agua, o mercurio, o ar, a chama &c.

3 Neſta definiçaõ ſuppomos os fluidos perfeitamente tais; mas phyſicamente fallando naõ ha nenhum que o ſeja. Sempre as partes de qualquer delles ſe unem entre ſi com certo gráo de adherencia, e tenacidade, que naõ he a meſma em todos, e que no meſmo fluido póde variar, em raſaõ do frio, do calor, e de outras cauſas phyſicas.

4 Alguns autores diſtinguem os liquidos dos fluidos, como a eſpecie do genero. Chamaõ fluidos aquelles, cujas partes cedem facilmente ao tacto, e naõ ſaõ ligadas entre ſi, como a areia, a cinza &c. E por liquidos entendem ſomente aquelles, cujas partes tem taõ grande mobilidade, e ſe equilibraõ pelo ſeu pezo de tal maneira, que ſendo em quantidade ſufficiente ſe derramaõ, e formaõ ſempre huma ſuperficie horizontal. Neſte tratado naõ fallaremos dos fluidos improprios, como he a areia, mas ſomente dos fluidos perfeitos, que indifferentemente chamaremos fluidos, ou liquidos.

5 Como havemos de fallar muitas vezes em *maſſa*, *volume*, *denſidade* &c, em poucas palavras fixaremos aqui a idea, que ſe deve ter deſtas quantidades.

6 A *maſſa* de hum corpo, ou ſeja ſolido, ou fluido,

he a quantidade de materia propria, de que elle ſe compoem. Eſta ſe conhece pelo pezo; deſorte que ſe hum corpo péza o dobro, triplo &c de outro, diremos que tem huma maſſa dupla, tripla &c.

Eſta proporcionalidade dos pezos com as maſſas he demonſtrada pela experiencia. Porque no vacuo todos os corpos deſcem com igual velocidade, e pelos principios da Mechanica ſe ſabe, que quando as velocidades de dous moveis ſaõ iguais, as forças motrizes ſaõ neceſſariamente proporcionais ás maſſas.

7 O *volume* de hum corpo tanto ſolido, como fluido, he o eſpaço que elle occupa. Eſte ſe determina pelas regras que a Geometria eſtabelece para a mediçaõ dos corpos.

8 Se todos os corpos foſſem perfeitamente maſſiços, ou ſe todos foſſem igualmente poroſos, era inutil diſtinguir a maſſa do volume. Mas todos ſaõ poroſos, e cada hum de maneira differente. Duas barras, por exemplo, huma de ouro, outra de prata, ambas exactamente da meſma figura e volume, naõ pézaõ igualmente, mas ſaõ os ſeus pezos, e conſeguintemente as maſſas proximamente como 19 para 10. Do meſmo modo hum pé cubico de mercurio, e outro de agua, tem maſſas muito deſiguais, pois a primeira he 14 vezes maior que a ſegunda proximamente. Conforme pois contém hum corpo mais ou menos maſſa em hum volume dado, ſe chama mais ou menos *denſo*.

9 Daqui reſulta a noçaõ da *denſidade*, que ſe deve conſiderar como a relaçaõ do numero das *medidas* da maſſa ao numero das *medidas* do volume, ou (que vem a ſer o meſmo) como *a maſſa comprehendida na unidade do volume.*

As medidas da maſſa ſaõ *libras*, *onças* &c, e do volume *pés cubicos*, *pollegadas cubicas* &c. Em cada eſpecie deſtas medidas deve tomar-ſe huma unidade fundamental, como a onça, por exemplo, para as maſſas, e a pollegada cubica para os volumes.

10 Logo ſe duas maſſas M, m, tiverem os volumes V, v, e as denſidades D, d, ſerá $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v}$, e conſeguintemente $M : m :: VD : vd$. Donde ſe vê, que *as maſſas ſaõ na raſaõ compoſta dos volumes e das denſidades.*

11 *Quando as maſſas ſaõ iguais, ſaõ as denſidades na raſaõ inverſa dos volumes*; porque entaõ temos $VD = vd$, e conſeguintemente $D : d :: v : V$.

12 He

12 He fácil de ver, que a densidade he huma quantidade puramente relativa, e que hum corpo naõ se chama denso senaõ pela comparaçaõ expressa, ou subentendida, que delle se faz com outro corpo. Assim deve entender-se que estes enunciados communmente recebidos, *a densidade he igual ao quociente da massa dividida pelo volume*, e *a massa he igual ao volume multiplicado pela densidade* se reduzem ás proporções que havemos referido.

13 Quando se considera o pezo de hum corpo simplesmente, sem attençaõ alguma ao seu volume, chama-se pezo absoluto, ou gravidade absoluta do mesmo corpo.

14 Mas muitas vezes he necessario conhecer o pezo de huma materia comprehendida em hum volume dado. Este pezo he o que se chama *gravidade especifica.* Donde se vê em geral, que o pezo especifico de hum corpo he a relaçaõ entre o numero das medidas do pezo absoluto, e o numero das medidas do volume, ou (que vem a ser o mesmo) *o pezo comprehendido na unidade do volume.*

15 Sendo pois dous corpos, que tenhaõ os volumes V, v, os pezos absolutos P, p, e as gravidades especificas G, g, teremos $G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v}$, e conseguintemente $P : p :: GV : gv$, isto he, *os pezos absolutos seraõ entre si na rasaõ composta dos volumes, e das gravidades especificas.*

16 *Se os pezos forem iguais, as gravidades especificas seraõ na rasaõ inversa dos volumes*; porque entaõ he $GV = gv$, e conseguintemente $G : g :: v : V$.

17 Daqui se entenderá o sentido de huma expressaõ, de que havemos de usar muitas vezes. Havendo de representar o pezo de hum corpo de volume conhecido, ou determinavel pelas condições de qualquer problema, reduziremos este volume a medidas conhecidas, por exemplo, a pés cubicos, e multiplicallo-hemos pelo pezo absoluto de hum pé cubico da mesma materia (pezo, que consideraremos como a sua gravidade especifica). Este producto dará evidentemente o pezo absoluto do corpo; e neste sentido diremos, que *o pezo absoluto he igual ao producto do volume multiplicado pela gravidade especifica.*

18 Como as massas saõ proporcionais aos pezos, está claro que as densidades saõ proporcionais ás gravidades especificas; porque as densidades saõ as massas comprehen-

didas em volumes iguais, e as gravidades especificas saõ os pezos comprehendidos tambem em volumes iguais.

19 Em tudo isto suppomos, que os dous corpos, que se compáraõ, estaõ na mesma latitude, ou ao menos no mesmo parallelo. Se a massa M estivesse no pólo, e m no equador, seria necessario fazer algumas mudanças nos resultados precedentes, reflectindo que a força centrifuga, que nasce da rotaçaõ do globo terrestre, faz os corpos $\frac{1}{288}$ menos pezados no equador do que nos pólos; e conseguintemente naõ será $M:m::P:p$, mas $M:m::P:p+\frac{p}{288}$ proximamente.

Do mesmo modo sendo D, d as densidades das massas M, m, e G, g as suas gravidades especificas tomadas huma no pólo e a outra no equador, isto he, os pezos respectivos de volumes iguais nos ditos lugares, teremos $D:d::G:g+\frac{g}{288}$.

20 Daqui se entenderá a cautela, que deve haver em naõ confundir a inercia, isto he, a resistencia que os corpos oppoem á sua mudança de estado, ou seja de quietaçaõ, ou de movimento, com a força da gravidade. A força de inercia he huma propriedade essencial á materia, cujo effeito se naõ póde suspender, nem alterar por meio algum; e a força da gravidade póde variar como temos visto, e ainda destruir-se inteiramente o seu effeito. He verdade, que ambas saõ proporcionais ás massas; mas a proporcionalidade da inercia com a massa he necessariamente verdadeira, e independente do lugar onde os corpos estaõ situados, e a proporcionalidade do pezo com a massa he de huma verdade puramente experimental, que póde naõ ser a mesma em differentes lugares, e circunstancias.

Tais saõ as noções gerais, com que os nossos Leitores se devem familiarizar. Naõ referimos aqui muitas proposições gerais sobre o equilibrio, e movimento, das quais havemos de usar; porque as tomaremos da Mechanica, ou as demonstraremos em seu lugar, se for necessario.

PRI-

PRIMEIRA PARTE,
OU
ELEMENTOS
DE
HYDROSTATICA.

21 A *Hydroſtatica*, como já diſſemos, tem por objecto as leis do equilibrio dos fluidos. Eſte equilibrio he produzido pela mutua oppoſiçaõ, e deſtruiçaõ das forças, que obraõ ou ſobre as partes meſmas dos fluidos, ou ſobre as paredes dos vaſos em que ſe contém, ou ſobre os corpos ſolidos mergulhados nelles. O exame de todos eſtes caſos ſerá a materia deſta Primeira Parte; e ſupporemos, que os fluidos ſaõ homogeneos, iſto he, que ſaõ compoſtos, em toda a ſua extenſaõ, de partes elementares ſemelhantes, e igualmente pezadas.

22 Os fluidos, em geral, podem dividir-ſe em duas eſpecies. A primeira he dos fluidos incompreſſiveis, como a agua, o vinho &c; e a ſegunda dos elaſticos, como o ar, a chama, o vapor da agua &c.

Sem examinar, ſe as experiencias pelas quais ſe eſtabelece a incompreſſibilidade, ou elaſticidade dos fluidos, ſaõ exactas ou naõ, obſervaremos que a natureza naõ poem limites perfeitamente determinados entre as differentes claſſes dos corpos. Ella naõ faz corpos perfeitamente duros, nem perfeitamente elaſticos; mas he muito vantajoſo eſtabelecer eſtas diſtinções, para deſcobrir com mais facilidade e clareza as propriedades, que dependem da incompreſſibilidade e elaſticidade, as quais na pratica ſe applicaráõ, como approximações mais ou menos exactas, conforme os corpos ſe chegarem mais ou menos para qualquer deſtas claſſes.

PRIN-

PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Do Equilibrio dos Fluidos.

23 *Quando huma massa fluida está em equilibrio, quaisquer que sejaõ as forças que sollicitaõ as moleculas de que ella se compoem, cada particula recebe huma pressaõ igual de todas as partes.*

Porque sendo todas as particulas independentes humas das outras, e perfeitamente moveis em todo o sentido, está claro, que se qualquer dellas fosse menos comprimida de huma parte que da outra, deveria necessariamente moverse para a parte da menor pressaõ, e naõ haveria equilibrio no systema, contra a supposiçaõ.

Este principio he por outra parte demonstrado pela experiencia; porque se em igual profundidade de hum fluido incluido em hum vaso, se fizer nas paredes huma abertura, á qual se applique huma tampa que embarace a sahida do fluido, a tampa será impellida por elle com a mesma força, quer seja horizontal a abertura, quer inclinada de qualquer maneira ao horizonte.

Attendida a adherencia reciproca, ou tenacidade das particulas, póde succeder physicamente, que subsista o equilibrio, ainda que algumas dellas naõ sejaõ carregadas igualmente de todas as partes. Mas esta desigualdade de pressaõ naõ póde ser, senaõ muito pequena; e o principio he rigorosamente verdadeiro nos fluidos perfeitos, como nós os consideramos aqui.

24 Reciprocamente está claro, que *tendo cada particula igual pressaõ de todas as partes, todo o systema deve estar em equilibrio.*

As leis particulares do equilibrio dos fluidos tanto incompressiveis, como elasticos, dependem deste principio geral, que acabamos de expôr. Podiamos deduzillas juntamente; mas para maior clareza consideraremos primeiro o equilibrio dos fluidos incompressiveis, e depois o dos elasticos.

CAPI-

CAPITULO I.

Do Equilibrio dos fluidos incompressiveis.

25 HE escusado definir em fórma os fluidos incompressiveis. Pela mesma palavra se entende, que huma quantidade determinada de hum fluido desta especie occupa sempre o mesmo espaço, naõ sendo susceptivel de contracçaõ, nem de expansaõ.

26 Os vasos, em que os licores se contém, podem ser solidos, ou flexiveis, isto he, podem ser tais que constantemente conservem a mesma figura pela firmeza e resistencia das paredes, ou indifferentes para tomarem a figura, que convem ao equilibrio das forças, que obraõ sobre o fluido. Quando dissermos *vaso*, sempre entenderemos solido, se expressamente naõ ajuntarmos *flexivel*, ou se pelo sentido do discurso naõ constar que tratamos de hum vaso dessa condiçaõ.

27 Se a todos os elementos iguais A, B, C &c (Fig. 1.) da superficie de huma massa fluida naõ pezada se applicarem perpendicularmente potencias iguais P, Q, R &c, he evidente que estas ficaráõ em equilibrio. Porque communicando todas livremente a sua acçaõ, e da mesma maneira a huma massa incompressivel, cujas partes saõ perfeitamente moveis para todas as partes, naõ ha rasaõ para que huma vença a outra.

28 O mesmo deve succeder, sendo os elementos A, B, C &c desiguais, mas respectivamente proporcionais ás potencias P, Q, R &c nelles applicadas. Porque sendo qualquer dos elementos B, C &c duplo, triplo, ou geralmente hum multiplo n do elemento A, poderemos considerar qualquer das potencias respectivas Q, R &c, como composta de duas, tres, ou geralmente de n potencias iguais a P, e applicadas cada huma a cada huma das partes dos elementos B, C &c iguais a A, e seremos reduzidos ao caso precedente.

29 Como a perfeita mobilidade das particulas communica livremente a acçaõ das potencias P, Q, R &c a todos os pontos da massa, está claro que huma molecula m, em qualquer lugar que esteja, sentirá a mesma pressaõ, como se estivesse na superficie, fazendo parte do elemento

to A. Confiderando-a pois tambem como huma pequena maſſa fluida, deve ter huma preſſaõ igual e perpendicular a cada hum dos pontos da ſua ſuperficie, para eſtar em equilibrio. Aſſim imaginando a ſua ſuperficie dividida em partes iguais, e ſuppondo que cada huma dellas he para o elemento A como q para r, ſerá a preſſaõ de qualquer deſtas partes repreſentada por $\frac{q}{r}P$.

30 Supponhamos qualquer licor naõ pezado, e metido em hum vaſo $ABCD$ fechado de todas as partes (Fig. 2.). Se lhe fizermos qualquer abertura X, e nella applicarmos a potencia P, eſtá claro que concebendo as paredes do vaſo divididas em certo numero de elementos, cada hum dos quais tenha com a abertura X huma raſaõ dada, a preſſaõ de cada hum eſtará com a potencia P na meſma raſaõ; porque as paredes do vaſo com a ſua reſiſtencia fazem as vezes das potencias Q, R, S &c (Fig. 1.).

31 Do meſmo modo, ſe no vaſo $ABCD$ (Fig. 3.) fizermos qualquer numero de aberturas X, M, N, ás quais ſe appliquem as potencias P, Q, R, de maneira que ſeja $P:Q:R::X:M:N$, eſtas potencias eſtaráõ em equilibrio (n. 28.). E ſe for $\frac{q}{r}$ a raſaõ de huma parte da ſuperficie de huma molecula m (Fig. 2, e 3.) comparada com a abertura X, a preſſaõ deſta parte ſerá repreſentada por $\frac{q}{r}P$ (n. 29.).

32 Examinemos agora, que ſuperficie deve tomar hum licor em equilibrio no vaſo $AMNE$ (Fig. 4.), ſendo deixado á acçaõ livre da gravidade. Supponhamos por hum momento, que he a ſuperficie curva $ABDE$, e tomemos nella qualquer particula B. Reſolvendo a ſua gravidade Bf em outras duas forças Bt, Bg na direcçaõ dos elementos contiguos da curva, ſerá neceſſario para haver equilibrio, que eſtas forças Bt, Bg ſejaõ iguais ás forças, que as particulas veſinhas exercitaõ contra a particula B, pelas direcçóes oppoſtas tB, gB. Por outra parte, naõ póde a particula B eſtar em equilibrio, ſem receber huma preſſaõ igual de todos os lados. Logo as forças Bt, Bg devem ſer iguais, e conſeguintemente o angulo tBg formado pelos

pelos dous elementos Bt, Bg da curva deve ſer dividido em partes iguais pela direcçaõ da gravidade. E como iſto deve ter lugar em todos os pontos da ſuperficie, he neceſſario que eſta ſeja horizontal, ou perpendicular á direcçaõ da gravidade. E em geral, *quaiſquer que ſejaõ as forças que ſollicitaõ as partes de hum fluido, ſempre a ſuperficie delle deverá cortar perpendicularmente as direcções das forças, que immediatamente actuaõ ſobre ella.*

33 Eſta propoſiçaõ he igualmente verdadeira, ainda que o licor ſe contenha em hum vaſo flexivel; porque aſſim que elle houver tomado a figura, que requer o equilibrio das forças applicadas ao fluido, naõ ha couſa que embarace o conſiderallo como ſolido, e terá lugar a meſma demonſtraçaõ.

34 Como as direcções da gravidade ſaõ ſenſivelmente parallelas, ſendo tomadas em pouca diſtancia, eſtá claro que a ſuperficie de hum licor em hum vaſo, em hum tanque &c, póde ſem erro algum ſenſivel tomar-ſe como huma ſuperficie plana. Se for porém de conſideravel extenſaõ, deverá tomar-ſe como parte de huma ſuperficie esferica, ou esferoidica, conforme ſe conſiderar o globo terreſtre como huma esfera, ou como hum esferoide.

35 Formando pois a ſuperficie AE hum plano horizontal (Fig. 5.), ſupponhamos que qualquer porçaõ BCD do fluido ſe congela, ou endurece, ſem mudar de lugar nem de volume. He evidente, que com iſſo naõ ſe altéra em nada o equilibrio do reſto do fluido; e por conſeguinte, que as ſuperficies parciais AB, DE ficaráõ ſempre no meſmo plano horizontal. Logo, ſe em hum tubo encurvado KMO (Fig. 6.) ſe lançar qualquer licor, depois de ſe pôr em equilibrio eſtaraõ ſempre de livel as ſuperficies AB, DE; porque naõ ha couſa que embarace o conſiderar o licor nelle contido, como a porçaõ do fluido $ABCDEM$ (Fig. 5.). E em geral, *Se dous quaiſquer vaſos ſe communicarem entre ſi de qualquer maneira, os licores da meſma eſpecie, que nelles eſtiverem, ſe poraõ ſempre ao livel.*

Daqui ſe entenderá a raſaõ, porque a agua dos poços, que ſe abrem ás margens de hum rio ſe poem ao livel delle; porque a agua filtra pela terra, e eſtabelece canais ſubterraneos de communicaçaõ entre o rio, e os poços.

36 He

36 He de advertir, que a propoſiçaõ precedente tem huma excepçaõ no eſtado phyſico dos fluidos. Quando hum de dous tubos communicantes tem hum diametro muito pequeno, ſendo o do outro muito mais conſideravel, naõ ſe poem os licores de livel. Mas a agua, o vinho, o azeite, e a maior parte delles ſobem a maior altura no tubo capillar do que no outro, e o azougue pelo contrario fica mais a baixo.

Eſte phenomeno ſingular tem dado muito que fazer aos Phyſicos; mas nenhum dos ſyſtemas, que ſe tem imaginado para dar a raſaõ, ſatisfaz perfeitamente. Naõ me detenho pois em os expôr, ſendo principalmente o meu objecto dar a Theorica Mathematica do equilibrio dos fluidos conſiderados no eſtado de fluideza perfeita, preſcindindo de todas as cauſas phyſicas e exteriores, que podem alterar as conſequencias, que reſultaõ deſta hypotheſe.

37 Sendo igualmente comprimida de todas as partes huma particula *m* (Fig. 7.) de hum fluido em equilibrio, ſujeito unicamente á acçaõ da gravidade, ſupponhamos que a maſſa inteira do fluido, ſe torna ſolida, exceptuando ſomente a colunna *om*. He manifeſto, que a particula *m* ficará ſempre no meſmo eſtado de compreſſaõ. Mas quando he ſomente fluida a colunna *om*, he evidente que a particula *m* ſuſtenta o pezo inteiro della; logo a medida da preſſaõ, que padece a meſma particula em todos os caſos, he o pezo abſoluto da colunna *om* que verticalmente inſiſte ſobre ella.

38 Imaginemos, que huma curva qualquer *FmQSH* (Fig. 8.) toca a particula *m* da banda da parede *AM*, e que ſe tornaõ ſolidas as porções do fluido *AFmQm*, *EHSN*, ſem mudar de lugar nem de volume; igualmente he manifeſto, que a particula *m* ficará no meſmo eſtado de compreſſaõ. Logo em qualquer vaſo *FQSH* (Fig. 9.) qualquer ponto *m* das ſuas paredes he comprimido pelo fluido com huma força igual ao pezo abſoluto do pequeno fio vertical *om* terminado na ſuperficie do fluido, produzida ſe for neceſſario; porque póde o licor do vaſo *FQSH* (Fig. 9.) conſiderar-ſe como a porçaõ fluida *FQSH* (Fig. 8.), ſuppondo que as porções *AFmQM*, *EHSN* ambas ſe tornáraõ ſolidas.

39 Donde ſe ſegue, que a preſſaõ de qualquer parte infinitamente pequena *my* das paredes do vaſo *FGSH* (Fig.

(Fig. 9.) he na rasaõ composta do numero das moleculas que a cobrem e da altura vertical om, que póde suppor-se a mesma para todos os pontos do elemento my. Assim designando por p o pezo especifico do fluido, será a pressaõ do elemento my representada por $p.om.my$ (n. 17.).

40 Supponha-se agora (Fig. 10.) a superficie finita $fnr = S$, e qualquer altura $ft = y$; e teremos por formula da pressaõ $p\int y\,dS$. Porém, sendo G o centro de gravidade da superficie fr, consta da Statica que $\frac{\int y\,dS}{S} = GO$. Logo $p\int y\,dS = p.S.GO$. Logo *a pressaõ que padece qualquer parte da superficie de hum vaso em virtude da acçaõ de qualquer licor em equilibrio, e sujeito unicamente á força da gravidade, he igual ao pezo absoluto de huma colunna do mesmo fluido, que tenha por base a mesma parte do vaso convertida em superficie plana, se for necessario, e por altura a vertical conduzida do seu centro de gravidade para a superficie horizontal do fluido.*

41 Daqui se infere, que *as pressoens das bases planas de quaisquer vasos, cheios de hum mesmo liquido, saõ entre si na rasaõ composta das ditas bases e das alturas do liquido.* E por conseguinte, se quaisquer vasos (Fig. 11. 12. e 13.) tiverem os fundos iguais, e sustentarem colunnas igualmente altas do mesmo fluido, receberáõ nellas pressoens iguais.

42 Assim póde succeder, que a pressaõ do fundo de hum vaso, e o pezo do fluido nelle contido sejaõ muito differentes. No vaso cylindrico da Fig. 11, a pressaõ do fundo he igual ao pezo total do liquido; mas no vaso conico da Fig. 12, he menor; e no da Fig. 13, maior.

Quando se trata de levantar verticalmente hum vaso cheio de agua, ou de o sustentar em hum plano inclinado, naõ deve attender-se á pressaõ que o fluido faz contra as paredes delle, mas ao pezo total do vaso e do fluido nelle contido, como se tudo fosse huma massa solida. Por muito facil que seja esta reflexaõ, julguei necessario fazella aqui, porque o Autor de huma Obra muito espalhada se enganou grosseiramente neste ponto.

43 Seja por exemplo, AM a *adufa* ou *comporta* rectangular e vertical de hum *caneiro*, ou de hum *dique*

(Fig.

(Fig. 14.), a qual ſuſtenta a preſſaõ da maſſa de aguas eſtagnadas AMO, cuja extenſaõ horizontal MO póde ſer grande ou pequena como ſe quizer, porque iſſo he abſolutamente indifferente em quanto ao effeito da preſſaõ. Seja G o meio, ou o centro de gravidade do rectangulo, e A o ſeu lado horizontal; e teremos a quantidade da preſſaõ que elle ſuſtenta $p.A.AM.GM = p.A.\frac{AM^2}{2}$.

Se $A = 3$ pés, e $AM = 12$ pés, teremos $\frac{1}{2} A.AM^2 = 216$ pés cubicos; e porque hum pé cubico de agua doce péza 70 libras proximamente, ſerá a preſſaõ, que buſcamos, $\frac{1}{2} p.A.AM^2 = 15120$ libras.

Com a meſma facilidade ſe determinaria a preſſaõ, no caſo de naõ ſer a adufa vertical, ou de ter qualquer outra figura que naõ foſſe a rectangular.

44 Se ſobre a ſuperficie horizontal AE de hum licor $AMNE$ (Fig. 15.), ſe puzer huma tampa movediça, carregada no meio com hum pezo Q, e ſe em qualquer lugar das paredes do vaſo ſe fizer huma abertura fr, á qual ſe applique huma pequena tampa, ou hum embolo, para ter maõ no fluido; eſtá claro 1°, que a preſſaõ do pezo Q ſe póde conſiderar como dividida em huma infinidade de potencias, que comprimem perpendicularmente a ſuperficie AE, e diſtribuem a ſua acçaõ a todos os pontos do fluido, donde reſultará na ſuperficie fr huma preſſaõ repreſentada por $\frac{fr}{AE} Q$ (n.28.). 2°, que em virtude da gravidade do fluido a ſuperficie fr ſerá além diſſo comprimida perpendicularmente com huma força igual ao pezo de huma colunna do meſmo fluido, que tenha fr por baſe, e por altura a diſtancia GE do centro de gravidade de fr até o livel do fluido (n. 40.). Aſſim deſignando eſta força por R, deverá ſer a potencia applicada ao embolo para ter maõ no licor $P = \frac{fr}{AE} Q + R$.

45 Supponhamos hum vaſo fechado de todas as partes $AMNE$ (Fig. 16.), cheio de hum licor pezado. Eſtando

do a tampa ſuperior horizontal, ſe nella fizermos as aberturas fr, gt, e lhes applicarmos os pezos P, Q, de maneira que ſeja $P : Q :: fr : gt$, eſtes dous pezos eſtaraõ em equilibrio (n. 31.); porque obraõ do meſmo modo tanto na ſuperficie como no interior do fluido, ſem haver embaraço algum da parte da gravidade propria delle.

46 Agora em lugar de applicarmos os pezos P, Q ás aberturas fr, gt, ſupponhamos que eſtas ſervem de baſes a duas columnas $fxyr$, $gzut$ de licores differentes (Fig. 17.), cujas gravidades eſpecificas ſejaõ P, p. Levantando dos centros de gravidade das baſes para o livel dos licores as verticais GO, TS, ſerá a preſſaõ do licor $fxyr$ ſobre a baſe fr repreſentada por $P.fr.GO$, e a do licor $gzut$ ſobre a baſe gt por $p.gt.TS$. Logo para haver equilibrio deverá ſer $P.fr.GO : p.gt.TS :: fr : gt$, e conſeguintemente $P.GO = p.TS$. Donde concluiremos, que as *alturas de quaiſquer licores equilibrados em vaſos communicantes ſaõ na raſaõ inverſa das ſuas gravidades eſpecificas.*

Por exemplo, ſe a columna $fxyr$ for de agua, e $gzut$ de mercurio, ſerá $GO : TS :: 14 : 1$. O mercurio he compreſſivel, e dilatavel pelo frio, e calor; mas aqui preſcindimos deſta qualidade, e tomamos a ſua gravidade eſpecifica que correſponde ao ar temperado, e que tem o meio entre as outras.

47 Para determinarmos agora as condiçoens gerais, que devem ter lugar, para que hum fluido ſe ponha em equilibrio pelo proprio pezo em hum vaſo flexivel, pezado, e inextenſivel, conſideremos huma ſecçaõ vertical $AMNOPB$ da figura, que o vaſo ha de tomar (Fig. 18.), e ſejaõ MN, NO, OP tres elementos da curva conſecutivos, e iguais entre ſi. Eſtando o fluido em equilibrio, e havendo tomado o vaſo a figura competente, podemos ſuppor os pontos M, P como fixos, e preſcindindo do reſto da curva conſiderar $MNOP$ como hum polygono funicular atado aos dous pontos fixos M, P, ſendo applicadas a cada hum dos angulos N, O duas forças, huma vertical NS, ou Os, que repreſenta o pezo do elemento MN, ou ON, e a outra NR, ou Or, que repreſenta a preſſaõ do fluido, a qual como he ſempre perpendicular á curva deve dividir em duas partes iguais o angulo MNO, ou NOP formado por dous elementos contiguos. Das duas forças

NS,

NS, NR applicadas ao angulo N resulta a força unica NQ, e combinando a força NQ com a tensaõ NV do cordaõ MN deverá resultar huma força NT na direcçaõ de ON. Do mesmo modo resultará das forças applicadas ao angulo O huma força unica Ot na direcçaõ de NO.

Isto posto, he evidente, que para haver equilibrio he necessario que as forças NT, Ot directamente oppostas, sejaõ iguaes. Assim naõ falta mais que achar as expressoens dellas, e igualallas entre si.

Tirando pois do ponto Q para NS a perpendicular QE, teremos $EQ = SQ\,sen\,ESQ = NR\,sen\,RNS$, $SE = NR.\cos RNS$, $NE = NS + NR.\cos RNS$, $sen\,ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR.\,sen\,RNS}{NQ}$, $\cos ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS+NR.\cos RNS}{NQ}$, $sen\,TQN = sen\,(MNG + ENQ) = sen\,MNG.\cos ENQ + \cos MNG.\,sen\,ENQ = \frac{sen\,MNG\,(NS + NR.\cos RNS)}{NQ} + \frac{\cos MNG.NR.\,sen\,RNS}{NQ}$. Mas $TN = \frac{NQ.\,sen\,TQN}{sen\,MNT}$; logo pondo nesta equaçaõ o valor de $sen\,TQN$, teremos $TN = \frac{sen\,MNG\,(NS + NR.\cos RNS)}{sen\,MNT} + \frac{\cos MNG.NR.\,sen\,RNS}{sen\,MNT}$ $= \frac{NS.\,sen\,MNG + NR\,sen\,(MNG + RNS)}{sen\,MNT} =$ $\frac{NS.\,sen\,MNG + NR}{sen\,MNT}$, por ser $MNG + RNS = MNZ$ = a hum angulo recto. Do mesmo modo acharemos $Ot = \frac{Os.\,sen\,POI + Or}{sen\,POt}$. Logo teremos por condiçaõ do equilibrio a equaçaõ seguinte

$$\frac{NS.\,sen\,MNG + NR}{sen\,MNT} = \frac{Os.\,sen\,POI + Or}{sen\,POt};$$

48 Tomando pois o eixo horizontal AB, e conduzindo as ordenadas MH, NH', OH'', seja $AH = x$, AH' $= x'$

$= x'$, $AH'' = x''$, $HM = y$, $H'N = y'$, $H''O = y''$, o elemento $MN = ds$ (que he constante pela construcção), o raio osculador no ponto $N = R$, e no ponto $O = R'$. Seja tambem a area da secção perpendicular á corda considerada como cylindrica $= a^2$, a largura da superficie na qual se exercita a pressão do fluido $= b$, e a força da gravidade $= g$. Assim teremos $NR = g.by'ds$, $NS = g.a^2 ds$, $Or = g.by''ds$, $Os = g.a^2 ds$, *sen* $MNG = \frac{dx}{ds}$, *sen* $MNT = \frac{ds}{R}$, *sen* $POI = \frac{dx''}{ds}$, *sen* $POt = \frac{ds}{R'}$; e substituindo estes valores, a equação precedente se reduzirá á fórma seguinte

$$\frac{R(gby'ds + ga^2 dx)}{ds} = \frac{R'(gby''ds + ga^2 dx'')}{ds}:$$

Porém $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx) = dx + 2ddx + d^3x$, $y' = y + dy$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$, $R' = R + dR$. Logo omittindo os termos que se destroem, e desprezando os infinitamente pequenos da terceira ordem, teremos $2a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = o$, ou $a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = -a^2 Rddx$, ou (metendo no segundo membro em lugar de R o seu valor $\frac{ds\,dy}{ddx}$), $a^2 Rddx + a^2 dRdx + bRdyds + bydRds = -a^2 dsdy$, cujo integral he $a^2 Rdx + byRds = Ads - a^2 yds$. Agora eliminando R, teremos $a^2 dxdyds + a^2 ydsddx = Adsddx - bydyds^2$, cujo integral he $a^2 ydxds = Bds^2 + Adxds - \frac{1}{2} by^2 ds^2$, donde finalmente se tira a equação differencial da curva

$$dx = \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[(2a^2 y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}}.$$

Esta equação se integra em geral pelas quadraturas, e a integração introduzirá huma terceira constante C. Para a determinação dellas observaremos: 1°, que $y = o$ dá, ou póde sempre dar $x = o$, porque podemos suppor a origem da curva onde quizermos. 2°, que os pontos extremos

tremos

ff.

tremos A e B saõ dados de posiçaõ. 3°, que o comprimento da corda $A M B$ he dado, ou que a curva faz em A com o eixo $A B$ hum angulo dado, ou que satisfaz a outra qualquer condiçaõ equivalente.

49 Supponhamos que $A = o$, e $B = o$. Neste caso acharemos $x = C \pm \sqrt{\left(\frac{4 a^4}{b^2} - yy\right)}$, equaçaõ que pertence ao circulo.

Sendo $a^2 = o$, ou suppondo que a curva AMB naõ tem pezo algum, será $x = C + \int \frac{(B - y^2) d y}{\sqrt{[4 A^2 - (B - y^2)^2]}}$, que he a equaçaõ da *Lintearia* commua.

E sendo $b = o$, ou suppondo que o liquido naõ he pezado, será $x = C + \int \frac{B d y}{\sqrt{[(y - A)^2 - B^2]}}$, que he a equaçaõ da *Catenaria*.

50 Considerando agora huma secçaõ horizontal do vaso flexivel (Fig. 19.), he evidente que as forças NS, $O s$ saõ nullas (Fig. 18.), e que y', y'' ou as alturas do fluido saõ todas iguais. Assim teremos $R' = R$, ou $d R = o$, e conseguintemente a figura de qualquer curva horizontal, comprimida lateralmente por hum fluido será sempre circular. Donde concluiremos, que enchendo-se de licor hum vaso prismatico vertical, cujas paredes sejaõ perfeitamente flexiveis, deverá tomar a figura de hum cylindro recto.

51 Na mesma secçaõ horizontal (Fig. 19.), está claro que a força $N T$ exprime a tensaõ do elemento $N O$, e $N R$ a pressaõ do fluido. Porém $N T = g b y' R$, $N R = g b y' d s$, e $\int N R = g b y' s$; logo $\int N R : NT :: s : R$, isto he, será a pressaõ total que o fluido exercita contra a circumferencia $A M N O P$ para a tensaõ della em qualquer dos seus pontos, como a mesma circumferencia para o raio $C N$.

52 Sejaõ $A B C D$, $a b c d$ (Fig. 20. e 21.) dous cylindros rectos, ou inclinados, os quais porém tenhaõ as bases horizontais, cheios de dous licores differentes, cujas gravidades especificas sejaõ P, p, e as alturas dos licores $A B$, ab. As pressoens, que os fluidos faraõ contra as circumferencias das bases $B M N C$, $b m n c$ seraõ representadas

presentadas por $P.AB.BMNC$, e $p.ab.bmnc$ (n. 37). Logo, sendo F, f as tensoens das duas circumferencias, teremos $P.AB.BMNC : F :: BMNC : BH$, e $F = P.AB.BH$. Do mesmo modo no outro cylindro acharemos $f = p.ab.bb$; logo será $F : f :: P.AB.BH : p.ab.bb$, isto he, *as tensoens das duas circumferencias seraõ entre si na rasaõ composta das alturas dos licores, das suas gravidades especificas, e dos raios das mesmas circumferencias.*

53 Suppondo que as duas curvas $BSERKM$, $bserkm$ (Fig. 22. e 23.) saõ os aneis elementares dos dous cylindros, imaginemos que elles se compoem de huma infinidade de filetes circulares $XYVZ$, $xyvz$. He evidente que as resistencias, que os tubos oppoem á ruptura, segundo as espessuras BS, bs, saõ na rasaõ composta do numero dos filetes, e da tenacidade da materia de que elles saõ formados. Assim chamando as resistencias R, r, as espessuras E, e, as tenacidades T, t, teremos $R : r :: ET : et$. Porém para haver equilibrio, devem as resistencias ser iguais ás forças F, f; logo, representando por H, h as alturas dos licores, e por D, d os diametros das bases dos dous cylindros, teremos $ET : et :: \frac{P.HD}{2} : \frac{p.hd}{2}$, e consequintemente $E : e :: \frac{P.HD}{T} : \frac{p.hd}{t}$, isto he, *seraõ as espessuras dos cylindros na rasaõ composta da directa das gravidades especificas dos licores, das suas alturas, dos diametros dos cylindros, e da inversa das tenacidades das materias de que forem feitos.*

54 Daqui se vê, que conhecendo as tenacidades das differentes materias, de que os tubos se fazem, e sabendo por huma experiencia immediata a espessura que deve ter hum tubo dado para resistir ao pezo de hum fluido dado, por huma simples proporçaõ se póde determinar a espessura de qualquer outro tubo. Ha muitos meios de examinar as tenacidades de qualquer materia. O mais simples he buscar o pezo que basta para quebrar hum fio dessa materia de grossura dada. M. Mariotte fez sobre este ponto algumas experiencias, que se podem ver no seu *Tratado do movimento das aguas.*

EXEMPLO I. *Determinar a espessura de hum tubo de chum-*

 bo

bo de 6 pollegadas de diametro, que ha de ſuſtentar o esforço de huma columna de agoa de 100 pés de altura.

Conforme huma experiencia de *M.* Parent, hum tubo de chumbo de 12 pollegadas de diametro deve ter 6 linhas de eſpeſſura para ſuſtentar verticalmente huma columna de agua de 60 pés de altura, ſem arrebentar. Aſſim chamando x a eſpeſſura procurada, teremos $60.12 : 100.6 :: 6^{\text{linh.}} : x = 5$ linhas.

Exemplo II. *Determinar a eſpeſſura, que deve ter hum tubo de cobre de 4 pollegadas de diametro, para ſuſtentar huma columna de mercurio de 30 pés de altura.*

A tenacidade do chumbo he para a do cobre como 1 para 28 proximamente, e a gravidade eſpecifica da agua para a do mercurio como 1 para 14. Aſſim, continuando a ſervirnos da experiencia de M. Parent, e chamando x a eſpeſſura procurada, teremos $\frac{1.12.60}{1} : \frac{14.4.30}{28} :: 6^{\text{linh.}} : x$

$= \frac{1}{2}$ linha.

Applicaçaõ dos principios do equilibrio dos fluidos á determinaçaõ da figura da Terra.

55 ATé agora conſiderámos, que os fluidos incompreſſiveis eraõ por toda a parte da meſma denſidade, e que eſtavaõ ſituados na ſuperficie da terra, onde a gravidade ſe póde tomar como huma força conſtante, que obra por direcçoens ſenſivelmente parallelas entre ſi. Mas ha hum ramo de Hydroſtatica muito amplo e importante, que tem por objecto a figura da terra, no qual ſe devem conſiderar as leis do equilibrio dos fluidos em hum ponto de viſta mais geral. A gravidade, que obra ſobre as partes de hum fluido, póde variar de quantidade, e de direcçaõ; e o fluido, poſto que incompreſſivel, póde naõ ter em toda a parte a meſma denſidade.

56 Os primeiros Geometras, que pela theorica procuráraõ determinar a figura da terra, conſiderando a extenſaõ immenſa dos mares, a ſua profundidade e communicaçaõ univerſal, a pouca elevaçaõ das mais altas montanhas acima do livel do mar, em comparaçaõ do raio terreſtre &c, natu-

naturalmente foraõ conduzidos a penſar, que a terra na ſua origem foi huma maſſa fluida, que depois ſe endureceu em parte, e que conſeguintemente devia tomar a figura, que requer o equilibrio dos fluidos. Do meſmo modo ſe diſcorreu a reſpeito dos outros planetas, e o problema geral da figura dos aſtros ſe reduzio a eſte: *Dada a lei da gravidade, que obra ſobre as partes de hum planeta fluido, achar a figura que elle deve tomar, para ſe pôr em equilibrio.*

57 Para o reſolver, M. Huyghens empregou o principio acima eſtabelecido e demonſtrado, que *eſtando huma maſſa em equilibrio, a ſua ſuperficie deve ſer por toda a parte perpendicular á direcçaõ da gravidade.* Porém Newton ſervio-ſe deſte outro principio, que *eſtando hum fluido em equilibrio, duas colunnas quaiſquer conduzidas da ſuperficie ao centro fazem equilibrio entre ſi, independentemente do reſto da maſſa.* Eſtes principios ſaõ ambos igualmente verdadeiros; mas o primeiro eſtabelece o equilibrio ſómente na ſuperficie, e o ſegundo no interior da maſſa. Aſſim naõ baſtaõ ſeparadamente, para determinar a figura de hum planeta.

58 Procurando M. Bouguer por hum e outro (*Mem. de l'Acad.* 1734) a figura de hum meridiano terreſtre, e achando que em muitas hypotheſes de gravidade naõ davaõ a meſma curva, concluio que entaõ naõ havia equilibrio, e que hum planeta naõ podia tomar huma figura permanente, ſenaõ quando ambos os principios concordaſſem em dar huma meſma curva para o meridiano. Mas M. Clairaut demonſtra (*Fig. de la terre* p. 31) que ſe daõ caſos, em que ambos os principios concordaõ em dar a meſma curva, ſem haver equilibrio.

59 M. Maclaurin na ſua Obra *ſobre o fluxo e refluxo do mar*, que ganhou hum dos premios da Academia em 1740, tomou hum principio mais geral que o de Newton, o qual ſe deriva immediatamente da igualdade de preſſaõ dos fluidos, e vem a ſer, que *duas colunnas conduzidas da ſuperficie para qualquer ponto do fluido fazem mutuamente equilibrio entre ſi.* Donde ſe ſegue em geral, como tem demonſtrado M. d'Alembert no ſeu *Enſayo ſobre a reſiſtencia dos fluidos*, que *eſtando huma maſſa fluida em equilibrio, qualquer canal curvilineo terminado de huma e outra parte na ſuperficie, ou tambem qualquer canal fechado, deve eſtar em equilibrio.*

60 Havendo M. Clairaut adoptado efte principio no feu Tratado *da figura da terra*, em confequencia delle propoem o methodo feguinte, para fe conhecer fe o equilibrio he compativel com qualquer hypothefe dada de gravidade.

Seja AQN (Fig. 24.) huma maffa fluida em equilibrio, e OM hum canal fechado de qualquer figura. Tendo tomado hum eixo fixo CP, e conduzido a ordenada MP, todas as forças que follicitaõ o ponto M fe poderáõ reduzir fempre a duas, huma perpendicular, e outra parallela a CP. Supponhamos a primeira $= P$, a fegunda $= Q$, $CP = x$, $PM = y$, e conduzindo mp infinitamente vezinha de MP, e mr perpendicular a MP, ferá facil de ver que a força P obra fobre o ponto M na direcçaõ do elemento Mm com hum esforço reprefentado por $\frac{P.rM}{Mm}$, e confeguintemente a acçaõ fobre todos os pontos de Mm ferá $\frac{P.rM}{Mm} Mm = P dy$. Do mefmo modo fe achará, que a acçaõ da força Q fobre todos os pontos de Mm pela direcçaõ Mm he $Q dx$. Logo $Pdy + Q dx$ he a força total elementar, que obra fobre o elemento Mm, fegundo a fua propria direcçaõ, e confeguintemente $\int(P dy + Q dx)$ ferá o pezo do canal OM. E porque deve haver equilibrio, feja qual for a figura do canal, he neceffario que o integral precedente fe poffa achar, fem conhecer a relaçaõ entre x e y; logo $P dy + Q dx$ deve fer huma expreffaõ differencial completa. *Affim*, concluio M. Clairaut, *quando a lei da gravidade for tal, que a expreffaõ $P dy + Q dx$ feja differencial completa, haverá neceffariamente equilibrio no fluido.*

61 Mas nem efta condiçaõ he baftante, como M. d'Alembert tem moftrado no volume quinto dos feus *Opufculos Mathematicos*. Appliquemos o feu raciocinio a hum exemplo muito fimples.

Seja OM hum canal circular defcrito do centro C com o raio CO, e feja cada ponto M follicitado por huma força Φ reciprocamente proporcional ao raio CM, pela direcçaõ MV perpendicular ao mefmo raio CM. Nefte ca-

fo

ſo ſerá $P = \frac{CP}{CM} \varphi = \frac{CP}{CM^2} = \frac{x}{xx+yy}$, e $Q = \frac{y}{xx+yy}$.

Por conſeguinte ſerá $\frac{y\,dx - x\,dy}{xx+yy}$ o pezo elementar de OM (pomos o final −, porque creſcendo x diminue y). Mas eſta differencial he completa, porque he a de hum angulo, cuja tangente he $\frac{x}{y}$; logo deveria haver equilibrio. He porém evidente, que as forças applicadas a todos os pontos M devem produzir huma corrente perpetua no canal; logo naõ he ſufficiente o theorema de M. Clairaut.

62 Ha muitos outros caſos ſemelhantes ao que acabamos de examinar. Donde concluiremos em geral, que para haver equilibrio em huma maſſa fluida he neceſſario naõ ſómente que $P\,dy + Q\,dx$ ſeja huma expreſſaõ differencial completa, mas tambem que chamando dz o elemento de qualquer canal fechado, e P' a força que obra na direcçaõ delle, ſeja $\int P'\,dz = 0$ quando o angulo que correſponde a z, e que tem o vertice dentro do canal, for de 360°. He logo neceſſario, que o integral de $P\,dy + Q\,dx$ naõ dependa da rectificaçaõ, nem da quadratura de huma curva oval; porque de outra ſorte poderia ſucceder, que em qualquer canal fechado naõ houveſſe equilibrio, mas huma corrente perpetua. Veja-ſe M. d'Alembert *Opuſc. Math. Tom. V. pag.* 12.

63 Applicando immediatamente o principio da igualdade de preſſaõ ao problema da figura dos aſtros, he facil de achar a figura, que deve tomar hum planeta, para ſe pôr em equilibrio, quando a lei da gravidade ſe dá directamente. Agora moſtraremos a applicaçaõ deſte principio a hum caſo, que comprehende muitos outros.

Seja $ABDE$ (Fig. 25.) huma maſſa fluida homogenea, cujas partes ſaõ attrahidas para o centro C por huma lei dada, e que além diſſo gira ao redor do eixo AD; de maneira, que cada particula M além da força da gravidade experimenta tambem a da força centrifuga, que he proporcional, como ſe ſabe, á diſtancia MP do ponto M ao eixo AD. Primeiramente vemos, que a ſuperficie $ABDE$ deve ſer em todos os pontos perpendicular á direcçaõ da reſultante da força central e da força centrifuga; reſultante, te, que faz neste caso o officio da gravidade. Depois imaginando que o planeta se compoem de huma infinidade de camadas de livel, como $KHQT$, vemos tambem que o fluido total estará em equilibrio, quando cada huma das camadas o estiver, e que para estar cada huma dellas em equilibrio he necessario, que seja igualmente comprimida em todos os seus pontos.

Supponhamos pois $CP = x$, $PM = y$, a força central $= \Phi$, funçaõ de x e y, e a pressaõ no ponto $M = p$, funçaõ tambem de x e y. Supponhamos mais, que em huma distancia dada a he a força centrifuga $= f$. Assim teremos $dp = Mdx + Ndy$, sendo M e N funçoens de x e y, tais que dp seja huma differencial completa, porque de outra sorte naõ haveria equilibrio. E considerando a porçaõ de fluido que está em M, como hum pequeno rectangulo $Mmrn$, cuja base $Mn = dx$, e a altura $Mm = dy$, está claro que Mdx exprime o excesso da pressaõ em cada ponto de nr sobre a pressaõ em cada ponto de Mm, e que Ndy he o excesso da pressaõ em cada ponto de mr sobre a pressaõ em cada ponto de Mn. Logo a pressaõ total do elemento $Mmrn$ na direcçaõ nM será $Mdx \cdot dy$, e na direcçaõ mM será $Ndy \cdot dx$.

Resolvamos a força central Φ em outras duas, huma dirigida por Mn, e a outra por Mm; e observando que a massa do elemento he $dxdy$, será a sua força motriz absoluta pela direcçaõ Mn representada por $-\dfrac{\Phi x}{\sqrt{(xx+yy)}} \cdot dxdy$, e pela direcçaõ Mm por $-\left(\dfrac{\Phi y}{\sqrt{(xx+yy)}} - \dfrac{fy}{a}\right) dxdy$. Mas, para haver equilibrio, he necessario que estas duas forças sejaõ iguais, cada huma a cada huma das pressoens correspondentes. Logo teremos $M = -\dfrac{\Phi x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, e $N = -\dfrac{\Phi y}{\sqrt{(xx+yy)}} + \dfrac{fy}{a}$. E conseguintemente $dp = -\dfrac{\Phi(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}} + \dfrac{fydy}{a}$, e $p = A + \dfrac{fyy}{2a} -$

$\int\Phi$

$\int \frac{\varphi(xdx+ydy)}{\sqrt{(xx+yy)}}$; quantidade, que deve ser constante em toda a extensaõ de huma camada.

64 Para applicarmos esta soluçaõ a hum exemplo, supponhamos que a força φ he proporcional á distancia do centro, e que na distancia dada a he $=F$. Teremos entaõ $\varphi = \frac{F\sqrt{(xx+yy)}}{a}$, e conseguintemente $p = A + \frac{fyy}{2a} - \frac{F(xx+yy)}{2a} =$ const. Esta equaçaõ dará huma linha recta, huma ellipse, ou huma hyperbola, conforme a rasaõ que houver entre F e f. Examinemos o caso de $F > f$.

He evidente, que na primeira camada $ABDE$, a pressaõ deve ser nulla. Assim supponдо $CP' = x$, $P'M' = y$, a natureza da curva $ABDE$ será representada pela equaçaõ $A - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = 0$.

Seja $CB = a$, e reflectindo que $x = 0$ deve dar $y = a$, teremos $A = \frac{(F-f)a}{2}$; e substituindo este valor na equaçaõ precedente, será a equaçaõ da curva $ABDE$

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right),$$

a qual he a de huma ellipse, que tem a ametade do eixo $CB = a$, e a ametade do outro eixo conjugado $CD = a\sqrt{\left[\frac{F-f}{F}\right]}$.

Para achar a equaçaõ da curva, que forma qualquer camada interior $KHQT$, supponhamos $CH = b$, $CP = x$, $PM = y$, e será a pressaõ do fluido em H representada por $\frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$, como he evidente. Donde teremos $p = C - \frac{F(xx+yy)}{2a} + \frac{fyy}{2a} = \frac{(F-f)a}{2} - \frac{(F-f)bb}{2a}$;

e

e determinando a conſtante C pela condiçaõ que $x = 0$ dê $y = b$, ſerá

$$yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{bb(F-f)}{F} - xx\right),$$

que he a equaçaõ de huma ellipſe ſemelhante á primeira $ABDE$.

65 Examinemos, ſe eſtas equações ſaõ applicaveis á figura da terra. Sendo f a força centrifuga de hum movel, que deſcreve a circumferencia C que tem o raio R, T o tempo da ſua revoluçaõ, g a força da gravidade, e t o tempo que gaſtaria hum grave em cahir da altura R, conſta da Mechanica que $f = \frac{C^2}{T^2 R}$, e $g = \frac{2R}{t^2}$; logo $\frac{f}{g} = \frac{C^2 t^2}{2R^2 T^2} = \frac{2c^2 t^2}{T^2}$, chamando c a raſaõ que tem a circumferencia com o diametro. Aſſim, ſuppondo o gráo terreſtre $= 57000$ toeſas, o eſpaço corrido por hum grave no primeiro ſegundo de tempo $= 15$ pés, e $T = 24^h$, acharemos $\frac{2c^2 t^2}{T^2} = \frac{1}{289}$ proximamente, e por conſeguinte ſerá $F = 289 f$. Sendo pois $yy = \frac{F}{F-f}\left(\frac{aa(F-f)}{F} - xx\right)$ a equaçaõ do meridiano terreſtre $ABDE$, teremos $CB : CD :: \sqrt{289} : \sqrt{288} :: 425 : 424$ proximamente. Mas eſta raſaõ naõ he a que reſulta das obſervações, e por iſſo concluiremos que o caſo propoſto he huma mera hypotheſe.

Veja-ſe ſobre toda eſta materia huma excellente Memoria de M. Euler, que tem por titulo *Principios geraes do eſtado de equilibrio dos fluidos* (Mem. de l' Acad. de Berlin. 1755.).

66 No ſyſtema Newtoniano, a lei da gravidade naõ he dada directamente, como havemos ſuppoſto nos artigos precedentes; mas todas as particulas da maſſa de hum planeta ſe attrahem mutuamente, e a attracçaõ de duas quaiſquer dellas he na raſaõ compoſta da ſoma das ſuas maſſas, e do quadrado inverſo das ſuas diſtancias. A reſultante de todas eſtas attracções, que experimenta qualquer particula, he a ſua gravidade. Bem ſe vê, quanto era difficil achar a figura, que deve tomar a maſſa inteira,

ta, para que todas estas attracções combinadas com a força centrifuga de cada ponto se ponhaõ em equilibrio. O mesmo Newton, considerando que a terra em virtude da sua rotaçaõ deve ser hum esferoide pouco differente de huma esfera, suppoz, sem o demonstrar, que na hypothese da homogeneidade do fluido a figura da terra era hum ellipsoide, e que o diametro do equador era para o eixo de rotaçaõ como 230 para 229; supposiçaõ, que M. Maclaurin na obra já citada mostrou que era com effeito legitima, e alem disso levou muito avante esta indagaçaõ.

67 Mas ainda faltava mostrar directamente, que a figura elliptica he a unica, que admitte equilibrio. M. d'Alembert no seu Tratado *da causa geral dos ventos* satisfez a este ponto, mostrando que se huma massa fluida, originalmente esferica, girar ao redor do seu eixo com huma força centrifuga muito pequena em comparaçaõ da gravidade, depois de haver feito as oscillações determinadas pelo Autor, deve acabar tomando a forma de hum esferoide elliptico. E recentemente acaba de generalizar mais esta indagaçaõ no tomo quinto dos seus Opusculos, que se póde consultar pag. 25. e seg.

68 A verdadeira rasaõ dos eixos da terra naõ he com tudo a de 230 para 229, dada pela hypothese da homogeneidade das partes no systema Newtoniano, mas a de 178 para 177 proximamente, conforme as observações feitas em França, na Laponia, e no Perú. Donde concluiremos, que a terra naõ he homogenea. Suppondo sempre a attracçaõ universal e reciproca das partes, he facil de achar huma lei entre as densidades, que satisfaça ás observações; mas esta indagaçaõ naõ póde ser proseguida com a extensaõ que requer nos limites de hum Tratado elementar. Póde recorrer-se ás obras, que temos citado.

CAPITULO II.

Do Equilibrio dos Fluidos Elasticos.

69 SEm entrar no exame das conjecturas physicas sobre a causa da virtude elastica, suppomos como hum facto, que certos corpos se reduzem a menor volume

lume, quando saõ comprimidos por huma força exterior; e que em cessando a compressaõ, se restituem ao primeiro estado por huma virtude chamada elastica, que nelles reside, e que exercita a sua acçaõ com a mesma força para todas as partes.

70 Os fluidos elasticos estaõ sujeitos ás mesmas leis geraes do equilibrio dos fluidos incompressiveis, que se derivaõ da propriedade primordial, commua a todos os liquidos, que qualquer particula de huma massa fluida em equilibrio he igualmente comprimida de todas as partes.

71 Assim demonstraremos do mesmo modo, que *se a todos os pontos da superficie de hum fluido elastico naõ pezado se applicarem perpendicularmente potencias iguais, estas faraõ equilibrio entre si*; e que *a superficie perfeitamente livre de qualquer fluido elastico pezado, e em equilibrio em hum vaso solido, ou flexivel, he horizontal*; proposições, de que resultaõ as mesmas consequencias, que deduzimos a respeito dos fluidos incompressiveis.

72 Agora passando ao que em particular pertence aos fluidos elasticos, do mesmo principio geral concluiremos, que *a força elastica em qualquer lugar de huma massa fluida, sejaõ quais forem as potencias que actuarem sobre ella, he igual e contraria á pressaõ do fluido no mesmo lugar*; porque se estas duas forças naõ fossem iguais e contrarias, a maior venceria a menor, e naõ haveria equilibrio, contra a supposiçaõ.

73 Donde se segue, que se hum fluido elastico, depois de ser comprimido por huma causa exterior, ficar em liberdade, e empregar a sua elasticidade contra hum obstaculo, actuará com hum esforço igual ao que o tinha comprimido.

74 Segue-se tambem, que comprimindo-se o fluido a si mesmo pelo proprio pezo (Fig. 26.), a força elastica de qualquer secçaõ $Mmba$ de huma espessura infinitamente pequena Ma, he igual ao pezo absoluto da columna vertical $EKmM$; porque este pezo he a força comprimente da dita secçaõ (n. 37.).

75 Seja pois a area de qualquer secçaõ horizontal da columna $Mm = b^2$, a altura do liquido $MB = x$, a espessura do elemento $Ma = dx$, e a gravidade especifica delle $= P$. Teremos o seu volume $= b^2 dx$, e o pezo absoluto $= b^2 P dx$; e conseguintemente o pezo absoluto

to da colunna $BMmk = b^2 \int P\,dx$. Assim será necessario, para o determinar, conhecer P em x, isto he, saber a lei das gravidades especificas do fluido conforme as alturas verticais.

76 E porque a pressaõ, que padece qualquer elemento fg (Fig. 27.) da superficie das paredes de hum vaso, he igual ao pezo absoluto da columna vertical, que tem a base igual ao mesmo elemento (n. 39.); suppondo $fg = dS$, teremos $dS \int P\,dx$ por expressaõ da força, que exercita o fluido contra o elemento fg; logo $\int dS \int P\,dx$ será a pressaõ total sobre qualquer parte finita da superficie fr.

77 Exemplo I. *Suppondo, que as gravidades especificas do fluido saõ na rasaõ das alturas verticais, contadas desde a superficie, determinar a pressaõ do fundo horizontal NQ do vaso $ANQE$ (Fig. 28.).*

Seja a area do fundo $NQ = b^2$, a altura do fluido $Nt = a$, e a gravidade especifica delle na parte immediatamente applicada ao fundo $= p$. Logo será $a : p :: x :$ $P = \frac{px}{a}$; e substituindo este valor na formula $b^2 \int P\,dx$, teremos a pressaõ sobre o fundo do vaso $= \frac{pb^2}{a} \int x\,dx$ $= \frac{pb^2x^2}{2a} = \frac{pb^2a}{2}$; ametade do que seria, se o fluido em toda a altura tivesse huma gravidade especifica igual á do fundo.

Se $b^2 = 1$ pé quadrado, $a = 100$ pés, $p = \frac{1}{800}$ da gravidade especifica da agua, isto he, $p = \frac{70}{800} = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{pb^2a}{2} = \frac{1.7.100}{2.80} = 4\frac{3}{8}$ libras.

78 Exemplo II. *Suppondo a mesma lei das gravidades especificas, determinar a pressaõ que sofre a parte fN da parede de hum vaso rectangular $ANQE$ (Fig. 29.).*

Seja $AN = b$, $Af = a$, a dimensaõ horizontal do rectangulo $AN = b$, a gravidade especifica no ponto $f = p$;

e teremos $P = \frac{px}{a}$, e $dS = b\,dx$. Logo ſubſtituindo eſtes valores na formula $\int dS \int P\,dx$, teremos a preſſaõ $= \int b\,dx \int \frac{px}{a}\,dx = \frac{bpx^3}{6a}$; tomando eſte integral entre os limites de $x = a$, e $x = b$, ſerá a preſſaõ contra a ſuperficie $fN = \frac{bp}{6a}\left(b^3 - a^3\right)$.

Se $b = 10$ pés, $b = 100$, $a = 50$, $p = \frac{7}{80}$ libras, teremos $\frac{bp}{6a}\left(b^3 - a^3\right) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 125000}{6 \cdot 50 \cdot 80} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2500}{6 \cdot 8}$ $= \frac{7 \cdot 7 \cdot 625}{12} = 2552\frac{1}{12}$ libras.

Se p foſſe a gravidade eſpecifica do fluido immediatamente ao fundo, achariamos a preſſaõ de toda a parede rectangular $AN = \frac{pbb^2}{6}$, que he hum terço do que reſultaria ſe o fluido tiveſſe a meſma gravidade eſpecifica em toda a altura.

79 Eſtes exemplos podem multiplicar-ſe infinitamente, naõ ſó na hypotheſe preſente, mas em quaiſquer outras. Porém eſtas determinações raras vezes podem applicar-ſe á pratica, attendida a incerteza das meſmas hypotheſes. O mais ſeguro he reccorrer á experiencia; e tendo achado por ella a preſſaõ, que o fluido elaſtico faz contra huma ſuperficie horizontal dada, por huma ſimples proporçaõ concluiremos a preſſaõ, que ha de fazer em qualquer outra ſuperficie horizontal, vertical, ou inclinada, ſuppondo que a denſidade he a meſma, ou ſenſivelmente a meſma, em todos os caſos.

80 De qualquer modo que ſe determinem eſtas preſſões, deve notar-ſe que os effeitos dellas ſeguem a meſma lei dos fluidos incompreſſiveis. Aſſim podemos concluir, como acima (n. 45. 46.), que duas quaiſquer columnas fluidas elaſticas, da meſma ou de differente eſpecie, eſta-

estaraõ sempre em equilibrio, sejaõ quais forem as suas densidades, todas as vezes que as pressões, que exercitaõ sobre as suas bases, forem proporcionais ás mesmas bases.

81 Se hum fluido elastico, alem da acçaõ da gravidade propria, for comprimido por huma força externa, acharemos a pressaõ que resulta contra as paredes do vaso, considerando que a acçaõ da força externa se distribue igualmente a todos os pontos do fluido, e combinando-a com a que provém da gravidade, como temos mostrado a respeito dos fluidos incompressiveis.

Do Equilibrio do Ar.

82 DE todos os fluidos elasticos, o ar he o mais conhecido, o mais espalhado, e o mais util ás necessidades dos homens. Por isso merece, que examinemos particularmente as suas propriedades com alguma miudeza. Para o fazer em rigor geometrico, seria necessario conhecer exactamente a figura das moleculas deste fluido, e a lei precisa que observaõ quando se comprimem, ou dilataõ, pelo frio, pelo calor, ou por outras causas physicas, sobre o que naõ temos as noções sufficientes. Em falta dellas naõ abraçaremos hypotheses incertas, e precarias, mas recorreremos á experiencia.

83 *O ar he hum fluido pezado.* Esta verdade ignorada dos antigos foi demonstrada a primeira vez por Torricelli no anno de 1643, por meio da experiencia seguinte.

Tomou hum canudo de vidro *A B* (Fig. 30.) de quasi tres pés de comprimento, aberto em huma das extremidades *A*, e fechado exactamente na outra *B*; e havendo-o enchido de azougue, tapou com o dedo a extremidade *A*, e a mergulhou no vaso *MCDN* no qual tinha lançado previamente huma quantidade sufficiente de azougue. Posto assim o tubo em huma situaçaõ vertical, tirou o dedo, e deixou o azougue nelle incluido á acçaõ do seu pezo. O effeito foi, que o azougue depois de varias oscillações ficou elevado no tubo até a altura *A E* de quasi 28 pollegadas acima do livel *M N* do azougue que estava no vaso.

A' vista deste phenomeno concluio Torricelli, que a columna *A E* naõ podia ficar suspensa dentro do tubo, senaõ

ſenaõ para fazer equilibrio com a preſſaõ do ar exterior ſobre a ſuperfice do azougue que eſtava no vaſo; preſſaõ, que naõ tinha lugar na colunna interior do tubo, por eſtar a extremidade ſuperior tapada hermeticamente. E com effeito, quebrando levemente a meſma extremidade, para dar entrada ao ar, immediatamente cahe a colunna, e ſe poem todo o liquido ao meſmo livel. Os *barometros* ordinarios naõ ſaõ outra couſa, ſenaõ o tubo de Torricelli em experiencia continua.

Adiante veremos, fallando mais particularmente do barometro, que a altura do mercurio neſte inſtrumento eſtá ſujeita a muitas variações locais, e phyſicas.

84 Sendo pois o pezo abſoluto de qualquer colunna de ar, que inſiſte ſobre a ſuperficie da terra, igual ao de huma colunna de mercurio, que tem a meſma baſe e huma altura conhecida, he facil de determinar o pezo de toda a maſſa do ar, que cérca o globo terreſtre. Para iſſo, ſuppondo o raio da terra $= R$, a altura do mercurio $= r$, a circumferencia do circulo que tem a unidade por diametro $= c$, a gravidade eſpecifica do mercurio $= p$, naõ ha mais que multiplicar por p a differença entre duas esferas, huma que tenha o raio R, e a outra o raio $R + r$. Aſſim teremos o pezo da atmoſfera $= \frac{4}{3}\, p\, c \left[(R + r)^3 - R^3 \right] = \frac{4}{3}\, p\, c\, (3R^2 r + 3Rr^2 + r^3)$; e deſprezando os termos que contem r^2 e r^3, teremos $4\, p\, c\, R^2 r$ por expreſſaõ geral e muito approximada do pezo total do ar.

Suppondo $r = 28$ pollegadas, $p = 960$ libr., e hum gráo de circulo maximo terreſtre $= 57000$ toeſas, acharemos o pezo total da atmosfera $= 11028854877090909091$ libras proximamente.

85 Como huma colunna de mercurio de 28 pollegadas de altura deve fazer equilibrio a huma de agua de 32 pés (n. 46.); ſegue-ſe, que ſendo a primeira ſuſtentada pela preſſaõ exterior da atmosfera, tambem o deverá ſer a ſegunda. Aſſim o confirma a experiencia ſeguinte.

Seja QH o cano de huma bomba vertical (Fig. 31.), mergulhado na agua $MCDN$ pela extremidade Q que he aberta. Fazendo ſubir o embolo K, que enche exactamente a capacidade do tubo, a agua ſubirá atraz delle até

a

á altura de 32 pés com pouca differença, e dahi para cima, ainda que ſe continue a levantar o embolo, naõ ſubirá mais. A raſaõ he, porque levantando o embolo fica atraz delle hum vazio, onde o ar exterior naõ póde entrar, mas a preſſaõ livre do meſmo ar ſobre a ſuperficie *M N* fórça a agua a entrar pela abertura *Q*, e a ſubir pelo tubo até a altura de 32 pés, onde faz equilibrio com a dita preſſaõ.

86 Supponhamos, que havendo chegado a agua á altura *A B* de 32 pés, ſe continûa a levantar o embolo, de maneira que entre a baſe delle e a ſuperficie da colunna *B T* fique hum vazio, como *B P*. Entaõ, ſe na parede do tubo entre os pontos *A* e *B*, ſe fizer huma abertura lateral *E*, o ar exterior entrará impetuoſamente por ella, e dividirá a colunna *A T* em duas partes *A F*, *E T*. A primeira das quais cahirá pelo ſeu pezo, porque o ar que entra por *E* eſtá em equilibrio com a preſſaõ que a fazia ſubir pela extremidade *Q*; mas a ſegunda parte *E T*, ſendo comprimida pelo meſmo ar, que igualmente actûa para cima, ſubirá neceſſariamente pelo eſpaço vazio *B P*.

Eſte phenomeno ſe vio a primeira vez em Sevilha no anno de 1766, onde hum funileiro emprendeu fazer ſubir a agua á altura de 50 pés por huma bomba aſpirante, e enfadado de que ella naõ ſubiſſe deu huma martellada no cano, com a qual ſuccedeu abrirlhe hum buraco de quaſi huma linha de diametro, a 10 pés de altura acima do livel da agua; e dando depois á bomba, ſahio a agua. Eſta experiencia foi logo repetida em muitas partes, e ſe achou que com pouca quebra dá a bomba a agua da colunna *E T*; depois do que, he neceſſario tornar a dar á bomba, tapando o buraco *E*, e tornando-o a deſtapar quando a agua tiver ſubido pelo cano á altura de 32 pés. Aſſim fechando, e abrindo alternativamente o buraco *E*, ſe póde fazer huma eſpecie de bomba, que levante a agua a muita altura; mas terá o inconveniente de dar pouca agua, e com grandes intermittencias. Adiante moſtraremos o modo de determinar a altura, até onde o ar que entra pelo buraco *E* póde levantar a colunna *E T* pelo eſpaço vazio *B P*.

87 Seja *A B O* (Fig. 32.) a *catimplora*, de que ſe uſa ordinariamente para treſpaſſar os licores de humas vaſilhas

lhas para outras. Este instrumento he hum canudo curvo de braços desiguais *A B*, *B O*. Mergulhando o mais curto *A B* em hum vaso *M C D N*, e extrahindo-lhe o ar pela outra extremidade *O*, sorbendo com a boca, ou de qualquer outra maneira, o licor subirá por elle, e sahirá continuamente pelo orificio *O*, até o vaso ser esgotado, com tanto que o ponto *O* esteja mais baixo que o fundo delle.

Para declaraçaõ deste effeito, supponhamos que a extremidade *O* está mergulhada em outro vaso *E F*, que contém já alguma quantidade do mesmo licor. Bem se vê, que cada hum dos braços da catimplora *A B*, *B O* póde considerar-se, como hum tubo de Torricelli. Assim representando a pressaõ da atmosfera por K*X*, o pezo da colunna fluida *A B* por K*V*, e o da colunna *BO* por K*Z*, está claro que *V X* exprime a força que levanta o fluido pelo braço *A B*, e *Z X* a que tende a levantallo pelo braço *O B*; e como estas forças saõ contrarias, a menor será destruida, e restará a força *Z V*, que produzirá huma corrente do fluido por *A B O*.

Daqui se vê 1°, que sendo K*V* = K*Z* naõ poderá haver movimento. 2°, que tambem o naõ haverá quando K*V* naõ for menor que K*X*. Outras relações podem ter estas tres forças, cujo exame he inutil neste lugar.

88 *O ar he hum fluido elastico.* A verdade desta proposiçaõ consta de infinitas experiencias. Basta introduzir o ar em huma bexiga, e ver que ella se contrahe, quando a comprimem; e que se torna a dilatar, quando a deixaõ.

89 Logo *a força elastica do ar comprimido he igual á força, que produzio a sua compressaõ.* He huma consequencia evidente do que acima mostramos (n. 73. e 74.), e prova-se com muitas experiencias, entre as quais a *fonte de Heron* he huma das mais sensiveis.

Esta maquina compoem-se de huma caixa *ABCD* (Fig. 33.), fechada de todos os lados, e cheia de agua até *E F* hum pouco abaixo de *A B*; de outra caixa *G H* K *I*, tambem fechada de todos os lados, igual á primeira, e cheia de ar; de hum tubo *O T* soldado exactamente com as tampas *A B*, *D C*, *G H*, o qual sahe fóra pela extremidade *O*, e com a extremidade *T* chega muito perto do fundo *I* K da caixa inferior; de outro tubo *X Y* solda-

ſoldado nas duas caixas, cuja extremidade ſuperior X eſtá perto da tampa AB; e finalmente do tubo QP, cuja extremidade inferior chega perto do fundo DC, e a ſuperior ſoldada na tampa AB he guarnecida pela parte exterior com hum bocal de eſguicho.

Iſto poſto, tapando o orificio Q com o dedo, e lançando hum pouco de agua pelo canudo OT, ella deſcerá para IK, e ſubirá por exemplo até SV. Entaõ naõ haverá mais communicaçaõ do ar exterior com o que eſtá nas duas caixas; e continuando a lançar a agua, o ar incluido nos eſpaços $GHSV$, $ABFE$, e XY ſe condenſará pouco a pouco até que a ſua força elaſtica eſteja em equilibrio com a preſſaõ da agua lançada por OT. Se a ſuperficie da agua na caixa $GHKI$ eſtiver em MN, o dito ar comprimirá cada parte della com huma força igual ao pezo de huma colunna de agua, que tenha por baſe a parte comprimida, e por altura LO. Com eſta meſma força he comprimida a ſuperficie EF da agua na caixa ſuperior, e tende a ſubir pelo canudo PQ: de maneira, que deſtapando o orificio, reſulta huma fonte de repuxo, que ſobe a huma altura $RZ = OL$. Donde ſe moſtra, que a elaſticidade do ar produz o meſmo effeito que produziria o pezo da colunna, pela qual foi comprimido.

Póde notar-ſe, que fazendo entrar por O a agua que cahe do repuxo, eſta paſſará para a caixa inferior, e a fonte continuará até que a agua comprehendida deſde o ponto P até EF tenha ſahido toda.

90 Sendo pois o ar pezado, e elaſtico, he manifeſto que ſe deve comprimir a ſi meſmo pelo proprio pezo, e que conſiderando a atmosfera dividida em camadas concentricas á terra, as inferiores que ſuſtentaõ o pezo das ſuperiores eſtaráõ cada vez mais comprimidas, ſendo as outras couſas iguais. Digo *ſendo as outras couſas iguais*, porque ha outras cauſas, como o frio e o calor, que concorrem a comprimir e dilatar o ar, e por iſſo a denſidade deſte fluido he muito variavel. Tem-ſe obſervado ſer eſta de oito até nove centas vezes menor, que a da agua, e a denſidade media nos noſſos climas póde exprimir-ſe ſenſivelmente por $\frac{1}{850}$, e a gravidade eſpecifica, ou o pezo

de hum pé cubico de ar junto á ſuperficie da terra por $\frac{7}{85}$ libr.

91 Se o ar comprimido pelo pezo da atmosfera, ficar em liberdade para empregar a acçaõ da ſua elaſticidade, produzirá o meſmo effeito, que pelo dito pezo feria produzido. He huma conſequencia do que acima moſtramos (n. 89.), e ſe confirma com a experiencia ſeguinte.

Tome-ſe hum vaſo cylindrico de vidro *ABCD* (Fig. 34.), com huma quantidade de mercurio *AEFD*; meta-ſe nelle hum tubo *K* de 29 até 30 pollegadas, aberto por ambas as extremidades, e mergulhado no mercurio; tape-ſe exactamente a boca do vaſo ao redor do tubo, de maneira que o ar contido no eſpaço *EBCF* naõ communique com o de fóra; e ponha-ſe no recipiente da maquina pneumatica *LIHM*. Entaõ evacuando o ar do recipiente ſe verá, que dilatando-ſe o ar *EBCF* faz abaixar a ſuperficie do mercurio até *NO*, obrigando-o a ſubir pelo tubo *K* a huma altura quaſi igual á que tiver o barometro no lugar onde ſe faz a experiencia. Digo *quaſi igual*, porque naõ he poſſivel evacuar perfeitamente o ar do recipiente da maquina pneumatica.

92 Se huma quantidade de ar ſe reduzir pela compreſſaõ a occupar differentes eſpaços, ou volumes, eſtes ſeraõ na raſaõ inverſa das forças comprimentes. Eſta propoſiçaõ ſe prova pela experiencia ſeguinte.

Prepare-ſe hum tubo, como ſe moſtra na Fig. 35., fechado hermeticamente em *C* e aberto em *A*, e diſponha-ſe de maneira que os braços *DA*, *EC* (que devem ſer perfeitamente cylindricos) ſejaõ verticais, e a parte *DE* horizontal. Lance-ſe por *A* hum pouco de mercurio para encher o canal *DE*, procurando que as duas ſuperficies *IE*, *DV* deſte fluido nos dous braços verticais eſtejaõ de livel, a fim de que o ar fechado no eſpaço *EC* eſteja no meſmo eſtado de compreſſaõ que o ar exterior. Aſſim o ſupporemos comprimido pelo pezo de huma colunna de mercurio de 28 pollegadas de altura, e ſendo *EC* de 12 pollegadas, ferá o volume do ar como 12, e a força comprimente como 28. Continuando a lançar mercurio, e achando-ſe as ſuperficies deſte fluido em *F*, *H*, tirando a horizontal *FG*, ſe *GH* for de 14 pollegadas ferá *FC* de

8,

8, se *GH* for de 28, será *FC* de 6 &c, isto he, se a força comprimente for 14 + 28 será o volume 8, e se a força for 28 + 28 será o volume 6 &c. Donde se vê, que sendo as forças comprimentes como 28, 42, 56, os volumes correspondentes saõ como 12, 8, 6, isto he, na rasaõ inversa dellas.

93 He de advertir, que sem embargo de se achar por esta experiencia, que os volumes saõ exactamente na rasaõ inversa das forças comprimentes, naõ deve este resultado tomar-se como regra geral para quaisquer que sejaõ as forças. Nos casos extremos, quando ellas forem muito grandes, ou muito pequenas, a regra naõ poderá subsistir, porque a elasticidade do ar terá certos limites, alem dos quais se naõ possa comprimir, nem dilatar. Porém como na pratica se naõ chega jamais a estes casos, póde a regra considerar-se verdadeira, sem restricçaõ alguma, em quanto o ar que recebe as differentes compressões estiver no mesmo gráo de temperatura.

94 Como as densidades de huma mesma massa saõ na rasaõ inversa dos volumes a que ella se reduz (n. 11.), está claro que as densidades de huma quantidade de ar comprimida por differentes forças saõ proporcionais ás mesmas forças comprimentes, e conseguintemente ás elasticidades que ella tem nestes differentes estados (n. 89.). O mesmo se entenda das gravidades especificas, que saõ proporcionais ás densidades (n. 18.).

95 Suppondo pois que huma columna vertical da atmosfera está toda no mesmo gráo de temperatura, e imaginando-a composta de huma infinidade de camadas horizontais, e de massas iguais, a densidade de cada huma será proporcional ao pezo de que está carregada, o qual he a soma dos pezos das camadas superiores. Logo a densidade de cada camada he proporcional á soma das densidades das camadas superiores. Assim formaráõ as densidades de cima para baixo huma serie tal, que dous termos consecutivos seraõ entre si como as somas dos termos respectivamente precedentes, isto he, formaráõ as densidades huma progressaõ geometrica, e do mesmo modo as gravidades especificas.

No estado physico das cousas, naõ tem lugar geralmente esta progressaõ, como abaixo veremos pela experiencia. Quando o calor, ou o frio varia em differentes camadas, perde-se o equilibrio, resultaõ correntes, ou ventos por diversas direcções, e a densidade do fluido participa necessariamente destas variações.

96 Antes de acabarmos este artigo, examinemos as dilatações do ar na maquina pneumatica. He inutil descrever aqui por meudo este instrumento, que todo o mundo conhece. Observaremos somente, que as suas peças principais saõ o recipiente, o prato em que elle se assenta, a siringa, o embolo della, e hum registo feito de maneira, que virando-se de hum modo permitte communicaçaõ ao recipiente com o vaõ da siringa, sem a permittir com o ar exterior, e virando-se de outro modo permitte communicaçaõ ao ar exterior com o vaõ da siringa, sem lha permittir com o recipiente.

97 Isto posto, seja A a soma das capacidades do recipiente e da parte superior da siringa, que fica vazia quando o embolo está levantado, B a soma das capacidades do recipiente e do vaõ total da siringa, quando o embolo se tem abaixado, D a densidade do ar no estado natural, m a rasaõ que esta densidade tem com a do ar rarefeito no recipiente, n o numero das vezes que se tem movido o embolo. Primeiramente o ar do recipiente tem a mesma densidade D do ar exterior; mas abaixando o embolo, o ar que estava no espaço A, se dilatará uniformemente no espaço B, e conseguintemente será a sua densidade $=$ $D\frac{A}{B}$ (n. 11.). Depois, quando segunda vez se torna a abaixar o embolo, o ar que estava no espaço A com a densidade $D\frac{A}{B}$ se dilatará do mesmo modo no espaço B, e ficará com a densidade $D\frac{A^2}{B^2}$; e em geral, quando o embolo se abaixar a vez n, ficará o ar do recipiente com a densidade $D\frac{A^n}{B^n}$. Logo teremos $D = mD\frac{A^n}{B^n}$, ou $B^n =$ mA^n, e conseguintemente $n\,l\,B = l\,m + n\,l\,A$.

Donde se vê, que das quatro quantidades m, n, A, B, sendo dadas tres, a quarta se póde determinar com muita facilidade. Igualmente se vê, que naõ he possivel evacuar perfeitamente o recipiente; porque ainda que a dilataçaõ

do

do ar naõ tiveſſe limite algum phyſico, naõ poderia reduzir-ſe a huma denſidade nulla, ſenaõ depois de ſe andar infinitas vezes com o embolo.

Conſtrucçaõ, e uſo do Barometro.

98 O *Barometro* ſerve, como já diſſemos (Fig.30.), para moſtrar o pezo do ar, ou os differentes eſtados da compreſſaõ da atmosfera. Há-os de muitas eſpecies; mas aqui naõ fallamos ſenaõ do barometro ſimples, ao qual ſe reduzem todos os outros, e que naõ he outra couſa mais do que o tubo de Torricelli applicado a huma taboa vertical, a qual ſe divide em pollegadas, começando deſde a ſuperficie do mercurio expoſta á preſſaõ do ar, e na parte ſuperior ſe ſubdivide em linhas, e meias linhas, para moſtrar as variações que tem a columna do mercurio, conforme o eſtado da atmosfera.

99 Por quanto temos viſto, que a elaſticidade do ar he igual á força que o comprime; eſtá claro, que tanto o pezo do ar, como a ſua elaſticidade devem ſuſtentar o mercurio no barometro em a meſma altura. Daqui vem, que em huma camara bem fechada, e debaixo de huma manga de vidro poſta ſobre huma meza horizontal, o barometro moſtra a meſma altura do mercurio, como no ar livre. Eſta ſuſpenſaõ he produzida pelo elaterio do ar, que tinha ſido comprimido pelo ar exterior antes de ſe interromper a ſua communicaçaõ.

100 O tubo de hum barometro deve ter ao menos duas ou tres linhas de diametro interior, para que o mercurio nelle incluido ſeja pouco ſenſivel á impreſſaõ do calor, que tende a dilatallo. Sem embargo deſta precauçaõ muitas vezes ſe vê, que os barometros em hum meſmo lugar naõ concordaõ exactamente por outras cauſas, como alguma pequena deſigualdade nas gravidades eſpecificas dos mercurios, a difficuldade de os purificar igualmente do ar, as differentes aſperezas das paredes dos tubos, o vazio mais ou menos perfeito na parte ſuperior delles &c.

101 Suppondo que por falta de precauçaõ, ou de qualquer maneira, ſe tem metido ar no eſpaço EB, ſerá facil determinar a relaçaõ entre a preſſaõ da atmosfera, a altura AB do tubo acima do livel MN, a altura do eſpaço

paço que o ar incluido em EB occuparia naturalmente; e a altura em que o mercurio ficará ſuſpenſo acima do livel MN.

Seja BH o eſpaço, que o ar incluſo occuparia no eſtado natural, ſe o tubo eſtiveſſe aberto em B, e elle communicaſſe com o ar exterior. He evidente, que eſte ar achando hum obſtaculo em B ſe dilatará para a parte inferior, e que impellindo de cima para baixo a columna do mercurio AE, eſta ficará ſomente em equilibrio, quando a ſoma da força elaſtica do ar dilatado em BE, e do pezo da meſma columna, for igual á preſſaõ da atmosfera, iſto he, ao pezo de huma columna de mercurio da altura b. E porque a força elaſtica do ar natural BH he repreſentada por b, ſerá a força do ar dilatado BE repreſentada por $\frac{b.BH}{BE}$; logo teremos $\frac{b.BH}{BE} + AE = b$, ou $\frac{b.BH}{AB - AE} + AE = b$. Aſſim das quatro linhas b, BH, AB, AE, ſendo dadas tres, a quarta ſe determinará facilmente por eſta equaçaõ.

102 Sendo pois o barometro conſtruido com toda a perfeiçaõ, he facil de ver que nos lugares mais baixos, onde a preſſaõ da atmosfera he maior, deve o mercurio ſuſtentar-ſe em maior altura; e aſſim o moſtra a experiencia, quando outras cauſas o naõ impedem. He couſa ſabida, que no meſmo lugar eſtá ſujeita a altura do mercurio a frequentes variações, conforme os differentes eſtados da atmosfera. Eiſaqui os factos gerais, que moſtra a experiencia, poſto que algumas vezes tenhaõ ſuas excepções.

I. Ordinariamente ſe ſuſtenta o mercurio em maior altura, quando o tempo he bom, fixo, ſeco, e ſereno.

II. Pelo contrario he menor a ſua altura, quando o tempo he mudavel, chuvoſo, tempeſtuoſo, ou quando o ar eſtá muito humido, e carregado de vapores.

III. As maiores variações do barometro tanto em ſubir, como em deſcer, ſuccedem ſempre no inverno; e eſtas variações ſaõ em geral mais ſenſiveis nos paizes frios do que nos quentes.

IV. Se eſtando bom tempo começa o mercurio a deſcer ſenſivelmente, quaſi ſempre he final de chuva, ou de vento.

V. E

V. E pelo contrario, quando em tempo chuvoſo ſobe conſtantemente o mercurio, he ſinal de haver proximamente mudança para bom tempo.

VI. Quando o tempo eſtá muito calmoſo, a deſcida do mercurio he frequentemente hum prognoſtico de trovoada.

VII. No tempo frio a ſubida do mercurio annuncia a congelaçaõ; e a deſcida em tempo de gelo prognoſtica a deſcongelaçaõ.

103 A explicaçaõ deſtes phenomenos tem dado que fazer aos Phyſicos. M. de Mairan attribue tudo aos ventos, ou geralmente ás agitações do ar produzidas pelo calor do Sol, ou do fogo central, que elle ſuppoem emanar continuamente das entranhas da terra, cuja acçaõ póde ſer modificada por muitas cauſas phyſicas, e locais.

M. Halley explica os meſmos phenomenos pela combinaçaõ dos ventos, que reinaõ actualmente, com a exhalaçaõ, e precipitaçaõ dos vapores, que andaõ fluctuando no ar, e que ſe achaõ em maior, ou menor quantidade em hum tempo que em outro.

104 Deixando muitas outras conjecturas a eſte reſpeito, que ſe podem ver nos livros de Phyſica, a explicaçaõ do Baraõ de Leibnitz me parece muito attendivel. Quando o tempo he chuvoſo, diz elle, deve o mercurio deſcer, porque vindo entaõ a cahir os vapores, que antes eraõ ſuſtentados pelo ar, eſte fica menos comprimido, e conſeguintemente mais leve; e em confirmaçaõ propoem a experiencia ſeguinte.

Em hum cylindro *A B* (Fig. 36.) cheio de agua ponha-ſe hum corpo *D* eſpecificamente mais pezado, mas oco, e com hum orificio tapado de ſorte que ſeja ſuſtentado na ſuperficie da agua. O todo ſe pendure do braço de huma balança, e ſe ponha em equilibrio com hum pezo *C*. Entaõ, deſtapando o orificio do corpo *D*, entrando nelle a agua, e começando a cahir, o equilibrio ſe rompe, e a balança ſe inclina para a parte do pezo *C*. Comparando pois o pezo *C* á colunna do mercurio do barometro, a agua do cylindro á colunna da atmosfera, e o pezo *D* ás gotas da chuva, he facil de entender, que em quanto o vapor dividido em partes tenuiſſimas he ſuſtentado pela atmosfera, ſaõ as colunnas della mais pezadas, e devem ſuſtentar o mercurio em maior altura; e que ajuntando-

y/.

tando-se em gotas maiores, que comecem a cahir fica a atmosfera mais leve, e conseguintemente deve o mercurio descer no barometro. E a descida precede a chuva actual, porque as gotas se formaõ, e cahem por intervallos, antes de chegarem á terra.

105 Esta explicaçaõ he muito simples, e natural: mas para lhe darmos toda a exactidaõ, consideremos hum corpo esferico descendo pela sua gravidade em hum fluido incluido em hum vaso immovel, e busquemos a pressaõ que deve causar sobre o fundo delle. Para isso reflectiremos, que a gravidade do corpo he igual ao excesso do seu pezo sobre o de hum igual volume do fluido, como se mostrará no Capitulo seguinte; e que a resistencia, que encontra da parte do mesmo fluido, communicando-se por elle até o fundo do vaso, he a pressaõ que nelle resulta do movimento do corpo na sua descida actual. Supporemos tambem que a resistencia, que encontra perpendicularmente huma superficie plana da parte de hum fluido, he proporcional ao producto da mesma superficie pelo quadrado da sua velocidade, e que a resistencia de huma esfera, como mostraremos na Segunda Parte, he ametade da que experimentaria perpendicularmente hum dos seus circulos maximos com a mesma velocidade.

Isto posto, seja o raio da esfera $= R$, o pezo absoluto della $= P$, o pezo de hum volume igual do fluido $= P'$, o espaço $= s$, a velocidade $= u$, a resistencia que experimenta huma superficie a^2 com a velocidade $V = F$, a resistencia que padece a esfera $= f$, e c a circumferencia que tem por diametro a unidade. He facil de ver, que deve ser $f = \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$, e que a força que sollicita o movel de cima para baixo he $P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}$. Assim, pelo principio ordinario das forças acceleratrizes, teremos a equaçaõ

$$P u d u = \left(P - P' - \frac{c F R^2 u^2}{2 a^2 V^2}\right) d s.$$

Suppondo para maior simplicidade, que $P - P' = M$, e $\frac{c F R^2}{2 a^2 V^2} = n$, esta equaçaõ se reduzirá á fórma seguinte

Pu

$$P u du + n u^2 ds = M ds.$$

Multipliquemos todos os termos por huma funçaõ φ de s, a qual se supponha que a faz integravel; e teremos primeiramente

$$\varphi P u du + \varphi n u^2 ds = \varphi M ds.$$

Depois supponhamos, que he $\frac{\varphi P u^2}{2} = \int \varphi M ds$; e daqui resultará esta nova equaçaõ differencial

$$\varphi P u du + \frac{P u^2 d\varphi}{2} = \varphi M ds.$$

Comparando-a com a precedente, termo por termo, será $\frac{P u^2 d\varphi}{2} = \varphi n u^2 ds$, ou $\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{2 n ds}{P}$. Logo $l\varphi = \frac{2ns}{P}$, e $\varphi = e^{\frac{2ns}{P}}$, sendo e o numero que tem por logarithmo hyperbolico a unidade. Substituindo pois este valor de φ na equaçaõ $\frac{\varphi P u^2}{2} = \int \varphi M ds$, teremos

$$\frac{P u^2 . e^{\frac{2ns}{P}}}{2} = \int M ds . e^{\frac{2ns}{P}} = \frac{M . P}{2n} e^{\frac{2ns}{P}} + C.$$ E porque $s = 0$ deve dar $u = 0$, será $C = -\frac{M . P}{2n}$, e conseguintemente $u^2 = \frac{M}{n}\left[1 - e^{\frac{-2ns}{P}}\right]$. Porém tinhamos $f = n u^2$; logo

$$f = M\left[1 - e^{\frac{-2ns}{P}}\right]:$$

106 He facil de ver por esta formula, que f naõ póde ser maior que M, mas somente igual, quando s for infinito; e como M he menor que P, sempre f será menor que P. Mas P he a pressaõ causada pelo corpo em quanto sustentado pelo fluido, e f he a pressaõ que resulta, quando actualmente desce por elle. Logo a pres-

saõ

ſaõ da atmosfera ſobre a ſuperficie da terra he menor, quando as gotas da chuva deſcem pelo ar, do que quando reſolvidas em partes tenuiſſimas ſaõ ſuſtentadas por elle. Eſta he pois huma cauſa demonſtrada das variações do barometro, mas naõ deve entender-ſe que ſeja unica, e excluſiva de outras. Dous ventos contrarios que ajuntaõ, e condenſaõ o ar para hum lugar, fallohaõ ahi mais pezado, e aſſim muitas outras cauſas, que ignoramos, e que naõ podem ſujeitar-ſe ao calculo.

107 Hum dos uſos mais importantes, para que póde ſervir o barometro, he a determinaçaõ da differença de livel de quaiſquer pontos ſituados em differentes elevações. Para ſe dar huma ſoluçaõ geral, e completa deſta queſtaõ, era neceſſario conhecer a lei que guardaõ entre ſi as denſidades de todas as camadas da atmosfera, attendidas todas as cauſas de que ellas dependem; mas diſſo naõ ha eſperanças. Conſiderando porém a compreſſaõ, que reſulta do proprio pezo do ar, que he a cauſa principal, e preſcindindo de tudo o mais, he facil de determinar a relaçaõ, que devem ter as differenças de livel com as alturas do mercurio no barometro.

108 Sendo pois o ar comprimido unicamente pelo ſeu proprio pezo, a gravidade eſpecifica, ou denſidade delle ſera proporcional ao pezo da colunna ſuperior; e aſſim repreſentando por P a gravidade eſpecifica em qualquer ponto, teremos nP por valor do pezo abſoluto da colunna, que o comprime neſſe lugar, ſendo n hum numero conſtante. Logo ſerá $nP = \int P\,dx$ (n. 75.), ou $nP = \int - P\,dx$, tomando x de baixo para cima. Differenciando eſta equaçaõ, teremos $n\,dP = - P\,dx$, ou $\frac{n\,dP}{P} = - dx$, e integrando $n\,lP = C - x$. Para determinarmos a conſtante C, ſupponhamos que na origem de x he a gravidade eſpecifica do ar $= p$, e teremos $C = n\,lp$. Logo $x = n\,lp - n\,lP = n\,l\frac{p}{P}$. Seja h a altura do mercurio no barometro no lugar onde a gravidade eſpecifica he $= p$, e H onde he $= P$; e teremos $\frac{p}{P} = \frac{h}{H}$. Subſti-

tuindo

tuindo este valor na equaçaõ, será finalmente $x = n\,l\,\frac{b}{H}$..

109 Para usar desta formula, he necessario primeiramente determinar a quantidade n por duas observações do barometro, huma no lugar a respeito do qual se querem saber as differenças de livel, e outra em outro lugar cuja differença de livel seja conhecida immediatamente pela mediçaõ.

Exemplo I. Na montanha de *Chussai* no Reino do Peru observou M. Godin a altura do mercurio no barometro de 17 poll. e $10\frac{1}{2}$ linh., e M. Bouguer em *Caraburu* a observou de 21 poll. $2\frac{3}{4}$ linh.; pergunta-se a elevaçaõ da montanha a respeito de *Caraburu*.

Primeiramente sobre a montanha *Pitchincha* 1208 toesas mais elevada que *Caraburu* se observou a altura do mercurio de 15 poll. e 11. linh.; e assim teremos $x = 1208$, $b = \frac{1019}{4}$, $H = 191$, donde concluiremos $n = 9658$; e será para todos os mais lugares a respeito de *Caraburu* $x = 9658\,l\,\frac{b}{H}$..

Como pois em *Chussai* temos $H = \frac{429}{2}$, será $x = 9658\,l\,\frac{1019}{858} = 9658 . 0{,}0746869 = 721{,}3$ toesas; resultado, que concorda muito bem com o que se achou por huma medida geometrica.

Exemplo II. Na aldea *Alaussy* situada na raiz da montanha de *Chussai* se observou a altura do mercurio de 21 poll. $1\frac{1}{4}$ linh.; pergunta-se a sua posiçaõ a respeito de *Caraburu*.

Neste lugar temos $H = \frac{1013}{4}$, e conseguintemente será $x = 9658\,l\,\frac{1019}{1013} = 9658 . 0{,}0025648 = 24{,}78$ toesas.

Se

Se tirarmos este resultado do que achamos no exemplo precedente, ficará 696,5 toesas por differença de livel entre *Alaussy* e *Chussai*; resultado que naõ differe mais que meia toesa de 197 que M. Godin achou pela mediçaõ.

M. Bouguer se servio deste methodo com bom sucesso pelas eminencias das cordilheiras do Peru. E com effeito he facil de entender, que quanto maior for a altura, tanto mais se achará livre o ar das causas, que lhe alteraõ o equilibrio, e conseguintemente tanto melhor se conformará com a lei das densidades, que havemos supposto. Por esta rasaõ se achou, que naõ correspondia taõ bem este methodo nas partes inferiores das ditas cordilheiras, nem em outras montanhas de menor elevaçaõ na zona torrida, e muito menos nas de Europa. Assim naõ deveremos servirnos deste meio, quando procurarmos resultados exactos, senaõ com muita cautela, e precauçaõ.

110 Agora poderemos determinar a altura ER (Fig. 31.), em que o ar, que entra pelo orificio E na experiencia da bomba de Sevilha, ha de sustentar no vacuo a columna de agua EF (n. 86.). Está claro, que ella ha de subir pelo tubo, até estar em equilibrio com a pressaõ do ar, que lhe corresponder á sua base. Supponhamos pois, que a columna de agua EF he de 24 pés, equivalente a huma de mercurio de 21 pollegadas, e que no lugar da experiencia a pressaõ da atmosfera sustenta huma columna de agua de 32 pés, ou huma de mercurio de 28 pollegadas. Deste modo será reduzida a questaõ a buscar a altura x, onde o mercurio no barometro se deve sustentar em 21 pollegadas, e teremos $x = 9658\ l \frac{28}{21} = 1206$ toesas.

Esta he a altura, a que deveria subir a columna de agua, se a travez da sua massa naõ desse passagem a quantidade nenhuma de ar para a parte superior do tubo, e se naõ encontrasse resistencia nenhuma nas paredes delle.

Theorica das Bombas.

111 As bombas saõ humas maquinas muito conhecidas, que servem para elevar a agua, nas quais a pressaõ da atmosfera he hum dos principais agentes.

tes. Em geral podem reduzir-se a tres especies; a saber, bomba aspirante, bomba comprimente, e bomba aspirante e comprimente ao mesmo tempo.

112 A bomba *aspirante* (Fig. 37.) he composta de dous tubos verticais *AKBC*, *CBDQ*, unidos em *CB*; o primeiro, que está mergulhado na agua, chama-se *tubo de aspiraçaõ*, e o segundo *corpo da bomba*. No lugar da juntura delles se poem ordinariamente hum diaphragma cylindrico, que vulgarmente chamaõ *nabo*, furado pelo meio, e cuberto com huma valvula *E*, que abre de baixo para cima, á qual se dá o nome de *chapeleta*. No corpo da bomba sobe, e desce alternativamente hum embolo, que chamaõ *Zoncho*, ou *buxa da bomba*, cuja haste *Z* he movida por meio de huma alavanca, ou de qualquer outra maneira. A cabeça delle he furada tambem segundo a direcçaõ do eixo com hum buraco redondo *t*, que está cuberto com outra chapeleta *F*, que se abre de baixo para cima. Este embolo corre no seu jogo hum certo espaço *IT*, de maneira que a sua base inferior coincide com o plano horizontal *IH*, quando está abaixado, e com o plano horizontal *TS* quando está levantado.

113 He facil de entender o effeito desta maquina. Supponhamos que no primeiro instante a base do embolo se acha em *IH*, e que o ar interior da bomba está no mesmo gráo de compressaõ que o exterior, e conseguintemente que as duas chapeletas *E*, *F* estaõ fechadas em virtude do proprio pezo. Entaõ, levantando o embolo para *TS*, a chapeleta *F* ficará fechada pelo seu pezo, e pela pressaõ da atmosfera que carrega sobre ella; o ar, que estava no espaço *ACIHBK*, se dilata, abre a valvula *E*, e occupa uniformemente o espaço *ACTSBK*; e a pressaõ da atmosfera sobre a superficie exterior da agua *MN* a faz subir pelo tubo de aspiraçaõ, onde se acha hum ar mais rarefeito, até huma certa altura *Aa*. Depois, abaixando outra vez o embolo até *IH*, a valvula *F* se abre pela compressaõ do ar inferior; a valvula *E* se fecha pelo seu pezo, e pela compressaõ do ar seperior; e o ar do espaço *CIHB* adquire a mesma densidade do ar exterior. Levantando pois novamente o embolo, a valvula *F* se fecha: o ar do espaço *aCBk* já rarefeito se dilata mais, abre a valvula *E*, e juntamente com o ar do espaço *CIHB* occupa uniformemente o espaço *aCTSBk*;

e conſeguintemente a agua ſubirá mais no tubo de aſpiraçaõ huma quantidade aa', em virtude da preſſaõ exterior da atmosfera ſobre a ſuperficie *M N*. Continuando deſte modo o jogo do embolo, irá ſubindo a agua, chegará á baſe delle, paſſará pelo buraco *t*, e entaõ abaixo do embolo naõ haverá mais ar na bomba, mas o movimento das valvulas ſerá o meſmo que dantes, e a agua continuará a levantar-ſe pelo cano da bomba até ſahir pelo tubo lateral *O*.

114 Deve notar-ſe, que a altura *L M* da ſuperficie da agua *M N* até a baſe do embolo naõ póde ſer de mais que 32 pés (n. 85.); e na pratica, attendendo que nunca ſe póde evacuar perfeitamente o ar, e que o pezo da chapeleta inferior *E* he hum obſtaculo, que deve tambem ſer vencido pela preſſaõ da atmosfera, ſempre deve fazerſe *L M* menor que 32 pés. Aqui ſuppomos ſempre que a preſſaõ da atmosfera faz equilibrio a huma columna de agua de 32 pés, ou que o mercurio do barometro no lugar aonde eſtá ſituada a bomba, ſe ſuſtenta na altura de 28 pollegadas. Mas, ſe o barometro moſtrar maior, ou menor altura, ſerá neceſſario rectificar a columna de agua equivalente, conforme ao que acima diſſemos (n. 46.), e ſubſtituir o ſeu valor exacto em todas as partes aonde pomos 32 pés.

115 Suppondo que a maquina eſtá bem conſtruida, a evacuaçaõ mais, ou menos completa do ar interior, depende da poſiçaõ mais, ou menos ventajoſa da valvula *E*. Eſta ſe coſtuma pôr ou em *A* K hum pouco abaixo do livel *M N* da agua exterior, ou mais ordinariamente na junta dos dous tubos, como na Fig. 37 ſe repreſenta. Vejamos, qual he a melhor poſiçaõ; e pelo exame deſtes dous caſos ſe julgará das poſições intermedias.

Em primeiro lugar ſupponhamos a valvula *E* em *A*K, e para maior ſimplicidade preſcindamos do ſeu pezo. Nos primeiros inſtantes, quando ſe levanta o embolo de *I* para *T*, a agua ſobe facilmente pelo tubo de aſpiraçaõ; mas depois, ſe a altura *L M*, poſto que menor que 32 pés, for algum tanto conſideravel, póde ſucceder que havendo chegado a agua a certa altura *A V*, e eſtando o embolo levantado em *T S*, ſeja a força elaſtica do ar incluido no eſpaço *V C T S B P*, juntamente com o pezo da columna de agua *A P*, igual á preſſaõ da atmosfera; e entaõ,

taõ, por mais que se jogue com o embolo, a agua naõ passará da altura actual em que se acha. E com effeito quando o embolo está em IH, o ar do espaço $VCIHBP$ se reduz ao estado do ar exterior; e quando se levanta para TS, este ar se espalha pelo espaço $VCTSBP$. Assim, sendo h a altura de huma columna de agua equivalente á pressaõ da atmosfera, ou á força elastica do ar natural (n. 89.), será a força elastica do ar dilatado no espaço $VCTSBP$ equivalente ao pezo de huma columna de agua, que tenha por altura $\frac{VCIHBP}{VCTSBP}h$ (n. 92.). Ajuntando-lhe a altura AV da agua elevada no tubo, a soma deve ser igual a h, para que a agua naõ possa subir de VP, e teremos por equaçaõ deste equilibrio

$$h = AV + \frac{VCIHBP}{VCTSBP}h.$$

116 Seja o raio do tubo de aspiraçaõ $= r$, do corpo da bomba $= R$, $AC = a$, $CI = n$, $IT = p$, $AV = x$, e a rasaõ da circumferencia ao diametro $= c$; e teremos o cylindro $VB = cr^2(a-x)$, $CH = cR^2n$, $CS = cR^2(p+n)$, e conseguintemente o solido $VCIHBP = cr^2(a-x) + cR^2n$, e $VCTSBP = cr^2(a-x) + cR^2(p+n)$. Substituindo estes valores na equaçaõ precedente teremos

$$h = x + \frac{r^2(a-x) + R^2n}{r^2(a-x) + R^2(p+n)}h,$$

donde, fazendo $\frac{R^2}{r^2} = k$, se tirará

$$x = \frac{a + k(p+n) \pm \sqrt{[(a+k(p+n))^2 - 4khp]}}{2}.$$

117 Todas as vezes pois que o valor de x for real, e menor que a, a agua deverá parar realmente no tubo de aspiraçaõ; como havemos supposto no calculo. Logo naõ continuará a subir, senaõ quando for absurdo o suppor que ella pára, isto he, quando os valores de x sahirem imaginarios. Logo he necessario, para a agua subir, que seja sempre $4khp > (a+k(p+n))^2$.

Seja, por exemplo, $h = 32$ pés, $a = 20$, $n = 2$, $p = 2$, e $k = 1$, isto he, o diametro do tubo de aspiraçaõ igual ao do corpo da bomba; e teremos $4.32.2$

$<(20+4)^2$. Logo a agua parará neste caso, na altura $AV=3$ pés proximamente; e a bomba será incapaz.

Seja $b=32$ pés, $a=25$, $n=0$, $p=2$, e $k=4$; e teremos $4.32.4.2<(25+8)^2$. Logo a agua parará tambem neste caso em huma altura $AV=12\frac{1}{2}$ pés proximamente, e a bomba será imperfeita. Porém, ficando todas as outras dimensões, se fizessemos $k=6$, a agua não pararia, e a bomba poderia ser admittida.

Pelo mesmo methodo poderemos segurarnos, se no caso de chegar a agua ao corpo da bomba deverá parar em alguma parte entre os pontos C e I. E para applicar a formula precedente a este caso não he necessario mais que fazer $k=1$.

118 Todos estes calculos mostrão, que sendo a valvula E posta em AK, a altura do embolo acima do livel da agua deve ser muito menor que de 32 pés, no caso de se não dar ao mesmo embolo hum jogo IT muito grande, ou de se não dar ao tubo de aspiração hum diametro muito pequeno, em comparação do corpo da bomba. Estes dous remedios tem seus inconvenientes, e sobre tudo o ultimo, que póde diminuir muito o producto da bomba, e consumir inutilmente grande parte da velocidade do agente; porque esta deve ser regulada de tal modo, que suba precisamente pelo tubo de aspiração tanta agua, quanta o embolo levanta quando sobe pelo corpo da bomba, de maneira que não fique jamais vazio algum entre a base delle, e a agua que a segue.

119 Supponhamos agora, que a valvula E está na junta dos dous tubos, como se representa na Fig. 37. Logo se vê, que esta disposição tem a ventagem de se evacuar o ar interior quasi completamente. Porque fazendo descer o embolo o mais perto que he possivel de CB, não ficará ar senão no pequeno espaço $CIHB$, e na pequena cavidade t. Então póde ser a altura LM de pouco menos que 32 pés; mas isto suppoem, que as valvulas sejão fieis, perfeição que se não acha na pratica, porque os couros de que se fazem as chapeletas secão-se, e ajustão mal, quando a maquina está por algum tempo em inacção. Este inconveniente não teria lugar, estando a valvula E em AK, porque sempre ficaria mergulhada

na

na agua ; mas ſem embargo, conſideradas todas as couſas, vale mais polla em CB do que em AK.

120 Tomadas pois as precauções convenientes, para que a bomba preſte o ſeu effeito, examinemos a força que he neceſſaria para levantar o embolo. Supponhamos, que a agua tem já chegado á maior altura QD, e que o embolo eſtá no termo mais baixo IH. He manifeſto, que elle ſuſtenta a columna de agua $IHDQ$, e a preſſaõ da atmosfera ſobre QD, a qual ſe póde ſuppor igual á que carrega ſobre MN. Aſſim, tomando as duas verticais XY, YM, cada huma de 32 pés, por alturas das columnas de agua equivalentes ás preſsões da atmosfera ſobre QD, e MN, ſuſtentará o embolo a preſſaõ repreſentada por $IH \times XY$, e a columna de agua $ACIHBK$ forçará a baſe delle IH de baixo para cima com huma preſſaõ repreſentada por $IH \times MY$ menos o pezo da meſma columna, ou $IH \times LM$, iſto he, com huma preſſaõ repreſentada por $IH \times LY$. Tirando $IH \times LY$ de $IH \times XY$, ficará $IH \times LM$ por expreſſaõ da força que ſuſtenta o embolo, á qual ſe deve ajuntar o pezo da columna $IHDQ$. Por tudo, ſerá pois carregado o embolo do pezo equivalente a huma columna de agua, que tenha IH por baſe, e por altura a elevaçaõ da agua QD acima do livel MN; e o meſmo ſe entenderá a reſpeito de qualquer outra poſiçaõ do embolo. Ajuntando a eſta força o pezo do meſmo embolo, a ſoma dará a força que ſe lhe deve applicar no eſtado ſimples do equilibrio; mas para produzir o movimento, e vencer a fricçaõ, ſerá neceſſario ajuntar-ſe certa quantidade de força, que ordinariamente ſe avalîa em hum terço da que baſtaria para o equilibrio; porem naõ he ſuſceptivel de determinaçaõ fixa, por ſer muito variavel conforme a conſtrucçaõ, e perfeiçaõ das maquinas, e conforme a velocidade que ſe pertende dellas.

121 Suppondo, que a bomba tem chegado a hum movimento uniforme e permanente, he facil de calcular o producto de agua, que com ella ſe póde tirar. Porque ſendo e o eſpaço, que anda o embolo em hum ſegundo quando ſobe, R o raio da ſua baſe, ou do corpo da bomba, e c a raſaõ da circumferencia ao diametro, levantará o embolo, e conſeguintemente dará a bomba em hum ſegundo cR^2e pollegadas cubicas de agua.

122 Mas deve notar-ſe, que ſendo pequena a altura YL, e ſubindo conſeguintemente a agua pelo corpo da bomba com pouca velocidade, he neceſſario regular de tal maneira a velocidade do embolo, que naõ ſe forme vazio entre a baſe delle, e a agua que a ſegue; porque de outra ſorte haveria força perdida na manobra da bomba. Ordinariamente ſe pecca contra eſta regra, e depois ficaõ em grande admiraçaõ de que huma bomba movida com grande velocidade naõ produza ſenſivelmente mais agua do que movida com menor velocidade. Por iſſo he neceſſario combinar de tal maneira as dimensões da bomba com o jogo do embolo, que ſe naõ conſumaõ as forças ſem utilidade. He facil de ver, que a agua em IH tende a ſubir com huma velocidade $= \frac{LY}{LM}$, e que outra tanta deve conſeguintemente dar-ſe ao embolo, para ſe empregar utilmente a força motriz.

123 Na bomba *comprimente* (Fig. 38.), o cano principal $ACBK$ eſtá mergulhado na agua MN, e o embolo entra por baixo, para levantar, ou comprimir a agua para cima, cuja haſte Z eſtá ſolidamente pregada na traveſſa bc do caixilho movel $abcd$, que alternativamente ſe faz ſubir e deſcer por meio de huma alavanca, ou de qualquer outra maneira. A cabeça do embolo he vazada, e tem o buraco cuberto com huma valvula F, que ſe abre de baixo para cima. Em VP, pouco abaixo do livel da agua exterior, ſe poem hum diaphragma fixo, igualmente vazado, e cuberto com huma valvula E, que ſe abre de baixo para cima. E ao corpo da bomba ſe une em CB o tubo conductor $CBOQ$, pelo qual ſe levanta a agua até o lugar do ſeu deſtino.

124 Para explicar o jogo deſta bomba, ſupponhamos que o embolo no primeiro inſtante eſtá no ponto mais baixo do eſpaço que deſcreve. Eſtá claro, que a agua, em virtude do proprio pezo, deve levantar as valvulas F, E, e ſubir pelo corpo da bomba até o livel MN; e quando tiver chegado a elle, ou ao menos, quando eſtiver cheio de agua o eſpaço comprehendido entre as valvulas, eſtas ſe fecharáõ pelo pezo que lhes reſta no fluido. Entaõ levantando o embolo, a valvula inferior F ficará fechada, a ſuperior E ſe abrirá, e a agua comprehendida

entre

entre as duas valvulas ſerá forçada a levantar-ſe acima do livel *MN*. Abaixando outra vez o embolo, a valvula *E* ſe fechará, e embaraçará a deſcida da agua ſuperior, a valvula *F* ſe abrirá, e tornará a encher-ſe de agua o eſpaço comprehendido entre ellas. Eſta agua paſſará tambem para cima da valvula *E*, em ſe levantando o embolo; e aſſim por diante.

125 Por meio deſta bomba póde a agua levantar-ſe a qualquer altura, applicando-ſe a força competente. Eſta ſe calcúla, como na bomba aſpirante; e no eſtado do equilibrio ſuſtentará além do pezo do embolo, e da grade *abcd*, o pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do embolo, e a altura igual á da agua levantada acima do livel do manancial. O producto do embolo ſe determina, como na aſpirante, ſem reſtricçaõ alguma.

126 A bomba *aſpirante e comprimente* (Fig. 39.) he composta de hum tubo de aſpiraçaõ *ACBK* mergulhado na agua *MN*; de hum corpo de bomba *CTSB*; e de hum tubo conductor *HLOQ*. Em *CB* e *VP* eſtaõ duas valvulas *E*, *F* que ſe abrem de baixo para cima; e o embolo naõ he vazado como nas outras, mas maciſſo, e joga no corpo da bomba ſem deſcer abaixo de *HY*, para naõ tapar a entrada *HL* do tubo conductor.

Bem ſe vè, que fazendo ſubir e deſcer o embolo alternativamente, a agua ſobe primeiramente pelo tubo de aſpiraçaõ, e corpo de bomba, como na bomba aſpirante ordinaria, ſendo os movimentos das valvulas *E*, *F* abſolutamente os meſmos em ambos os caſos. Depois que a agua chega á baſe do embolo, he comprimida por elle quando deſce, e obrigada a ſubir pelo tubo conductor. Tornando-ſe a levantar, aſpira nova agua; e deſcendo a faz paſſar ao tubo conductor atraz da primeira; e aſſim por diante.

127 He facil de achar a força motriz neſta bomba, para o ſimples eſtado do equilibrio. Primeiramente, ſuppondo que pela aſpiraçaõ ſobe a agua até *ts*, he evidente que eſtando entaõ fechada a valvula *F*, a potencia applicada ao embolo ſuſtenta além do pezo delle huma parte do pezo da atmosfera, igual ao pezo de huma colunna de agua que tem a baſe igual á do meſmo embolo, e a altura igual á diſtancia vertical de *ts* ao livel *MN* da agua exterior. Em ſegundo lugar, quando deſce e comprime

prime a agua, estando fechada a valvula E, sustenta o pezo de huma columna de agua que tem a mesma base que elle, e por altura a distancia da dita base ao plano horizontal que passa pelo ponto O, onde a agua tem chegado. Neste caso o pezo do embolo ajuda a potencia.

128 Algumas vezes se dispoem esta bomba de maneira, que o embolo em lugar de aspirar quando sobe, e comprimir quando desce, como na Fig. 39, comprime quando sobe, e aspira quando desce, como na Fig. 40. Mas a força motriz se calcúla do mesmo modo em ambos os casos.

129 Tais saõ as tres especies primordiais de bombas, ás quais se reduziráõ sempre todas as que se podem imaginar, e construir. Por isso naõ podem aperfeiçoar-se realmente estas maquinas, senaõ procurando diminuir a fricçaõ quanto he possivel, empregando embolos bem feitos, valvulas muito fieis &c; no que ainda resta hum campo dilatado á industria dos Artistas. As miudezas da construcçaõ, e a escolha das materias proprias para formar as peças de huma bomba, naõ pertencem ao meu objecto. Póde sobre isso consultar-se a *Architectura Hydraulica* de Belidor, havendo cautela com a theorica que elle dá do mechanismo das bombas, porque he summamente defeituosa.

130 Em qualquer das tres bombas, que havemos declarado, a sahida da agua naõ he continua, mas intermittente. Para remediar este defeito, ha muitos annos que se costuma guarnecer o tubo conductor de huma caixa RK (Fig. 41.), que communica com o tubo interrompido em G e H, sendo fechada exteriormente de todos os lados. Esta caixa está primeiramente cheia de ar na sua densidade natural. Depois, quando se anda com o embolo, a agua que sobe pelo braço $CBDQ$ se derrama em parte na caixa RK, e condensa o ar nella incluido, cortando-lhe a communicaçaõ com o ar externo, e reduzindo-o a ocupar sómente o espaço $kryx$. Entaõ abaixando o embolo, o ar assim condensado se dilata, forçando a agua a descer de kr até KR, e conseguintemente a subir pelo braço $GHQD$. Continuando o mesmo jogo, subirá a mesma agua sem interrupçaõ pelo referido braço, e a bomba desaguará por conseguinte com hum fluxo continuo, ao menos sensivelmente.

131 Alguns

131 Alguns conſtructores imaginaõ erradamente, que a *caixa do ar* dobra o effeito deſta maquina. Devem reparar, que a bomba naõ póde dar mais agua do que levanta o embolo quando ſobe; e que a força motriz, ſendo a velocidade conſtante, emprega ſempre a meſma acçaõ, quer levante a dita agua directamente até o lugar do ſeu deſtino, quer introduza parte della na caixa do ar, para dahi ſer levantada pela elaſticidade delle. Porque no ſegundo caſo he neceſſario comprimir o ar da caixa *KR*; e eſta força com a que ſe emprega em levantar a outra parte da agua pelo braço *GHQD* abſorbe a acçaõ inteira da força motriz, como no primeiro caſo. Donde ſe vê, que ſe por huma parte he o fluxo continuo quando ha caixa de ar, por outra he dobrada a velocidade com que a agua ſahe, quando o fluxo he intermittente; e o producto he o meſmo em ambos os caſos, ſendo as outras couſas iguais. He pois inutil a caixa do ar nas bombas, que tem ſimpleſmente por objecto levantar a agua; mas ſerá proveitoſa nas bombas, que ſervem para extinguir os incendios, porque hum fluxo continuo de agua apaga mais facilmente o fogo, do que ſendo interrompido, ainda que ſeja entaõ maior a ſua velocidade.

132 Mas ſem recorrer á caixa de ar, póde fazer-ſe huma bomba de fluxo continuo, ſegundo a idea de *M.* de la Hire (*Mem. de l' Acad.* 1716.), que com ſucceſſo tem ſido executada por Thilaye e Quentin, Meſtres bombeiros de Ruaõ, os quais appreſentáraõ á Academia, cada hum ſua bomba conſtruida ſegundo o principio de M. de la Hire. A de Quentin conſta de hum corpo de bomba *CF* (Fig. 42.), de dous tubos de aſpiraçaõ *H*, K, e de dous conductores *Nu*, *fgb* que a certa altura ſe unem em hum ſó. O corpo da bomba *CF*, e o tubo conductor *fgb* ſaõ diſpoſtos, como na bomba aſpirante e comprimente da Fig. 39. As quatro valvulas *de concha* S, s, S', s' ſe abrem e fechaõ alternativamente duas a duas. Em *yz* e *mn* eſtaõ duas aberturas, pelas quais o corpo da bomba communica com os conductores. A haſte *z* do embolo paſſa por huma chapa de cobre *CB*; e nella deve mover-ſe de maneira, que o ar exterior naõ poſſa entrar de modo algum no corpo da bomba *CF*.

O effeito deſta maquina he facil de comprehender. Supponhamos, que o embolo no primeiro inſtante eſtá no ponto

ponto mais baixo *F*. Entaõ, levantando-se até *m*, deixa atraz de si hum vazio; o ar inferior abre a valvula *S* em virtude da sua dilataçaõ; a pressaõ da atmosfera obriga a agua a subir; e ao mesmo tempo o ar comprehendido entre a chapa *CB* e a base superior do embolo levanta a valvula *s*, e sahe por ella. Abaixando o embolo, fechaõ-se as valvulas *S* e *s*, e abrem-se as outras *S'* e *s'*, huma pela compressaõ da agua que o embolo faz entrar pela abertura *yz* no tubo *fgb*, e a outra pela dilataçaõ do ar que está no tubo *H*, no espaço *Nm*, e no espaço comprehendido entre a cabeça do embolo e a chapa *CB*; e assim por diante. Assim que o corpo da bomba está todo cheio de agua, o embolo aspira e comprime ao mesmo tempo, e o fluxo da agua deve ser necessariamente continuo, ao menos sensivelmente. Na bomba de Quentin, para maior segurança da continuidade, se ajunta ao tubo *fgb* huma caixa de ar *AE*, que M. de la Hire naõ havia empregado. Os commissarios nomeados pela Academia acháraõ, que esta bomba produzia muito bem o seu effeito.

133 Os tubos das bombas sofrem algumas vezes forças muito consideraveis. Quando saõ feitos de materias flexiveis, como de chumbo, de cobre, e ainda de ferro, achar-se-ha a espessura que devem ter, para naõ arrebentarem, por meio da theorica que demos no Cap. I. (n. 53.).

134 Para dar movimento ás bombas, usa-se de toda a especie de agentes, como de homens, cavallos, correntes de aguas &c, conforme as circunstancias. Quando he necessario elevar grande quantidade de agua, á proporçaõ se aumenta a força motriz; e para que ella exercite continuamente o mesmo esforço, formaõ-se muitas ordens de bombas de maneira, que suba huma parte dos embolos, quando desce a outra.

Na Fig. 43, *MNB* he huma manivella vertical, movida ao redor do seu eixo pela potencia P, que por meio das duas cadeias *V* e *T* faz jogar alternativamente ao redor dos seus eixos *C* e *E* os dous quartos de circulo verticais *ACO*, e *GEF*, aos quais saõ applicadas as cadeias *S* e *H* dos embolos de duas bombas, que se levantaráõ e abaixaráõ alternativamente, guardando sempre a mesma posiçaõ vertical.

Na

Na Fig. 44 ſe repreſenta huma manivella horizontal, deſtinada a mover os embolos de duas bombas. As cadeias S, e H vaõ paſſar por duas roldanas fixas A, O que mantém os embolos em huma direcçaõ ſempre vertical; e a manivella he movida por huma roda, que a corrente da meſma agua faz andar.

135 Huma das invençoens mais ingenhoſas neſta parte, foi a applicaçaõ que no principio deſte ſeculo ſe começou a fazer do vapor da agua, para dar movimento ás bombas. Por experiencias continuas ſe ſabe, que a agua expoſta á acçaõ do fogo ſe dilata, e lança de ſi em fórma de vapor hum fluido muito ſutil e elaſtico, capaz de vencer grandes obſtaculos. Fazendo pois ferver a agua em huma caldeira $AMNE$ (Fig 45.) debaixo do cylindro vazio $ACDE$, guarnecido de hum embolo movel P, o vapor della paſſando pela abertura mn obrigará o embolo a ſubir, vencendo a preſſaõ da atmosfera que carrega ſobre elle; e para ſer o movimento mais vivo ſe ajuda com hum pezo B applicado á extremidade H da alavanca HO apoyada em T. Havendo chegado o embolo á altura dezejada, ſe o vapor ſe condenſar ſubitamente pela injecçaõ de agua fria, introduzida pelo regiſto R, ou de qualquer outra maneira, far-ſe-ha hum vazio no eſpaço que era occupado pelo meſmo vapor. Entaõ a preſſaõ da atmosfera, que ſupponho maior que o pezo B, carregando ſobre o embolo o fará deſcer; e aſſim por diante.

136 O pezo B deve ſer regulado de maneira, que o embolo ſuba e deſça com igual velocidade. Supponhamos pois $OT = A$, $HT = a$, a baſe do embolo $= b^2$, a altura da columna de agua que tendo a baſe b^2 equivale á preſſaõ do vapor contra a baſe do embolo $= H$, e a altura de outra columna de agua da meſma baſe equivalente á preſſaõ da atmosfera ſobre o embolo $= b$. Eſtá claro, que o movimento ſerá uniforme, quando tivermos a equaçaõ

$$A(Hb^2 - bb^2) + Ba = Abb^2 - Ba$$

e por conſeguinte $B = \dfrac{Ab^2(2b - H)}{2a}$.

Seja por exemplo $A = a$, $H = b$; e acharemos $B = 16\,b^2$, iſto he, deverá o pezo B ſer igual ao de huma columna de agua, que tem por baſe b^2, e por altura 16 pés.

137 Aſ-

137 Assim consiste todo o mechanismo deste movimento na dobrada acçaõ do vapor da agua, e da pressaõ da atmosfera; e para se fazer de huma maneira continua, he necessario que o mesmo movimento da maquina abra o registo da injecçaõ a seu tempo, como se póde executar de muitas maneiras. A descripçaõ da Maquina que em Fresne serve de esgotar a agua das minas de carvaõ póde verse no tomo 1° do nosso Original desde a pag. 125 até 139.

CAPITULO III.

Do equilibrio dos fluidos com os solidos.

138 A Superficie de hum solido mergulhado em qualquer fluido he comprimida por elle em todos os seus pontos da mesma maneira, e pela mesma rasaõ que saõ comprimidas as paredes dos vasos, em que os mesmos fluidos se contém. De todas estas pressoens resulta huma força, que tende a levantar o corpo, a qual naõ póde ser destruida, senaõ pelo pezo delle, ou por hum agente exterior, ou pelo concurso de huma e outra causa. Para examinarmos as condiçoens deste equilibrio, he necessario trazer á lembrança a proposiçaõ seguinte.

139 *Se no meio de cada hum dos lados* EA, AB, BC, CD, DE *de hum polygono inflexivel* (Fig.46.) *se applicarem perpendicularmente as potencias* P, Q, R, S, T *proporcionais aos mesmos lados, e dirigidas todas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, no plano do polygono, estas potencias estaraõ em equilibrio.*

Porque, como duas forças concurrentes em hum ponto, e a sua resultante que passa necessariamente pelo mesmo ponto, podem ser representadas pelos lados de hum triangulo perpendiculares cada hum a cada huma das ditas forças, está claro que tirando as diagonais BE, BD, e sendo as duas forças P, Q perpendiculares e proporcionais aos lados EA, AB do triangulo EAB, deve a resultante dellas, que chamaremos X, ser perpendicular e proporcional ao lado BE do mesmo triangulo. E porque esta força X deve passar pelo ponto de concurso a das componentes P, Q, que he evidentemente o centro do circulo circumscrito ao triangulo EAB, deve a mesma

força

força X ſer perpendicular ao meio da corda BE. Do meſmo modo ſe moſtra, que as duas forças T, X daõ huma reſultante Y proporcional a BD, e perpendicular ao meio de BD; e que as duas forças R, S daõ huma reſultante Z proporcional a BD, e juntamente perpendicular ao meio de BD. Logo as duas reſultantes finais ſaõ iguais entre ſi; e porque ſuppomos que todas as forças obraõ de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, as meſmas reſultantes ſeraõ directamente contrarias. Logo ſeraõ mutuamente deſtruidas; e por conſeguinte o ſyſtema de todas as forças eſtará em equilibrio.

140 A demonſtraçaõ ſerá ſempre a meſma, qualquer que ſeja a poſiçaõ e o numero dos lados do polygono. Donde ſe ſegue em geral, que *ſe a cada hum dos elementos do perimetro inflexivel de huma figura rectilinea, curvilinea, ou mixtilinea, forem applicadas perpendicularmente, e no meſmo plano da figura, forças proporcionais aos meſmos elementos, e todas dirigidas de fóra para dentro, ou de dentro para fóra, eſtas forças eſtaraõ em equilibrio.*

141 Iſto ſuppoſto, imaginemos que a parte do corpo mergulhada na agua ſe divide em huma infinidade de ſecçoens por planos horizontais, e que a ſuperficie convexa de cada huma das ſecçoens ſe divide em infinitos trapezios por planos verticais, e perpendiculares aos meſmos trapezios. Seja $MNYZ$ (Fig. 47.) a baſe de huma deſtas ſecçoens, e Ma a baſe de hum dos trapezios de que ſe compoem a ſuperficie convexa della, o qual trapezio chamaremos X. Pelo ponto M (Fig. 48.) conduza-ſe o plano $AMDB$ vertical, e perpendicular ao trapezio X, cuja interſecçaõ com o plano horizontal $MNYZ$ ſerá a recta MY perpendicular ao elemento Ma; pelo ponto m infinitamente perto de M conſidere-ſe hum plano horizontal my, que repreſenta a baſe ſuperior da ſecçaõ propoſta; e do ponto M levante-ſe a vertical MP até a ſuperficie do fluido AB.

Tomando pois a gravidade eſpecifica do fluido por unidade, já ſabemos que o trapezio X que tem Ma por baſe, e Mm por altura, ſerá comprimido perpendicularmente por huma força $MF = Ma.Mm.MP$ (n. 39.). Reſolvendo-a em duas, huma horizontal ME, e outra vertical MG, os triangulos ſemelhantes MHm, MEF, nos

daraõ

daraõ $ME = MF \frac{MH}{Mm}$, e EF, ou $MG = MF \frac{Hm}{Mm}$; e ſubſtituindo o valor de MF, teremos $ME = Ma . MP . MH$, e $MG = Ma . MP . Hm$. Pelo que reſpeita pois ás forças horizontais, como $MP . MH$ he conſtante para cada ſecçaõ, eſtá claro que ſaõ proporcionais aos elementos Ma, e conſeguintemente eſtaraõ em equilibrio (n. 140.), iſto he, teremos $\int Ma . MP . MH = 0$. E pelo que reſpeita ás forças verticais, he evidente que $\int Ma . Hm . MP$ repreſenta o volume do fluido, cujo lugar he occupado pelo corpo. Logo,

1.º A ſoma, ou a reſultante das forças verticais, com que o fluido tende a levantar o corpo, he igual á ſoma dos pequenos pezos elementares, de que ſe compoem o pezo total do fluido deslocado pelo meſmo corpo.

2.º As direcçoens deſtas duas forças coincidem em huma meſma linha vertical; porque as direcçoens das ſuas forças elementares correſpondentes eſtaõ em huma meſma vertical. Donde concluiremos, que o esforço, com que o fluido tende a levantar o corpo, paſſa pelo centro de gravidade do volume do fluido deslocado, ou pelo centro de gravidade da parte do corpo mergulhada nelle, e conſiderada como homogenea.

142 Logo, ſe hum corpo deixado á acçaõ da gravidade, eſtiver ſuſtentado em equilibrio ſobre hum fluido, deveráõ neceſſariamente ter lugar ao meſmo tempo as duas condiçoens ſeguintes.

I. *O pezo do corpo deve ſer igual ao pezo do fluido, cujo lugar occupa*; porque para haver equilibrio he neceſſario, que o pezo do corpo ſeja igual á força, que tende a levantallo verticalmente.

II. *O centro de gravidade do corpo, e o da parte mergulhada no fluido, conſiderada como homogenea, devem eſtar em huma meſma linha vertical*; porque para haver equilibrio he neceſſario que as forças naõ ſómente ſejaõ iguais, mas tambem directamente oppoſtas.

143 Donde ſe ſegue, que *toda a figura plana homogenea, dividida em duas partes iguais e ſemelhantes por hum eixo ſuppoſto vertical; e todo o ſolido de revoluçaõ homogeneo ſituado verticalmente, naõ ſendo de maior gravidade eſpecifica que o fluido, ſe ſuſtentaráõ em equilibrio neſta poſiçaõ*. Porque eſtá claro, que neſtes termos o pezo da figura

gura, ou do corpo, he ſuſtentado verticalmente pela força vertical do fluido, e que o centro de gravidade da figura, ou do ſolido, e o da parte mergulhada eſtaõ ambos na meſma linha vertical.

He de advertir, que a inverſa deſta propoſiçaõ naõ he verdadeira geralmente; iſto he, ſe hum corpo homogeneo, dividido em partes ſymmetricas pelo ſeu eixo, eſtiver em equilibrio ſobre hum fluido, naõ ſe ſegue que o eixo eſteja vertical; porque como adiante veremos, o meſmo corpo póde ter outras ſituaçoens de equilibrio.

144 Segue-ſe tambem, que *todo o corpo priſmatico homogeneo, que tem o eixo horizontal, eſtará em equilibrio ſobre hum fluido, quando o centro de gravidade da ſecçaõ feita pelo meio delle parallelamente ás baſes, eſtiver na meſma vertical com o centro de gravidade da parte mergulhada da meſma ſecçaõ.* Porque os centros de gravidade do priſma, e da parte mergulhada coincidem manifeſtamente com os centros da referida ſecçaõ.

145 Seja M o volume de hum corpo, N a parte delle mergulhada no fluido, P a ſua gravidade eſpecifica, e p a do fluido. Pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $PM = pN$. Donde ſe ſegue,

1.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for igual á do fluido, o corpo ſe mergulhará todo, e ficará indifferente para eſtar em equilibrio em qualquer profundidade; porque entaõ temos $M = N$.

2.º Que ſe a gravidade eſpecifica do fluido for maior que a do corpo, eſte ſerá ſuſtentado por aquelle; porque entaõ he $N < M$.

3.º Que ſe a gravidade eſpecifica do corpo for maior que a do fluido, o corpo naõ ſerá ſuſtentado, mas deſcerá por elle; porque entaõ temos $PM > pN$.

146 Suppondo, que o corpo he ſuſtentado pelo fluido, a equaçaõ $PM = pN$ nos dará $P : p :: N : M$, iſto he, *a gravidade eſpecifica do corpo he para a do fluido, como o volume da parte mergulhada para o volume total do corpo.*

147 Pela meſma equaçaõ ſe vê, que conhecendo ſimpleſmente o pezo abſoluto do corpo, e a gravidade eſpecifica do fluido, ſe póde calcular a parte mergulhada. Supponhamos que o corpo peza 20 libr., que eſtá ſuſtentado em equilibrio ſobre a agua, e que hum pé cubico de agua peza 70 libr. Pela hypotheſe ſerá $PM = 20$ libr.,

e cone conseguintemente $N = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$ de hum pé cubico $= 493 \frac{5}{7}$ pollegadas cubicas.

148 Se aumentarmos, ou diminuirmos huma quantidade ao volume N mergulhado no fluido, será necessario para conservar o equilibrio, que ajuntemos ou tiremos ao pezo total do corpo hum pezo q de maneira, que tenhamos $PM \pm q = pN \pm pn$, ou $q = pn$. Donde se vê, que o pezo additivo, ou subtractivo deve ser igual ao pezo do volume n do fluido, que o corpo ha de deslocar de mais ou de menos, do que no primeiro estado.

149 Esta força, com que os fluidos sustém os corpos boyantes, he hum meio de grande utilidade para tirar grandes pezos do fundo dos rios, e do mar. Toma-se hum batel de grande volume, que se faz mergulhar, carregando-o quanto he possivel. Neste estado se prende fortemente ao pezo, que se quer levantar; e entaõ sendo descarregado, o esforço vertical do fluido o faz subir, e com elle o pezo pertendido, com huma força que no primeiro instante he igual ao pezo de que o batel houver sido descarregado.

150 Suppondo agora, que o corpo M he especificamente mais grave que o fluido, e sendo Q o pezo que he necessario applicar ao braço de huma balança para o sustentar, depois de ser inteiramente mergulhado no fluido; está claro, que restando-lhe entaõ o pezo $PM - pM$, devemos ter $Q = PM - pM$, ou $PM - Q = pM$, ou $P(PM - Q) = PpM$, donde se tira $P : p :: PM : PM - Q$. Logo *a gravidade especifica do corpo he para a do fluido, como o pezo absoluto do corpo para o pezo que perde dentro do fluido.*

Assim, conhecendo a gravidade especifica do corpo, he facil de conhecer a do fluido, e reciprocamente. Mas deve notar-se, que pezando hum corpo no ar contra outro mergulhado em hum fluido, o primeiro parece mais leve do que he na realidade, porque tambem perde no ar alguma parte do seu pezo. Esta he muito pequena, e ordinariamente se póde desprezar sem erro sensivel. Querendo porem toda a exacçaõ possivel, far-se-ha a operaçaõ tração no recipiente da maquina pneumatica, ou calcular-se-ha o pezo de hum volume de ar igual ao do corpo, e se ajuntará ao pezo observado do mesmo corpo.

151 Quando he dada a gravidade especifica do fluido, immediatamente se pode conhecer o volume do solido pela equação $p\,M = P\,M - Q$, que dá $M = \frac{P\,M - Q}{p}$. Se o pezo do corpo he, por exemplo, de 20 libr. e na agua de 10 libr. teremos $P\,M = 20$, $Q = 10$, e $M = \frac{20 - 10}{70} = \frac{1}{7}$ de hum pé cubico. Conhecido o volume do corpo, e o seu pezo absoluto, facilmente se deduzirá a sua gravidade especifica, supposto sempre que he homogeneo, e que naõ tem cavidades interiores.

152 Se o mesmo solido M se mergulhar totalmente em outro fluido, que tenha a gravidade especifica p', e se para o sustentar for necessario o pezo Q', teremos as duas equações $Q = P\,M - p\,M$, $Q' = P\,M - p'\,M$, as quaes daõ $p\,(P\,M - Q') = p'\,(P\,M - Q)$, e conseguintemente $p : p' :: P\,M - Q : P\,M - Q'$. Logo *as gravidades especificas de dous fluidos saõ entre si, como os pezos que nelles perde hum mesmo corpo especificamente mais grave que qualquer delles.*

153 Se no mesmo fluido, cuja gravidade especifica he p, se mergulharem dous solidos que tenhaõ os volumes M, M', e as gravidades especificas P, P', e se inteiramente mergulhados conservarem os pezos Q, Q'; teremos $Q = P\,M - p\,M$, e $Q' = P'\,M' - p\,M'$. Donde se tira $M : M' :: P\,M - Q : P'\,M' - Q'$, isto he, *os volumes dos corpos saõ na razaõ dos pezos que perdem no mesmo fluido.*

154 Daqui se póde resolver o problema, que o Rey Hieron propoz a Archimedes, sobre a coroa de ouro, em que havia suspeitas de ter o Ourives metido huma quantidade de prata. Seja C o pezo absoluto da coroa, e K o pezo que perde na agua, x a quantidade de prata que contém, e conseguintemente $C - x$ a quantidade de ouro. Supponhamos que hum volume dado M de ouro perde na agua o pezo P, e que hum volume dado de prata m perde o pezo p; e acharemos que o volume

me de ouro. $C-x$ deverá perder o pezo $\frac{P(C-x)}{M}$, e o volume de prata x o pezo $\frac{px}{m}$ (n. 153.). Logo teremos $\frac{P(C-x)}{M}+\frac{px}{m}=K$, e conseguintemente será

$$x=\frac{m(MK-PC)}{Mp-mP}.$$

155 Ainda que as analogias, que havemos mostrado (n. 150. e 152.), saõ os meios mais exactos para achar as gravidades especificas dos fluidos, com tudo na pratica se usa muitas vezes de hum instrumento, que chamaõ *areometro*, ou *péza-licor*, por ser a operaçaõ mais simples. A forma deste instrumento he arbitraria; com tanto que divida facilmente o fluido quando se mergulha nelle, e que se mantenha em huma situaçaõ vertical. O de Fahrenheit tem estas propriedades.

He este composto de hum tubo cylindrico comprido CD (Fig. 49.), e de duas bolas ocas A, B; na mais baixa e mais pequena B se lança mercurio, ou qualquer materia pezada, que sirva de *lastro* ao instrumento, e lhe dê estabilidade; e a outra maior A, sempre metida no fluido, serve de levantar o centro de gravidade da parte do areometro mergulhada no fluido, e desse modo lhe augmenta a estabilidade. Este instrumento póde mostrar as gravidades especificas dos fluidos, ou fazendo-o sempre mergulhar a huma mesma profundidade, por meio de pezos com que se carréga; ou conservando-o sempre com o mesmo pezo, e deixando-o mergulhar livremente a differentes profundidades. Examinemos brevemente ambos os casos.

Supponhamos, que o areometro se mergulha até o ponto M em dous fluidos differentes. Sejaõ P, e $P\pm q$ os pezos absolutos que para isso deve ter, p e p' as gravidades especificas dos fluidos, e M o volume da parte constante do areometro $MABN$; e teremos $P=pM$, e $P\pm q=p'M$ (n. 145.). Logo $p'=\frac{p(P\pm q)}{P}$.

Querendo porém que o areometro conserve sempre o mesmo pezo, sejaõ K e M os pontos até onde elle se mergu-

mergulha, e reprefentando o feu pezo conftante por P, os volumes $KABH$ e $MABN$ por M e M', e as gravidades efpecificas dos fluidos por p e p'; teremos $P = pM$, e $P = p'M'$. Logo $p' = \frac{pM}{M'}$.

Sendo o areometro de huma figura regular, e conhecida, podem determinar-fe os volumes M e M' pelas regras da Geometria; mas a forma do inftrumento naõ permitte ufar-fe defte meio com exactidaõ. O melhor he graduallo experimentalmente, mettendo-o com differentes pezos confecutivos em hum fluido de gravidade efpecifica conhecida, e determinando affim os volumes correfpondentes, que elle mergulha no fluido (n. 147.).

Agora paffemos ao exame particular da fituaçaõ, que deve tomar huma figura boyante fobre hum fluido, para fatisfazer ás condições do equilibrio; objecto util em muitas occafiões, e fobre tudo na Architectura naval.

156 Probl. I. *Achar a fituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo* ESG *fobre o fluido* MN, *fuppondo que naõ tem mais que hum angulo* S *mergulhado nelle* (Fig. 50.).

Tirem-fe as rectas SP, SQ do angulo S para os pontos P e Q no meio das bafes EG, MN dos dous triangulos ESG, MSN, e nellas tomem-fe as partes $SR = \frac{2}{3} SP$, e $SO = \frac{2}{3} SQ$, que determinaõ os centros de gravidade dos dous triangulos. Conduzaõ-fe as rectas RO, PQ, que feraõ parallelas entre fi, e perpendiculares a MN, porque RO deve fer vertical. Do ponto P tirem-fe PA, PD perpendiculares aos lados SE, SG produzidos fe for neceffario, e conduzaõ-fe as rectas PM, PN que feraõ iguaes, por fer $QM = QN$, e PQ perpendicular a MN.

Ifto pofto, feja $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, o angulo $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade efpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$. Porque os dous triangulos ESG, MSN, que tem o angulo commum S, faõ entre fi como os productos $SE \times SG$, $SM \times SN$, pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = p'xy$.

E porque os triangulos rectangulos PAS, PDS daõ $PA = c\,sen\,m$, $SA = c\,cos\,m$, $PD = c\,sen\,n$, $SD = c\,cos\,n$, e por conseguinte $AM = c\,cos\,m - x$, $DN = c\,cos\,n - y$, teremos $PM^2 = (c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2$, e $PN^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$. Logo pela segunda condiçaõ do equilibrio teremos $(c\,sen\,m)^2 + (c\,cos\,m - x)^2 = (c\,sen\,n)^2 + (c\,cos\,n - y)^2$, ou $xx - 2cx\,cos\,m = yy - 2cy\,cos\,n$. E substituindo o valor de $y = \frac{pab}{p'x}$, resultará a equaçaõ

4.

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpabx\,cos\,n}{p'} - \frac{p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

cujas raizes combinadas com a equaçaõ $y = \frac{pab}{p'x}$ daráõ a conhecer as differentes posições do triangulo, que admittem equilibrio.

157 Pela regra de Descartes se sabe, que em huma equaçaõ, cujas raizes saõ reais, ha tantas positivas quantas saõ as mudanças dos sinais + e −, e tantas negativas quantas vezes se achaõ consecutivos dous sinais +, ou dous sinais −. Por quanto pois falta na nossa equaçaõ o termo que deveria ter x^2, he facil de ver que se todas as suas raizes saõ reais, deveráõ ser necessariamente tres positivas, e huma negativa. A negativa naõ póde servir, porque naõ suppomos que MS seja produzida alem do ponto S. As positivas mostraõ tres posições reais de equilibrio, com tanto que seja $x < a$, e $y < b$.

158 Para darmos huma applicaçaõ mais simples da nossa equaçaõ geral, supponhamos que he isosceles o triangulo ESG. Neste caso temos $a = b$, $n = m$, e a equaçaõ será

$$x^4 - 2cx^3\,cos\,m + \frac{2cpa^2x\,cos\,m}{p'} - \frac{p^2a^4}{p'^2} = 0,$$

a qual se resolve em duas do segundo gráo

$$x^2 - \frac{a^2p}{p'} = 0,$$

$$x^2 - 2cx\,cos\,m + \frac{a^2p}{p'} = 0.$$

A primeira destas dá $x = \pm a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, ou simplesmente $x = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, porque a raiz negativa he inutil. E porque temos neste caso $y = \frac{p a^2}{p' x}$, será tambem $y = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$; logo $y = x$, e conseguintemente he tambem isosceles o triangulo MSN, ou (que vem a ser o mesmo) a base do triangulo proposto he parallela á superficie do fluido em huma das situações de equilibrio.

A segunda dá $x = c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$; e substituindo este valor na equaçaõ $y = \frac{p a^2}{p' x}$, teremos

$$y = \frac{p a^2}{p'\left(c\cos m \pm \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}\right)} =$$

$c\cos m \mp \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$; e este segundo caso dará as duas combinações seguintes

$$\begin{cases} x = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}, \end{cases}$$

as quais mostraõ duas situações novas de equilibrio, quando os valores de x e y saõ reais, e cada hum delles menor que a. Para que estas duas condições tenhaõ lugar, he necessario 1°, que seja $\frac{a^2 p}{p'} < (c\cos m)^2$, ou $\frac{p}{p'} <$

$\frac{(c\, cos\, m)^2}{a^2}$. 2°, que ſeja $a > c\, cos\, m + \sqrt{\left[(c\, cos\, m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$, ou $\frac{p}{p'} > \frac{2\, a\, c\, cos\, m - a\, a}{a\, a}$.

Se o triangulo propoſto for por exemplo equilateral, teremos $c\, cos\, m = \frac{3}{4} a$; e o triangulo, além da ſituaçaõ de equilibrio indicada pela primeira equaçaõ, poderá ter outras duas, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} < \frac{9}{16}$, e $\frac{p}{p'} > \frac{8}{16}$, iſto he, com tanto que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſeja comprehendido entre os limites das fracções $\frac{9}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

159 PROBL. II. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum triangulo homogeneo SEG ſobre o fluido MN, ſuppondo que os dous angulos E, G eſtaõ metidos nelle* (Fig. 51.).

A ſoluçaõ do problema precedente póde accommodarſe a eſte, imaginando a Fig. 50 virada de baixo para cima; mas para maior clareza, daremos a ſoluçaõ directamente. Para iſſo advertiremos, que os tres centros de gravidade do triangulo *SEG*, do trapezio *MNGE*, e do triangulo *SMN* eſtaõ ſempre na meſma linha recta: mas para haver equilibrio he neceſſario que o centro de gravidade do triangulo *SEG* e o da parte mergulhada *MNGE* eſtejaõ em huma meſma vertical; logo os centros de gravidade dos dous triangulos *SEG*, *SMN* eſtaráõ tambem na meſma vertical.

Feita pois a conſtrucçaõ, como no Problema antecedente, igualmente teremos $PM = PN$, e fazendo $SE = a$, $SG = b$, $SP = c$, $PSE = m$, $PSG = n$, $SM = x$, $SN = y$, a gravidade eſpecifica do triangulo $= p$, e a do fluido $= p'$; teremos $SEG : SMN : SE \times SG : SM \times SN$, e conſeguintemente $SEG - SMN$, ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$; donde ſe tira $EMNG = \frac{SEG(SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG} = \frac{SEG(ab - xy)}{ab}$.

Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = p'(ab - xy)$.

Pela

Pela ſegunda, acharemos juſtamente como no problema antecedente $xx - 2cx \cos m = yy - 2cy \cos n$; e eliminando y por meio da equaçaõ precedente, teremos finalmente

$$x^4 - 2cx^3 \cos m + \frac{2c(p'-p)abx \cos n}{p'} - \frac{(p'-p)^2 a^2 b^2}{p'^2} = 0,$$

ſobre cujas raizes faremos as meſmas reflexões; e combinando-as com a equaçaõ $pab = p'(ab - xy)$, determinaremos as differentes ſituações, em que he poſſivel o equilibrio.

160 Se o triangulo for iſoſceles, a equaçaõ precedente ſe reſolverá em duas do ſegundo gráo, a ſaber

$$x^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p} = 0$$

$$x^2 - 2cx \cos m + \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$, e $y = a\sqrt{\frac{p'-p}{p'}}$; moſtrando que o triangulo tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando a baſe EG eſtá horizontal. E a ſegunda dá eſtas duas combinações

$$\begin{cases} x = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c\cos m - \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c\cos m + \sqrt{\left[(c\cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases},$$

as quais repreſentaõ outras duas poſições de equilibrio, com tanto que ſeja $\frac{p}{p'} > \frac{a^2 - (c\cos m)^2}{a^2}$, e $\frac{p}{p'} < \frac{2a^2 - 2ac\cos m}{a^2}$. Por exemplo, ſe o triangulo for equilatero, e conſeguintemente $c\cos m = \frac{3}{4}a$; haverá tres ſituações de equili-

 brio,

brio, todas as vezes que o valor de $\frac{p}{p'}$ ſe achar entre os limites de $\frac{7}{16}$ e $\frac{8}{16}$.

161 Probl. III. *Achar a ſituaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo BHSK, ſuppondo que naõ tem mais que hum angulo S mergulhado no fluido* (Fig. 52.).

Conduzindo do ponto S para o meio de MN a recta SQ, e tomando $SO = \frac{2}{3} SQ$, ſerá O o centro de gravidade do triangulo MSN. E porque o centro de gravidade do rectangulo eſtá na interſecçaõ R das diagonais BS, HK, a recta RO deverá ſer vertical, ou perpendicular a MN. Tome-ſe $RP = \frac{1}{2} SR$, e conduza-ſe PQ que ſerá parallela a RO, e conſeguintemente perpendicular ao meio de MN, donde ſe ſegue que ſaõ iguais as rectas PM, PN. Em fim do ponto P tirem-ſe as rectas PA, PD perpendiculares a SH, SK reſpectivamente.

Iſto poſto, ſeja $SH = a$, $SK = b$, $SM = x$, $SN = y$, o pezo eſpecifico do rectangulo $= p$, o do fluido $= p'$; e pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos $pab = \frac{p'xy}{2}$.

E porque $SP = \frac{3}{4} SB$, teremos $PA = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} b$, $PM^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4} a - x\right)^2$, e $PN^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4} b - y\right)^2$. Logo, pela ſegunda condiçaõ do equilibrio, teremos $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$. Comparando eſta equaçaõ com a precedente, e eliminando y, acharemos finalmente a equaçaõ

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{p'} - \frac{4p^2a^2b^2}{p'^2} = 0,$$

por meio da qual ſe determinaráõ as differentes ſituações

ções de equilibrio do rectangulo proposto.

162 Se o rectangulo for hum quadrado, teremos $a = b$, e a equaçaõ precedente se resolverá nas duas seguintes

$$x^2 - \frac{2pa^2}{p'} = 0,$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{p'} = 0,$$

a primeira das quais dá $x = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, e conseguintemente $y = a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, por onde se mostra que o quadrado tem huma posiçaõ de equilibrio, quando a sua diagonal HK está horizontal, como he evidente por si mesmo; e a segunda dá

$$x = \frac{1}{4}a\left[3 \pm \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}a\left[3 \mp \sqrt{\frac{9p' - 32p}{p'}}\right],$$

donde resultaõ outras duas posições de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ se achar entre os limites de $\frac{9}{32}$ e $\frac{8}{32}$.

163 Pelo mesmo methodo se achará a situaçaõ de equilibrio de hum rectangulo, que tiver tres angulos mergulhados no fluido. Para isso naõ he necessario mais que imaginar a Fig. 52 virada com o de baixo para cima, de maneira que os tres angulos B, H, K sejaõ os que estaõ mergulhados, e que o triangulo MSN seja a parte que sahe fóra da superficie do fluido MN. Assim, conservando as mesmas denominações, teremos evidentemente, para resolver o problema, estas duas equações

$$pab = p'\left(ab - \frac{xy}{2}\right)$$

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}.$$

164 Probl. IV. *Achar a situaçaõ de equilibrio de hum rectangulo homogeneo* BHSK *no caso de ter dous angulos* H, S *mergulhados no fluido* (Fig. 53.).

Produzaõ-se as rectas SH, NM até concorrerem em Z; de de Z para o meio de SN tire-se a recta ZL, que passará necessariamente pelos centros de gravidade dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$. Seja G o centro de gravidade do triangulo ZSN, e F o do triangulo ZHM; e conduzaõ-se as rectas GT, FK parallelas a SN, HM, e as rectas GV, FI perpendiculares a ZN. Ora, como he necessario para haver equilibrio, que o centro de gravidade do rectangulo $BHSK$ e o do trapezio $MHSN$ estejaõ na mesma vertical, se pelo ponto R meio da diagonal HK, e centro de gravidade do rectangulo, se tirar RO perpendicular á superficie do fluido MN, nesta perpendicular se achará o centro de gravidade do trapezio $MHSN$.

Seja $SH = a$, $SK = b$, $HM = x$, $SN = y$, $ZN = z$, o pezo especifico do rectangulo $= p$, e o do fluido $= p'$. Está claro, que he o trapezio $MHSN = \frac{a(x+y)}{2}$, e que pela primeira condiçaõ do equilibrio teremos a equaçaõ $pab = \frac{p'(x+y)a}{2}$.

Agora conduzindo pelo ponto Z o eixo vertical ZY, e considerando os momentos dos triangulos ZSN, ZHM, e do trapezio $MHSN$ a respeito delle, teremos $MHSN . ZO = ZSN . ZV - ZHM . ZI$. Porém os triangulos semelhantes ZSN, ZHM daõ $ZS = \frac{ay}{y-x}$, $ZH = \frac{ax}{y-x}$, e conseguintemente $ZSN = \frac{ay^2}{2(y-x)}$, e $ZHM = \frac{ax^2}{2(y-x)}$; e além disto temos $ZM = ZN \frac{HM}{SN} = \frac{zx}{y}$, e as propriedades dos centros de gravidade daõ $ZT = \frac{2}{3} ZN = \frac{2z}{3}$, $ZK = \frac{2}{3} ZM = \frac{2zx}{3y}$, $GT = \frac{1}{3} NS = \frac{y}{3}$, $FK = \frac{1}{3} MH = \frac{x}{3}$. Logo nos triangulos semelhantes ZSN, GVT, FIK, teremos VT =

$= \frac{GT.SN}{ZN} = \frac{yy}{3z}$, $IK = \frac{FK.SN}{ZN} = \frac{xy}{3z}$, e conseguintemente $ZV = ZT - VT = \frac{2zz - yy}{3z}$, $ZI = ZK - IK = \frac{(2zz - yy)x}{3yz}$. E substituindo todos estes valores na equaçaõ $MHSN.ZO = ZSN.ZV - ZHM.ZI$, acharemos $\frac{a(x+y)}{2} ZO = \frac{(2zz - yy)a(y^3 - x^3)}{6yz(y-x)}$ $= \frac{(2zz - yy)a(yy + xy + xx)}{6yz}$.

Conduzindo agora pelo ponto R a recta RX parallela a MH ou a SN, e produzindo OR até E, os triangulos semelhantes ZSN, RXE daraõ $XE = \frac{SN.RX}{ZS} = \frac{b(y-x)}{2a}$, e conseguintemente $ZE = ZH + HX + XE$ $= \frac{ax}{y-x} + \frac{a}{2} + \frac{b(y-x)}{2a} = \frac{a(y+x)}{2(y-x)} + \frac{b(y-x)}{2a}$; e os triangulos semelhantes ZSN, ZOE daráõ $ZO = \frac{ZE.ZS}{ZN} = \frac{a^2 y(y+x)}{2z(y-x)^2} + \frac{by}{2z}$; donde em fim resulta $MHSN.ZO = \frac{a^3 y(y+x)^2}{4z(y-x)^2} + \frac{aby(y+x)}{4z}$. Comparando este segundo valor de $MHSN.ZO$ com o primeiro, e observando que $zz = yy + \frac{a^2 y^2}{(y-x)^2}$, feitas todas as reducçoens, resultará a equaçaõ $2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2 xy + a^2 y^2 + a^2 x^2 - 3by^3 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0$, a qual se resolve nas duas seguintes

$$yy - 2xy + xx = 0$$

$$2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0.$$

Vejamos as consequencias particulares, que dellas resultaõ.

A

A primeira dá $y = x$. Donde se segue, que o rectangulo estará em equilibrio quando o lado mergulhado no fluido for horizontal, como he evidente por si mesmo, o que se applica igualmente a cada hum dos lados do rectangulo.

Substituindo na segunda em lugar de y o seu valor $\frac{2pb - p'x}{p'}$, teremos

$$x^2 - \frac{2pbx}{p'} + \frac{4p^2b^2}{p'^2} - \frac{3pb^2}{p'} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

donde se tira

$$x = \frac{pb}{p'} \pm \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'^2}{2}\right]};$$

e por conseguinte

$$y = \frac{pb}{p'} \mp \frac{1}{p'}\sqrt{\left[3b^2(pp' - p^2) - \frac{a^2p'}{2}\right]};$$

Assim póde ter o rectangulo mais duas situaçoens de equilibrio, com tanto que os valores de x e de y sejaõ reais, positivos, e cada hum delles menor que b.

165 Supponhamos que $b = a$, isto he, que o rectangulo se reduz a hum quadrado. Primeiramente estará em equilibrio, quando o lado metido no fluido for horizontal. E além disso teremos estas equaçoens

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{ap}{p'} - \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]} \\ y = \frac{ap}{p'} + \frac{a}{p'}\sqrt{\left[3(pp' - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]}, \end{cases}$$

que daõ outras duas situaçoens de equilibrio, quando o valor de $\frac{p}{p'}$ se achar entre os limites $\frac{3}{4}$ e $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

166 Probl. V. *Achar a posiçaõ que deve tomar sobre hum fluido a parabola homogenea A B C, suppondo que os pontos* B, C *estaõ fóra delle* (Fig. 54.).

He

He evidente, que a parabola tem huma ſituaçaõ de equilibrio, quando o ſeu eixo he vertical, ſuppondo ſempre que ella he eſpecificamente mais leve que o fluido. Mas aqui trata-ſe de ſaber em geral, ſe ella póde tambem pôr-ſe em equilibrio, quando o eixo eſtiver inclinado.

Seja AD o eixo, e BD ou DC a ultima ordenada. Pelo ponto H meio de MN tire-ſe o diametro HF, parallelo a DA, e pelo ponto F a ordenada FG, a recta FX para o fóco X, e a tangente FT que encontra o eixo produzido em T, e que pela propriedade da parabola he parallela a MN. Do ponto M tire-ſe MY perpendicular a FH produzida, e ajuntem-ſe os centros de gravidade K, I da parabola, e da parte mergulhada com a recta KI, que em virtude do equilibrio deve ſer vertical, ou perpendicular a MN.

Iſto poſto, ſeja $AD = a$, $BD = b$, o parametro do eixo $AD = \frac{bb}{a} = c$, $FH = x$, $MH = y$, $FG = z$, a gravidade eſpecifica da parabola $= p$, e a do fluido $= p'$. Pela propriedade deſta curva temos $AK = \frac{3}{5}a$, $FI = \frac{3}{5}x$, $GT = \frac{2z^2}{c}$, $FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$, e os triangulos ſemelhantes FGT, MYH daõ $FT : FG :: MH : MY = \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$. Porém a area parabolica $ABC = \frac{4}{3}BD.DA$, e a area $FMN = \frac{4}{3}MY.FH$. Logo, pela primeira condiçaõ do equilibrio, teremos $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$.

Como a ſegunda condiçaõ ſe enche evidentemente, quando o eixo he vertical, e conſeguintemente $z = 0$, neſte caſo particular ſerá $pab = p'yx = p'x\sqrt{cx}$, donde reſulta $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Mas tornemos ao problema geral, em que o ponto F naõ cahe ſobre o ponto A.

A propriedade da parabola dá $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$, yy

$= x.4$

$= x . 4 FX = \frac{x(cc + 4zz)}{c}$, e $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(cc + 4zz)}}{\sqrt{c}}$.

Substituindo este valor na equaçaõ geral $pab = \frac{p'cxy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, acharemos igualmente $x = a \sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Donde se vê, que o valor de x he sempre o mesmo, qualquer que seja a posiçaõ da parabola sobre o fluido.

Os dous triangulos semelhantes FGT, ILH daõ $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e conseguintemente $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$, e os triangulos semelhantes FGT, KLO daõ tambem $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mas por outra parte temos $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x + \frac{z^2}{c}$. Logo igualando os dous valores de OK, e reduzindo, acharemos $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ou metendo em lugar de x o seu valor acima achado

$$zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}};$$

equaçaõ, que determinará outras duas situaçoens de equilibrio, com tanto que seja $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$, ou $\frac{p}{p'} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$, quantidade supposta real, e positiva.

167 Probl. VI. *Achar a situaçaõ de equilibrio da mesma parabola, suppondo que o seu centro de gravidade naõ he o mesmo que o da figura, ou por naõ ser homogenea em toda*

toda a sua extensaõ, ou por estar carregada de algum pezo applicado a qualquer ponto della, que naõ seja o centro de gravidade da figura (Fig. 54.).

Seja K' o centro de gravidade do systema de todos os pezos applicados á parabola, que estaõ em equilibrio com a pressaõ vertical do fluido. Sendo dado de posiçaõ o ponto K', se delle conduzirmos K'V perpendicular ao eixo AD, seraõ tambem dadas as rectas K'V, AV. Seja FMN o espaço parabolico mergulhado no fluido; e pelo centro de gravidade delle I, considerado como homogeneo, e pelo ponto K' tire-se a recta K'I, que vai encontrar o eixo no ponto K, e que deve ser vertical por causa do equilibrio.

Acabando a construcçaõ, como no problema precedente, conservando as mesmas denominaçoens, fazendo mais K'$V = k$, $AV = b$, e observando que p significa aqui a gravidade especifica de hum corpo homogeneo de pezo e volume igual ao da parabola ABC, teremos pela primeira condiçaõ do equilibrio $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc + 4zz)}}$, donde resultará $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$.

Os tres triangulos semelhantes FGT, ILH, KLO daraõ como acima $OK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$, e os triangulos semelhantes FGT, KVK' daraõ $GT : FG :: VK' : VK = \frac{ck}{2z}$; logo $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$: mas temos por outra parte $OV = VT - OT = AV + AT - HF = b + \frac{z^2}{c} - x$; logo igualando entre si os dous valores de OV, teremos

$$10z^3 - (10cb - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0,$$

cujas raizes (depois de haver substituido em lugar de x o seu valor achado) determinaráõ as situaçoens de equilibrio da parabola proposta; e suppondo $k = 0$, e $b = \frac{3}{5}a$, cahiremos

mos na foluçaõ do problema precedente, como deve fer.

Eftes exemplos baftaõ para moftrar, como fe deve proceder em outros cafos, ou fejaõ homogeneos os corpos fuftentados pelos fluidos, ou naõ.

Da Eftabilidade dos corpos fluctuantes.

168 AS fituações theoricas do equilibrio naõ faõ todas uteis na pratica. Porque exiftindo muitas caufas, como as agitações do ar, e do fluido, que tendem a defordenar o equilibrio, requer-fe que efte tenha certa *eftabilidade*, ifto he, que em virtude do pezo do folido e da preffaõ vertical do fluido fe reftitua ao primeiro eftado, no cafo de haver fido alterado por alguma caufa; e para iffo naõ fomente he neceffario, que os centros de gravidade do folido e da parte mergulhada eftejaõ na mefma vertical, mas tambem que tenhaõ entre fi a pofiçaõ e diftancia competente. Ifto he o que agora examinaremos, trazendo primeiro á lembrança algumas propofições de Mechanica, de que nos havemos de fervir.

169 Seja CBE hum corpo de qualquer figura (Fig. 55.), que em virtude da gravidade ofcilla livremente ao redor do ponto, ou eixo fixo C. Tirando para o centro de gravidade delle a recta CG, e as verticais CN, GL, reprefente GL o pezo do corpo $= P$, e refolvendo efta força em duas, huma GK na direcçaõ de CG, que ferá deftruida pela refiftencia do ponto C; e a outra GF perpendicular a CG, que produzirá o movimento de rotaçaõ; teremos $GF = P \,.\, \mathit{fen}\, GCN$, e o feu momento a refpeito do eixo $C = P \,.\, CG \,.\, \mathit{fen}\, GCN$. Seja mn o arco defcrito em hum inftante pela particula m, e QR hum arco femelhante defcrito com hum raio dado CQ. O momento da particula m em ordem ao mefmo eixo ferá $m \,.\, mn \,.\, Cm = m \,.\, Cm^2 \dfrac{QR}{CQ}$; e como $\dfrac{QR}{CQ}$ he conftante para todas as moleculas, e a foma de todos os productos $m \,.\, Cm^2$ he o momento de inercia relativo ao eixo C, fazendo efte momento $= S$, teremos $S \dfrac{QR}{CQ}$ por

exprefexpreſſaõ do momento de rotaçaõ da maſſa inteira, o qual ſendo igualado ao da força GF, que o produz, dará

$$P.CG.\mathit{sen}GCN = S\frac{QR}{CQ}, \text{ e } \frac{QR}{CQ} = \frac{P.CG.\mathit{sen}GCN}{S}.$$

170 Suppondo outro corpo, que oſcille ao redor do eixo c (Fig. 56.), e deſignando por p, cg, gcn, s, qr, cq as quantidades analogas a P, CG, GCN, S, QR, CQ, teremos $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{sen}gcn}{s}$. Logo, ſe for $gcn = GCN, cq = CQ$, e $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$, teremos $qr = QR$. Donde ſe vê, que os corpos deſcreverão eſpaços iguais em tempos iguais; e por conſeguinte, que faraõ oſcillações iſochronas, qualquer que ſeja a grandeza do angulo inicial GCN, ou gcn.

Se alem diſſo for taõ pequeno o pezo p, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ conſiderar no centro de gravidade g, teremos $s = p.cg^2$, e a equaçaõ $\frac{P.CG}{S} = \frac{p.cg}{s}$ dará $cg = \frac{S}{P.CG}$, expreſſaõ do comprimento de hum pendulo ſimples (Fig. 56.), que faz as oſcillações no meſmo tempo que o outro pendulo compoſto (Fig. 55.).

171 Se o pendulo ſimples (Fig. 56.) deſcrever hum arco total muito pequeno gt, que ſe confunda com a ordenada gn; teremos $\mathit{sen}\,gcn = \frac{gn}{cg} = \frac{gt}{cg}$, e $\frac{qr}{cq} = \frac{gx}{cg}$; e a equaçaõ $\frac{qr}{cq} = \frac{p.cg.\mathit{sen}gcn}{s}$ ſe mudará em $gx = \frac{gt}{cg}$. Do meſmo modo ſuppondo que o arco total he yt, e que em hum inſtante deſcreve o arco yz, teremos $yz = \frac{yt}{cg}$. Logo $gx : yz :: \frac{gt}{cg} : \frac{yt}{cg} :: \frac{p.gt}{cg} : \frac{p.yt}{cg}$. Mas $\frac{p.gt}{cg}$ e $\frac{p.yt}{cg}$ ſaõ evidentemente as for-

ças.

ças, que fazem correr á mesma massa p os espaços gx, yz; logo, sendo estes proporcionais ás mesmas forças, seraõ descritos em tempos iguais. O mesmo se demonstra de todos os outros elementos correspondentes dos arcos totais; logo as oscillações de hum mesmo pendulo saõ isochronas, quaisquer que sejaõ os arcos totais, com tanto que sejaõ muito pequenos.

172 Se a qualquer corpo perfeitamente livre se applicar huma força F, cuja direcçaõ FH naõ passe pelo centro de gravidade delle G (Fig. 57.), he demonstrado na Dynamica que o centro de gravidade se moverá parallelamente a FH, como se a força lhe fosse immediatamente applicada. E se por FH se conduzir o plano $ABDE$, que passe pelo centro de gravidade G, e do ponto G se tirar GH perpendicular a FH, e GO perpendicular ao plano $ABDE$, tambem he demonstrado que o corpo tomará hum movimento de rotaçaõ ao redor do eixo GO, como se este fosse fixo, com tanto que o plano $ABDE$ divida o corpo em duas partes iguais, e semelhantes. Faltando esta condiçaõ, o movimento rotatorio naõ se fará simplesmente ao redor do eixo GO, mas em differentes sentidos ao redor do ponto G. Mais abaixo determinaremos em geral as oscillações dos corpos fluctuantes. Aqui suppomos a referida condiçaõ, ao menos sensivelmente, e consideramos somente as oscillações, que se fazem ao redor do eixo GO, suppondo que este he immovel, ou que passa sempre pelos mesmos pontos do corpo.

173 Sendo pois a velocidade do centro de gravidade parallelamente a $FH = V$, e o pezo do corpo $= P$, teremos $V = \frac{F}{P}$. E se do ponto G com o raio dado GQ se descrever o arco QR, medida do angulo de rotaçaõ, e se fizer o momento de inercia relativo ao eixo $GO = S$, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{F.GH}{S}$ (n. 169.).

Agora suppondo, que alem da força F obra sobre o corpo a força da gravidade; que a força F he dirigida verticalmente de baixo para cima; e que o plano $ABDE$ he vertical, e conseguintemente horizontal o eixo GO; está

eſtá claro, que em lugar da equaçaõ $V = \frac{F}{P}$ teremos $V = \frac{F - P}{P}$. A outra equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F \cdot GH}{S}$ ficará ſempre a meſma; porque paſſando a força P pelo centro de gravidade, naõ póde reſultar della movimento algum de rotaçaõ.

174 A applicaçaõ deſtes principios ao noſſo caſo he evidente. A força *F* repreſenta a preſſaõ vertical do fluido que tende a levantar o corpo, ao meſmo tempo que o pezo delle *P* tende a fazello deſcer; e pela equaçaõ $V = \frac{F - P}{P}$ ſe vê, que para o corpo naõ ter movimento vertical, he neceſſario que ſeja $F = P$. *A* ſegunda equaçaõ $\frac{QR}{GQ} = \frac{F \cdot GH}{S}$ moſtra tambem, que naõ eſtando na meſma vertical os dous centros de gravidade do corpo, e da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, haverá neceſſariamente movimento de rotaçaõ ao redor do eixo *G O*, tanto maior quanto for maior o momento *F . G H*, por ſer *S* conſtante. Eſta velocidade angular póde chegar, ou apartar da vertical, que paſſa pelo centro de gravidade do corpo, o centro de gravidade da parte mergulhada. No primeiro caſo haverá eſtabilidade na ſituaçaõ do equilibrio, e no ſegundo naõ a haverá; mas qualquer leve agitaçaõ baſtará para virar o corpo. Expliquemos eſta theorica geral com alguns exemplos.

175 Probl. I. *Determinar as condiçoẽs da eſtabilidade de huma figura plana A B K ſuſtentada ſobre hum fluido M N* (Fig. 58.).

Póde ſucceder, ou que o centro de gravidade da figura inteira eſteja mais alto que o da parte mergulhada, conſiderada como homogenea, ou tambem que o primeiro eſteja mais baixo que o ſegundo, por naõ ſer homogenea a figura, ou por eſtar carregada de algum pezo eſtranho na parte inferior. Examinemos ſeparadamente ambos os caſos, para maior clareza.

176 Sejaõ *G*, *F* os centros de gravidade da figura *A B K*, e da parte *M N K*, os quais devem eſtar na meſma vertical *G Z* em quanto ſubſiſte o equilibrio. Supponhamos,

ponhamos, que por qualquer acçaõ externa se inclina hum pouco a figura para a banda de B, ou que qualquer ponto Z da dita vertical descreve o pequeno arco ZQ, de maneira porém que a nova parte mergulhada mnK seja igual á primeira MNK; e que neste estado se deixa á acçaõ da gravidade, e da pressaõ do fluido. Bem se vê, que sendo $mn\text{K} = MN\text{K}$, o centro de gravidade da figura naõ ha de subir, nem descer; e que tirando a parte commua NVmK, ficará $NVn = MVm$, ou $NV.nf = MV.mb$, sendo nf, mb as alturas dos dous triangulos. Porém $nf : mb :: Vf : Vb :: VN : VM$, por ser a inclinaçaõ muito pequena; logo $nf = \frac{VN.mb}{VM}$, e conseguintemente $NV.nf$ ou $MV.mb = \frac{VN^2\,mb}{MV}$, e $MV = NV$. Donde se segue, que o ponto V, onde se cortaõ as duas linhas de fluctuaçaõ MN, mn está no meio de MN.

Conduzindo agora pelo ponto I, centro de gravidade de mnK, a recta Ig perpendicular á superficie actual do fluido mn, até encontrar a vertical GZ no ponto g; está claro, que ficando g acima do centro de gravidade da figura G, o esforço do fluido que obra de baixo para cima da parte para onde se fez a inclinaçaõ, tende a levantar a figura, e restituilla á primeira situaçaõ, na qual haverá conseguintemente estabilidade. Falta achar a medida desta, ou o momento da pressaõ vertical actual do fluido a respeito do centro de gravidade G, ao redor do qual se faz o movimento de rotaçaõ.

Do ponto G tire-se GE perpendicular á direcçaõ Ig da pressaõ vertical do fluido; e pelos pontos G, F, e pelos centros de gravidade dos triangulos NVn, MVm, as rectas Gi, Fd, yx, zu parallelas a Eg. He evidente, que $mn\text{K} . GE$ he o momento de mnK em ordem ao ponto G, e que deve ser igual ao de $(MN\text{K} + NVn - MVm)$ em ordem ao mesmo ponto. Representando pois a resultante da pressaõ vertical por mnK, ou por $(MN\text{K} + NVn - MVm)$; deve notar-se, que as forças MNK, NVn saõ dirigidas de baixo para cima, e MVm de cima para baixo; e por conseguinte, que todas tres saõ conspirantes, e tendem a fazer girar a figura segundo a direcçaõ AKB para a restituir á primeira situaçaõ. Isto posto, temos o momento de $MNK = MNK.GD$, o de $NVn = NVn.xi = \frac{NV.nf.xi}{2}$, e o de $MVm = MVm.zi = \frac{NV.nf.zi}{2}$. Logo $mnK.GE = MNK.GD + \frac{NV.nf}{2}(xi + zi) = MNK.GD + \frac{MN.nf}{4}(mn - \frac{1}{3}mn)$; e porque $mn = MN$ sensivelmente, será $mnK.GE = MNK.GD + \frac{MN^2.nf}{6}$. Mas sendo QZ, que mede a inclinaçaõ, hum arco descrito com hum raio dado GQ, temos $GD = FG\frac{QZ}{GQ}$, e $nf = NV\frac{QZ}{GQ} = \frac{MN}{2}.\frac{QZ}{GQ}$. Logo $mnK.GE = \left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}$, expressaõ da estabilidade da figura proposta.

177 Daqui se mostra, que a figura neste caso sempre terá estabilidade; e que sendo as mais cousas iguais, a estabilidade será tanto maior, quanto mais baixo estiver o centro de gravidade da figura a respeito do centro de gravidade da parte mergulhada, ou quanto for maior a distancia FG destes dous centros.

178 Supponhamos, que partindo a figura da posiçaõ bKa para vir á primeira BKA, descreve o ponto Q ao redor do ponto G o arco QR em hum instante; e representando por S o momento de inercia da figura ABK em ordem ao eixo perpendicular em G ao plano da figura, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{\left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}}{S}$ (n.173.), ou $QR = QZ\left(\frac{12\,MNK.FG + MN^3}{12\,S}\right)$. Donde se vê, que sendo constante o segundo factor do segundo mem-

bro, a figura deverá oscillar á maneira dos pendulos; e comparando a equação com a outra $gx = \frac{gt}{cg}$ (n. 171.), supposndo $gx = QR$, e $gt = QZ$, teremos o valor de $cg = \frac{12S}{12MNK + MN^3}$, comprimento do pendulo simples, que fará as oscillações isochronas ás da figura ABK.

Hum navio no mar está no caso da figura proposta. Se pela pancada de huma vaga, ou por hum tufaõ de vento he tirado da situação do equilibrio, assim que he deixado á acçaõ do seu pezo e da pressaõ vertical da agua, começa a arfar de popa a proa, ou a balançar de costado a costado, fazendo oscillações isochronas entre si em cada especie, até que sendo destruidos estes movimentos pela resistencia da mesma agua se torna a pôr na situação do equilibrio.

179 Agora para examinarmos o segundo caso, supponhamos que tudo fica da mesma maneira que no precedente, exceptuando sómente que o centro de gravidade da figura ABK em lugar de estar em G estará em G', acima do centro de gravidade F da parte primitivamente mergulhada MNK. Pelo ponto G' conduza-se a recta $E'G'D'$ perpendicular ás duas parallelas Fd, Ig que passaõ pelos centros de gravidade das partes mergulhadas nas duas respectivas situações, e que saõ perpendiculares á superficie actual do fluido mn. Está claro, que representando a pressaõ vertical do fluido pela area mnK ou MNK, o momento desta força será $mnK \cdot G'E'$; e tomando em lugar delle o da força $(MNK + NVn - MVm)$ composta das tres forças MNK, NVn, MVm, he facil de ver que a força MNK dirigida por Fd tende a aumentar a inclinação da figura, fazendo-a girar segundo BKA; e que as outras duas tendem, como no caso precedente, a fazella girar segundo AKB, e a restituir conseguintemente o equilibrio. Assim acabando a solução do mesmo modo, acharemos por expressaõ da estabilidade da figura a quantidade $\left(\frac{MN^3}{12} - MNK \cdot FG'\right)\frac{QZ}{GQ}$.

180 He logo manifesto, que sendo $\frac{MN^3}{12} > MNK \cdot FG'$,

a

a figurá terá eſtabilidade, e tanto maior quanto maior for o exceſſo do primeiro membro ſobre o ſegundo; que ſendo $\frac{MN^3}{12} = MNK.FG'$, a figura ſerá indifferente para girar ſegundo AKB, ou ABK; e que ſendo $\frac{MN^3}{12} < MNK.FG'$, a figura naõ terá eſtabilidade nenhuma, e longe de tornar á primeira ſituaçaõ, cadavez ſe apartará mais della até ſe virar.

181 Donde ſe ſegue, que o limite da maior altura, que póde ter o centro de gravidade da figura, acima do centro de gravidade da parte mergulhada, compativelmente com a eſtabilidade, he determinado pela equaçaõ $FG' = \frac{MN^3}{12MNK}$. E porque neſta ſuppoſiçaõ o momento da preſſaõ vertical do fluido he nullo, e eſte he repreſentado em geral por $mnK.G'E'$, ſerá $G'E' = 0$, e conſeguintemente o ponto G' coincidirá com g, interſecçaõ das duas perpendiculares conduzidas á ſuperficie do fluido nas duas poſições da figura. Eſte ponto g he o que M. Bouguer no ſeu *Tratado do Navio* chama *metacentro*; e abaixo delle deve cahir ſempre o centro de gravidade do pezo total de hum navio com a ſua carga, para ter eſtabilidade ſobre as ondas do mar. K/

182 Repreſentando por S o momento de inercia relativo ao eixo perpendicular ao centro de gravidade da figura G', acharemos tambem do meſmo modo que o comprimento do pendulo ſimples, que deve fazer as oſcillações equidiuturnas ás da figura propoſta, ſerá repreſentado por $\frac{12S}{MN^3 - 12MNK.FG'}$.

183 Para reduzirmos pois eſta ſoluçaõ, ſeja a linha de fluctuaçaõ $MN = a$, a area mergulhada $MNK = b^2$, a diſtancia do centro de gravidade G ou G' da figura ao da parte mergulhada $F = h$, o raio conſtante $GQ = 1$, o arco $QZ = z$, o momento da força que tende a reſtituir a figura ao primeiro eſtado, e que conſtitue a ſua eſtabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo que faz as oſcillaçoens no meſmo tempo que as da figura $= L$; e teremos para ambos os caſos,

 $A =$

$$A = \frac{(a^3 \pm 12\, b\, b^2)\, z}{12}$$

$$L = \frac{12\, S}{a^3 \pm 12\, b\, b^2} \,.\,.$$

Quando ſe houverem de applicar eſtas formulas a exemplos particulares, deve conſiderar-ſe que em conſequencia das noſſas ſuppoſições, e raciocinios, b^2 repreſenta a preſſaõ vertical do fluido, ou (que vem a ſer o meſmo) o pezo abſoluto da figura $A\,B$ K; que a^3 he o producto do pezo abſoluto da area a^2, ſuppoſta do meſmo pezo eſpecifico que o fluido, multiplicado pela linha a; e que S he o producto de hum pezo conhecido (que ſempre ſe póde converter no de huma parte conhecida do fluido) multiplicado pelo quadrado de huma linha dada.

184 Exemplo. Seja a figura propoſta $A\,B$ K (Fig. 59.) hum triangulo iſoſceles homogeneo, e a parte mergulhada $M\,N$ K hum triangulo tambem iſoſceles. Conduzindo do vertice K a recta KD perpendicular ás baſes $M\,N$, $A\,B$, e ſuppondo $M\,N = a$, K$C = c$, $A\,B = f$, K$D = g$, e o pezo eſpecifico do fluido $= p$, ſerá neceſſario pôr na primeira formula do ſegundo caſo $p\,a^3$ em lugar de a^3, $\frac{p\,a\,c}{2}$ em lugar de b^2, $\frac{2}{3}\, g - \frac{2}{3}\, c$ em lugar de b; e teremos $A = \frac{p\,[\,a^3 - 4\,a\,c\,(g - c)\,]\, z}{12}$, quantidade que deve ſer poſitiva para haver eſtabilidade no triangulo.

Para determinar L, he neceſſario achar S. Tomando a reſpeito de huma particula $d\,M$ ſituada em qualquer ponto T, as coordenadas $G\,E = x$, $E\,T = y$, teremos $S = \int G\,T^2 . d\,M = \int y^2\, d\,M + \int x^2\, d\,M$. Se pelo ponto T ſe imaginar huma recta parallela a KD ſerá o ſeu valor $\frac{g\,(f - 2\,y)}{f}$, e teremos $\int y^2\, d\,M = \int \frac{g\,(f - 2\,y)}{f}\, y^2\, d\,y$.

Integrando, tomando o valor do integral quando $y = \frac{1}{2} f$, e dobrando o reſultado, ſerá $\int y^2\, d\,M = \frac{1}{48}\, g\, f^3$. Do meſmo modo conduzindo por T parallelamente a $A\,B$ a recta

recta VE, será esta $= \frac{f(2g-3x)}{6g}$, e teremos $\int x^2 dM$ $= \int \frac{f(2g-3x)}{6g} x^2 dx$. Integrando, tomando o valor do integral entre os limites $x = \frac{2}{3}g$, $x = -\frac{1}{3}g$, e dobrando o resultado, será $\int x^2 dM = \frac{fg^3}{36}$. Logo $S =$ $\frac{gf^3}{48} + \frac{fg^3}{36} = \frac{fg}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$. Porém $\frac{fg}{2}$ representa o pezo do triangulo ABK, que sendo igual ao do fluido deslocado pelo triangulo MNK terá por valor $\frac{1}{2}pac$. Logo $S = \frac{pac}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$, e substituindo este valor na segunda formula, teremos

$$L = \frac{c(3ff+4gg)}{12(a^2-4c(g-c))}.$$

185 Probl. II. *Determinar a estabilidade de hum corpo solido sustentado em equilibrio sobre hum fluido* (Fig.58.).

Póde succeder, como abaixo se verá, que o solido oscille ao mesmo tempo ao redor de differentes eixos, que passem todos pelo centro de gravidade. Mas aqui naõ consideramos mais que as oscillações simples, que se fazem ao redor de hum só eixo horizontal e immovel, que passa pelo centro de gravidade.

Seja ABK a secçaõ vertical do corpo perpendicular ao eixo de rotaçaõ, que he representado pelo ponto G ou G', e seja representado por F o eixo horizontal perpendicular á mesma secçaõ, que passa pelo centro de gravidade da parte do corpo merguihada no fluido. Acabando o resto da construcçaõ, como no Problema antecedente, tudo será do mesmo modo, com a differença sómente de que MN representa aqui o perfil da superficie de fluctuaçaõ do corpo, e que NVn, MVm representaõ duas unhas formadas pela rotaçaõ das superficies NV, MV ao redor do eixo horizontal designado por V no perfil ABK. Estas duas unhas seraõ iguaes, porque suppomos que o centro de gravidade do corpo, naõ sobe, nem desce. Donde se segue, que o ponto V he necessariamente te o centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ MN, porque a igualdade das unhas faz que as diſtancias dos centros de gravidade das duas ſuperficies NV, MV ao ponto V ſejaõ reciprocamente proporcionais ás meſmas ſuperficies.

|d

De tudo iſto ſe ſegue, que fazendo o raio conſtante $GQ = 1$, o arco QZ que mede a inclinaçaõ primitiva do ſolido, que ſuppomos muito pequena $= z$, a parte mergulhada repreſentada por $MNK = N$, a diſtancia do ponto G ou G' ao ponto $F = b$, a unha NVn ou MVm $= b^3 z$, o momento da unha NVn a reſpeito do eixo de rotaçaõ $= b^3 cz$, o momento da unha MVm a reſpeito do meſmo eixo $= b^3 fz$, o momento de inercia do corpo em ordem ao eixo de rotaçaõ $= S$, o momento da força que conſtitue a eſtabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo ſimples iſochrono $= L$; acharemos pelo meſmo methodo acima praticado

$$A = (b^3 c + b^3 f \pm bN)\, z$$

$$L = \frac{S}{b^3 c + b^3 f \pm bN};$$

formulas, ſobre as quais ſe faraõ reflexões analogas ás que fizemos ſobre as das figuras planas (n. 183.). As quantidades S, N, b, b, c, f ſaõ dadas pela figura do corpo, e o angulo z por hypotheſe.

He de notar, que em toda eſta theorica ſe deſpreza a reſiſtencia, que experimenta o corpo da parte do fluido na porçaõ mergulhada, e da parte do ar na porçaõ que tem fóra do liquido, como forças incomparavelmente menores que o pezo do corpo, e a preſſaõ vertical do fluido. Mas eſſas pequenas forças repetidas por certo tempo, vem a aniquilar as oſcillações; e o corpo ſe poem em equilibrio ſegundo as leis acima eſtabelecidas, ſe alguma nova cauſa o naõ embaraçar.

Theorica geral das oſcillações dos corpos fluctuantes.

186 NO artigo precedente examinamos hum caſo particular das oſcillações dos corpos fluctuantes; agora darei huma ſoluçaõ geral deſta queſtaõ por hum

hum methodo novo, e, se me naõ engano, muito simples; methodo, de que já me servi nas duas Memorias *sobre a arrumaçaõ da carga dos navios*, que ganháraõ parte dos premios da Academia em 1761 e 1765.

Para expor a minha soluçaõ com clareza, primeiro trarei á lembrança as proposições de Mechanica, em que ella se funda.

187 Quando quaisquer forças tendem a imprimir movimento em hum corpo, este lhes resiste por direcções contrarias em virtude da sua inercia; e em cada instante ha sempre equilibrio entre as forças sollicitantes, e as resistentes. Para determinarmos as leis deste equilibrio, imaginemos conduzidos por hum ponto fixo A (Fig. 60.) tres eixos AP, AC, AB perpendiculares entre si, e immoveis no espaço absoluto. Para ajudar a imaginaçaõ, podem conceber-se os dous eixos AP, AC situados no plano na figura, e AB perpendicular ao mesmo plano. Qualquer que seja o numero, e a direcçaõ das forças applicadas ao corpo, sempre poderáõ reduzir-se em cada instante a tres forças sómente, parallelas aos tres eixos AP, AC, AB. Supponhamos, que depois de assim reduzidas saõ representadas pelas rectas Ff, Ee, Dd. De qualquer ponto N do corpo abaixe-se MN perpendicular ao plano CAP, e pelo ponto M tire-se MP perpendicular a AP. Entaõ resolvendo a resistencia, que oppoem ao movimento huma molecula situada em N, em tres forças Np, Nm, Nn respectivamente parallelas aos tres eixos AP, AC, AB; está claro, que para estabelecer o equilibrio de que tratamos, he necessario 1º, que a resultante de cada huma destas forças elementares seja igual á força sollicitante que lhe corresponde; 2º, que o momento que provém das primeiras a respeito de cada hum dos nossos tres eixos seja igual ao momento correspondente que provém das segundas.

188 Assim, supposndo as forças $Ff = F$, $Ee = E$, $Dd = D$, e as rectas $AP = q$, $PM = r$, $NM = s$, o elemento do tempo $= dt$, e cada molecula do corpo $= dP$; teremos pela primeira condiçaõ estas tres equaçoens,

$$F = \int \frac{dP\,ddq}{dt^2},\ E = \int \frac{dP\,ddr}{dt^2},\ D = \int \frac{dP\,dds}{dt^2}.$$

189 E havendo ſuppoſto que as direcçoens das forças F, E, D encontraõ os planos BAC, BAP, CAP nos pontos F, E, D, ſe conduzirmos parallelamente a CA as rectas FO e DK para os eixos AB e AP, parallelamente a AB as rectas FQ e ER para os eixos AC e AP, e parallelamente a AP as rectas ES e DH para os eixos AB e AC; he evidente, que temos o momento da força F a reſpeito do eixo $AP = 0$, a reſpeito de $AC = F . FQ$, e a reſpeito de $AB = F . FO$; que o da força E a reſpeito de $AC = 0$, a reſpeito de $AB = E . ES$, e a reſpeito de $AP = E . ER$; e que o da força D a reſpeito de $AB = 0$, a reſpeito de $AC = D . DH$, e a reſpeito de $AP = D.DK$. Aſſim teremos relativamente a AC o momento unico repreſentado por $F . FQ - D . DH$, relativamente a AB outro repreſentado por $F . FO - E . ES$, e relativamente a AP outro repreſentado por $E . ER - D . DK$.

Analyzando do meſmo modo os momentos da reſiſtencia da molecula dP ſituada em N a reſpeito dos tres eixos AC, AB, AP, acharemos relativamente a AC hum momento unico repreſentado por $\int \frac{sdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPdds}{dt^2}$, relativamente a AB outro repreſentado por $\int \frac{rdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPddr}{dt^2}$, e relativamente a AP outro repreſentado por $\int \frac{sdPddr}{dt^2} - \int \frac{rdPdds}{dt^2}$.

Igualando pois cada hum deſtes momentos a cada hum das forças ſollicitantes, que reſpectivamente lhes correſpondem, teremos pela ſegunda condiçaõ outras tres equaçoens, a ſaber

$$F . FQ - D . DH = \int \frac{sdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPdds}{dt^2}$$

$$F . FO - E . ES = \int \frac{rdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPddr}{dt^2}$$

$$E . ER - D . DK = \int \frac{sdPddr}{dt^2} - \int \frac{rdPdds}{dt^2}.$$

190 Pelo centro de gravidade do corpo G imaginemos agora outros tres eixos GV, GT, GY parallelos cada hum a cada hum dos eixos fixos AP, AC, AB. Estes novos eixos saõ moveis com o centro de gravidade, mas cada hum delles fica sempre parallelo a si mesmo. Sejaõ a respeito do ponto G as tres coordenadas GV, VL, LN, que correspondem ao ponto N; e produzindo o eixo VG até encontrar o plano BAC no ponto Z, conduzaõ-se as rectas ZI, ZX parallelas respectivamente aos eixos AC, AB. Conservando as denominaçoens precedentes, e fazendo mais $ZG = Q$, $AX = R$, $AI = S$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$; a distancia da linha Ff ao plano $TGV = \alpha$, e ao plano $YGV = \beta$; a distancia da recta Ee ao plano $TGV = \gamma$, e ao plano $YGT = \delta$; e a distancia da recta Dd ao plano $YGT = \varphi$, e ao plano $YGV = \xi$; teremos evidentemente $q = Q + q'$, $r = R + r'$, $s = S + s'$, $ddq = ddQ + ddq'$, $ddr = ddR + ddr'$, $dds = ddS + dds'$, $FQ = S + \alpha$, $FO = R + \beta$, $ES = Q + \delta$, $ER = S + \gamma$, $DH = Q + \varphi$, $DK = R + \xi$.

Substituindo todos estes valores nas seis equaçoens fundamentais, em primeiro lugar teremos as tres equaçoens,

$$F = \int \frac{dP\,ddQ}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddq'}{dt^2},\ E = \int \frac{dP\,ddR}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddr'}{dt^2},\ D = \int \frac{dP\,ddS}{dt^2} + \int \frac{dP\,dds'}{dt^2}.$$

Porém, pela propriedade do centro de gravidade, $\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,ddr'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,dds'}{dt^2} = 0$; e além disso ddQ, ddR, ddS saõ constantes para todos os pontos do corpo. Logo as tres primeiras equaçoens seraõ reduzidas ás seguintes

$$F = \frac{P\,ddQ}{dt^2},\ E = \frac{P\,ddR}{dt^2},\ D = \frac{P\,ddS}{dt^2}.$$

Em segundo lugar, consideremos sómente as partes correspondentes $F.FQ$ e $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ da primeira das outras tres equaçoens; e teremos $F.FQ = FS + F\alpha$,

e

31

$$e\int\frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}=\int\frac{(dP(S+s')(ddQ+ddq'))}{dt^2}$$
$$=\int\frac{S\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{s'\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{S\,dP\,ddq'}{dt^2}+$$
$$\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}=\frac{PSddQ}{dt^2}+\frac{ddQ}{dt^2}\int s'dP+S\int\frac{dP\,ddq'}{dt^2}$$
$$+\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}=FS+\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$$, pondo em lugar de $\frac{PSddQ}{dt^2}$ o ſeu valor FS, e obſervando que pela propriedade do centro de gravidade he $\int s'dP=0$, e $\int\frac{dP\,ddq'}{dt^2}=0$. Feitas as meſmas operaçoens ſobre as outras partes correſpondentes das ſobreditas equaçoens, e omittindo os termos que ſe deſtroem, acharemos que ellas ſe reduzem finalmente ás tres ſeguintes,

$$F\alpha-D\varphi=\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,dds'}{dt^2}$$
$$F\beta-E\delta=\int\frac{r'\,dP\,ddq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,ddr'}{dt^2}$$
$$E\gamma-D\xi=\int\frac{s'\,dP\,ddr'}{dt^2}-\int\frac{r'\,dP\,dds'}{dt^2}.$$

191 Iſto poſto, reflectiremos que qualquer que ſeja o movimento de cada ponto N do corpo, relativamente ao centro de gravidade, ſempre podemos concebello como produzido pela rotaçaõ do corpo ao redor dos tres eixos GY, GV, GT. Supponhamos (Fig. 61.), que o ponto N eſtá no primeiro inſtante em H; e ſejaõ GE, EF, FH as coordenadas correſpondentes. Imaginemos, que em virtude da rotaçaõ do corpo ao redor do eixo GY, a recta FH girando parallelamente a ſi meſma, toma a poſiçaõ SK; que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GV, o ponto K chega a R; e que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GT, o ponto R chega a N. As coordenadas NL, LV, GV ſaõ aqui as meſmas que na figura precedente. Tirem-ſe as rectas GF, GS, DK; do ponto R abaixe-ſe RO perpendicular ao plano TGV; e pelo ponto O tire-ſe perpendi-

pendicularmente a GT a recta XO, que passa necessariamente pelo ponto L. Tirem-se tambem as rectas XR, XN; e dos pontos D, X levantem-se perpendicularmente ao plano TGV, ou parallelamente o eixo GY, as rectas DZ, XP.

192 Supponido pois $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$; e os angulos de rotaçaõ, ao redor do eixo $GY = x$, ao redor de $GV = y$, e ao redor de $GT = z$; teremos $DGS = EGF + x$, e conseguintemente $DS = GF \,.\, \mathrm{sen}\, DGS = \lambda \cos x + \psi\, \mathrm{sen}\, x$, e $GD = GF \,.\, \cos DGS = \psi \cos x - \lambda\, \mathrm{sen}\, x$. Do mesmo modo será $DO = DK \,.\, \mathrm{sen}\, RDZ = DS \,.\, \cos y + SK\, \mathrm{sen}\, y = \lambda \cos x \cos y + \psi\, \mathrm{sen}\, x \cos y + \mu\, \mathrm{sen}\, y$; $RO = DK \,.\, \cos RDZ = SK \cos y - DS\, \mathrm{sen}\, y = \mu \cos y - \lambda \cos x\, \mathrm{sen}\, y - \psi\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y$; $XL = XR \,.\, \mathrm{sen}\, NXP = XO \cos z - RO\, \mathrm{sen}\, z = \psi \cos x \cos z - \lambda\, \mathrm{sen}\, x \cos z - \mu \cos y\, \mathrm{sen}\, z + \lambda \cos x\, \mathrm{sen}\, y\, \mathrm{sen}\, z + \psi\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y\, \mathrm{sen}\, z$; $LN = XR \,.\, \cos NXP = RO \cos z + XO\, \mathrm{sen}\, z = \mu \cos y \cos z - \lambda \cos x\, \mathrm{sen}\, y \cos z - \psi\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y \cos z + \psi \cos x\, \mathrm{sen}\, z - \lambda\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, z$. E porque $XL = GV = q'$, $DO = VL = r'$, $LN = s'$, teremos $q' = \psi \cos x \cos z - \lambda\, \mathrm{sen}\, x \cos z - \mu \cos y\, \mathrm{sen}\, z + \lambda \cos x\, \mathrm{sen}\, y\, \mathrm{sen}\, z + \psi\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y\, \mathrm{sen}\, z$; $r' = \lambda \cos x \cos y + \psi\, \mathrm{sen}\, x \cos y + \mu\, \mathrm{sen}\, y$; $s' = \mu \cos y \cos z - \lambda \cos x\, \mathrm{sen}\, y \cos z - \psi\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y \cos z + \psi \cos x\, \mathrm{sen}\, z - \lambda\, \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, z$.

193 Assim, por meio destes valores, podemos eliminar q', r', s', ddq', ddr', dds' das equaçoens precedentes. Mas a respeito das tres quantidades $\int s' dP ddq' - \int q' dP dds'$, $\int r' dP ddq' - \int q' dP ddr$, $\int s' dP ddr' - \int r' dP dds'$, que vem a ser o mesmo respectivamente que $\int dP d(s'dq' - q'ds')$, $\int dP d(r'dq' - q'dr')$, $\int dP d(s'dr' - r'ds')$, deve notar-se que nas duas differenciaçoens que primeiro he necessario fazer para achar $d(s'dq' - q'ds')$, $d(r'dq' - q'dr')$, $d(s'dr' - r'ds')$, os angulos x, y, z saõ variaveis, e as quantidades ψ, λ, μ constantes; mas na integraçaõ que se segue só as quantidades dP, ψ, λ, μ devem ser consideradas como variaveis, e as outras devem escrever-se antes do final de integraçaõ, porque os integrais experimem entaõ os movimentos das partes do corpo.

Estas formulas geraes servem para determinar os movimentos de qualquer corpo; sollicitado por quaisquer forças. Agora mostraremos a applicaçaõ dellas ao nosso Problema

blema das oscillaçoens de hum corpo fluctuante, suppondo que ellas saõ muito pequenas, para maior simplicidade dos resultados.

194 Seja *ABK* (Fig. 62) huma secçaõ vertical do corpo no primeiro instante do movimento, feita por hum plano que passe pelo centro de gravidade do mesmo corpo G, e que contenha o eixo vertical *GY*, e o horizontal *GV*; *HPK* (Fig. 63.) outra secçaõ vertical, perpendicular á primeira, que passe tambem por *G*, e contenha o eixo vertical *GY* e o horizontal *GT*; *MENI* (Fig. 64.) a secçaõ horizontal do corpo, feita á superficie da agua, na qual *MN* he a secçaõ commua dos planos *MENI*, *ABK*; e *EI* a dos planos *MENI*, *HPK*. Os eixos *GY*, *GV*, *GT* saõ aqui os mesmos que na figura 60, ou 61. Para maior simplicidade do calculo, façamos passar, como he sempre permittido, o plano *ABK* (Fig. 62.) pelo centro de gravidade *L* do plano de fluctuaçaõ *MENI* (Fig. 64.). Suppondo, que o centro de gravidade *F* (Fig. 65.) da parte mergulhada no primeiro instante está posto a certa distancia muito pequena da vertical *GY*, por elle e pela dita vertical se conduza o plano *CDK*, que cortará o plano *MENI* segundo *RS*; e do mesmo ponto *F* tirem-se as rectas *FQ*, *FF'* respectivamente perpendiculares a *GY* e *RS*; e *Ff* (Fig.64.), perpendicular a *MN*. Aqui, e daqui por diante devem sempre combinar-se juntamente as quatro figuras 62, 63, 64, 65. Havendo-se concebido bem a sua posiçaõ respectiva, he necessario buscar em cada huma dellas as linhas, as superficies, e os solidos que havemos de designar.

195 Isto posto, he facil de ver que sendo o corpo sollicitado unicamente pela acçaõ do proprio pezo, e pela pressaõ vertical do fluido, teremos $F = 0$, $E = 0$, e $D =$ á differença entre a pressaõ vertical do fluido e o pezo do corpo; e por conseguinte, que o corpo naõ póde ter movimento progressivo horizontal, ou que $Q = 0$, e $R = 0$; mas que em virtude da força *D* póde o seu centro de gravidade subir, ou descer, em quanto elle róda a respeito dos tres eixos *GY*, *GV*, *GT*.

Imaginemos pois, que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo *GT* se tem o corpo inclinado da parte de *A*, e descrito o angulo z em hum tempo t, tomando o plano de fluctuaçaõ *MN* a posiçaõ *mn*; e que em virtude da

rotaçaõ

rotação ao redor do eixo GV, se tem inclinado da parte de P, e descrito o angulo y no mesmo tempo, tomando o plano de fluctuação EI a posição ei. Pelos pontos q, q' onde mn, ie cortaõ a vertical GY, tirem-se dc, tr parallelas a MN, EI. He evidente, que no tempo proposto sahio da agua hum prisma, que tem $MENI$ por base e Oq ou Oq' por altura, e mais as duas unhas $nqc, eq'r$; e que entráraõ nella as duas unhas $mqd; tq'i$. Estas saõ as mudanças que succedem á parte mergulhada, para as quais se vê que naõ contribue nada o movimento ao redor do eixo vertical GY.

Supponhamos, que as verticais que passaõ pelos centros de gravidade das quatro unhas representadas pelos perfiis $nqc, mqd, eq'r, tq'i$, encontraõ o plano $MENI$ nos pontos g, z, l, s respectivamente; e conduzaõ-se as rectas gb, zk, lp, su perpendiculares a MN. Alem das denominações precedentes, seja o volume do corpo $= M$, o da parte mergulhada no primeiro instante $= N$, a area $MENI = aa$, a distancia OL do seu centro de gravidade ao ponto $O = b$; a unha nqc que se póde conceber produzida pela rotaçaõ da area EIN ao redor de $EI = c^3 z, Ob = e, gb = e'$; a unha mqd que se póde conceber produzida pela rotaçaõ da area EIM ao redor de $EI = f^3 z, Ok = g, zk = g'$; a unha $eq'r$ que se póde considerar produzida pela rotaçaõ da area MNE ao redor de $MN = i^3 y, Op = k, lp = k'$; a unha $iq'r$ que se póde considerar produzida pela rotaçaõ da area MNI ao redor de $MN = i^3 y, Ou = u, su = u'$; a altura GQ do centro de gravidade da parte mergulhada acima do centro de gravidade do corpo $= h, Of = \delta$, $F'f = \delta'$, o pezo especifico do corpo $= p$, e o do fluido $= p'$.

Assim teremos primeiramente $D = p'(N - MENI. Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - pM = p'(N - MENI. Oq - nqc + mqd) - pM = p'N - p'a^2 S - p'c^3 z + p'f^3 z - pM$. E considerando, que em virtude da inclinaçaõ do corpo para A, o centro de gravidade F se chega para o plano HPK a quantidade hz, ou que Of se faz $= \delta - hz$; e que em virtude da inclinaçaõ para I, o mesmo ponto F se chega para o plano ABK a quantidade hy, ou que $F'f$ se faz $= \delta' - hy$; he facil de ver que depois do tempo t o momento da pressaõ vertical

tical do fluido a reſpeito do eixo GT ſerá $D\Phi = p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - c^3 ez - f^3 gz - i^3 ky - i^3 ny]$, e a reſpeito do eixo GV ſerá $D\xi = -p'[N(\delta' - by) + c^3 e'z + f^3 g'z - i^3 k'y - i^3 n'y]$.

196 Falta achar os valores de $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr - r'ds')$ em funções dos angulos x, y, z. Para iſto, como as oſcillações ſaõ muito pequenas, nos valores de q', r', s' acima achados faremos os coſenos iguais ao raio, tomaremos os angulos em lugar dos ſenos, e deſprezaremos os termos que tiverem mais de hum ſeno. Aſſim teremos

$$s'dq' - q'ds' = -\lambda\mu dx - (\mu^2 + \psi^2)dz + \psi\lambda dy$$
$$r'dq' - q'dr' = -(\psi^2 + \lambda^2)dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy$$
$$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2)dy - \psi\lambda dz;$$

e conſeguintemente

$$\int dPd(s'dq' - q'ds') = -pddx\int\lambda\mu dM - pddz\int(\mu^2 + \psi^2)dM + pddy\int\psi\lambda dM$$
$$\int dPd(r'dq' - q'dr') = -pddx\int(\psi^2 + \lambda^2)dM - pddz\int\lambda\mu dM - pddy\int\psi\mu dM$$
$$\int dPd(s'dr' - r'ds') = pddx\int\psi\mu dM + pddy\int(\lambda^2 + \mu^2)dM - pddz\int\psi\lambda dM;$$

quantidades, em que as partes comprehendidas debaixo dos ſinais de integraçaõ ſaõ dadas pela figura do corpo.

197 Para abbreviar pois façamos $\int\lambda\mu dM = A$, $\int(\mu^2 + \psi^2)dM = B$, $\int\psi\lambda dM = C$, $\int(\psi^2 + \lambda^2)dM = G$, $\int\psi\mu dM = H$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)dM = K$; e de tudo o que ha precedido reſultaráõ as quatro equações ſeguintes,

$$[p'N - p'a^2 S - (p'c^3 - p'f^3)z - pM]dt^2 = pMddS \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (A)$$
$$-p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - (c^3 e + f^3 g)z - (i^3 k + i^3 n)y]dt^2 = -pAddx - pBddz + pCddy \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (B)$$
$$pGddx + pAddz + pHddy = 0 \quad \text{- - - -} \quad (C)$$
$$p'[N(\delta' - by) + (c^3 e' + f^3 g')z - (i^3 k' + i^3 n')y]dt^2 = pHddx + pKddy - pCddz, \quad \text{-} \quad (D)$$

que repreſentaõ em geral todas as oſcillações, de que he ſuſceptivel hum corpo fluctuante na hypotheſe de que ellas ſejaõ muito pequenas.

198 Como as quatro variaveis S, x, y, z naõ paſſaõ do primeiro gráo, eſtas equações combinadas entre ſi ſe integraõ facilmente pelo methodo dado por *M.* d'Alembert nas Memorias de Berlim *A.* 1748, e 1750. Aqui

naõ

naõ faremos em geral eſte calculo, que naõ tem mais difficuldade que a extenſaõ; mas limitarnos-hemos ao exame de alguns caſos particulares.

199 Supponhamos, como ſuccede nas oſcillações dos navios, que o plano ABK corta o corpo fluctuante em duas partes exactamente iguais, e que os centros de gravidade das duas unhas $eq'r$, $iq't$ ſe achaõ, ao menos ſenſivelmente, no plano HPK. Aſſim teremos $e'=0$, $g'=0$, e na equaçaõ (B) poderemos deſprezar os termos $i^3 ky$, $i^3 ny$, como incomparavelmente mais pequenos que os outros. Alem diſſo pela propriedade do centro de gravidade teremos $A=0$, $C=0$; e as noſſas quatro equações ſe mudaráõ nas ſeguintes,

$$[p'N - p'a^2 S - (p'c^3 - p'f^3)z - pM]\,dt^2 = pM\,ddS \quad - - - - - - - - - - \quad (E)$$

$$p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - (c^3 e + f^3 g)z]\,dt^2 = pB\,ddz \quad - - - - - - - - - - - \quad (F)$$

$$G\,ddx + H\,ddy = 0 \quad - - - - - - - - - - - \quad (G)$$

$$p'[N(\delta' - by) - 2i^3 k'y]\,dt^2 = pH\,ddx + pK\,ddy \quad - - - - - - - - - - - \quad (H).$$

Neſta ultima equaçaõ póde deſprezar-ſe o termo $pH\,ddx$, porque tem por valor $-\frac{pH^2\,ddy}{G}$, e H he huma quantidade cujo quadrado, ao menos, póde tratar-ſe como infinitamente pequeno da primeira ordem.

200 Para abbreviar o calculo, façamos $\frac{p'N - pM}{pM} = I$, $\frac{p'a^2}{pM} = L$, $\frac{p'c^3 - p'f^3}{pM} = P$, $\frac{p'N\delta}{pB} = I'$, $\frac{p'a^2 b}{pB} = L'$, $\frac{p'(Nb + c^3 e + f^3 g)}{pB} = P'$, $\frac{p'N\delta'}{pK} = Q$, $\frac{p'(Nb + 2i^3 k')}{pK} = R$; e as noſſas equações ſe reduziráõ á forma ſeguinte,

$$ddS - I\,dt^2 + LS\,dt^2 + Pz\,dt^2 = 0$$

$$ddz - I'\,dt^2 + L'S\,dt^2 + P'z\,dt^2 = 0$$

$$G\,ddx + H\,ddy = 0$$

$$ddy - Q\,dt^2 + Ry\,dt^2 = 0.$$

201 As duas primeiras, combinadas entre ſi, integraõ-

ſe

ſe pelo ingenhoſo methodo de M. d' Alembert com muita facilidade. Multiplique-ſe a primeira por hum coefficiente indeterminado $\mathfrak{G}$, e ſome-ſe com a ſegunda; o que dará $\mathfrak{G} d d S - \mathfrak{G} I d t^2 + \mathfrak{G} L S d t^2 + \mathfrak{G} P z d t^2 + d d z - I' d t^2 + L' S d t^2 + P' z d t^2 = 0$. Depois ſupponha-ſe, que temos a equaçaõ $\mathfrak{G} L S + \mathfrak{G} P z + L' S + P' z = \alpha (\mathfrak{G} S + z)$, ſendo α outro coefficiente indeterminado; e comparando entre ſi os termos da meſma eſpecie reſultaráõ eſtas duas equações $\mathfrak{G} L + L' = \alpha \mathfrak{G}$, e $\mathfrak{G} P + P' = \alpha$, das quais ſe tiraõ dous valores de $\mathfrak{G}$ que deſignaremos por $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, e outros dous de α, que repreſentaremos por α, α'. Fazendo pois $\mathfrak{G} S + z = s$, e $\mathfrak{G}' S + z = s'$, a equaçaõ $\mathfrak{G} d d S - \mathfrak{G} I d t^2$ &c dará as duas ſeguintes,

$$d d s + \alpha s d t^2 - (\mathfrak{G} I + I') d t^2 = 0$$
$$d d s' + \alpha' s' d t^2 - (\mathfrak{G}' I + I') d t^2 = 0.$$

Multiplicando a primeira por $d s$, a ſegunda por $d s'$, e integrando duas vezes, facilmente ſe achará

$$s = \left(\frac{\mathfrak{G} I + I'}{\alpha}\right)(1 - \cos t \sqrt{\alpha})$$
$$s' = \left(\frac{\mathfrak{G}' I + I'}{\alpha'}\right)(1 - \cos t \sqrt{\alpha'});$$

e por conſeguinte

$$S = \frac{(\mathfrak{G} I + I')}{\alpha(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha})$$
$$- \frac{(\mathfrak{G}' I + I')}{\alpha'(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha'})$$
$$z = \frac{\mathfrak{G}(\mathfrak{G}' I + I')}{\alpha'(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha'})$$
$$- \frac{\mathfrak{G}'(\mathfrak{G} I + I')}{\alpha(\mathfrak{G} - \mathfrak{G}')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha}).$$

Eſtes valores de S e z ſaõ completos, porque daõ $S = 0$, e $z = 0$, quando $t = 0$, como deve ſer.

Quanto ás duas ultimas equações $G d d x + H d d y = 0$, e $d d y - Q d t^2 + R y d t^2 = 0$, integraõ-ſe immediatamente, e daõ

$$y = \frac{Q}{R}(1 - \cos t \sqrt{R}$$

$x =$

$$x = -\frac{H.Q}{G.R}(1 - cos\, t\sqrt{R}).$$

202 Conſta pois das expreſſões de S e de z, que ſe α e α' forem quantidades reais e poſitivas, o movimento S do centro de gravidade, e o de rotaçaõ z ao redor do eixo GT ſeraõ muito pequenos, como havemos ſuppoſto; e por conſeguinte, que o corpo fará oſcillações, pelas quais naõ ſerá expoſto a virar-ſe. Mas ſe α e α' foſſem quantidades reais negativas, achar-ſe-hia que os valores de S e z dependiaõ de logarithmos, e por conſequencia que creſceriaõ ſempre á medida que creſceſſe t. Donde ſe ſegue, que neſſe caſo as oſcillações naõ ſeriaõ infinitamente pequenas, como havemos ſuppoſto, e que o corpo naõ teria eſtabilidade, mas ſeria expoſto a virar-ſe. Do meſmo modo ſe acha que os valores de S e z contém logarithmos, quando ς e ς', e conſeguintemente tambem α e α' ſaõ quantidades imaginarias, ou quando ς e ς' ſaõ reais, mas iguais entre ſi. Eſtes dous ultimos caſos ſaõ puramente geometricos, pois naõ tem lugar no noſſo problema.

Pela meſma raſaõ conſta, que os valores de y e x ſeraõ infinitamente pequenos, quando R for huma quantidade poſitiva; e que ſendo R negativo, o corpo naõ terá eſtabilidade a reſpeito dos dous eixos GV, GY.

203 Bem ſe vê, que as condições de eſtabilidade, de que acabamos de fallar, dependem da poſiçaõ do centro de gravidade do corpo inteiro a reſpeito do centro de gravidade da parte mergulhada, conſiderada como homogenea. Todas as vezes que o primeiro eſtá mais abaixo que o ſegundo, o corpo fluctuante tem eſtabilidade em todos os ſentidos; mas ſe o primeiro eſtiver mais alto que o ſegundo, póde faltar a eſtabilidade. As noſſas formulas daõ a conhecer a maior diſtancia, que entaõ ſe póde dar entre os dous centros de gravidade; e eſte methodo de determinar os *metacentros* he geral, ſimples, e directo.

204 Supponhamos agora, que a vertical GY paſſa pelo centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ, e que os dous planos ABK, HPK cortaõ o corpo, cada hum em duas partes iguais e ſemelhantes. Neſte caſo as unhas mqc, mqd ſaõ iguais, aſſim como as duas $eq'r$, $iq't$;

e além diſſo teremos $A = 0$, $C = 0$, $H = 0$. Suppondo tambem, que o pezo do fluido deslocado no primeiro inſtante he igual ao pezo do corpo, ou que temos $p' N = p M$, o corpo naõ poderá ſubir, nem deſcer, e ſerá conſeguintemente $S = 0$. Igualmente ſerá $x = 0$, preſcindindo de todo o movimento de rotaçaõ horizontal primitivamente impreſſo. Deſte modo as noſſas quatro equações fundamentais (n. 200.) ſe reduziráõ ás duas ſeguintes

$$ddz - I' dt^2 + P' z dt^2 = 0$$
$$ddy - Q dt^2 + R y dt^2 = 0,$$

as quais daõ

$$z = \frac{I'}{P'}(1 - \cos t \sqrt{P'})$$
$$y = \frac{Q}{R}(1 - \cos t \sqrt{R}).$$

205 Terá pois entaõ o corpo ſimpleſmente dous movimentos de rotaçaõ ſobre os dous eixos horizontais GT, GV que paſſaõ pelo ſeu centro de gravidade, e ſaõ perpendiculares entre ſi. Eſtas oſcillações ficaõ ſendo ſempre muito pequenas, e o corpo terá por conſeguinte eſtabilidade, quando P' e R ſaõ quantidades poſitivas. Ellas ſaõ abſolutamente da meſma eſpecie das que faz hum pendulo, que vai e vem; e deſignando por Z, Y as ſuas amplitudes totais, teremos evidentemente $Z = \frac{2I'}{P'}$, e $Y = \frac{2Q}{R}$.

206 Os tempos empregados em correr os angulos Z, Y ſaõ muito faceis de achar. Para que z venha a ſer Z, e y venha a ſer Y, he neceſſario que tenhamos $1 - \cos t \sqrt{P'} = 2$, $1 - \cos t \sqrt{R} = 2$, ou $\cos t \sqrt{P'} = -1$, $\cos t \sqrt{R} = -1$; e por conſeguinte, $t = \frac{180°}{\sqrt{P'}}$, $t = \frac{180°}{\sqrt{R}}$. Subſtituindo em lugar de P' e R os ſeus valores, acharemos que o tempo de cada oſcillaçaõ Z he repreſentado por $180° \sqrt{\left[\frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\, dM}{p'(Nb + 2c'e)}\right]}$, e o de cada

da oscillaçaõ Y por $180° \sqrt{\left[\frac{\int p(\lambda^2 + \mu^2)\,dM}{p'(Nb + 2i^3 k')}\right]}$.

Como estes valores naõ contém as distancias iniciais δ, δ' do centro de gravidade da parte mergulhada aos planos HPK, ABK, está claro que as oscillações seraõ isochronas em cada especie, quaisquer que sejaõ as amplitudes totais, com tanto que sejaõ sempre muito pequenas.

207 Para determinarmos o comprimento dos pendulos synchronos ás oscillações deste corpo, notaremos, que se hum pendulo simples, que tem o comprimento l estiver no primeiro instante apartado da vertical a quantidade δ muito pequena, e no tempo t descrever o angulo u com o raio l; será a equaçaõ do seu movimento $ddu = \frac{(\delta - u)\,dt^2}{l}$, ou $u = \delta\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{l}}\right)$. Donde se tira o tempo de huma oscillaçaõ inteira $= 180° \sqrt{l}$. Assim, sendo L o comprimento do pendulo synchrono ás oscillações Z, e L' ás oscillações Y, teremos

$$L = \frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\,dM}{p'(Nb + 2c^3 e)}$$

$$L' = \frac{\int p(\lambda^2 + \mu^2)\,dM}{p'(Nb + 2i^3 k')}.$$

208 Exemplo. Seja o corpo fluctuante hum semi-spheroide elliptico homogeneo, produzido por meia revoluçaõ da ametade de huma ellipse AHB ao redor do seu eixo AB (Fig. 66.). O plano $AHBK$ que serve de base, e o plano de fluctuaçaõ $MENI$ saõ parallelos, e a sua distancia he a recta dada ZO. O ponto G he o centro de gravidade do solido, e os tres eixos GY, GV, GT saõ os mesmos que acima; ABK he a secçaõ longitudinal, e HPK a latitudinal. He necessario achar os valores de N, b, $c^3 e$, $i^3 k'$, $\int(\psi^2 + \mu^2)\,dM$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)\,dM$. Busquemo-los por ordem.

1°, Para evitar a multiplicidade, e confusaõ das linhas, consideremos $MENI$ como huma secçaõ indeterminada do meio-ellipsoide. Tendo conduzido ao eixo MN da curva $MENI$ qualquer ordenada CD, faça-se passar por ella o plano vertical $SCXC'L$ que corta o plano vertical

ABK por XR. Bem se vê, que CD será tambem a ordenada de hum circulo descrito com o raio RX. Assim $CD^2 = XR^2 - DR^2$: mas pela propriedade da ellipse $XR^2 = (BZ^2 - RZ^2)\frac{ZP^2}{BZ^2} = (BZ^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$, e $DR^2 = (BZ^2 - NO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$; logo $CD^2 = (NO^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$. Donde se vê que a curva $MENI$ he huma ellipse semelhante á ellipse $AHBP$.

Seja $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, a rasaõ da circumferencia ao diametro $= n$; e teremos $AHBP = nab$, $MENI = nab\frac{NO^2}{BZ^2} = \frac{na(bb - xx)}{b}$. Logo $dN = -\frac{nadx(bb - xx)}{b}$, e $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$. Completando este integral de maneira que desvaneça quando $x = b$, tomemos o seu valor fazendo $x = ZO = f$, linha conhecida; e teremos $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right)$. Suppondo $f = 0$, N se tornará em M e conseguintemente será $M = \frac{2nab^2}{3}$.

2°, O momento elementar do solido $MKNIME$ a respeito do ponto Z he $-\frac{naxdx(bb - xx)}{b}$, cujo integral completo he $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$. Façamos primeiramente $x = 0$, e dividamos por M ou $\frac{2nab^2}{3}$, e teremos a distancia do centro de gravidade do solido $AKBPAH$ ao ponto $Z = \frac{3}{8}b$. Depois façamos $x = f$, e dividamos por N ou $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - bf^2 + \frac{f^3}{3}\right)$; e te-

remos

remos a diſtancia do centro de gravidade da parte mergulhada ao ponto $Z = \frac{3(b^4 - 2b^2 f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2 f + f^3)}$. Por conſeguinte ſerá $h = \frac{3}{8} b - \frac{3(b^4 - 2b^2 f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2 f + f^3)}$.

3°, Imaginemos que a unha formada pela rotaçaõ da area EIN ao redor de EI, he compoſta de huma infinidade de triangulos prs perpendiculares ao eixo EI. Suppondo $OI = l$, $ON = m$, $Op = u$, eſtá claro que $pr = \frac{m}{l} \sqrt{(ll - uu)}$, e que o momento elementar da ametade da unha he $= \frac{m^2}{l^2}(ll - uu) \cdot \frac{m\sqrt{(ll-uu)}}{3l} \cdot du \cdot z$

$= \frac{m^3 z}{3 l^3} du \left(ll - uu\right)^{\frac{3}{2}}$, cujo integral ſe achará

$\frac{m^3 z}{3 l^3}\left(\frac{u(ll-uu)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4} l^2 \int du \sqrt{(ll-uu)}\right)$.

Fazendo $u = l$, reflectindo que entaõ $\int du \sqrt{(ll - uu)}$ repreſenta a area de hum quarto de circulo deſcrito com o raio l, e dobrando o integral, acharemos que a quantidade repreſentada por $c^3 e$ he $= \frac{n m^3 l}{8}$. Ponha-ſe em lugar de m o ſeu valor $\frac{a}{b}\sqrt{(bb - ff)}$, e em lugar de l o ſeu valor $\sqrt{(bb-ff)}$, e teremos $c^3 e = \frac{n a^3 (bb - ff)^2}{8 b^3}$.

4°, Do meſmo modo ſe achará, que a quantidade que havemos repreſentado por $i^3 k^l$ tem por expreſſaõ $\frac{n b^3 (aa - ff)^2}{8 a^3}$.

5°, Para determinar $\int(\psi^2 + \mu^2) dM$, ou a ſoma dos productos das particulas do meio ellipſoide pelos quadrados das ſuas diſtancias ao eixo latitudinal GT, conſideremos huma ſecçaõ indeterminada $MENI$, e ſobre a orde-

ordenada CD ao eixo MN tomemos dous pontos quaisquer infinitamente vezinhos f, u. Havendo supposto $ZO = x$, OM ou $ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, e lembrando-nos que $ZG = \frac{3}{8} b$, veremos que o producto do elemento fu pelo quadrado da sua distancia ao eixo GT he representado por $ds\left(qq + (\frac{3}{8} b - x)^2\right)$; quantidade, na qual sómente s he variavel. Integrando pois, e fazendo $s = DC = \frac{b}{a} \sqrt{(m^2 - q^2)}$, teremos $\left(qq + (\frac{3}{8} b - x)^2\right)$. $\frac{b}{a} \sqrt{(mm - qq)}$ pór soma dos productos de todos os pontos de DC pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Multiplicando esta soma por dq, e integrando na supposiçaõ de sómente q ser variavel, acharemos tambem que $\frac{b}{a}\left(\frac{m^2}{4} + (\frac{3}{8} b - x)^2\right) \int dq \sqrt{(mm - qq)} - \frac{q(mm - qq)^{\frac{3}{2}}}{4}$ he a soma de todos os productos dos pontos da area elliptica $CDOE$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Fazendo $q = m = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - xx)}$; considerando que entaõ $\int dq \sqrt{(mm - qq)} = \frac{n . m^2}{4} = \frac{na(bb - xx)}{4b}$; e quadruplicando o integral; teremos $\frac{nb}{a}\left(\frac{a^4(bb - xx)^2}{4b^4} + \frac{a^2(bb - xx)}{b^2}(\frac{3}{8} b - x)^2\right)$ por soma dos productos de todos os pontos da ellipse inteira $MENI$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Em fim multiplicando esta soma por dx; integrando na intelligencia de sómente ser x variavel; e fazendo depois $x = b$; teremos $\int(\psi^2 + \mu^2)dM = \frac{n(64a^3b^2 + 19ab^4)}{480}$.

6°, Pelo mesmo methodo se achará a soma dos productos

ctos das particulas do meio-ellipſoide pelos quadrados das ſuas diſtancias ao eixo longitudinal *GV*, ou $\int(\lambda^2 + \mu^2)\,dM = \frac{83\,nab^4}{480}$.

209 De todos eſtes calculos ſe ſegue, que ſendo Z, Y as amplitudes das oſcillaçoens relativas aos eixos *GT*, *GV*, e L, L' os comprimentos dos pendulos ſynchronos; teremos

$$Z = \frac{16\,b^2(2b^3 - 3b^2 f + f^3)\,\delta}{3(b^3(2b^3 - 3b^2 f + f^3) + 2(aa - bb)(bb - ff)^2)},$$

$$Y = \frac{16\,a^4(2b^3 - 3b^2 f + f^3)\,\delta'}{3(a^4 b(2b^3 - 3b^2 f + f^3) - 2a^4(bb - ff)^2 + 2b^4(aa - ff)^2)},$$

$$L = \frac{64\,p(a^2 b^5 + 19\,b^7)}{60\,p'(b^3(2b^3 - 3b^2 f + f^3) + 2(aa - bb)(bb - ff)^2)},$$

$$L' = \frac{83\,p\,a^4 b^5}{60\,p'(a^4 b(2b^3 - 3b^2 f + f^3) - 2a^4(bb - ff)^2 + 2b^4(aa - ff)^2)}.$$

Deixamos ao leitor o cuidado de evolver eſtas formulas por meudo, e de concluir as dimenſoens do ellipſoide mais proprias para que as oſcillaçoens ſejaõ ſuaves, pela combinaçaõ mais ventajoſa das amplitudes com as duraçoens; materia curioſa por ſi meſma, e que póde ter applicaçoens muito uteis na carregaçaõ dos navios. Eſtas diſcuſſoens naõ cabem nos limites, que nos havemos propoſto neſte Tratado.

SE-

SEGUNDA PARTE
OU
ELEMENTOS
DE
HYDRAULICA.

210 ORdinariamente se entende por *Hydraulica* a Sciencia do movimento das aguas; mas aqui tomamos este nome em sentido mais amplo, entendendo por elle a Sciencia geral que trata do movimento dos fluidos, tanto incompressiveis como elasticos. Como porém o movimento das aguas he neste genero o objecto mais interessante ás necessidades dos homens, delle trataremos com mais particularidade. Mas tudo o que dissermos se applicará igualmente aos outros fluidos incompressiveis; e no fim desta parte fallaremos brevemente do movimento dos fluidos elasticos.

211 Se nós soubessemos a massa, a figura, e o numero das particulas de hum fluido em movimento, esta materia seria reduzida a hum problema de Dynamica, pois se trataria de achar o movimento de hum systema de pequenos corpos livres, que actûaõ huns contra os outros, e que podem além disso estar sujeitos á acçaõ de algumas forças exteriores, como por exemplo á da gravidade. Mas estamos muito longe de ter os dados necessarios para resolver este problema; e posto que os tivessemos, acharse-hia taõ complicado, que por meio da analyse actual seria absolutamente intratavel.

212 Vista a impossibilidade de estabelecer huma theorica directa do movimento dos fluidos, era necessario buscar outro meio de resolver a questaõ. O mais simples, e o mais rigoroso consistiria em tirar as leis do movimen-

to

to dos fluidos, assim como as do equilibrio, de hum principio primordial, fundado sobre a natureza dos mesmos fluidos, ou demonstrado pela experiencia. Temos visto, que a *igualdade de pressaõ* he o principio fundamental da Hydrostatica; e esse mesmo podia servir de base á Hydraulica. Porque o movimento das particulas de hum fluido póde considerar-se a cada instante, como composto do movimento que ellas tinhaõ no instante precedente, e de outro que tem sido destruido, e em virtude do qual ellas ficariaõ em equilibrio. Donde se vê, que conhecendo este estado de equilibrio pelo principio da igualdade de pressaõ, tambem se conheceria o estado de movimento, porque o movimento ao primeiro instante suppoem-se dado. Grandes Geometras tem por esta idêa reduzido o movimento dos fluidos a formulas geraes; mas estas saõ taõ compostas e complicadas pela natureza da cousa, que dellas se naõ póde tirar fructo algum para as necessidades da pratica.

213 Sem embargo, para darmos aqui huma idêa geral da applicaçaõ deste principio, he necessario trazer á lembrança, que se em huma massa fluida sollicitada por quaesquer forças, e posta em equilibrio, imaginarmos hum canal fechado de qualquer figura, o fluido nelle incluido deve estar em equilibrio, independentemente do resto da massa; porque supponde que todo este resto se torna solido, sem mudar de lugar, nem de volume, he manifesto que o fluido do canal fica no mesmo estado de compressaõ que dantes, e conseguintemente no mesmo estado de equilibrio.

214 Em consequencia deste principio, consideremos em hum fluido em equilibrio (Fig. 67.) quatro pontos quaesquer M, N, K, H situados em hum mesmo plano, formando entre si hum canal rectangular $MNKH$, que estará em equilibrio. Tomando qualquer ponto fixo B, tiremos as coordenadas ao ponto M, $EP = x$, $PM = y$, huma parallela a MH, e a outra a MN; e supponhamos que todas as forças das particulas obraõ no plano EPM, e saõ conseguintemente reductiveis a duas, parallelas a EP, PM. Sejaõ P, P' as forças que sollicitaõ os pontos M, N parallelamente a EP; e Q, Q' as que sollicitaõ os pontos M, H parallelamente a PM; todas funçoens de x, y e constantes. Façamos tambem $MH = \delta x$, $MN = \delta y$; advertindo, que estas differenciais δx, δy saõ relati-

relativas á mudança que ſuccede quando ſe paſſa da conſideraçaõ do ponto M á de outro ponto H, ou N infinitamente vizinho, ficando as differenciais dx, dy para indicar a mudança que ſuccede quando huma meſma particula paſſa do lugar que occupa para o lugar contiguo. Humas e outras differenciais ſe achaõ do meſmo modo; e na differenciaçaõ de huma funçaõ relativa ás meſmas coordenadas x e y, δx e dx tem ſempre o meſmo coefficiente, aſſim como tambem δy e dy.

Iſto poſto, eſtá claro que em virtude da força Q a preſſaõ da columna MN ſobre o ponto N he $Q\delta y$, e que a preſſaõ da columna NK ſobre o ponto K em virtude da força P' he $P'\delta x$. A primeira preſſaõ ſe tranſmete, como a ſegunda, ao ponto K; e ajuntando-as ambas, ſerá a preſſaõ total que padece o ponto K da parte do fluido $MNK = Q\delta y + P'\delta x$. Do meſmo modo acharemos, que a preſſaõ total do meſmo ponto K da parte do fluido MHK he $P\delta x + Q'\delta y$. Logo, para haver equilibrio, ſerá $Q\delta y + P'\delta x = P\delta x + Q'\delta y$, e conſeguintemente $(P' - P)\delta x = (Q' - Q)\delta y$. Mas $P' - P$ he a differencial de P naõ fazendo variar ſenaõ y, e $Q' - Q$ a differencial de Q naõ fazendo variar ſenaõ x. Logo, ſuppondo $P' - P = A\delta y$, $Q' - Q = A'\delta x$, teremos $A\delta y . \delta x = A'\delta x . \delta y$, ou $A = A'$. Donde ſe ſegue, que *no eſtado de equilibrio a differencial de P tomada na ſuppoſiçaõ de ſer ſómente variavel y, e dividida por δy, deve dar o meſmo que a differencial de Q tomada na ſuppoſiçaõ de ſómente ſer x variavel, e dividida por δx.*

Ordinariamente ſe enuncia eſta propoſiçaõ de hum modo commodo, e abbreviado, a ſaber $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, ou (que vem a ſer o meſmo) $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$.

215 Quando as forças naõ eſtaõ no meſmo plano, ſempre podem reduzir-ſe a tres, duas das quais eſtejaõ no plano EPM, e a terceira ſeja perpendicular ao meſmo plano. Supponhamos pois, que o ponto M experimenta a acçaõ de tres forças P, Q, R parallelas ás tres coordenadas rectangulares x, y, z, das quais ellas ſaõ funçoens quaiſquer; e imaginemos oito pontos fluidos M, N, K, H, Q, O, S, R formando hum parallelepipedo rectangulo, que ſe

póde

póde confiderar como compofto de feis canais rectangulares, e cada hum por fi em equilibrio. Affim vemos, que o equilibrio no canal $MNKH$ dá $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; no canal $MOQH$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; e no canal $MNSO$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Os outros tres canais dariaõ as mefmas equaçoens; e defte modo temos as condiçoens gerais do equilibrio de hum fluido fujeito á acçaõ de quaifquer forças.

216 Supponhamos agora, que o fluido *ABCD* (Fig. 68.) fujeito á acçaõ da gravidade fe move dentro do vafo que o contém, fegundo qualquer lei, de maneira porém que cada ponto *M* naõ tenha mais que dous movimentos hum vertical ou parallelo a *EP*, e outro horizontal parallelo a *PM*. Se tiveffe dous movimentos horizontais perpendiculares entre fi, que he o cafo mais compofto do Problema; por meio do que acabamos de moftrar (n. 215.) fe faria a applicaçaõ do que himos a moftrar na fuppofiçaõ de fer hum fó, para maior fimplicidade. Sejaõ quatro pontos fluidos *M*, *N*, K, *H* difpoftos em fórma rectangular, e fupponhamos que paffado hum inftante chegaõ refpectivamente a m, n, k, h. Conduzaõ-fe mp, nf, hg, kq perpendiculares ao eixo EP; e fupponhamos $EP = x$, $PM = y$, $PO = z$, o tempo $= t$, a velocidade do ponto *M* parallela a $EP = u$, a parallela a $PM = v$, e a gravidade $= g$. Affim teremos $u = T.M$, $v = T.N$, fendo T huma funçaõ do tempo corrido defde o principio do movimento, e *M*, *N* funçoens fómente de x e de y. Porque como o fluido contiguo á parede *BOD* corre ao longo della, temos $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$ quando $y = z$; e $\frac{dx}{dz}$ he fempre huma funçaõ de x e z fómente, qualquer que feja o tempo t. Affim defapparecendo nefte cafo a funçaõ do tempo pela divifaõ de u por v, deveremos ter em geral $u = MT$; $v = NT$, ao menos quando o fluido corre por dentro de hum vafo, como fuppomos aqui.

9/ 217 Seja pois $du = d(TM) = TAdx + TBdy + MT'dt$, e $dv = d(TN) = TA'dx + TB'dy + NT'dt$. fendo A, B, A', B' funções de x e y, T' huma funçaõ do tempo, dx e dy os efpaços corridos vertical

tical e horizontalmente pelo ponto M no instante dt. Metendo por dx o seu valor udt ou $TMdt$, e por dy o seu vdt ou $VNdt$, teremos a força vertical $\frac{du}{dt} = T^2 AM + T^2 BN + MT'$, e a horizontal $\frac{dv}{dt} = T^2 A'M + T^2 B'N + NT'$. Porem, se as particulas naõ actuassem humas contra as outras, a velocidade vertical u no fim do instante dt seria $u + gdt$. Logo considerando, pelo principio de M. d'Alembert, a velocidade $u + gdt$ como composta das duas $u + du$ e $gdt - du$, e suppondo que a primeira destas he a que subsiste, deve a segunda $gdt - du$ ser tal que naõ altere a primeira, e que seja destruida. Do mesmo modo se verá, a respeito da velocidade horizontal v, que o ponto M em virtude da velocidade $-dv$ deveria ficar em equilibrio. Por conseguinte, se o ponto M fosse a cada instante sollicitado pela acçaõ das duas forças $g - \frac{du}{dt}$ e $-\frac{dv}{dt}$ deveria ficar em equilibrio; e assim teremos (n.214.) a equaçaõ fundamental $\frac{d[g-(T^2 AM + T^2 BN + MT')]}{dy}$ $= \frac{d(-T^2 A'M - T^2 B'N - NT')}{dx}$.

218 Huma condiçaõ essencial, a que esta equaçaõ deve satisfazer, he que o fluido $MNKH$ passando para $mnkh$ naõ mude de volume, porque o supponios incompressivel. Ora o ponto M no instante dt corre parallelamente a EP e PM os espaços udt e vdt; o ponto N, mudando-se a respeito delle as velocidades u e v em $u + TB\delta y$ e $v + TB'\delta y$, corre parallelamente a EP e PM os espaços $(u + TB\delta y)dt$, e $(v + TB'\delta y)dt$; o ponto H, pela mesma rasaõ, os espaços $(u + TA\delta x)dt$, e $(v + TA'\delta x)dt$; e em fim o ponto K os espaços $(u + TA\delta x + TB\delta y)dt$, e $(v + TA'\delta x + TB'\delta y)dt$. Logo teremos $Ep = x + udt$, $pm = y + vdt$, $Ef = x + (u + TB\delta y)dt$, $fn = y + \delta y + (v + TB'\delta y)dt$, $Eg = x + \delta x + (u + TA\delta x)dt$, $gh = y + (v + TA'\delta x)dt$, $Eq = x + \delta x + (u + TA\delta x + TB\delta y)dt$,

qk

$qk = y + \delta y + (v + TA'\delta x) + TB'\delta y)dt$; e conseguintemente

$$Ef - Ep = TB\,\delta y\,dt$$
$$fn - pm = \delta y + TB'\,\delta y\,dt$$
$$Eq - Eg = TB\,\delta y\,dt$$
$$qk - gb = \delta y + TB'\,\delta y\,dt$$
$$Eg - Ep = \delta x + TA\,\delta x\,dt.$$

Donde se vê, que mn póde tomar-se como parallela a MN, e que $mnkb$ póde considerar-se como hum rectangulo, cuja area he $= (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\,\delta x\,dt)$. Logo teremos $\delta x\,\delta y = (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\,\delta x\,dt)$; e por conseguinte $TA\,\delta y\,\delta x\,dt + TB'\,\delta y\,\delta x\,dt = 0$, ou $A = -B'$, ou (que vem a ser o mesmo) $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$; primeira equaçaõ de condiçaõ entre M e N, pela qual se vê que $N\,dx - M\,dy$ deve sempre ser huma differencial completa.

219 Alem disto, como a equaçaõ fundamental (n.217.) deve ser identica (n.214.), está claro que a parte $\frac{d(MT')}{dy}$ do primeiro membro deve ser igual á parte $\frac{d(NT')}{dx}$ do segundo; e porque T' he constante nestas expressões, teremos $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$; segunda equaçaõ de condiçaõ, pela qual se vê que $M\,dx + N\,dy$ deve ser tambem huma differencial completa.

220 As duas equações $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dx}$, e $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ satisfazem inteiramente á equaçaõ fundamental. Porque tendo já $\frac{d(MT')}{dy} = \frac{d(NT')}{dx}$, do resto da equaçaõ (sendo aqui T constante) feita a differenciaçaõ resultará $A\frac{dM}{dy} + M\frac{dA}{dy} + B\frac{dN}{dy} + N\frac{dB}{dy} = A'\frac{dM}{dx} + M\frac{dA'}{dx} + B'\frac{dN}{dx} + N\frac{dB'}{dx}$. E porque $A = \frac{dM}{dx}$, $B = \frac{dM}{dy}$, $A' =$

dN

$\frac{dN}{dx}$, $B' = \frac{dN}{dy}$, teremos $A \frac{dM}{dy} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dM}{dy}$, $B \frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dy} = -\frac{dM}{dy} \cdot \frac{dM}{dx}$, $A' \frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot \frac{dM}{dx}$, $B' \frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dy} \cdot \frac{dN}{dx} = -\frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dx}$, $M \frac{dA}{dy} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $M \frac{dA'}{dx} = M \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}$, expressaõ que pela natureza do calculo differencial he o mesmo que $M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $N \frac{dB}{dy} = N \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$, $N \frac{dB'}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy} = N \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$. E substituindo todos estes valores na equaçaõ precedente, acharemos que todos os seus termos se destroem, e que he conseguintemente identica.

221 Ha hum caso, em que a equaçaõ $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ naõ tem lugar necessariamente; e he, quando for $\frac{T'}{T^2} = b$, sendo b huma constante, ou $T = \frac{1}{a - bt}$, sendo a outra constante. Entaõ riscando na equaçaõ fundamental (n.217.) os termos que se destroem em virtude da condiçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$, que sempre tem lugar, ao resto da equaçaõ se satisfaria

tisfaria sendo $M\frac{dA}{dy} + N\frac{dB}{dy} + b\frac{dM}{dy} = M\frac{dA'}{dx} + N\frac{dB'}{dx}$ $+ b\frac{dN}{dx}$.

Esta condiçaõ póde exprimir-se de outro modo mais commodo. Porque dando a equaçaõ fundamental nesta supposiçaõ $\frac{d(AM + BN + bM)}{dy} = \frac{d(A'M + B'N + bN)}{dx}$, está claro que $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dM}{dy} + bM\right) + dy\left(M\frac{dN}{dx}\right.$ $\left.+ N\frac{dN}{dy} + bN\right)$ será huma differencial completa. Tirando della a quantidade $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dN}{dx}\right) + dy\left(M\frac{dM}{dy}\right.$ $\left.+ N\frac{dN}{dy}\right)$, que tambem he differencial completa, o resto $(Ndx - Mdy)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + b(Mdx + Ndy)$ será tambem huma differencial completa, assim como a differencial $Ndx - Mdy$, que sempre he completa em virtude da equaçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$.

222 As funções M, N, T devem ser naõ somente compativeis com a equaçaõ que exprime a figura das paredes do vaso, e representar o estado primitivo do fluido; mas tambem he necessario que sejaõ tais, que as superficies superior e inferior do fluido cortem perpendicularmente as direcções das forças em cada hum dos instantes do movimento, e que as forças em fim obrem de baixo para cima na superficie inferior, e de cima para baixo na superior. Quando todas estas condições naõ tem lugar juntamente, o problema naõ he soluvel rigorosamente. Sobre o que póde ver-se M. d' Alembert, a quem se deve esta Theorica, no seu *Ensayo sobre a resistencia dos fluidos*, e nos Volumes I e V dos seus *Opusculos Mathematicos*. Igualmente se pódem consultar as Memorias de M. Euler sobre esta materia entre as da Academia de Berlin A. 1755.

Por

Por aqui se póde fazer huma idea geral do methodo rigoroso, que o principio da *igualdade de pressaõ* nos offerece para determinar o movimento dos fluidos. Mas, como temos dito, este methodo requer a coexistencia de muitas condições, e essas podem ser incompativeis entre si, ao menos em todo o rigor. Donde resulta, que saõ muito poucos os casos, em que o problema se póde resolver assim; e nesses mesmos, saõ os calculos quasi impraticaveis, por muito prolixos e complicados. Por esta rasaõ tomaremos esta materia em outro ponto de vista, donde venhaõ resultados mais faceis, que sendo confrontados com os da experiencia possaõ ser uteis na pratica.

CAPITULO I.

Do movimento das aguas, que sahem por quaisquer orificios de vasos constantemente cheios.

223 Consta pela experiencia 1°, que sahindo a agua de qualquer vaso $ACDB$ (Fig. 69. 70.) por hum orificio PQ, todas as particulas comprimindo-se humas ás outras tem huma tendencia para o orificio; 2°, que descem com velocidades sensivelmente verticais e iguais até huma certa distancia do plano horizontal que passa pela borda superior do orificio, distancia que mal se póde determinar, mas que na maior parte das experiencias se acha ser de tres até quatro pollegadas; 4°, que passado este termo todas as particulas que naõ correspondem verticalmente ao orificio, caminhaõ para elle de todas as partes por direcções mais ou menos obliquas; 4o. que procurando cada huma das particulas conservar a sua velocidade pela direcçaõ obliqua com que entra no orificio, a veia da agua se contrahe até huma certa distancia Pp, formando huma especie de pyramide truncada, que tem a base menor pq no lugar onde a veia acaba de se contrahir. He essencialmente necessario na pratica attender a esta contracçaõ, como adiante mostraremos.

224 Sejaõ AB, TV, RL &c as secções planas, ou curvas, perpendiculares ás direcções das particulas, de maneira que as mesmas particulas individuais que se achaõ

em *A B* desçaõ consecutivamente para *T V*, *R L* &c; he evidente, que conservando-se o vaso constantemente cheio por meio de nova agua que nelle entra a substituir a que sahe pelo orificio, e havendo o fluxo tomado huma velocidade permanente, as secções *A B*, *T V* &c devem ser sempre as mesmas, porque as particulas nos mesmos lugares necessariamente haõ de ter as mesmas velocidades tanto em direcçaõ, como em quantidade. O modo de conservar os vasos constantemente cheios he indifferente, com tanto que a agua que entra naõ communique abalo nenhum sensivel á que está no interior delles.

225 Isto posto, considere-se o fluido dividido em huma infinidade de camadas iguais *A B b a*, *T V u t* &c, comprehendidas entre secções infinitamente vezinhas, e perpendiculares ás direcções das particulas; e seja *p q g f* o pequeno prisma de licor, que sahe pelo orificio no instante em que a superficie *A B* desce até *a b*, e *T V* até *t u* &c. Está claro, que este prisma deve ser igual a qualquer das camadas; e assim, sendo B a area da base de huma das camadas *T V*, e x a altura de hum prisma que tendo a base B he igual á dita camada *T V u t*, C a area *p q*, e y a altura do prisma *p q g f*, teremos $Bx = Cy$, e conseguintemente $x : y :: C : B$. E porque a superficie *T V* se abaixa até *t u* em quanto *p q* se abaixa até *f g*, he evidente que x, y represeníaõ as velocidades medias das duas camadas *T V u t*, *p q g f*. Logo *a velocidade de qualquer secçaõ do fluido tomada no interior do vaso he para a velocidade do licor ao sahir do orificio como a area do orificio para a area da secçaõ.*

226 Daqui se segue, que sendo o orificio infinitamente pequeno em comparaçaõ da amplitude do vaso, a velocidade do licor na sahida do orificio será infinita em comparaçaõ da velocidade das secções interiores; e porque na natureza naõ existe velocidade infinita, será a velocidade no orificio finita, e no interior infinitamente pequena em comparaçaõ della.

227 Se compararmos entre si as quantidades dos licores, da mesma ou differente especie, que sahem com velocidades uniformes pelos orificios de dous quaisquer vasos (Fig. 71. 72.), he manifesto que seráõ entre si na rasaõ composta dos tempos, das areas dos orificios, e das velocidades; e se os tempos forem iguais, seraõ na rasaõ com-

composta das velocidades, e das areas dos orificios.

228 Para determinarmos agora a velocidade, com que sahe qualquer licor de hum vaso $ACDB$ por hum orificio infinitamente pequeno pq (Fig. 71.), reflectiremos que sendo infinitamente pequena a velocidade das particulas no interior do vaso (n. 226.), póde suppor-se que todas as camadas superiores ao orificio perdem a velocidade, que teriaõ naturalmente em virtude da gravidade; e conseguintemente, que o pequeno prisma de licor $pqgf$, que sahe a cada instante, he impellido pelo fluido superior da mesma maneira, que o seria huma tampa applicada ao orificio para impedir a sahida. Assim, sendo p' a densidade ou pezo especifico do fluido, a força motriz que expelle o prisma $pqgf$ será representada por $p'.bq.pq$ (n. 39.).

Supponhamos que no instante em que a pressaõ $p'.bq.pq$ faz sahir o prisma $pqgf$, a gravidade absoluta de hum prisma $pqxy$ (a qual se póde representar por $p'.pq.qx$) por si só o faria correr a pequena altura qx, começando desde o estado de quietaçaõ. Está claro, que sendo as forças motrizes $p'.bq.pq$, $p'.qx.pq$ proporcionais ás quantidades de movimento que produzem, se chamarmos V e u as velocidades que ellas imprimem nas massas $pqgf$, $pqgx$, teremos $p'.bq.pq : p'.qx.pq :: pqgf.V : pqxy.u$, ou $p'.bq.pq : p'.qx.pq :: pq.V.V : pq.u.u$ (n. 227.), e conseguintemente $bq : qx :: V^2 : u^2$. Mas qx he o espaço, pelo qual descendo hum grave adquirio a velocidade u, e pela theorica do movimento dos graves consta que os espaços saõ na rasaõ duplicada das velocidades adquiridas; logo bq he a altura donde deveria cahir hum grave para adquirir a velocidade V. Logo *a velocidade de hum fluido ao sahir de qualquer orificio infinitamente pequeno he igual á que teria adquirido hum grave cahindo da altura do fluido bq acima do orificio pq*; ou mais brevemente, *a velocidade do fluido he devida á sua altura.*

229 O raciocinio precedente suppoem necessariamente, que o orificio he infinitamente pequeno, para que o licor possa ser expellido pelo pezo da colunna superior. Sem embargo, a maior parte dos autores elementares, que nisto tem quasi todos copiado a M. Varignon, affirmaõ que o licor ao sahir de hum orificio horizontal he

expellido pelo pezo da columna ſuperior, ſem limitar a grandeza do orificio. Mas para ver, que a propoſiçaõ naõ he verdadeira em geral, baſta reflectir que ſe imaginarmos hum cylindro vertical cheio de agua, e de repente ſe tirar ou aniquilar o fundo, a camada inferior do fluido naõ ſentirá preſſaõ alguma das ſuperiores, mas todas deſceráõ com a meſma velocidade, conforme a acceleraçaõ dos graves, como ſe tudo foſſe hum corpo ſolido. A camada do fundo naõ he carregada do pezo da columna ſuperior, ſenaõ quando as camadas ſuperiores perdem as ſuas velocidades naturais da gravidade, e conſeguintemente quando o orificio he infinitamente pequeno.

Ainda que em rigor a propoſiçaõ he ſomente verdadeira a reſpeito dos orificios infinitamente pequenos, na pratica com tudo, quando os orificios ainda que finitos ſaõ pequenos em comparaçaõ das amplitudes dos vaſos, de maneira que naõ excedaõ por exemplo a raſaõ de 1 para 20, obſerva-ſe que as velocidades ſaõ ſenſivelmente as meſmas que nos orificios infinitamente pequenos. Neſte caſo a preſſaõ da columna ſuperior he menor, mas iſſo he ſenſivelmente compenſado com o movimento que trazem as particulas, que immediatamente impellem o pequeno priſma que actualmente ſahe pelo orificio. Somente ſe obſerva, que a velocidade naõ adquire a ſua plenitude uniforme e permanente, ſenaõ paſſados alguns ſegundos de tempo; e quanto o orificio he mais conſideravel, tanto ſe manifeſta mais eſta deſigualdade.

230 He manifeſto, que a propoſiçaõ precedente ſe extende aos orificios lateraes ſendo infinitamente pequenos, de maneira que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido; porque a preſſaõ he igual para todas as partes, quando as alturas do fluido ſaõ as meſmas.

231 E porque a velocidade he igual á que teria adquirido o fluido cahindo da altura bq, pela theorica dos graves concluiremos que o licor ao ſahir do orificio tem huma velocidade capaz de o fazer ſubir á meſma altura bq; e que com eſſa velocidade uniforme correria hum eſpaço igual a $2bq$ no meſmo tempo que gaſtaria hum grave em cahir da altura bq.

232 Sejaõ bq, lk as alturas dos licores *ACDB*, *OGHP* (Fig. 71. 72.), acima dos pequenos orificios pq, ik; e

V, *v*

V, v as velocidades reſpectivas com que ſahem por elles. Como cada huma deſtas velocidades, ſeja qual for a natureza do fluido, he repreſentada pela raiz quadrada da altura da columna que lhe correſponde, teremos ſempre em geral $V : v :: \sqrt{bq} : \sqrt{lk}$, iſto he, *ſeraõ as velocidades na raſaõ ſubduplicada das alturas dos fluidos, quer ſejaõ da meſma eſpecie, quer naõ.*

Daqui ſe vê, quanto ſe engana o autor da Architectura Hydraulica (tom. 1. p. 187.), quando diz que as velocidades de dous licores differentes, de agua e mercurio por exemplo, ſaõ entre ſi como as raizes quadradas dos productos das alturas multiplicadas pelas gravidades eſpecificas. Devia reflectir no meſmo exemplo que dá (n. 490.), que ſe a columna que expelle o mercurio pelo orificio de hum vaſo he quatorze vezes mais pezada do que a columna que expelle a agua pelo orificio do outro, tambem a maſſa expellida no primeiro caſo he quatorze vezes mais pezada do que no ſegundo; e aſſim acharia que a velocidade deve ſer a meſma em ambos os caſos. Em geral he evidente, que todas as vezes que as forças motrizes ſaõ proporcionais ás maſſas que ellas poem em movimento, as velocidades ſaõ iguais.

233 Com os principios, que havemos expoſto, facilmente ſe determinará a relaçaõ entre a area do orificio, a altura do fluido acima delle, o tempo da fluxaõ, e a quantidade de licor que nelle deve ſahir, ou o orificio ſeja horizontal, ou lateral, com tanto que neſte ſegundo caſo ſeja taõ pequeno, ou de tal ſorte poſto, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido.

Seja K a area do orificio pq (Fig. 71.), b a altura conſtante bq da agua no vaſo, Q a quantidade della que ſahe no tempo t, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. Pela theorica do movimento dos graves acharemos, que o tempo que deveria gaſtar hum grave em cahir da altura b he $= \sqrt{\frac{b}{a}}$. Porém neſte tempo deve ſahir huma columna de fluido, que tem por baſe K, e por altura $2b$ (n. 231.), porque a altura b he conſtante, e conſeguintemente uniforme a velocidade ao ſahir do orificio. Logo no tempo repreſentado do por $\sqrt{\frac{b}{a}}$ sahirá a quantidade de fluido representada por $2bK$; e conseguintemente teremos $\sqrt{\frac{b}{a}} : t :: 2bK : Q$, e $Q = 2tK\sqrt{ab}$.

Daqui se mostra, que *as quantidades de fluido, que no mesmo tempo sabem por orificios differentes, saõ entre si na rasaõ composta da rasaõ dos orificios, e da rasaõ subduplicada das alturas do fluido.*

A quantidade a he sempre constante e igual a 15 pés e 1 pollegada, quando o tempo se conta por segundos. As outras quantidades K, t, b, Q pódem variar; e bem se vê que sendo dadas tres quaisquer dellas, a quarta se determinará pela equaçaõ precedente.

234 Esta mesma equaçaõ serve para resolver o problema seguinte: *Supponhamos, que no interior de hum canhaõ se faz subitamente hum vazio, pela explosaõ da polvora; e que se pergunta o tempo, que gastará o ar em entrar nelle, e correr todo o seu comprimento.* Sendo a pressaõ da atmosfera, que faz entrar o ar no canhaõ, equivalente a huma colunna de agua de 32 pés (n. 85.), ou a huma colunna de ar uniforme de 32.850 pés (n.90.), naõ he necessario mais que fazer na equaçaõ precedente $b = 27200$ pés, e $Q = Kl$, sendo l o comprimento do canhaõ; e teremos $t = \frac{l}{2\sqrt{ba}}$. Se, por exemplo, for $l = 16$ pés, achar-se-ha $t = \frac{3}{4}$ de hum minuto terceiro proximamente. Desprezamos aqui a pequena quantidade de ar que entra pelo *ouvido*, e a pequena variaçaõ que experimenta a elasticidade do fluido, em quanto corre o espaço l.

235 Para determinar a fluxaõ dos licores por orificios horizontais de qualquer grandeza, a maior parte dos Autores de Hydraulica fazem duas hypotheses gerais: huma he, que imaginando o fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais, estas descem sempre parallelamente a si mesmas; e a outra, que todos os pontos de huma mesma camada tem a mesma velocidade vertical. A primeira parece ser huma consequencia necessaria da experiencia; porque evacuando-se qualquer vaso

por

por hum orificio, a fuperficie do licor fempre fe conferva horizontal, e parallela a fi mefma, ao menos até chegar muito perto do fundo, e as mefmas caufas que confervaõ o parallelifmo da primeira camada devem produzir o mefmo effeito nas camadas inferiores, ao menos proximamente. A fegunda naõ he rigorofamente exacta, quando o vafo naõ he prifmatico e vertical; porque as particulas contiguas ás paredes devem feguir a direcçaõ dellas, e perturbar neffe cafo o movimento vertical das particulas vezinhas. Mas como o numero das particulas de huma camada que tocaõ as paredes he infinitamente pequeno em comparaçaõ do numero das outras, podem eftas alterações fuppor-fe nullas, fem erro fenfivel.

Affim vemos, que eftas duas fuppofições faõ muito admiffiveis na parte fuperior do vafo. Porém na parte vezinha ao orificio eftaõ muito longe da verdade; porque, como affima differmos, todos os pontos fluidos fe dirigem entaõ obliquamente para o orificio, e por confeguinte naõ póde fuppor-fe que as mefmas particulas individuais formem huma mefma camada, cujos pontos fe abaixem verticalmente. Affim naõ he poffivel, que as circunftancias do efluxo da agua calculadas por eftas duas hypothefes fejaõ exactamente conformes á experiencia. Sem embargo, he facil de ver que os erros procedidos deftas fuppofições devem feguir a mefma lei em todos os cafos, ao menos proximamente; e defte modo, conhecendo pela experiencia as correcções que fe devem fazer aos refultados theoricos, podem fervir eftes de muita utilidade na pratica. Debaixo defta reftricçaõ admittiremos aqui efta theorica, porque tudo bem ponderado, parece que naõ fe tem imaginado até agora coufa melhor para reprefentar o movimento dos fluidos por formulas analyticas, que naõ involvaõ calculos extremamente complicados.

236. Seja pois *AÇDE* hum fluido fujeito á acçaõ da gravidade em hum vafo, do qual fahe por hum orificio horizontal pq de qualquer grandeza aberto no fundo *CD* (Fig. 73.). Imaginemos efte fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais, e iguais *ABba*, *TVut* &c, que fe abaixaõ parallelamente a fi mefmas, tendo cada huma a mefma velocidade vertical em toda a fua extenfaõ. Todas eftas camadas obraõ humas contra as outras,

tras,

tras, ou comprimindo-se reciprocamente, ou arrastando-se em virtude da adherencia que tem entre si; de maneira, que se a velocidade de humas he retardada de hum instante para outro, a velocidade das outras he accelerada. Succede neste caso ao movimento das particulas fluidas o mesmo que ao systema de muitos corpos solidos, dos quais nenhum póde mover-se sem actuar sobre os outros, e sem experimentar a reacçaõ delles.

Isto posto, levante-se a vertical pE; e seja a altura constante do fluido $Ep = h$, a area do orificio $pq = K$, a area representada pela linha AB, que he huma funçaõ de Ep, dada pela figura do vaso $= M$, a altura indeterminada $EH = x$, a area representada por TV, funçaõ dada de $x = y$, a velocidade da secçaõ do fluido que sahe pelo orificio $= u$, a velocidade da secçaõ $TVut = v$, o tempo $= t$, e a gravidade $= g$. Assim, supponde que no instante dt a velocidade v se faz $v + dv$ (dv póde ser positivo, ou negativo), e reflectindo que se faria $v + gdt$ se as camadas naõ actuassem entre si, está claro que sendo $v + gdt = v + gdt + dv - dv$, todo o fluido ficaria em equilibrio, se cada huma das camadas naõ fosse animada senaõ pela velocidade $gdt - dv$. Estas velocidades variaõ de huma camada para a outra, e por toda a extensaõ da altura Ep deveremos ter $\int dx(gdt - dv) = 0$; e porque $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, e $dt = \frac{dx}{v}$ $= \frac{ydx}{Ku}$, teremos $\int \frac{gydx^2}{Ku} - \int \frac{Kdx(ydu - udy)}{yy} = 0$.

237 Como o integral precedente deve tomar-se relativamente á altura Ep, e conseguintemente u e du devem considerar-se para o caso como constantes, e sendo por outra parte ydx huma quantidade constante, podemos reduzir a nossa equaçaõ a esta fórma $\frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int \frac{dx}{y}$ $+ Kuydx\int \frac{dy}{y^3} = 0$. Porém $\int dx$ vem a ser h, $\int \frac{dx}{y}$ (supprindo convenientemente a homogeneidade) póde representar a area, que chamaremos N, de huma curva construida sobre o eixo Ep, que tenha por ordenadas as differentes secçoens do vaso, que correspondem aos differen-

tes

tés pontos de Ep, $\int \frac{dy}{y^3}$ repreſenta a area de huma curva que deve deſvanecer quando $y = AB = M$, e ter o ſeu valor completo quando $y = K$, que ſerá conſeguintemente $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$, e em fim $ydx = ABba = M.Ee$. Logo $2gbM^2.Ee - 2K^2MNudu + uu.Ee(K^2 - M^2) = 0$. Sendo pois s a altura devida á velocidade u, ſerá $uu = 2gs$, e ſubſtituindo eſte valor teremos finalmente

$$bM^2.Ee - K^2MNds + s.Ee.(K^2 - M^2) = 0.$$

238 Supponhamos agora, que o vaſo ſe conſerva conſtantemente cheio na altura pE; e para iſſo imaginemos que á medida que a ſuperficie AB ſe abaixa em hum inſtante até ab, e que ſahe conſeguintemente huma pequena quantidade de licor igual a $AB.Ee$, a camada $ABba$ he ſubſtituida por outra, creada (para o dizer aſſim) no ſeu lugar, e com a meſma velocidade della. Além diſto ſeja Kz o licor que ſahe pelo orificio K no tempo t, e teremos evidentemente $Kdz = M.Ee$; donde ſe mudará a equaçaõ precedente neſta fórma

$$bM^2dz - KM^2Nds + (K^2 - M^2)sdz = 0,$$

na qual ſómente z e s ſaõ variaveis.

Se K for infinitamente pequeno, eſta equaçaõ ſe reduz a $bM^2dz = M^2sdz$, ou $b = s$, como tinhamos achado (n. 228.).

A equaçaõ precedente he facil de integrar. Porque fazendo $\frac{b}{KN} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{KM^2N} = f$, teremos $ds + fsdz = bdz$. Donde ſe tira, pelo methodo de que já nos havemos ſervido (n. 105.)

$$s = \frac{b}{f}\left(1 - e^{-fz}\right),$$

ſendo e o numero que tem por logarithmo a unidade, e completando-ſe o integral de maneira, que z e s deſvaneçaõ ao meſmo tempo.

239 Para conhecer a relaçaõ entre o tempo t e a velocidade u, ou a altura s que lhe he devida, obſervaremos

mos que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b-fs)\sqrt{2gs}}$. Fazendo $\frac{b}{f} = m^2$, e $s = y^2$; teremos $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{m^2-y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}$ $\left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right)$, e por conseguinte $t = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}$. $l\frac{m+y}{m-y} = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}}.l\frac{\sqrt{b}+f\sqrt{s}}{\sqrt{b}-f\sqrt{s}}$; integral, que naõ carece de conſtante, porque $t = 0$ dá $s = 0$.

240 Do meſmo modo para conhecer a relaçaõ entre o tempo e o eſpaço corrido z, poremos na equaçaõ $dt = \frac{dz}{u}$ em lugar de u o ſeu valor $\sqrt{2gs}$, e em lugar de s o ſeu valor acima achado (n. 238.), e teremos

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}} \cdot \sqrt{(1-e^{-fz})}}.$$

Suppondo $1-e^{-fz} = xx$, ſerá $dt = \frac{2}{\sqrt{2bgf}} \cdot \frac{dx}{1-xx}$ $= \frac{1}{\sqrt{2bgf}}\left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right)$, e conſeguintemente

$$t = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+\sqrt{(1-e^{-fz})}}{1-\sqrt{(1-e^{-fz})}};$$

integral completo, porque $z = 0$ dá $t = 0$, como deve ſer.

Por meio deſta equaçaõ ſe conhecerá a quantidade de agua, que ſahe pelo orificio em hum tempo dado, porque eſſa quantidade he $= Kz$, que agora ſe póde exprimir por huma funçaõ do tempo, e de conſtantes.

241 O modo de entreter o vaſo *ACDB* conſtantemente cheio, que acima imaginamos (n. 238.), raras vezes póde ter lugar na pratica. Ha outro mais uſado, que conſiſte em imaginar que a nova camada *ABba* ajuntada a cada inſtante, para reparar a deſpeza que ſe faz pelo orificio, he fornecida por huma affuſaõ lateral, e que ella recebe a ſua velocidade primitiva da camada immediata que

que a arrasta comsigo em virtude da tenacidade reciproca das partes do fluido. Entaõ he necessario fazer algumas mudanças no methodo precedente.

Conservando todas as outras denominaçoens, supponhamos que a velocidade da camada $ABba$ he $= V$. Como ella, se fosse deixada á acçaõ livre da gravidade, teria adquirido em hum instante dt a velocidade gdt, podemos considerar esta velocidade gdt como composta da velocidade V e de outra velocidade $gdt - V$ que deve ser destruida. Por conseguinte, se houvesse sómente na camada $ABba$ a velocidade $gdt - V$, e nas outras a velocidade $gdt - dv$, todo o systema deveria ficar em equilibrio. Logo teremos $Ee.(gdt - V) + \int dx(gdt - dv) = o$. Donde resulta, desprezando gdt em comparaçaõ de V, a equaçaõ $2gbM^2.Ee - 2KMVu.Ee - 2K^2MNudu + Ee.u^2(K^2 - M^2) = o$. Em fim pondo em lugar de V o seu valor $\frac{Ku}{M}$, e praticando tudo o mais como no methodo antecedente, teremos

$$bM^2dz - (K^2 + M^2)sdz - KM^2Nds = o;$$

equaçaõ da mesma fórma que a outra (n. 238.), e conseguintemente susceptivel de calculos analogos aos que della deduzimos. Bem se vê, que basta tomar $f = \frac{K^2 + M^2}{KM^2N}$ em lugar de $f = \frac{M^2 - K^2}{KM^2N}$ para applicar as formulas que havemos deduzido ao caso presente.

242. A equaçaõ final do n. 237. póde tambem servir para achar o movimento de huma quantidade determinada de fluido dentro de hum vaso, em virtude da gravidade, ou de hum impulso primitivo, ou de ambas estas causas juntamente. Havendo imaginado que o fundo CD se aniquila, ou que $K = CD$, supponhamos que a porçaõ dada do fluido occupa no primeiro instante o espaço $SZKX$, e que no fim do tempo t tem chegado á posiçaõ indeterminada $ACDB$. Está claro, que chamando z o espaço OE corrido verticalmente pela superficie do fluido, as quantidádes M, K, N, b seraõ funçoens dadas de z e de constantes, porque he dada a figura do vaso, e os espaços $SZKX$, $ACDB$ saõ iguais entre si. Donde se segue que a equa-

a equaçaõ que repreſenta o movimento do fluido ſerá ſempre deſta fórma

$$Zdz + AZ'ds + BsZ''dz = 0,$$

ſendo Z, Z', Z'' funçoens de z, e A, B quantidades conſtantes. Eſta equaçaõ ſe integrará, de maneira, que ſatisfaça á condiçaõ da velocidade inicial de qualquer ſecçaõ dada do fluido; e ſendo achada a relaçaõ entre s e z, facilmente ſe achará t em s, ou em z.

Quando o fluido naõ for pezado, o primeiro termo da equaçaõ, que he relativo a eſta força, ſe deſvanece; e a equaçaõ fica muito mais ſimples.

243 O methodo, que até agora havemos expoſto, applica-ſe muito bem aos orificios horizontais; mas naõ ſuccede o meſmo nos laterais. Eſtes contribuem muito a perturbar o parallelifmo das camadas; e além diſſo, as particulas fluidas que ſahem por elles naõ tem todas a meſma velocidade, porque as mais diſtantes da ſuperficie do fluido ſe movem neceſſariamente com mais velocidade. Entaõ o methodo mais ſimples, e que dá reſultados ſufficientemente conformes á experiencia, he o ſeguinte.

244 Como temos viſto, que o fluido ſahe por hum orificio lateral infinitamente pequeno do meſmo modo que por hum horizontal ſituado em igual diſtancia da ſuperficie do fluido (n.230.); quando o orificio lateral for de grandeza conſideravel podemos ſuppollo dividido em huma infinidade de rectangulos, ou trapezios horizontais, e conſiderar cada hum delles como hum orificio infinitamente pequeno. Deſignando pois cada hum deſtes elementos por dS, e a quantidade total de fluido que dá o orificio no tempo t por Q, a altura do fluido reſpectiva ao elemento dS por z, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo por a; teremos (n. 233) $Q = 2t\sqrt{a}.\int dS\sqrt{z}$.

245 Exemplo I. *Determinar a quantidade de fluido que em hum tempo dado ſahe pelo orificio rectangular vertical LNOM praticado em huma das paredes de qualquer vaſo* (Fig.74.).

Seja a altura do fluido acima da parte ſuperior $VK = b$, $VR = H$, $LM = f$, $LX = x$, e conſeguintemente $VI = z = b + x$, $XZzx = dS = fdx$. Logo teremos $Q = 2t\sqrt{a}.\int f dx\sqrt{(b + x)}$; e tomando eſte integral entre os limites $x = 0$, e $x = H - b$, teremos finalmente

Q =

$$Q = \frac{4}{3} ft \left(H\sqrt{H} - b\sqrt{b}\right)\sqrt{a}.$$

Donde se vê, que das sinco quantidades H, b, f, t, Q, sendo dadas quatro, a quinta se póde sempre determinar por esta equaçaõ.

246 Supponhamos, que y he a *altura media* da agua acima de hum ponto I do orificio, isto he, huma altura tal, que se todos os pontos do fluido que sahem pelo orificio tivessem a mesma velocidade que tem os pontos que sahem pela horizontal XIx, em igual tempo sahisse huma quantidade de agua igual á que dá o mesmo orificio com as velocidades naturais, segundo a hypothese deste problema. Assim teremos $Q = 2tf(H-b)\sqrt{ay}$ (n.233.); e igualando entre si os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{4(H\sqrt{H} - b\sqrt{b})^2}{9(H-b)^2}.$$

Esta altura differe pouco da distancia do centro de gravidade do orificio á superficie do fluido, a qual he $= \frac{H+b}{2}$; de maneira que sendo $b = 0$, temos $y = \frac{4}{9}H$, sendo a differença $\frac{1}{18}$ da altura do orificio KR. Quanto mais estiver levantada a superficie da agua acima da base superior do orificio, tanto menor se fará esta differença; e conseguintemente na pratica póde tomar-se por altura media a distancia do centro de gravidade do orificio á superficie do fluido. 91.a

247 Exemplo II. *Determinar a quantidade de fluido, que em hum tempo dado sahe pelo orificio vertical LNM, aberto em fórma de triangulo isosceles, com a base LM horizontal* (Fig. 75.).

Seja a base do triangulo $LM = f$, a altura do fluido acima della $VR = H$, e acima do vertice $VN = b$. Tomando na recta NR huma abscissa x, e tirando huma ordenada parallela á base LM, será a sua expressaõ $\frac{fx}{H-b}$, e conseguintemente $dS = \frac{fxdx}{H-b}$, e $z = b+x$. Logo $Q = \frac{2tf\sqrt{a}}{H-b}\int xdx\sqrt{(b+x)}$; e tomando este integral

tegral entre os limites de $x = 0$, e $x = H - b$, teremos a equaçaõ

$$Q = \frac{4ft(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

248 Sendo y a altura media da agua, acharemos $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando entre si os dous valores de Q, resultará

$$y = \frac{16(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})^2}{225(H-b)^4}.$$

Este valor differe muito pouco da distancia do centro de gravidade do triangulo á superficie do fluido; porque no caso da maior differença quando $b = 0$, he de $\frac{2}{25}$ de NR, e quando o fluido está elevado consideravelmente acima de N, esta differença vem a ser insensivel.

249 Exemplo III. *Determinar a quantidade de fluido que sabe pelo orificio triangular, e isosceles LMN, que tem a base LM borisontal, e o vertice N para a parte de baixo* (Fig. 76.).

Seja $VN = H$, $VR = b$, $LM = f$; e tomando na recta NR huma abscissa x, teremos $dS = \frac{fxdx}{H-b}$, e $z = H - x$. Logo $Q = \frac{2ft\sqrt{a}}{H-b}\int xdx\sqrt{(H-x)}$; e tomando este integral entre os limites de $x = 0$, e $x = H - b$, teremos

$$Q = \frac{4ft(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

250 Suppondo a altura media da agua acima do orificio $= y$, será $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{16(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})^2}{225(H-b)^4};$$

valor, que differe muito pouco da distancia do centro de gravidade do triangulo á superficie da agua. A sua maior

maior differença, quando $h=0$, he $\frac{11}{225}$ de NR.

251 Exemplo IV. *Determinar a quantidade de licor que sahe por hum orificio vertical circular LMNP em hum tempo dado* (Fig. 77.).

Seja o raio $OL=r$, a rasaõ entre a altura do fluido acima do centro OV e o raio $=n$, isto he, $OV=nr$, e o angulo $LOQ=x$. Assim teremos $QR=r\,sen\,x$, $LR=r-r\cos x$, $Rr=r\,dx\,sen\,x$, e $VR=nr-r\cos x$. Logo $dS=2r^2\,dx\,sen\,x^2$, $z=nr-r\cos x$; e conseguintemente

$$Q=4tr^2\sqrt{ar}\,.\int dx\,sen\,x^2\sqrt{(n-\cos x)}\,.$$

Para integrarmos actualmente o segundo membro, reflectiremos que $dx\,sen\,x\sqrt{(n-\cos x)}=dx(1-\cos x^2)(n-\cos x)^{\frac{1}{2}}=dx(1-\cos x^2)\left(n^{\frac{1}{2}}-\frac{\cos x}{2n^{\frac{1}{2}}}-\frac{\cos x^2}{8n^{\frac{3}{2}}}-\frac{\cos x^3}{16n^{\frac{5}{2}}}-\frac{5\cos x^4}{128n^{\frac{7}{2}}}-\frac{7\cos x^5}{256n^{\frac{9}{2}}}\ \&c\right)=n^{\frac{1}{2}}dx\Big(1-\cos x^2+\frac{\cos x^3-\cos x}{2n}+\frac{\cos x^4-\cos x^2}{8n^2}+\frac{\cos x^5-\cos x^3}{16n^3}+\frac{5\cos x^6-5\cos x^4}{128n^4}\ \&c\Big)$. Porém temos em geral $\cos x^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$, $\cos x^3=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$, $\cos x^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$, &c; valores que devem ser substituidos na equaçaõ precedente, para se proceder á integraçaõ em geral. Mas reflectindo, que para o orificio inteiro havemos de tomar o integral entre os limites $x=0^\circ$, e $x=180^\circ$, podemos desprezar na substituiçaõ todos os termos que contém $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ &c, porque estes na integraçaõ deveráõ dar $sen\,x$, $sen\,2x$, $sen\,3x$ &c, que nos ditos limites saõ $=0$. Assim podemos fazer $\cos x^2=\frac{1}{2}$, $\cos x^3=0$, $\cos x^4=\frac{3}{8}$, $\cos x^5=0$,

$= 0$, $\cos u^6 = \frac{5}{16}$ &c; e teremos $dx\,\text{sen}\,x^2 \sqrt{(n - \cos x)}$

$= \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} dx \left(1 - \frac{1}{32\,n^2} - \frac{5}{1024\,n^4} \&c\right)$. E porque o integral ſe ha de tomar entre os limites $x = 0$, e $x = c$, ſendo c a ſemicircumferencia do circulo que tem por ſemidiametro a unidade, teremos finalmente

$$Q = 2\,c\,t\,r^2 \left(1 - \frac{1}{32\,n^2} - \frac{5}{1024\,n^4} \&c\right) \sqrt{a\,n\,r}.$$

Eſta ſerie he taõ convergente, que por pouco que n exceda a unidade, os tres primeiros termos ſeraõ mais que ſufficientes na pratica.

252 Sendo y a altura media da agua, teremos $Q = 2\,c\,t\,r^2 \sqrt{a\,y}$; e igualando entre ſi os dous valores de Q, acharemos

$$y = n\,r\left(1 - \frac{1}{16\,n^2} - \frac{9}{1024\,n^4} \&c\right);$$

e eſte valor coincide ſenſivelmente com VO, quando n excede ſenſivelmente a unidade.

253 Quando a ſuperficie da agua eſtá ao livel da extremidade ſuperior do diametro LN (Fig. 78.), iſto he, quando $n = 1$, a formula que achamos dará tambem o valor de Q. Mas entaõ póde integrar-ſe a expreſſaõ $dx\,\text{sen}\,x^2 \sqrt{(1 - \cos x)}$ em termos finitos, e algebricos. Porque fazendo $1 - \cos x = u$, teremos $\int dx\,\text{sen}\,x^2 \sqrt{(1 - \cos x)} = \int u\,du \sqrt{(2-u)} = u \int du \sqrt{(2-u)} - \int du \int du \sqrt{(2-u)} = -\frac{2u(2-u)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-u)^{\frac{5}{2}}}{15} = -\frac{2\,\text{sen}\,x^2 (1 + \cos x)^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{4(1 + \cos x)^{\frac{5}{2}}}{15}$. Tomando pois o valor deſta expreſſaõ entre os limites de $x = 0°$, e $x = 180°$, e multiplicando o reſultado pelo coefficiente $4\,t\,r^2 \sqrt{a\,r}$, teremos neſte caſo

$$Q = \frac{64\,t\,r^2 \sqrt{2\,a\,r}}{15}.$$

Faltava ainda dar huma formula para quando a ſuperficie

ficie da agua eſtá debaixo do ponto *L*. Mas neſſe caſo, naõ ſendo a ſuperficie da agua ſuſtentada pela parede do vaſo no lugar do orificio, abaixa-ſe ſenſivelmente para a parte do méio, altéra a raſaõ natural das velocidades, e ſerve de embaraço á theorica, pela qual ſe naõ póde dar a ſoluçaõ deſte caſo, ſenaõ de hum modo muito imperfeito.

254 Eſtes exemplos baſtaõ para ſe entender o modo de determinar o deſaguamento dos fluidos por hum ſó orificio. Quando o fluido ſahir por muitos ao meſmo tempo, ſendo todos pequenos, naõ ha difficuldade nenhuma de novo. Cada hum ſe calcula ſeparadamente, como ſe foſſe ſó. Mas ſempre deve obſervar-ſe que hum orificio pequeno na vezinhança de outro maior, dá hum pouco menos á proporçaõ do que elle, como adiante moſtraremos pela experiencia.

Paſſemos á ſoluçaõ de differentes problemas relativos ao deſaguamento de vaſos atraveſſados vertical, ou horizontalmente por muitos diaphragmas, problemas curioſos em ſi meſmos, e que tem applicaçóes frequentes na pratica.

255 Probl. I. *Suppondo que os vaſos* $ABCD$, $FCEG$, $HELK$ (Fig. 79.), *communicaõ entre ſi pelas pequenas aberturas* C, E, *e que o fluido ſabe pelo orificio* L; *achar as velocidades em* C, E, L, *e a quantidade de licor que ſabe por* L, *quando o movimento tem chegado á uniformidade, e conſeguintemente deitando-ſe tanta agua no primeiro vaſo quanta ſabe do ultimo, as alturas* AB, CF, EH *ficaõ conſtantemente as meſmas.*

Por quanto as aberturas C, E, L ſaõ muito pequenas em comparaçaõ das amplitudes dos vaſos, he evidente que a pequena maſſa de fluido que por ellas paſſa a cada inſtante naõ produzirá abalo ſenſivel no fluido dos ditos vaſos, e que hum tal abalo naõ póde alterar ſenſivelmente as velocidades em C, E, L, ſobre tudo quando eſtas aberturas naõ eſtaõ em linha recta. E porque o fluido $CFOB$ faz equilibrio com $CFGE$, e $EHQC$ com $EHKL$ (n.35.), ſeraõ as velocidades em C, E, L devidas reſpectivamente ás alturas DF, GH, KL. Pelo que ſuppondo $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, $AB = b$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, e a quantidade de licor que paſſa no tempo t por cada hum

 dos

dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tC\sqrt{ax} = 2tE\sqrt{ay}$ $= 2tL\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde se tira

$$x = \frac{L^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$y = \frac{C^2 L^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$z = \frac{C^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$Q = \frac{2tL . CE . \sqrt{ab}}{\sqrt{(C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2)}}.$$

Do mesmo modo se procederia no caso de haver maior numero de vasos. Se os orificios fossem de grandeza consideravel seria necessario recorrer ao methodo geral (n. 235, e seg.); mas neste problema e outros semelhantes chegariamos a calculos quasi intrataveis da parte da Analyse.

256 Probl. II. *Determinar a lei, pela qual sobe o fluido nos vasos FE, HL do problema precedente, em quanto o desaguamento naõ tem chegado a hum estado regular, e permanente.*

Sejaõ primeiramente dous vasos prismaticos BD, CG (Fig. 80.) communicantes pelo pequeno orificio C, e o primeiro seja entretido sempre cheio constantemente até AD, em quanto o segundo lança o licor pelo pequeno orificio E. Supponhamos, que passado certo tempo t a superficie do fluido no vaso CG se acha em NO, e que no instante seguinte sobe até no. Fazendo $CD = b$, $DN = x$, a area da secçaõ $NO = A$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$; he evidente, que no instante dt as alturas devidas ás velocidades em C, E saõ x, e $b - x$ (n. 228.). Donde se segue (n. 233.), que no instante dt sahirá pelo orificio C a quantidade de agua $2C\,dt\sqrt{ax}$, e pelo orificio E a quantidade $2E\,dt\sqrt{[a(b-x)]}$: porém a differença destas quantidades he evidentemente igual a $NOon$; logo $2Cdt\sqrt{ax} - 2Edt\sqrt{[a(b-x)]} = Adx$; e conseguintemente

$$dt = \frac{A}{2\sqrt{a}} . \frac{dx}{E\sqrt{(b-x)} - C\sqrt{x}}.$$

Suppon-

Suppondo primeiramente $x = \frac{yy}{b}$, e depois $E\sqrt{(bb - yy)} - Cy = Ez$, reduziremos a equaçaõ precedente a esta fórma

$$dt = Hdz + \frac{Mdz}{z} + \frac{Nzdz}{\sqrt{(P^2 - z^2)}} + \frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2 - z^2)}},$$

na qual H, M, N, P, Q saõ constantes faceis de determinar. O ultimo termo, no qual sómente póde haver embaraço, integra-se fazendo $z = \frac{P^2}{u}$. Deste modo acharemos $\int \frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2 - z^2)}} = \int \frac{-Qdu}{P\sqrt{(u^2 - P^2)}} = -\frac{Q}{P} l(u + \sqrt{(u^2 - P^2)})$.

Assim podemos sempre achar o valor de t em x. Mas he de advertir, que o fluido deve ter na origem do movimento huma certa altura no vaso *CG*, para que a agua que entra pelo orificio *C* naõ produza abalo sensivel no fluido que elle contêm. A esta condiçaõ se satisfará, determinando a constante, que deve completar o integral, de maneira que quando $t = 0$ tenha *DN* hum valor dado, menor do que b.

257 Seja agora qualquer numero de vasos *BD*, *CG*, *EK*, *LR* (Fig. 81.), e com as mesmas condiçoens. Suppondo $DC = b$, $DN = x$, $OP = y$, $SQ = z$, $RM = u$; a area da secçaõ $NO = A$, de $PS = B$, de $LR = R$; pelo que acabamos de mostrar, teremos as equaçoens seguintes

$$2Cdt\sqrt{ax} - 2Edt\sqrt{ay} = -Adx,$$
$$2Edt\sqrt{ay} - 2Ldt\sqrt{az} = -Bdy,$$
$$2Ldt\sqrt{az} - 2Mdt\sqrt{au} = -Rdz$$
$$x + y + z + u = b.$$

Todas estas equaçoens combinadas entre si daraõ o valor de t em x, ou y, ou z, ou u, e conseguintemente determinaráõ as alturas do fluido nos vasos *CG*, *EK*, *LR* para qualquer tempo dado; mas os calculos seraõ muito complicados.

258 O problema elegante resolvido por *M.* de Montucla he muito analogo ao presente: *Suppondo que o vaso BD he hum regato, ou manancial, que em tempos iguais in-*

 troduz

troduz pela abertura C quantidades iguais de agua no vaso CG, o qual deixa sahir parte della pela abertura E; determinar o movimento da superficie do fluido NO no mesmo vaso (Fig. 80.).

Como neste caso a velocidade em C he devida a huma altura constante b, supposdo $CN = x$, e conservando as outras denominaçoens acima estabelecidas (n.256.), teremos $2C\,dt\sqrt{ab} - 2E\,dt\sqrt{ax} = A\,dx$, ou $dt = \frac{A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$. Seja $x = yy$; e acharemos $t =$

$$\int \frac{A}{E\sqrt{a}} \left(-dy + \frac{C\sqrt{b}.dy}{C\sqrt{b} - Ey} \right) = M - \frac{Ay}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}}.$$

$$l(C\sqrt{b} - Ey) = M - \frac{A\sqrt{x}}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}} l(C\sqrt{b} - E\sqrt{x}).$$

A constante M deve determinar-se de maneira, que quando $t = 0$, tenha x hum valor dado.

A quantidade de agua que no tempo t sahe pela abertura E será representada por $\int 2E\,dt\sqrt{ax} = EA\int \frac{dx\sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$

$$= N + A\left[-x - \frac{2C\sqrt{bx}}{E} - \frac{2C^2 b}{E^2} l(C\sqrt{b} - E\sqrt{x}) \right].$$

259 Probl. III. *Sendo o vaso AV* (Fig. 82.) *constantemente cheio de licor até a altura AI, e atravessado dos diaphragmas BC, ZT, IV furados com pequenas aberturas M, N, P; determinar as velocidades do fluido em cada huma dellas, e a quantidade de agua que por ellas passa em hum tempo dado.*

Está claro, que o fluxo natural da agua em M he embaraçado em parte pela resistencia da agua inferior, e que o fluido correrá por M do mesmo modo que passaria por hum orificio lateral $C = M$ para hum vaso CG, no qual a altura da agua CF exprimisse a resistencia que cada ponto da agua em M experimenta da parte da agua inferior. E porque a reacçaõ he igual e contraria á acçaõ, a agua BT será comprimida em todos os seus pontos pela agua superior com huma força proporcional a CF; e por conseguinte, se naõ encontrasse resistencia na agua inferior, correria em N com huma velocidade devida á altura TF, ou do mesmo modo que correria no vaso lateral TG por huma abertura

tura $E = N$. Assim, sendo TQ a altura proporcional á resistencia, que cada ponto da agua em N encontra na agua inferior, o fluxo em N se fará do mesmo modo que no vaso QG por huma abertura $H = N$. Do mesmo modo se vê, que em P correrá da mesma maneira que no vaso SK por hum orificio $L = P$, sendo a altura $SH = VQ$.

Isto posto, fazendo $AI = b$, $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, a quantidade de agua que no tempo t passa por cada hum dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax} = 2tN\sqrt{ay} = 2tP\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde se tira, como no Problema I,

$$x = \frac{N^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$y = \frac{M^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$Q = \frac{2tP . MN . \sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2)}};$$

e do mesmo modo se procederia, havendo mais diaphragmas.

260 Quando a ultima abertura P he muito pequena em comparaçaõ das outras, teremos sensivelmente $x = \frac{P^2 . b}{M^2}$, $y = \frac{P^2 . b}{N^2}$, $z = b$, $Q = 2tP\sqrt{ab}$. Donde se vê, que o desaguamento em P he como se naõ houvesse diaphragmas; e assim deve ser, porque a figura do vaso he indifferente, quando a abertura por onde sahe o fluido he infinitamente pequena a respeito de todas as amplitudes horizontais do mesmo vaso.

261 Pelo contrario, se as aberturas M, N forem muito pequenas em comparaçaõ de P, teremos sensivelmente $z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tMN\sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e conseguintemente a velocidade, e producto do orificio seraõ muito menores. Donde se vê, quanto saõ prejudiciais á altura, e pro-

producto das fontes de repuxo os obstaculos, que frequentemente se formaõ nos canos; e quanto he necessario na construcçaõ das bombas aumentar os diametros das valvulas, quanto for possivel, a respeito dos orificios por onde ellas devem desaguar.

262 Se os tres orificios forem iguais, teremos $x = y = z = \frac{1}{3} b$, e $Q = \frac{2tP\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$. Donde se vê, que o producto do orificio P será para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para $\sqrt{3}$. Em geral, sendo dados os orificios M, N póde o terceiro P fazer-se tal, que o producto delle seja para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para qualquer numero n. Para satisfazer a esta condiçaõ, teremos $\frac{n \cdot MN}{\sqrt{(M^2 N^2 + M^2 P^2 + N^2 P^2)}} = 1$; donde se tira $P = \frac{MN\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e quando as aberturas M, N saõ iguais, $P = M\sqrt{\frac{nn-1}{2}}$.

Estas, e muitas outras applicaçoens, que facilmente se podem fazer, igualmente convem ás formulas do Prroblema I.

263 He de advertir, que a soluçaõ naõ terá lugar, quando o fluido naõ formar huma massa continua no interior do vaso. E posto que a pressaõ do ar que obra de baixo para cima em P, e de cima para baixo na superficie AD, se oppoem á cessaçaõ de continuidade; póde com tudo succeder que esta se effeitue em certos casos. Por exemplo: Se a abertura P, ainda que pequena, for muito maior que as outras duas, póde succeder que sendo consideravel a altura ZI do repartimento inferior, a pressaõ que delle resulta sobre o orificio P seja maior do que convinha, para que a agua que passa por N em virtude da pressaõ da agua superior, e da adherencia com a inferior que procura arrastalla comsigo, possa supprir a que sahe por P. Nesse caso formar-se-ha hum vazio $XYTZ$, que se irá enchendo do ar que traz comsigo a agua que cahe do orificio N; e o fluido sahirá por P, como se o vaso $IXYV$ fosse independente, e entretido constantemente cheio na altura IX. O mesmo póde succeder nos repartimentos superiores.

264

264 Probl. IV. *Passando o licor do vaso AC, cheio constantemente até AB, pelo orificio M para o vaso lateral CG, donde sómente póde sahir por duas pequenas aberturas N, P; achar as velocidades em M, N, P, e as quantidades de fluido que por estas aberturas passaõ em hum tempo dado* (Fig. 83.).

Supponhamos que o licor em M encontra da parte da agua do vaso CG huma reacçaõ representada por MH: e facilmente veremos, que conduzindo as horizontais NV, HK, seraõ as velocidades em M, N, P devidas ás alturas DH, HV, HC. Assim fazendo $DC = b$, $DV = b$, $DH = x$, e representando por Q, Q', Q'' as quantidades de agua que no tempo t passaõ por M, N, P, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax}$, $Q' = 2tN\sqrt{[a(b-x)]}$, $Q'' = 2tP\sqrt{[a(b-x)]}$, e $Q' + Q'' = Q$. Estas equaçoens daõ

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)},$$

que se reduz a huma equaçaõ do segundo gráo, da qual se tirará o valor de x; e conhecendo x, acharemos os valores de HV, HC, Q, Q', Q''.

265 As alturas HV, HC devidas ás velocidades em N, P saõ evidentemente as das columnas, que comprimiriaõ perpendicularmente as paredes do vaso CG nos mesmos lugares, se os orificios N, P subitamente se tapassem. Assim, quando sahe o licor por N, P, será a pressaõ de huma parte X tomada em hum lugar dado representada por $X.HC$. Por exemplo: Supponhamos P infinitamente pequeno, ou $P = 0$; e a equaçaõ geral $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)}$ se reduzirá a $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)}$, e dará $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$. Por conseguinte teremos $CH = b - x = \frac{M^2 b + N^2(b-b)}{M^2 + N^2}$, e a pressaõ de $X = \frac{X[M^2 b + N^2(b-b)]}{M^2 + N^2}$.

Do mesmo modo se determinará a pressaõ em qualquer outro lugar do mesmo vaso CG, e do outro BD: bem entendido, que esta determinaçaõ suppoem que as aberturas M, N, P saõ muito pequenas, e que as aguas estaõ como estagnantes em ambos os vasos. Quando as abertu-

ras

ras forem consideraveis, usaremos do Problema seguinte.

266 PROBL. V. *Determinar a pressaõ, que hum licor exercita contra as paredes de hum vaso, quando corre pelo interior delle* (Fig. 73.).

Suppondo a hypothese, a construcçaõ, e as denominações do nº 236, a velocidade com que cada camada deveria tender a mover-se, para haver equilibrio, he $g\,dt - dv$, e conseguintemente a força correspondente $g - \frac{dv}{dt}$. Donde se vê, que as camadas se comprimem com as forças $g - \frac{dv}{dt}$ do mesmo modo que as camadas de hum fluido em quietaçaõ se comprimem em virtude da gravidade. Logo na profundidade $EH = x$, a pressaõ de cada hum dos pontos da camada $TVut$ he representada por $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; e esta força he a que se communica perpendicularmente aos elementos das paredes Tt, Vu. Porém $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$; e substituindo por dv o seu valor $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, temos $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt} \int \frac{dx}{y} - \frac{K\,u\,y\,dx}{dt} \int \frac{dy}{y^3}$; expressaõ, na qual a area representada por $\int \frac{dx}{y}$ que chamaremos Q, deve ser a que corresponde a EH, e $\int \frac{dy}{y^3}$ deve desvanecer quando $y = AB$, e tomar o seu valor completo quando $y = TV = H$. Logo, metendo por $y\,dx$ o seu valor $M \cdot Ee$, acharemos para a profundidade EH o valor da pressaõ $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \frac{KQ\,du}{dt}$ $\frac{K\,u \cdot Ee \cdot (H^2 - M^2)}{2\,dt \cdot H^2\,M^2}$, no qual se substituiráõ os valores de u e dt em cada caso.

267 Se

267 Se o valor da pressaõ em qualquer lugar do vaso sahir negativo, he final de que o fluido cessará de ser continuo, e se dividirá em partes. Eisaqui huma experiencia de M. Daniel Bernoulli, que o mostra aos olhos (Fig. 84.).

No fundo de hum vaso cylindrico *A F* está applicado hum tubo conico *D H*, guarnecido de hum pequeno tubo lateral *l*, no qual encaixa a extremidade de hum canudo curvo *l m n*, que tem a outra extremidade mergulhada no vaso de agua *M*. He *C A* de 46 linhas, *E l* de 4, *l H* de 33 e meia, *l m n* de 66, e a secçaõ do tubo conico em *l* he para o orificio *G H* como 10 para 16. Tapando o orificio *G H*, e enchendo constantemente de agua o vaso *A F*, esta corre pelo canudo *l m n* para o vaso *M*. Entaõ destapando *G H*, a agua do vaso *M* sobe pelo canudo *n m l*, e vem desaguar por *G H*, até elle se esgotar; e se abrirmos somente huma parte do orificio *G H*, poderemos fazer que a agua suba ou desça por *n m l* a nosso arbitrio. Quando ella sobe, he porque a pressaõ no tubo conico em *l* se faz negativa, e conseguintemente a pressaõ da atmosfera sobre a superficie do vaso obriga a agua delle a subir. A mesma pressaõ embaraça neste caso a separaçaõ das partes do fluido.

268. Pelos mesmos principios se póde determinar a força necessaria para sustentar hum vaso, que lança agua por qualquer orificio *p q* (Fig. 73.). Porque esta força he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela força, em virtude da qual estaria em equilibrio, pela mesma rasaõ que a força necessaria para sustentar hum fluido grave em quietaçaõ he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela gravidade. Logo a força procurada será representada por $\int y\,dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right) =$ $\int g y\,dx - \int \frac{y\,dx\,dv}{dt}$. A primeira parte he o pezo do mesmo fluido, e a segunda se acha sem difficuldade pelo que temos dito.

269 Probl. VI. *Sendo o vaso A D constantemente cheio de agua até A B, e movido verticalmente por meio do pezo R applicado a huma corda naõ pezada, que passa pelas roldanas fixas M, N; determinar a pressaõ que o fluido exercita*

ta sobre fundo , e conseguintemente a quantidade que desaguará pelo pequeno orificio p q (Fig. 85.).

Seja P a massa total do vaso e do fluido , e G o seu centro de gravidade ; e supponhamos , que havendo de correr os corpos R, P em hum instante os espaços iguais Rt, Gx em virtude da gravidade , pela acçaõ reciproca que tem entre si descrevem os espaços tambem iguais Rr, Gy. Assim consta da Mechanica , que fazendo a gravidade natural $Rt = g$, e $Gy = p$, teremos $R(g-p) = P(g+p)$; donde se tira $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$, e os dous corpos se moveráõ com movimento uniformemente accelerado. E porque a força , que obra sobre cada particula da massa P de baixo para cima , he $g+p = \frac{2gR}{R+P}$; está claro , que imprimindo-se hum movimento igual e contrario no systema de todas as particulas , deveria ficar em equilibrio. Neste caso pois , em virtude da força $\frac{2gR}{R+P}$ que obra verticalmente de cima para baixo sobre cada particula do fluído , deve resultar em cada ponto do fundo CD huma pressaõ que he para a pressaõ que experimentaria , se o fluido fosse unicamente sujeito á acçaõ da gravidade , como $\frac{2gR}{R+P}$ para g, ou como $2R$ para $R+P$. Mas a pressaõ sobre a area pq em virtude da gravidade he $p'.pq.bq$, sendo p' o pezo especifico do fluido. Logo na hypothese do nosso problema será a pressaõ da mesma area $= p'.pq.bq.\frac{2R}{R+P}$; e sahindo o fluido por pq, a sua velocidade será devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$. Assim , para determinar a quantidade de fluido que deve sahir no tempo t, naõ he necessario mais que usar da formula do nº 233 , na qual substituiremos $\frac{2R'.b}{R+P}$ em lugar de de b, conservando as mais denominações; e teremos $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

270 Pela equação $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$ se vê 1°, que sendo $R = P$, teremos $p = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. Então o vaso estará em quietação, e desaguará como no nº 233. O mesmo succederia, se o vaso se movesse verticalmente com movimento uniforme.

2°, Sendo $R = 0$, teremos $\frac{2R}{R+P} = 0$. Neste caso desvanece a pressão, e o fluido não sahirá por pq, como he por outra parte evidente; porque então todos os pontos do fluido descerão em virtude da gravidade natural com a mesma velocidade.

3°, Sendo P infinitamente pequeno em comparação de R, teremos $\frac{2R}{P+R} = 2$, e $Q = 2tK\sqrt{2ab}$, sendo neste caso o producto do orificio para o que daria, se estivesse em quietação, como $\sqrt{2}$ para 1.

4°, Sendo $P > R$, o pezo P descerá, e R subirá. Neste caso, para determinar o movimento deve tomar-se p negativo. Mas a velocidade em pq será, como no primeiro, devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$, e a quantidade de agua que sahe pelo orificio será sempre determinada pela equação $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

271 Probl. VII. *Suppondo que o vaso AC (Fig. 86.) se move pelo plano horizontal DQ em virtude da acção do pezo R: achar a pressão que o fluido nelle incluido exercita em qualquer elemento da parede T t, e a velocidade com que sabiria por elle.*

Seja P a soma das massas do vaso e do fluido, $Rr = g$ o espaço que R andaria livremente em hum instante, $Rr = Cc = p$ o espaço que andão effectivamente os dous corpos P, R; e teremos $R(g-p) = Pp$, ou $p =$

$=\frac{gR}{R+P}$. Logo cada particula do fluido he follicitada na direcçaõ DQ por huma força $\frac{gR}{R+P}$; e por confeguinte, fe huma força igual e contraria fe imprimiffe no fyftema, ficaria efte em quietaçaõ. Nefte ultimo cafo, cada particula he fujeita á acçaõ de duas forças, huma vertical g, e a outra horizontal $\frac{gR}{R+P}$, cuja refultante he $g.\frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$. Affim, para haver equilibrio, he neceffario que a fuperficie do fluido feja perpendicular a efta refultante (n. 32.); e porque ella he fempre conftante em quantidade e direcçaõ, a fuperficie do fluido ferá hum plano inclinado OM tal, que conduzindo a horizontal OE para avertical ME, tenhamos $\frac{OM}{OE}=\frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$.

Ifto pofto, fe de qualquer ponto T das paredes do vafo fe tirar TZ perpendicular a OM, eftá claro que a preffaõ do elemento Tt ferá para a que elle experimentaria na profundidade TZ em hum vafo pofto em quietaçaõ, como $\frac{g\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$ he para g, ou como $\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}$ para $R+P$. Logo ferá a preffaõ no noffo cafo $=Tt.TZ.\frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$; e conhecida efta, facil he determinar a altura devida a velocidade com que o fluido fahiria pelo orificio Tt, e a quantidade que deitaria em hum tempo dado, fuppondo que por huma affufaõ lateral fe confervava fempre com huma quantidade conftante de fluido.

Se o movimento do pezo R ceffar, ou fe vier a fer uniforme, a fuperficie do fluido naõ continuará na pofiçaõ inclinada, mas por-fe-ha horizontal. Porque entaõ temos $p=0$, e as particulas naõ feraõ follicitadas, fenaõ pela força unica da propria gravidade.

272 Probl. VIII. *Determinar o effeito da fricçaõ no producto da agua, que daõ quaeſquer vaſos conſtantemente cheios por quaeſquer orificios pequenos.*

Seja o orificio circular e horizontal $ABDE$ (Fig. 87.); e eſte ſupponha-ſe dividido em huma infinidade de circumferencias concentricas $abde$, $mnop$ &c. He evidente, que pela adherencia que tem as particulas humas com as outras, a fricçaõ em $ABDE$ ſe deve fazer ſentir em todas as particulas que ſahem ao meſmo tempo. Aſſim, conſtruindo ſobre AC como eixo huma curva $NgqK$, cujas ordenadas AN, ag, mq, CK repreſentem as velocidades em A, a, m, C, a area della repreſentará a ſoma das velocidades, e ſerá proporcional ao producto effectivo do orificio.

Fazendo pois $CA = r$, $Cm = x$, a altura devida á velocidade $mq = X$, a quantidade de licor que no tempo t dá o orificio $= Q$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, a raſaõ da circumferencia ao diametro $= c$; teremos evidentemente (n. 233.) a equaçaõ $Q = 2t\sqrt{a}.\int 2cx\,dx\sqrt{X}$, integral que deve tomar-ſe entre os limites $x = 0$, $x = r$.

273 Supponhamos, por exemplo, que $NgqK$ he huma linha recta (o que naõ póde eſtar longe da verdade, ſendo o orificio muito pequeno); e ſeja H a altura devida á velocidade central CK, e b devida á lateral AN. Conduzindo NR parallela a AC, os dous triangulos ſemelhantes NRK, e Nfq daraõ $fq = \frac{Nf.RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r}$, e $mq = \sqrt{X} = \sqrt{h} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r} = \frac{x\sqrt{b}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Logo $\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2dx\sqrt{b}+(rx\,dx-x^2dx)\sqrt{H}}{r}\right)$ $= \frac{x^3(\sqrt{b}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$; e fazendo $x = r$, teremos finalmente

$$Q = \frac{2tcr^2(\sqrt{aH}+2\sqrt{ab})}{3}.$$

274 Para determinar H e b, ſupponhamos outro orificio circular e horizontal ſituado em igual profundidade; e deſignando as quantidades analogas a H, Q, r pelas meſmas letras accentuadas, teremos pela meſma raſaõ $Q' = \frac{2tcr'^2(\sqrt{a}H' + 2\sqrt{ab})}{3}$; e porque a lei da fricçaõ deve ſer a meſma em ambos os caſos, podemos ſuppor que HA he o raio do ſegundo orificio, e aſſim teremos $\sqrt{H} - \sqrt{b} : \sqrt{H'} - \sqrt{b} :: r : r'$, ou $r(\sqrt{H'} - \sqrt{b}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{b})$. Em fim tirando das tres equações precedentes os valores de H, H', b, acharemos

$$H = \left(\frac{Qr'^2(3r - r') - 2Q'r^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

$$H' = \left(\frac{Q'r^2(r - 3r') + 2Qr^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

$$b = \left(\frac{Q'r^3 - Qr'^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

275 A meſma theorica ſe applica aos orificios, que naõ forem circulares. Supponhamos, que hum vaſo conſtantemente cheio ſe faz deſaguar pelo orificio rectangular $ABCD$ (Fig. 88.). Tirando as diagonais AC, DB, do ponto O conduza-ſe OK perpendicular a AB, e as rectas quaiſquer OP, Op infinitamente vezinhas. Do meſmo ponto O com o intervallo OP deſcreva-ſe o pequeno arco PV, e com quaiſquer intervallos Om e On infinitamente pouco differentes os pequenos arcos mq, nr. Iſto poſto, ſeja $OK = b$, $KB = c$, $KP = x$, $Om = y$; e aſſim nos triangulos ſemelhantes OKP, PVp teremos $PV = \frac{bdx}{\sqrt{(bb + xx)}}$; e os arcos ſemelhantes PV, mq daraõ $mq = \frac{bydx}{bb + xx}$, e conſeguintemente o eſpaço $mqrn = \frac{bydydx}{bb + xx}$.

Suppondo pois a meſma lei de fricçaõ (n. 273.), e deſignando por H a altura devida á velocidade em O, e por b a altura devida á velocidade em K, ſerá a quantidade

dade de agua que ſahe pelo orificio $mqrn$ repreſentada por

$$2t\sqrt{a}\,.\,\frac{by\,dy\,dx}{bb+xx}\left(\frac{(\sqrt{(bb+xx)}-y)\sqrt{H}+y\sqrt{b}}{\sqrt{(bb+xx)}}\right),$$

cujo integral (conſiderando ſomente y como variavel) ſerá $\frac{t\sqrt{a}\,.\,b\,dx}{(bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\,.\,\frac{(3yy\sqrt{(bb+xx)}\,.\,\sqrt{H}-2y^3\,(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{3}$; e fazendo $y=\sqrt{(bb+xx)}$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo orificio $POp=\frac{t\sqrt{a}\,.\,b\,dx(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}$. Integrando eſta expreſſaõ, e depois tomando o ſeu valor quando $x=c$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo triangulo $OKB=\frac{t\sqrt{a}\,.\,bc(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}$. Logo deſignando por Q a quantidade total de fluido que ſahe pelo orificio inteiro $ABCD$, teremos

$$Q=\frac{8t\sqrt{a}\,.\,bc(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}.$$

As quantidades H, b ſe determinaráõ por hum meio analogo ao que acima praticamos (n. 274.) ; e comparando os reſultados que ſe acharem para differentes alturas do licor, conheceremos a lei com que a fricçaõ diminue o producto dos orificios. Quando eſtes forem verticais, ſe todos os ſeus pontos ſe puderem julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido, uſaremos da meſma ſoluçaõ; e ſe naõ puderem, facilmente a applicaremos, ſuppondo os ditos orificios divididos em huma infinidade de elementos horizontais. O meio, que propomos de determinar as quantidades H, b, carece de grande ſagacidade na pratica; porque as quantidades Q, Q', ſaõ tambem alteradas pela contracçaõ da veia. Para melhor averiguar o effeito da fricçaõ, ſerá conveniente uſar de hum tubo addicional izento de contracçaõ, qual abaixo ſe moſtrará. Naõ indagamos aqui a fricçaõ, que padece hum licor, deſaguando por tubos muito compridos; porque eſte objecto ſerá tratado adiante por meio da experiencia.

Indagações Experimentais ſobre as materias precedentes.

276 PAra confrontarmos a theorica com as experiencias, começaremos pelo exame da direcçaõ das particulas no interior dos vaſos, e da contracçaõ da veia ao ſahir dos orificios. Eſtes dous objectos ſaõ entre ſi connexos eſſencialmente; porque a forma da veia depende, como ja diſſemos, da direcçaõ que tem as particulas ao ſahir dos orificios.

Para ver o que paſſa no interior de huma maſſa fluida em movimento, mandei fazer hum vaſo cylindrico de vidro (Fig. 89. 90.) de 17 pollegadas de altura, e 5 e meia de diametro, com duas aberturas M, N no fundo, e em hum dos lados, nas quais ſe pudeſſem applicar exactamente duas chapas de cobre de meia linha de eſpeſſura, e cada huma dellas furada bem perpendicularmente com orificios de differentes diametros.

277 Conſervando pois o vaſo conſtantemente cheio, e deixando correr a agua por differentes orificios tanto horizontais, como verticais; obſervei, que os corpuſculos eſtranhos miſturados com a agua, como de limadura, de ardoſia pilada &c, ſe dirigiaõ ſempre para o orificio; que no principio deſciaõ ſenſivelmente por direcções verticais; mas que em chegando a $H O$ em diſtancia de 3 ou 4 pollegadas do plano horizontal que paſſa pelo orificio, ſe apartavaõ rapidamente da direcçaõ vertical, e ſe encaminhavaõ de todas as partes a buſcar o orificio, como ſe repreſenta nas figuras 89 e 90.

278 Para obſervar a contracçaõ da veia fluida, ſervime de hum vaſo parallelepipedo rectangular de 12 pés de altura, cuja baſe era hum quadrado de 3 pés por cada lado, com ſuas aberturas no fundo e em hum dos lados, nas quais ajuſtavaõ duas chapas de cobre de meia linha de groſſura, e neſtas eſtavaõ praticados differentes orificios. O vaſo ſe entretinha ſempre cheio até huma altura dada, procurando com toda a cautela que a agua proviſional naõ cauſaſſe abalo na outra.

279 Aſſim obſervámos 1°, que a contracçaõ tanto nos orificios horizontais, como nos laterais, ſe faz do meſmo modo ſendo todos elles pequenos. 2°, que nos orificios

circu-

circulares a veia ſe contrahe até huma diſtancia ſenſivelmente igual ao ſemidiametro do orificio. 3°, que a area da ſecçaõ da veia contrahida he para a do orificio como 2 para 3 ſenſivelmente. Eſta ultima determinaçaõ he muito difficil de ſe fazer com exactidaõ, porque huma decima parte de huma linha de erro em diametros taõ pequenos daria huma raſaõ ſenſivelmente differente entre as duas areas. Mais abaixo veremos, como pelo deſaguamento dos orificios ſe póde conhecer melhor a quantidade da contracçaõ.

280 He evidente, que em virtude da contracçaõ devem os orificios dar menos agua em hum tempo determinado, do que dariaõ ſe todas as particulas ſahiſſem perpendicularmente aos planos dos meſmos orificios; porque o movimento obliquo das particulas lateraes ſe reſolve em dous, hum parallelo ao plano do orificio, que contrahe a veia, e o outro perpendicular ao meſmo plano, o qual he o unico que produz o deſaguamento.

281 E porque no lugar da maior contracçaõ, a veia fluida toma e conſerva por hum pequeno eſpaço a fórma priſmatica, ſe neſte lugar ſe conheceſſe bem a velocidade do fluido, e a area da ſecçaõ da veia contrahida; eſtá claro, que conſiderando a dita ſecçaõ como o verdadeiro orificio, ſe acharia exactamente a quantidade de fluido, que ſahe em qualquer tempo dado.

Por falta de attender ao effeito deſta contracçaõ, determinou M. Newton na primeira ediçaõ dos ſeus Principios de hum modo erroneo a altura devida á velocidade de hum fluido ao ſahir de hum orificio. Porque governando-ſe pelas quantidades de agua, que ſahiaõ por differentes orificios, fez a dita altura igual ſómente á ametade da altura do fluido, quando pela verdadeira theorica, e pela experiencia das fontes de repuxo, como elle meſmo conheceu depois attendendo á contracçaõ, a devia pôr igual á altura do meſmo fluido.

282 Alguns autores tem julgado, que a contracçaõ he hum effeito puramente accidental, e que ſe póde evitar fazendo ſahir a agua por canudos applicados aos orificios. He verdade, que a agua ſahe entaõ em fórma cylindrica; mas a contracçaõ ſubſiſte ſempre ao entrar do fluido nos ditos canudos, e abaixo veremos pela experiencia que elles ſempre diminuem muito ſenſivelmente as quantida-

des de agua, que naturalmente deveriaõ ſahir, ſe naõ houveſſe contracçaõ.

283 Examinando primeiro as quantidades de fluido, que ſahem por differentes orificios horizontais praticados em chapas de cobre de meia linha de groſſura, por meio de experiencias repetidas com todo o cuidado e attençaõ que nos era poſſivel, eſtando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima dos ditos orificios, achamos

I. Que hum orificio circular de 6 linhas de diametro dava por minuto a quantidade de 2311 pollegadas cubicas de agua.

II. Que por hum orificio circular de huma pollegada de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 9281 pollegadas cubicas de agua.

III. Que por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſaguavaõ no meſmo tempo 37203 pollegadas cubicas.

IV. Que hum orificio rectangular, que tinha hum lado de huma pollegada, e o outro de 3 linhas, dava em hum minuto 2933 pollegadas cubicas de agua.

V. Que por hum orificio quadrado de huma pollegada por cada lado, ſahiaõ no meſmo tempo 11817 pollegadas cubicas.

VI. Que por outro orificio quadrado de duas pollegadas por cada lado deſaguavaõ no meſmo tempo 47361 pollegadas cubicas.

284 Paſſando a examinar os orificios verticais, e conſervando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 9 pés acima do centro dos meſmos orificios em cada huma das experiencias, achamos

VII. Que por hum orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ em hum minuto 2018 pollegadas cubicas de agua.

VIII. Que por outro orificio circular de huma pollegada de diametro deſaguavaõ no meſmo tempo 8135 pollegadas cubicas.

285 Conſervando porém o vaſo conſtantemente cheio na altura de quatro pés acima do centro dos meſmos orificios, achamos

IX. Que pelo orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ 1353 pollegadas cubicas por minuto

X. E

X. E que pelo outro orificio circular de huma pollegada de diametro sahiaõ 5436 pollegadas cubicas de agua no mesmo tempo

286 Em fim conservando o vaso constantemente cheio na altura de 7 linhas acima do centro de hum orificio vertical circular de huma pollegada de diametro, achamos

XI. Que o orificio dava no tempo de hum minuto a quantidade de 628 pollegadas cubicas de agua.

287 Por estas experiencias se vê 1°, que as *quantidades de licor, que em tempos iguais sahem por orificios differentes, debaixo de iguais alturas do fluido, saõ entre si proximamente como as areas dos mesmos orificios*; e seriaõ exactamente proporcionais aos orificios, se a fricçaõ naõ fosse menor á proporçaõ nos orificios grandes do que nos pequenos.

2°, Que *as quantidades de licor produzidas por orificios iguais em tempos iguais, debaixo de alturas differentes, saõ proximamente como as raizes quadradas das mesmas alturas.*

3°. E em geral, que *as quantidades que sahem no mesmo tempo por orificios differentes, e debaixo de alturas differentes, saõ proximamente na rasaõ composta da rasaõ dos orificios e da subduplicada das alturas*; e nisto concorda muito bem a experiencia com a theorica (n. 233.).

288 Mas daqui naõ se segue, que os valores absolutos das ditas quantidades effectivas sejaõ proximamente iguais aos que dá a theorica Calculando por exemplo a experiencia VII pela formula $Q = 2tK\sqrt{ab}$ (n. 233.), teremos $t = 60''$, $K = \frac{22}{7.16}$, $a = 180$, $b = 108$, e conseguintemente $Q = 3286$ pollegadas cubicas; valor, que differe muito de 2018 que se achou pela experiencia. Porém estes dous resultados estaõ sensivelmente na rasaõ de 13 para 8, ou proximamente de 8 para 5, e o mesmo se acha pelas outras experiencias, tanto nos orificios horizontais, como nos verticais, que tem todos os seus pontos sensivelmente equidistantes da superficie do fluido. Logo para usar da formula referida de hum modo sufficientemente exacto na pratica, naõ he necessario mais do que diminuir a verdadeira area do orificio na rasaõ de 8 para 5, ou tomar $Q = \frac{5}{4} tK\sqrt{ab}$.

289 Pelo que respeita aos orificios verticais, cujos pontos naõ podem suppor-se equidistantes da superficie do fluido, suppuzemos que as velocidades eraõ em cada ponto devidas ás alturas do fluido acima delle. Agora calculando a experiencia XI pela formula que achamos (n. 251.), deveriaõ sahir em hum minuto 966 pollegadas cubicas, quando effectivamente saõ 628. Porém calculando o producto do mesmo orificio supposto horizontal, e na distancia media da superficie do fluido que determinámos (n.252.), e applicando-lhe a correcçaõ do nº precedente, acharemos proximamente 628 pollegadas cubicas. Donde se segue, que a theorica dos orificios lateraes corresponde ás experiencias taõ bem como a dos horizontais.

290 A grande diminuiçaõ, que se acha nos resultados effectivos a respeito dos theoricos procede da fricçaõ, que padece o fluido no perimetro do orificio, e da contracçaõ da veia. Os effeitos destas duas causas vem a ser misturados de maneira, que he muito difficil affinar a cada hum a sua parte; mas a fricçaõ nos orificios abertos em paredes delgadas, e ainda em tubos de pouco comprimento he pouco consideravel em comparaçaõ do effeito, que procede da contracçaõ. Isto se mostra pela mesma experiencia; porque sahindo a agua por hum tubo applicado ao orificio, e seguindo as paredes delle, no que certamente experimenta maior fricçaõ, o producto se chega mais para o resultado theorico, por naõ ser nesse caso taõ grande o effeito da contracçaõ.

291 Mas para darmos tambem hum extracto das nossas experiencias sobre o fluxo da agua por tubos addicionais, primeiramente applicámos ao fundo do vaso hum tubo cylindrico vertical de huma pollegada de diametro interior; e conservando o vaso constantemente cheio na altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima da base superior do tubo, achamos

I. Que tendo o tubo quatro pollegadas de comprido dava em hum minuto 12274 pollegadas cubicas de agua.

II. Que tendo duas pollegadas de comprido dava no mesmo tempo 12188 pollegadas cubicas

III. E que tendo huma pollegada e seis linhas dava 12168 pollegadas cubicas no mesmo tempo.

292 Applicando ao fundo de hum vaso dous tubos cylindri-

cylindricos de duas pollegadas de comprido cada hum, cujos diametros interiores eraõ de 6 e 10 linhas, e conservando a agua na altura constante de 2 pés acima do orificio exterior da sahida, achamos

IV. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro sahiaõ em hum minuto 1222 pollegadas cubicas de agua.

V. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro sahiaõ no mesmo tempo 3402 pollegadas cubicas.

293 E conservando o vaso constantemente cheio na altura de 3 pés e 10 pollegadas acima dos orificios exteriores dos mesmos tubos, achamos

VI. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro desaguavaõ em hum minuto 1689 pollegadas cubicas.

VII. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro sahiaõ no mesmo tempo 4703 pollegadas cubicas.

294 Pelas tres primeiras experiencias se vê, que sahindo a agua encanada por hum tubo vertical, a quantidade que corre no mesmo tempo he tanto maior, quanto mais comprido he o tubo; e que estas quantidades seguem proximamente a rasaõ das raizes quadradas das alturas do fluido acima da base inferior do tubo, que he o orificio da sahida. E reflectindo nas outras experiencias, se verá igualmente, que *as quantidades de fluido que sabem no mesmo tempo por differentes tubos addicionais, debaixo de alturas differentes, saõ na rasaõ duplicada dos diametros dos orificios e subduplicada das alturas*; que he a mesma proporçaõ, que achamos para os orificios abertos em paredes delgadas.

295 Calculando pela theorica a experiencia VI, acharemos que hum orificio de 6 linhas de diametro na profundidade de 3 pés, e 10 pollegadas devia dar em hum minuto 2145 pollegadas cubicas de agua (n. 233.), quando pela experiencia se acháraõ 1689 pollegadas cubicas. Estes dous resultados estaõ proximamente na rasaõ de 16 para 13, e o mesmo se acha sensivelmente pelas outras experiencias. Logo para calcular o desaguamento por tubos addicionais pela formula $Q = 2tK\sqrt{ab}$, com exactidaõ sufficiente na pratica, será necessario diminuir o orificio K na rasaõ de 16 para 13, ou de outra sorte tomar

$$Q = \frac{13}{8} tK\sqrt{ab}.$$

Da-

Daqui ſe moſtra, que ſuppondo iguais as alturas do fluido, e as areas dos orificios, ſerá a quantidade theorica, a que dá hum tubo addicional, e a que dá o orificio aberto em huma parede delgada no meſmo tempo, como os numeros 16, 13, 10 proximamente.

296 A meſma propriedade de aumentar o producto dos orificios ſe acha tambem, e mais ventajoſamente, nos tubos conicos, ou ſe façaõ deſaguar pela baſe maior, ou pela menor. Mas he neceſſario que tenhaõ certo comprimento, e que as baſes eſtejaõ entre ſi em certa raſaõ. Porque ſendo o tubo curto, e as baſes muito deſiguais, ſe deſaguar pela menor, a grande convergencia das particulas lateraes produzirá huma contracçaõ exterior; e ſe deſaguar pela baſe maior, formar-ſe-ha contracçaõ no interior do tubo, e a agua naõ ſeguirá a direcçaõ das paredes delle.

297 De todos os tubos addicionais, que ſe podem applicar com o fim de procurar o maior deſaguamento poſſivel em hum tempo dado, o mais ventajoſo he o que tem a forma, que a veia fluida toma naturalmente ao ſahir de hum orificio aberto em huma parede delgada. Seja *M S O N* (Fig. 91.) a figura da veia deſde o orificio *M N* até o limite da contracçaõ *S O*; e imagine-ſe que *M S*, *N O* ſe tornaõ em paredes de hum tubo *M N S O*, as quais naõ façaõ mais que tocar a ſuperficie da agua, ſem conſtranger de modo algum o ſeu movimento. Entaõ, ſendo *S O* o verdadeiro orificio, por onde ſe faz o deſaguamento, e ſendo a velocidade das particulas ao ſahir delle devida á altura *r b*; eſtá claro que, naõ tendo neſte caſo lugar a contracçaõ, o deſaguamento pelo orificio *S O* terá toda a plenitude poſſivel, e ſerá igual ao que reſulta da theorica.

91.

Eſta reflexaõ pode ter uſo na pratica, e para iſſo deve ter-ſe preſente que a area *M N* he para a area *S O* como 8 para 5 proximamente, e que a diſtancia *r p* entre eſtas duas areas he ſenſivelmente igual ao ſemidiametro *p M* ou *p N*. Os lados *M S*, *N O* ſaõ ſenſivelmente rectilineos.

298 Mas tornando aos tubos cylindricos, vejamos a raſaõ porque elles daõ mais agua que os orificios abertos em paredes delgadas. Seja *M O P N* hum tubo cylindrico horizontal applicado ao vaſo *A C* (Fig. 92.); e imagine-

imaginemos, que estando primeiro tapado em MN com huma tampa, esta se aniquila subitamente, e deixa correr o fluido. Entrando a veia por MN tende a contrahir-se, e as particulas M, N descreveriaõ sem cessar as parabolas Mmx, Nny, se para isso tivessem liberdade. Logo se o ponto P, extremidade do tubo, cahir entre os pontos N e y, a contracçaõ se formará, e o tubo desaguará como se o orificio fosse aberto em huma parede delgada. Mas se o ponto P estiver adiante de x, como se representa na figura, a percussaõ da agua sobre $y\,x$ deverá fazella encher o espaço $MuxN$; e o mesmo succederá, ainda que com mais difficuldade, quando o ponto P cahir entre y e x. Em ambos os casos a agua se determina a seguir as paredes do tubo, e a encher na sahida o orificio inteiro OP. Huma vez, que o licor toma a direcçaõ das paredes do tubo, está claro que os movimentos naturais das particulas M, N saõ alterados, e se fazem menos obliquos ao plano da abertura MN. Logo em virtude desta diminuiçaõ de obliquidade, passará em hum tempo dado mais agua por MN do que havia de passar, se ella naõ fosse encanada pelo tubo. A mesma explicaçaõ se applica aos tubos conicos.

299 Naõ podem com tudo os tubos addicionais, exceptuando o que descrevemos no nº. 297, dar productos iguais aos theoricos, porque a força que expelle a agua em MN perde huma parte da sua acçaõ em forçar a agua encanada pelo tubo a encher a capacidade delle. Assim sahe mais agua por hum tubo addicional, porque sahe por elle cheio, sem padecer contracçaõ exterior; mas naõ sahe com tanta velocidade, como por hum orificio aberto em huma parede delgada. E daqui vem, que os repuxos que sahem por tubos addicionais naõ sobem a taõ grande altura, como os que sahem por orificios abertos em paredes delgadas.

300 Eisaqui huma Taboa de comparaçaõ entre o desaguamento natural de hum orificio circular de huma pollegada de diametro em hum minuto, e o desaguamento effectivo do mesmo orificio sendo aberto em huma parede delgada, ou estando na extremidade de hum tubo cylindrico de duas pollegadas de comprido, para differentes alturas de agua acima do centro do mesmo orificio.

Altu-

21

Alturas constantes da agua	Producto natural em hum minuto	Producto effectivo pelo orificio aberto em huma parede delgada	Producto effectivo pelo tubo addicional
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
1	4381	2722	3539
2	6196	3846	5002
3	7589	4710	6126
4	8763	5436	7070
5	9797	6075	7900
6	10732	6654	8654
7	11592	7183	9340
8	12392	7672	9975
9	13144	8135	10579
10	13855	8574	11151
11	14530	8990	11693
12	15180	9384	12205
13	15797	9764	12699
14	16393	10130	13177
15	16968	10472	13620

301 Por meio das experiencias desta Taboa, sem tomar nada da Theorica, se podem resolver as questoens principais do desaguamento dos orificios, como mostraremos nos exemplos seguintes, nos quais suppomos que os orificios saõ abertos em paredes delgadas, e analogamente se praticará com os tubos addicionais.

302 QUESTAÕ I. *Sendo hum vaso constantemente cheio na altura de 11 pés e 6 pollegadas acima do centro de hum orificio de 16 linhas de diametro; pergunta-se a quantidade de agua que dará em 8 minutos?*

Por quanto o orificio de 12 linhas debaixo da altura de 11 pés dá em hum minuto 8990 pollegadas cubicas de agua (n. 300.); está claro, que fazendo esta proporçaõ

$144 \times \sqrt{11} : 256 \times \sqrt{11,5} :: 8990$? o quarto termo 16341 ferá o producto do orificio propofto em hum minuto (n. 287.); e multiplicando-o por 8, acharemos que em 8 minutos dará 130728 pollegadas cubicas de agua.

303 QUESTAÕ II. *Suppondo que hum vafo eftá conftantemente cheio na altura de 11 pés e 6 pollegadas acima de hum orificio, que dá 245544 pollegadas cubicas de agua em 6 minutos; pergunta-fe o diametro do orificio?*

O orificio propofto dará em hum minuto 40924 pollegadas cubicas. Affim defignando por D o feu diametro, teremos $144 \times \sqrt{11} : D^2 \sqrt{11,5} :: 8990 : 40924$; e confeguintemente $D^2 = 144 \times \frac{40924}{8990} \times \sqrt{\frac{110}{115}} = 641,1$ linhas quadradas. Logo $D = 25,32$ linhas $=$ 2 poll. 1 linh. e $\frac{1}{3}$.

304 QUESTAÕ III. *Hum vafo conftantemente cheio na altura de 16 pés tem defaguado 45678 pollegadas cubicas por hum orificio de 16 linhas de diametro; pergunta-fe o tempo?*

Bufcando pela queftaõ primeira o producto do orificio propofto em hum minuto, acharemos 19276 pollegadas cubicas. Depois fazendo $19276 : 45678 ::$ 1 minuto? o quarto termo ferá o tempo procurado, que fe achará $= 2' 22'',2$.

305 QUESTAÕ IV. *Suppondo que hum vafo dá 40000 pollegadas cubicas de agua em 4 minutos por hum orificio de 10 linhas de diametro; pergunta-fe a altura da agua acima do orificio?*

Por quanto o orificio propofto dá 10000 pollegadas cubicas por minuto, defignando por H a altura procurada, pela mefma regra da proporçaõ (n.287.), teremos $144 \times \sqrt{11} : 100 \times \sqrt{H} :: 8990 : 10000$. Logo $H = 11 \times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pés.

306 Antes de acabarmos efte Capitulo, ferá conveniente que expliquemos o modo, que fe deve ter na diftribuiçaõ das aguas; objecto, que tem applicaçoens muito frequentes, e importantes na pratica.

Seja $MNOP$ (Fig.93.) a elevaçaõ de huma mãi d'agua, na qual entra conftantemente huma quantidade dada de agua Q em cada minuto, deve abrir-fe na parede $MNOP$ hum

hum numero dado de orificios, de maneira que os productos particulares delles estejaõ na rasaõ de quaisquer numeros m, n, p &c, e o producto total seja igual á agua que entra na mãi. Partiremos pois primeiramente a quantidade Q em partes proporcionais a m, n, p &c, que seraõ $\frac{mQ}{m+n+p\ \&c.}$, $\frac{nQ}{m+n+p\ \&c.}$, $\frac{pQ}{m+n+p\ \&c.}$ &c. Depois acharemos a grandeza que se deve dar a cada orificio, para desaguar por elle a sua quantidade respectiva, conforme a profundidade em que se houver de abrir, pela Questaõ II (n. 303.).

Exemplo. Supponhamos que o producto total Q he de 3600 pollegadas cubicas por minuto, e que esta se deve distribuir por tres orificios circulares A, B, C, de maneira que os productos respectivos delles sejaõ como 6, 3, 1. Neste caso teremos o producto de $A = 2160$, de $B = 1080$, de $C = 360$ pollegadas cubicas por minuto; e supponde, que os orificios se haõ de abrir em huma parede delgada, e que haõ de ter os centros na mesma horizontal DE distante da superficie da agua a quantidade $CH = 6$ pollegadas, designando os diametros respectivos por D, d, δ, e servindo-nos da experiencia primeira da Taboa (n. 300.), teremos estas proporçoens (n. 287.)

$$2722 : 2160 :: 1 \times 144 : DD \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2722 : 1080 :: 1 \times 144 : dd \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2722 : 360 :: 1 \times 144 : \delta\delta \sqrt{\frac{1}{2}},$$

das quais se tira $D = 12,71$, $d = 9$, $\delta = 5,9$ linhas.

Com igual facilidade se determinariaõ os diametros, se os centros naõ estivessem na mesma horizontal. Todas as situaçoens saõ igualmente admissiveis, quando o livel da agua permanece na mesma altura; mas como isto naõ succede assim, sempre haverá tempo em que os orificios distribuaõ a agua fóra da rasaõ conveniente, se forem muito desiguais, ou se naõ estiverem na mesma horizontal. O melhor partido, he dispollos na mesma horizontal, e quando algum devesse ser muito desigual dos outros partillo em partes pouco desiguais, cujos productos se venhaõ depois a reunir no cano do seu destino. 307

307 M. Mariotte deu o nome de *pollegada d'agua* ao producto de hum orificio circular vertical de huma pollegada de diametro, que tem o centro diſtante 7 linhas da ſuperficie da agua; producto, que em hum minuto achou ſer de 672 pollegadas cubicas de agua, e que pelas noſſas experiencias he de 628. Mas muitos praticos ignorantes tem abuſado deſta expreſſaõ, entendendo por *pollegada d'agua* o producto que dá por minuto hum orificio de huma pollegada de diametro, ſem attenderem á altura do livel acima do orificio, que he hum elemento eſſencial.

Em Portugal daõ o nome de *manilha d'agua* á que ſahe por hum orificio, que tem hum palmo craveiro por circumferencia, ou 2,546 pollegadas de diametro. Dividem a manilha em 16 *aneis*, e cada anel em 8 *penas*; e conſeguintemente ſerá o diametro do anel de 0,636, e o da pena de 0,225 pollegadas. Eſta diviſaõ, naõ ſe attendendo á altura do livel da agua acima do orificio, incorre no meſmo abſurdo dos praticos Francezes; porque o meſmo orificio em differentes alturas dá no meſmo tempo diverſas quantidades de agua, e o valor deſta naõ ſe póde julgar ſenaõ pelas quantidades que os orificios daõ no meſmo tempo.

CAPITULO II.

Do movimento das aguas, que ſahem pelos orificios de quaiſquer vaſos, até elles ſe eſgotarem.

308 NOs vaſos conſtantemente cheios naõ depende a quantidade de agua que ſahe por hum orificio, ſenaõ da area do orificio, da altura do fluido, e do tempo. Mas quando naõ recebem agua nenhuma proviſional, e conſeguintemente deſaguaõ pelos orificios até ſe deſpejarem, he neceſſario além diſſo attender á figura dos meſmos vaſos, a qual influe eſſencialmente nas circunſtancias do deſaguamento.

309 Para determinarmos em geral o methodo de reſolver eſta nova queſtaõ, reflectiremos que em hum inſtante dt póde a altura do fluido acima do orificio ſuppor-ſe

por-se constante, e que póde conseguintemente calcular-se a pequena quantidade que sahe pelo orificio pelo methodo do Capitulo precedente. Assim, supponde a altura primitiva do fluido $Kp = b$ (Fig. 94.), o espaço KL que a superficie delle tem descido no tempo $t = x$, a area da secçaõ $EFGH = X$, funçaõ de x dada pela figura do vaso, a area do orificio $= K$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, acharemos que sendo o orificio infinitamente pequeno dará no instante dt a quantidade elementar $dQ = 2K\,dt\,\sqrt{[a(b-x)]}$. Porém esta he igual á camada elementar $EFGHbefg = X\,dx$. Logo $X\,dx = 2K\,dt\,\sqrt{[a(b-x)]}$, e $t = \int \frac{X\,dx}{2K\sqrt{[a(b-x)]}}$.

/x

310 Sendo pois dada a figura do vaso, e a altura KR que tem descido a superficie do fluido, determinaremos o tempo. E como igualmente podemos com os mesmos dados determinar o solido $ABCDZOQP$, que he o fluido desaguado no dito tempo, acharemos o producto do orificio em hum tempo determinavel pela figura do vaso, e pela altura que tem descido a superficie do fluido.

Reciprocamente: Se for dado o tempo por huma funçaõ das alturas verticais, que desce a superficie do fluido, poderemos determinar a figura do vaso. Porque nesse caso teremos $dt = X'dx$, sendo X' huma funçaõ de x; e por conseguinte $X = 2KX'\sqrt{[a(b-x)]}$.

311 Exemplo I. *Supponde que o vaso $ApqC$ (Fig. 94.) he produzido pela revoluçaõ de huma parabola, cujas ordenadas AK, EL sejaõ na rasaõ subquadruplicada das abscissas pK, pL &c; determinar o tempo do desaguamento correspondente a qualquer altura KR.*

Seja a equaçaõ da parabola genitora $y^4 = p^3(b-x)$; sendo $EL = y$, $pK = b$, $LK = x$, e o parametro $= p$. Representando a rasaõ da circumferencia ao diametro por c, teremos pois $X = cy^2 = cp^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b-x)}$. Logo $t =$

$$\int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx\sqrt{(b-x)}}{2K\sqrt{[a(b-x)]}} = \int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx}{2K\sqrt{a}} = \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,x}{2K\sqrt{a}}.$$

Donde se vê, que os tempos saõ proporcionais aos espaços verticais, que anda a superficie do fluido. Conseguintemenramente he este o vaso mais accommodado para se formar huma *clepsydra*, ou ampulheta de agua; porque dividindo a altúra primitiva pK em partes iguais, estas seraõ andadas pela dita superficie em tempos iguais.

Fazendo $x = b$, teremos o tempo que o vaso carece para se esgotar $= \frac{cp^{\frac{3}{2}} b}{2K\sqrt{a}}$; e querendo, que este seja igual a hum tempo dado, das tres quantidades p, b, K podem tomar-se duas arbitrariamente, e a terceira se determinará sem difficuldade.

Substituindo o valor de $dt = \frac{cp^{\frac{3}{2}} dx}{2K\sqrt{a}}$ na equaçaõ $dQ = 2K dt \sqrt{[a(b-x)]}$, teremos $Q = \int cp^{\frac{3}{2}} dx \sqrt{(b-x)} = -\frac{2}{3} cp^{\frac{3}{2}} (b-x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} cp^{\frac{3}{2}} \left(b^{\frac{3}{2}} - (b-x)^{\frac{3}{2}}\right)$, porque deve ser $Q = 0$ quando $x = 0$; e pondo em lugar de x o seu valor $\frac{2Kt\sqrt{a}}{cp\sqrt{p}}$, teremos

$$Q = \frac{2}{3} cp^{\frac{3}{2}} \left[b^{\frac{3}{2}} - \left(b - \frac{2Kt}{cp}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

312 Reciprocamente: Se quizessemos achar a figura de hum vaso, em que a agua descesse proporcionalmente ao tempo, teriamos $t = \frac{x}{q}$, e $dt = \frac{dx}{q}$. Substituindo este valor de dt na equaçaõ $X dx = 2K dt \sqrt{[a(b-x)]}$, resultaria $X = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{q}$. Porém, havendo a figura de ser hum solido de revoluçaõ, he $X = cy^2$; logo $y^2 = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{cq}$, equaçaõ á mesma para-

bola;

bola, que pelo methodo directo achámos ser a que tem esta propriedade.

313 Exemplo II. *Suppondo, que o vaso* $AMNC$ *he prismatico; determinar o tempo que gastará a superficie do fluido em descer de* K *até* R (Fig. 95.).

Neste caso a area X he constante, e a formula $t = \int \frac{X\,dx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}$ dará $t = \frac{X}{2K\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}} = -\frac{X}{K\sqrt{a}} \sqrt{(b-x)} + C$; e determinando a constante pela condiçaõ que $x=0$ dê $t=0$, será $t = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$. Pondo $x=b$, sera o tempo que gasta o vaso em se esgotar $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde se segue que *os tempos que gastaõ em esgotar-se dous vasos prismaticos, saõ na rasaõ composta da rasaõ das bases, da subduplicada das alturas, e da inversa dos orificios.*

314 A formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$ dá o meio de construir huma clepsydra cylindrica. Por exemplo: se quizermos dividir a altura CN em 12 partes tais, que sejaõ corridas pela superficie do licor em tempos iguais, dividiremos CN em 144 partes iguais, que he o quadrado de 12: de 144 tiraremos 121 quadrado de 11, e o resto 23 dará na mesma linha CN o intervallo CG da primeira divisaõ; de 121 tiraremos 100 quadrado de 10, e o resto 21 será o segundo intervallo &c. Donde se vê que as partes successivas de cima para baixo seráõ 23, 21, 19, 17, 15 &c.

E se quizermos, que cada intervallo seja corrido em hum tempo dado, em huma hora por exemplo, será necessario proporcionar de tal modo a base do cylindro X, e a altura delle b com a area do orificio K, que tenhamos 1 hora $= \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{b} - \sqrt{\frac{121}{144}b}\right) = \frac{X}{12K}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde se vê, que das quantidades X, b, K sendo tomadas duas

duas a arbitrio, a terceira se determinará immediatamente por esta equaçaõ.

315 Se o vaso prismatico $AMNC$ se conservasse constantemente cheio, lançaria pelo orificio pq huma quantidade dupla de agua em hum tempo igual ao que gasta em se evacuar pelo mesmo orificio. Porque sendo o dito tempo $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}}$, a quantidade de agua seria nesse caso $= \frac{X}{K}\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot 2K\sqrt{ab} = 2Xb$, quantidade dupla do prisma $AMNC$ que sahe no mesmo tempo, quando o vaso se despeja pelo orificio.

316 Exemplo III. *Determinar o tempo do desaguamento de hum vaso prismatico $AMNC$ (Fig. 96.), cheio de licores differentes $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$, os quais suppomos que se naõ misturaõ, sendo postos os mais leves sobre os mais pezados.*

Sendo p, p', p'' as gravidades especificas dos fluidos ML, FG, EC respectivamente, reflectiremos que a pressaõ produzida no orificio pq pelo fluido FG he igual á que produziria huma colunna da mesma especie que ML, cuja altura fosse $= GL\frac{p'}{p}$ (n. 46.), e que a pressaõ produzida pelo fluido EC he igual á que produziria huma colunna da mesma especie que ML, cuja altura fosse $= GC\frac{p''}{p}$. Fazendo pois $NL = c$, $LG = f$, $GC = g$, e conservando todas as outras denominaçoens do Exemplo precedente, naõ teremos mais que substituir $c + \frac{fp'}{p} + \frac{gp''}{p}$ em lugar de b na equaçaõ $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\sqrt{b} - \sqrt{(b - x)}\right]$, que achámos para os vasos prismaticos; e resultará

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(pc + fp' + gp'')} - \sqrt{(pc + fp' + gp'' - px)}}{\sqrt{p}}\right].$$

Bem se vê, que havendo sahido inteiramente o fluido ML, teremos a expressaõ do tempo

t

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(fp' + gp'') - \sqrt{(fp' + gp'' - p'x)}}}{\sqrt{p'}}\right];$$ e

que havendo ſahido o ſegundo, ſerá $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{g} - \sqrt{(g - x)}\right)$. Do meſmo modo ſe diſcorrerá, quando for maior e numero dos fluidos.

317 Exemplo IV. *Determinar o tempo, que deve gaſtar hum vaſo compoſto de dous vaſos priſmaticos AV, OH em ſe eſgotar por hum orificio muito pequeno pq* (Fig. 97.).

Produzindo AS, CV até encontrarem o plano horizontal DH, he manifeſto que a velocidade do fluido em pq he como ſe elle ſahiſſe do vaſo ſimples $AMNC$. Logo, deſignando por A a baſe do vaſo ſuperior, e por B a do inferior, acharemos (n. 313.) que o tempo da deſcida da ſuperficie de AC até SV he repreſentado por $\frac{A}{K\sqrt{a}}(\sqrt{AM} - \sqrt{SM})$, e que o tempo da deſcida de OP até DH he repreſentado por $\frac{B\sqrt{OD}}{K\sqrt{a}}$; e ajuntando eſtes dous tempos ſerá o tempo total da evacuaçaõ repreſentado por $\frac{A\sqrt{AM} - (A - B)\sqrt{SM}}{K\sqrt{a}}$.

318 Até agora havemos ſuppoſto que os orificios ſaõ infinitamente pequenos. Se forem de grandeza conſideravel, ſituados porém horizontalmente, podemos ſervirnos do methodo geral do Capitulo I, que ſe applica ſem difficuldade ao caſo preſente.

Suppondo, que a ſuperficie da agua ſe acha no primeiro inſtante em SX (Fig. 73.), e que no tempo t chega á poſiçaõ indeterminada AB; eſtá claro, que conſervando todas as denominações do nº 236, e deſignando ſómente a altura Ep, que neſte caſo he variavel, por z, teremos $Ee = -dz$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ final do nº 237, teremos

$$M^2 z dz + K^2 MN ds + s dz (K^2 - M^2) = 0.$$

Se K for infinitamente pequeno, reſultará deſta equaçaõ $s = z$, iſto he, ſerá a velocidade a cada inſtante devida á altura do fluido, como acima tinhamos ſuppoſto.

319 Como

319 Como M, N ſaõ aqui funções de z dadas pela figura do vaſo, a equaçaõ precedente ſe reduzirá ſempre a eſta fórma

$$ds + A.Zsdz + B.Z'dz = 0,$$

ſendo Z, Z' funções de z, e A, B conſtantes. Aſſim póde integrar-ſe em geral pelo methodo, de que já nos havemos ſervido (n. 105.). Aqui moſtraremos o ſeu uſo em hum caſo particular.

320 Supponhamos, que o vaſo propoſto he hum cylindro vertical. Conforme as noſſas denominações M repreſentará neſte caſo a ſecçaõ horizontal conſtante do cylindro, e teremos $N = \frac{z}{M}$; e a equaçaõ do nº 318, fazendo $\frac{M^2}{K^2} = m$, e $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$, ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$zds - nsdz + mzdz = 0.$$

Multiplicando-a por huma funçaõ φ de z, teremos $\varphi zds - \varphi nsdz + \varphi mzdz = 0$; e ſuppondo que $\varphi zs + \int \varphi mzdz = C$, teremos $\varphi zds + s(\varphi dz + zd\varphi) + \varphi mzdz = 0$. Comparando eſtas duas equações differenciaes, reſultará $\varphi dz + zd\varphi = -\varphi ndz$, e conſeguintemente $\frac{d\varphi}{\varphi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$, ou $\varphi = z^{-(n+1)}$; e em fim ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $\varphi zs + \int \varphi mzdz = C$, deſignando a altura primitiva do fluido Op por H, e determinando a conſtante C pela condiçaõ que $z = H$ dê $s = 0$, teremos

$$(1-n)sz^{-n} + mz^{1-n} = mH^{1-n}.$$

Se o fluido no primeiro inſtante tiveſſe, por qualquer cauſa exterior, huma velocidade devida á altura b, ſeria neceſſario determinar a conſtante pela condiçaõ que $z = H$ deſſe $s = b.\frac{M^2}{K^2}$; e aſſim teriamos ſempre s em funçaõ de z e de conſtantes. Do meſmo modo ſe póde achar a relaçaõ entre o tempo e a velocidade, ou entre o tempo e a altura z.

321 Quando $n = 1$, ou $M^2 = 2K^2$, o integral precedente dá para s hum valor indeterminado. Entaõ he neceſſario recorrer á formula differencial, que dará $2zdz$ +

$+ z\,ds - s\,dz = 0$, ou $\frac{z\,ds - s\,dz}{zz} = - \frac{2\,dz}{z}$, cujo integral he $\frac{s}{z} = l H^2 - l z^2$, completando-se de maneira que $z = H$ dê $s = 0$. Logo neste caso $s = 2z\,(l H - l z)$, ou $s = 2z . l \frac{H}{z}$.

322 Sobre o mesmo exemplo faremos huma observaçaõ, que com as mudanças competentes se applica a toda a sorte de vasos. Supponhamos, que a superficie da agua no primeiro instante se abaixa no cylindro a quantidade infinitamente pequena q. Entaõ teremos $z = H - q$; e substituindo este valor na equaçaõ $(1 - n)\,s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, e desprezando os termos que involvem q^2, q^3 &c, acharemos $s = mq = q . \frac{M^2}{K^2}$. Donde se segue, que a altura devida á velocidade da superficie no cylindro he representada por q; e por conseguinte, que a superficie desce nos primeiros instantes á maneira dos graves, ou como se o cylindro naõ tivesse fundo, e o fluido cahisse junto á maneira de huma columna solida.

323 Daqui se tem formado huma objecçaõ contra a hypothese do parallelismo das camadas, em que estes calculos se fundaõ; porque parece, que sahindo o fluido por hum orificio, naõ póde a superficie delle descer do mesmo modo que desceria, se o fundo lhe naõ puzesse obstaculo. Mas como este obstaculo faz que a pressaõ do fluido communique maior velocidade á parte que sahe pelo orificio, do que ella haveria adquirido pela propria gravidade; póde ser que a sahida mais promta dessa porçaõ de licor dê lugar a que a superficie do fluido nos primeiros instantes desça como se estivesse livre. Por outra parte, ainda que esta hypothese representasse a fluxaõ de hum modo erroneo para hum tempo infinitamente pequeno, naõ se segue que naõ seja propria para a representar em hum tempo finito de hum modo approximado, debaixo da restricçaõ que acima declarámos (n. 235.).

324 Pelo que respeita aos orificios lateraes, quando saõ pequenos, e além disso situados de maneira que todos

dos os seus pontos se possaõ a cada instante julgar equidistantes da superficie do fluido, he o calculo absolutamente o mesmo que nos horizontais. Quando porém naõ podem julgar-se todos os pontos equidistantes da superficie, seguiremos hum methodo analogo ao que praticámos no Capitulo precedente (n. 244.).

Suppondo pois a altura primitiva do fluido $H =$, o espaço que no tempo t tem descido a superficie delle $= x$, a area actual da mesma superficie $= X$, he manifesto que a altura do fluido em hum instante dt se póde tomar como constante. Logo designando por z a distancia da dita superficie aos differentes elementos horizontais do orificio, e conservando as mais denominações do nº. 244, teremos $dQ = X\,dx = 2\,dt\sqrt{a}.\int dS\sqrt{z}$; e conseguintemente

$$t = \int \frac{X\,dx}{2\sqrt{a}.\int dS\sqrt{z}}.$$

Na expressaõ $\int dS\sqrt{z}$ deve tomar-se x como constante.

325 Por exemplo: Seja hum vaso prismatico AG (Fig. 74.), que se evacua por hum orificio rectangular MN, e supponhamos a altura primitiva do fluido acima da base do orificio $= H$, o espaço que tem descido a superficie $= x$, a dimensaõ horizontal do rectangulo $= f$, a vertical $= b$. Tomando $KL = u$, teremos $dS = f\,du$, e $z = H - b - x + u$; e por conseguinte $\int dS\sqrt{z} = \int f\,du\sqrt{(H - b - x + u)} = \frac{2}{3} f\left[(H-x)^{\frac{3}{2}} - (H-b-x)^{\frac{3}{2}}\right]$, tomando o integral entre os limites de $u = 0$, e $u = b$. E substituindo este valor na formula geral, teremos

$$t = \int \frac{3X\,dx}{4f\sqrt{a}.\left[(H-x)^{\frac{3}{2}} - (H-b-x)^{\frac{3}{2}}\right]}.$$

Esta expressaõ, sem embargo de X ser constante neste caso, naõ póde integrar-se senaõ por meio de quadraturas, ou de series, e o mesmo succede nos outros casos.

326 Mas como por inducçaõ temos visto no Capitulo I, que os orificios lateraes desaguaõ sensivelmente como os horizontais, contando-se as alturas do fluido desde os centros de gravidade dos mesmos orificios, podemos

demos com esta unica mudança servirnos na pratica do methodo, que havemos exposto para os orificios horizontais. Passemos á soluçaõ de alguns Problemas, que serviráõ de exercicio nesta materia.

327 Probl. I. *Supponde, que o vaso IT (Fig. 98.) constantemente cheio até a altura TL transmete a agua para o vaso prismatico AN por hum pequeno tubo horizontal TM; pergunta-se o tempo, em que a superficie da agua no vaso AN chegará a huma posiçaõ dada EG.*

Seja a area do orificio representada por *M*, e a base do vaso *AN* por A; e supponde que já tem entrado nelle huma quantidade *RN* de agua tal, que a pequena quantidade que entra por *M* lhe naõ cause abalo sensivel, estará o fluido *RN* em equilibrio com *ZT*, e a velocidade em *N* será devida á altura *LX*, ou *RA*, igual ao excesso da altura do vaso *AM* sobre a altura actual da superficie do fluido *RS*. Assim considerando a altura *AR* como dada, e como a do vaso prismatico *ARSC*, he facil de ver que a superficie *RS* deverá subir do mesmo modo, como a de hum fluido *ARSC* que fosse sollicitado de baixo para cima por huma força igual á da gravidade, e que desaguasse por hum orificio igual a *M* aberto na base superior *AC*. Logo será o tempo empregado em subir de *RS* até *EG* representado pela equaçaõ (n.313.).

$$t = \frac{A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}.$$

Donde se segue, que o tempo necessario para se encher o vaso *RC* na hypothese do problema he duplo do tempo, em que hum vaso constantemente cheio na altura *AR* daria pelo orificio *M* a quantidade de agua *ARSC* (n. 315.).

328 A altura *AR*, que suppomos conhecida, naõ póde differir muito de *AM*. Será facil de determinar em cada caso, havendo respeito á amplitude do fundo *MN*. Quando se quizer saber o tempo total, que gasta o vaso em se encher de *M* até *E*, buscar-se-ha o tempo que gasta em sahir pelo orificio *M* a quantidade de fluido *MS*, supponde que a altura do fluido acima do orificio he constantemente *LT* (n. 233.), e o tempo que gasta a superficie *RS* em chegar a *EG* pela equaçaõ pre-

precedente; e a soma destes dous tempos dará proximamente o tempo procurado.

329 PROBL. II. *Hum vaso* IT (Fig. 99.) *cheio até* IL, *sem receber nova agua se despeja por hum pequeno tubo* TM *para hum vaso lateral* MC, *que no primeiro instante contém huma quantidade de agua até* DE, *e desagua parte della pelo orificio* N. *Supponda, que em certo tempo as superficies do fluido nos dous vasos se achaõ respectivamente em* QP, KV; *pergunta-se a relaçaõ das alturas verticais* QR, KX, *e a expressaõ do tempo.*

Seja $KX = x$, $KV = X$ funçaõ de x dada pela figura do vaso AN; $QR = y$, $QP = Y$ funçaõ de y dada pela figura do vaso IT; a area do orificio $M = M$, e a do orificio $N = N$. Sendo $QF = y - x$ a altura devida á velocidade em M, teremos $2Mdt\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}$ por expressaõ da agua que passa por M no instante dt (n. 233.): porém esta tem por outro valor $-Ydy$; logo acharemos

$$dt = \frac{-Ydy}{2M\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}}.$$

Se da quantidade de agua $2Mdt\sqrt{a}\cdot\sqrt{(y-x)}$, que o vaso IT fornece a cada instante ao vaso AN, tirarmos a que este lança pelo orificio N, o resto $2dt\sqrt{a}\,[M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}]$ será o incremento de agua no vaso AN, que deve ser igual a Xdx; donde tiraremos

$$dt = \frac{Xdx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x})}.$$

Igualando pois entre si os dous valores de dt, teremos

$$\frac{Ydy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{Xdx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0;$$

equaçaõ fundamental, que seria necessario integrar, para conhecer a relaçaõ entre x e y, e depois disso a expressaõ do tempo; mas esta integraçaõ naõ se póde fazer em geral.

330 Quando os vasos saõ, ou podem julgar-se prismaticos, a equaçaõ será homogenea, e conseguintemente separavel, porque entaõ Y, X saõ constantes. Supponhamos pois $Y = A$, $X = B$, e fazendo primeiro $y = xz$, e depois $z - 1 = uu$, acharemos

dx

$$\frac{dx}{x}=\frac{2A(Nudu-Mu^2du)}{MAu^3-NAu^2+(MA+BM)u-NA};$$

equaçaõ racional, e conſeguintemente integravel pelos methodos conhecidos.

Daqui ſe vê em geral, que ſendo ambos os vaſos priſmaticos, x e y podem ſempre repreſentar-ſe por funções de huma meſma variavel; e que por conſeguinte póde tambem determinar-ſe t por huma funçaõ da meſma variavel.

331 Ha hum caſo muito ſimples, e que ſuccede muitas vezes na pratica. Supponhamos que o vaſo AN naõ deſpeja agua por N, ou ao menos que naõ deſpeja quantidade attendivel a reſpeito da que entra por M. Entaõ, ſendo os vaſos priſmaticos, a equaçaõ geral ſe reduz a $Ady+Bdx=0$; e integrando de maneira que deſvaneça quando $y=RO=b$, e $x=XZ=b$, acharemos $Ay+Bx=Ab+Bb$. Tirando daqui o valor de x, e ſubſtituindo-o na primeira expreſſaõ de dt; depois integrando, e completando o integral de maneira que $t=0$ dê $y=b$, teremos

$$t=\frac{A\sqrt{B}}{M(A+B)\sqrt{a}}\left[\sqrt{(Bb-Bb)}-\sqrt{[(B+A)y-Ab-Bb]}\right].$$

Para determinar o momento, em que a agua chega a por-ſe de livel nos dous vaſos, he neceſſario fazer $x=y=\frac{Ab+Bb}{A+B}$; e entaõ acharemos

$$t=\frac{AB}{M(A+B)}\sqrt{\frac{b-b}{a}}.$$

332 PROBL. III. *Tendo o vaſo cylindrico VN* (Fig. 100.) *hum pequeno orificio no fundo K, e mergulhando-ſe verticalmente em hum fluido indefinido, cuja ſuperficie por conſeguinte naõ ſobe nem deſce; achar o tempo que gaſta a ſuperficie da agua em chegar a huma altura dada EG.*

Eſte problema he exactamente da meſma eſpecie que o primeiro. Porque ſuppondo que a agua tem já chegado a RS para naõ haver abalo ſenſivel no fluido $RMNS$ da parte do que entra por K, acharemos pela meſma raſaõ

$$t=\frac{A(\sqrt{AR}-\sqrt{AE})}{K\sqrt{a}};$$

ſendo

ſendo A a area da baſe do cylindro, K a do orificio, t o tempo que gaſta a ſuperficie em ſubir de R até E, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo.

333 Se o cylindro eſtiveſſe cheio até VT, e ſe deſpejaſſe por K dentro do fluido, he igualmente manifeſto que o exceſſo da altura do fluido interior ſobre a do exterior produziria o movimento deſcenſional. Aſſim achariamos o tempo, que gaſta a ſuperficie em deſcer de VT até OL, pela equaçaõ

$$t = \frac{A(\sqrt{VA} - \sqrt{OA})}{K\sqrt{a}}.$$

Quando o orificio K he infinitamente pequeno, a ſuperficie naõ paſſa do livel AC em ambos os caſos; mas tendo K huma raſaõ ſenſivel com a amplitude do cylindro, a ſuperficie chegará a AC com huma velocidade finita, a qual naõ póde ſer deſtruida ſenaõ pela gravidade no primeiro caſo, e pela preſſaõ do fluido exterior no ſegundo. Aſſim fará a ſuperficie pequenas oſcillações acima e abaixo de AC até ſe pôr de livel. Entaõ ſerá neceſſario recorrer á ſoluçaõ geral do problema ſeguinte. — 41.

334 PROBL. IV. *Tendo o vaſo VN (Fig. 101.) qualquer abertura no fundo pq, e ſendo mergulhado verticalmente no fluido $BKDF$ de qualquer outro vaſo; determinar as circunſtancias do movimento.*

No inſtante em que ſe abre o orificio pq, as duas porções de fluido $ABPM$, $CFQN$ comprimem o fluido inferior $PQDK$, como ſe foſſem dous embolos applicados verticalmente ás baſes PM, QN. Em conſequencia deſtas preſſões ſobe o fluido pelo vaſo MT, ſem perder a continuidade com o reſto da maſſa; e a cada inſtante deve haver igualdade entre as forças perdidas pelas colunnas $ABPM$, $CFQN$, e as forças ganhadas pelo fluido $MGIN$ que ſobe pelo vaſo MT.

Imaginemos pois o fluido exterior $ABPM + NCFQ$ e o interior $GMNI$ divididos em huma infinidade de camadas horizontais e iguais entre ſi, repreſentadas por $Hufb + Xzcx$, e por $OLlo$, e ſupponhamos $Sp = p$, $Rp = z$, $Ep = q$, $Yp = x$, a area do orificio $pq =$ K, a velocidade em $pq = u$, e a altura que lhe he devida $= r$, a area repreſentada por $OL = y$, e a veloci-

dade

dade della $= v$, a area repreſentada por $Hu + zX = s$; e a velocidade della $= V$, as areas $GI = M$, $BA + CF = P$, $PM + NQ = Q$, a gravidade $= g$, o elemento do tempo $= dt$.

Iſto poſto, eſtá claro que o fluido deſcendente animado em cada huma das ſuas camadas da velocidade $gdt - dV$ deve fazer equilibrio a cada inſtante com o fluido aſcendente animado em cada huma das ſuas camadas da velocidade $gdt + dv$. Logo teremos a equaçaõ $\int dz(gdt - dV) = \int dx(gdt + dv)$, ou

$$\int dz(gdt - dV) - \int dx(gdt + dv) = 0.$$

Porém $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, $V = \frac{Ku}{s}$, $dV = \frac{K(sdu - uds)}{ss}$, $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dz}{V} = \frac{ydx}{Ku} = \frac{sdz}{Ku}$..

Logo a equaçaõ precedente ſerá reduzida á forma ſeguinte

$$\frac{gsdz}{Ku}\int dz - Kdu\int\frac{dz}{s} + Kusdz\int\frac{ds}{s^3} - \frac{gydx}{Ku}\int dx$$
$$- Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

As integrações indicadas devem effeituar-ſe para as alturas inteiras p, q. Aſſim teremos $\int dz = p$, $\int dx = q$; e ſupponhamos, que para as meſmas alturas he $\int\frac{dx}{y} = N$, $\int\frac{dz}{s} = N'$. Além diſſo $\int\frac{dy}{y^3}$ deve deſvanecer quando $y = M$, e receber o valor completo quando $y = K$; e do meſmo modo $\int\frac{ds}{s^3}$ deve deſvanecer quando $s = P$, e receber o ſeu valor completo quando $s = Q$. Em fim, ſendo Ee a altura da camada $GIig$ temos $ydx = sdz = M.Ee$. Logo a equaçaõ precedente ſe mudará para eſta forma

M.

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - Kdr(N+N') + M.Ee.Kr$$
$$\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0;$$

equaçaõ geral, que dá o movimento do fluido nos dous vasos, e que se integra pelos methodos, que já havemos praticado.

335 Se o vaso MT for hum cylindro vertical, e o vaso BD tiver huma largura infinita, o fluido poderá nelle considerar-se estacionario, e os termos $N'Kdr$, $M.Ee.Kr\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$ seraõ infinitamente pequenos em comparaçaõ dos outros, e as quantidades M, p constantes. Entaõ será a equaçaõ

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - KNdr + M.Ee.Kr\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

E se nesta equaçaõ suppuzermos K infinitamente pequeno em comparaçaõ de M, resultará $r = p - q$, isto he, a altura devida á velocidade no orificio igual á differença entre a altura constante do fluido exterior e a altura actual do interior, como haviamos supposto no problema precedente.

336 Suppondo, que o vaso MT contém licor acima do livel BF, e que se despeja no vaso BD pelo orificio pq, a equaçaõ primitiva será

$$\int dx(gdt - dv) - \int dz(gdt + dV) = 0,$$

sobre a qual se faraõ operações analogas ás precedentes.

337 Quando se houver de applicar esta theorica a exemplos particulares, he necessario lembrar que sendo o orificio pq aberto em huma parede delgada deve diminuir-se por causa da contracçaõ na rasaõ de 16 para 10 quando elle he pequeno em comparaçaõ do fundo MN, e na rasaõ de 16 para 13 quando for igual ao mesmo fundo. E fazendo as correcções convenientes para os casos intermedios, achar-se-ha que a theorica concorda muito bem com a experiencia, ao menos depois que o fluido tiver adquirido alguma altura no cylindro MT.

338 PROBL.

338 Probl. V. *Sendo o vaſo priſmatico AK, que communica com o tubo* KL, *atraveſſado de muitos diaphragmas EF, OP, VH, nos quais ſe tem feito as pequenas aberturas G, M, N; pergunta-ſe a lei, pela qual ſe ha de deſpejar pelo pequeno orificio D* (Fig. 102.).

Seja *TB* a altura primitiva do fluido, e ſupponhamos que em certo tempo ſe acha a ſuperficie delle em *ab*. Pelo methodo do n.º 259 acharemos na primeira poſiçaõ, que a altura devida á velocidade em *D* he repreſentada por

G

$$TB \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2};$$

e na ſegunda por

$$Tb \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}.$$

Por eſtas expreſſoens ſe vê, que na extenſaõ do eſpaço *BF* corre o fluido em *D*, como ſe o vaſo *AT* naõ tiveſſe diaphragmas, e foſſe a altura variavel do fluido igual á que acabamos de determinar. Aſſim acharemos o tempo correſpondente a BF pelo methodo do n.º 313.

Quando a ſuperficie do fluido chega a *EF*, o movimento he como ſe naõ exiſtiſſe o diaphragma, ou como ſe o orificio *G* foſſe infinito em comparaçaõ dos outros. Fazendo pois $G = \infty$, acharemos que eſtando a ſuperficie em *EF* a altura devida a velocidade em *D* he repreſentada por

$$TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2};$$ e que chegando a qualquer outra poſiçaõ indeterminada *ef*, a dita altura ſerá

$$Tf \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}.$$

Do meſmo modo, quando a ſuperficie chegar a OP faremos $M = \infty$, e acharemos a expreſſaõ da altura devida á velocidade, e do tempo correſpondente; e aſſim por diante. Em fim ajuntando todos os tempos parciais conheceremos o tempo total, que a ſuperficie gaſta em deſcer huma altura dada.

339 Pelas expreſſoens das alturas devidas ás velocidades do fluido em *D*, eſtá claro que a velocidade diminue á medida

dida que a ſuperficie deſce de B até F; que chegando a ſuperficie a F ſe aumenta a velocidade em D, e que de F até P torna a diminuir, e aſſim por diante. As diſtancias dos diaphragmas podem ſer de tal ſorte reguladas, que as velocidades em D variem de huma quantidade dada á medida que o fluido paſſa de hum repartimento para outro. Supponhamos, por exemplo, que as aberturas G, M, N, D, ſaõ iguais entre ſi, e que ſe pede que as velocidades em D, quando a ſuperficie ſe acha em B, F, P, H ſejaõ tambem iguais. Para iſſo igualaremos entre ſi as alturas devidas a eſtas velocidades, e teremos $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2} = TH \times 1$, e por conſeguinte $TH = HP = PF = FB$. Donde ſe vê, que ſendo as alturas TB, TF, TP, TH em progreſſaõ arithmetica decreſcente cuja raſaõ he TH, a velocidade em D ſerá conſtantemente devida á altura TH, quando a ſuperficie eſtiver em B, F, P, H. Eſta theorica he conforme a huma experiencia de M. Mariotte. Veja-ſe a Fig. 83 do ſeu *Tratado do Movimento das aguas* com o diſcurſo que lhe diz reſpeito. A explicaçaõ que elle dá da experiencia he erronea.

340 Probl. VI. *Sendo o vaſo priſmatico AT* (Fig. 103.) *atraveſſado de dous diaphragmas EF, OP com duas aberturas M, N, e eſtando os tres repartimentos AF, EP, OK cheios de licores de differente eſpecie; determinar o movimento com que ſe ha de deſpejar pelo pequeno orificio D.*

Supponhamos, que no primeiro inſtante eſtando a ſuperficie do fluido ſuperior em AB, a velocidade delle em M he devida á altura BS analoga a BF, a velocidade do fluido EP em N devida á altura SV analoga a FP, e a velocidade do fluido OK em D devida á altura TV analoga a TP. Seja $BS = x$, $SV = y$, $VT = z$; e havendo de paſſar em hum inſtante dt igual quantidade de fluido pelas tres aberturas M, N, D, teremos $2M\,dt\sqrt{ax} = 2N\,dt\sqrt{ay} = 2D\,dt\sqrt{az}$, e conſeguintemente $y = \frac{M^2 x}{N^2}$, $z = \frac{M^2 x}{D^2}$.

Iſto poſto, ſeja a gravidade eſpecifica do fluido $OK = p$, a do fluido $EP = p'$, e a do fluido $AF = p''$, $BF = b$,

$= b$, $FP = c$, $PT = f$; e obſervando que as alturas BS e BF, SV e FP, VT e PT, que correſpondem duas a duas aos tres fluidos, devem ſer multiplicadas pelas gravidades eſpecificas reſpectivas delles, para ſe reduzirem a huma meſma unidade de medida, teremos $pz + p'y + p''x = pf + p'c + p''b$. E comparando eſta equaçaõ com as duas precedentes, acharemos

$$x = \frac{N^2 D^2 (pf + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}$$

$$y = \frac{M^2 D^2 (pf + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}$$

$$z = \frac{M^2 N^2 (pf + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}.$$

Determinadas aſſim as alturas devidas ás velocidades em M, N, D para o primeiro inſtante, ſupponhamos que depois de certo tempo as ſuperficies dos fluidos ſe achaõ em ab, ef, op. Eſtá claro, que teremos ſempre $bf = BF$, $fp = FP$, e que ſómente a altura Tp do ultimo fluido he variavel. Aſſim, deſignando Tp por k, acharemos pelo meſmo methodo para qualquer poſiçaõ indeterminada dos tres fluidos, as alturas devidas ás velocidades

$$\text{em } M = \frac{N^2 D^2 (pk + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}$$

$$\text{em } N = \frac{M^2 D^2 (pk + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}$$

$$\text{em } D = \frac{N^2 N^2 (pk + p'c + p''b)}{pM^2 N^2 + p'M^2 D^2 + p''N^2 D^2}.$$

341 Para moſtrar huma applicaçaõ muito ſimples deſtas formulas, ſupponhamos que naõ ha mais que dous fluidos, ou que ſe aniquila o ſuperior AF com o diaphragma EF; que o repartimento OK eſtá cheio de agua, e EP de ar. Aſſim teremos $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{p'}{p} = \frac{1}{850}$; e porque as preſſoens do ar exterior em N e D fazem equilibrio entre ſi, ſerá tambem $c = 0$. Logo a altura devida á velocida-

locidade do ar na paſſagem por N ſerá repreſentada por $\frac{850\,k\,D^2}{D^2+850\,N^2}$, e a altura devida á velocidade da agua em D por $\frac{850\,k\,N^2}{D^2+850\,N^2}$.

Quando a abertura D he infinitamente pequena em comparaçaõ de N, a primeira altura deſvanece, e a ſegunda ſe faz igual a k, como deve ſer. Se ambas as aberturas forem iguais, as velocidades do ar em N, e da agua em D ſeraõ iguais, e devidas á altura $\frac{850}{851}\,k$ &c. Por eſta theorica ſe fará a idêa juſta da velocidade, com que ſahe o vinho pela torneira de huma pipa, quando o buraco deſtinado a introduzir o ar pela parte ſuperior he muito pequeno.

Comparaçaõ da theorica precedente com a experiencia.

342 QUando hum vaſo cheio de agua ſe deixa eſgotar por hum orificio aberto no fundo, a ſuperficie do fluido em chegando a certa diſtancia delle começa a formar huma cavidade, á maneira de hum funil, com a ponta dirigida para o orificio. A fallar em rigor, eſta cavidade deve exiſtir deſde o principio; porque havendo de ſer ſubſtituido o fluido que ſahe, por outro conſecutivamente, e naõ podendo iſſo fazer-ſe em hum inſtante, he manifeſto que as particulas adjacentes devem ter huma tendencia continua para o lugar que ſe deſoccupa, ſemelhante á que tem os corpos ſituados em hum plano inclinado. Mas em quanto o fluido tem huma altura conſideravel, a maior preſſaõ faz que ſeja mais pronto o movimento das particulas, e que a cavidade naõ ſeja por conſeguinte ſenſivel, ſenaõ quando a ſuperficie chega perto do fundo. Tambem concorre para iſſo a columna vertical do ar que correſponde ao orificio, a qual naõ he perfeitamente equilibrada pela preſſaõ contraria da columna applicada da parte inferior ao meſmo orificio, porque eſta ſendo repellida pelo movimento da agua, que ſahe por elle, gaſta niſſo huma parte da ſua acçaõ.

343 Naõ

343 Naõ ſe póde dizer em geral a altura, em que a cavidade começa a apparecer, ſobre hum orificio horizontal. Iſſo depende de muitas circunſtancias phyſicas, que naõ ſaõ as meſmas em todos os caſos. Se a agua naõ eſtiver em quietaçaõ, mas tiver algum movimento de oſcillaçaõ, ou turbinaçaõ, logo deſde o principio começará a formar-ſe a cavidade; e ſe eſtiver em quietaçaõ, a ſuperficie ſerá ſenſivelmente plana até chegar perto do fundo. Nos orificios laterais deſce a ſuperficie ſem alteraçaõ ſenſivel até a borda ſuperior delles; e entaõ forma-ſe huma cavidade ao comprido na direcçaõ do orificio, e com huma pequena inclinaçaõ para a parte delle.

344 Como a formaçaõ da cavidade produz alguma irregularidade, e incerteza no fim do deſaguamento, para verificarmos a theorica deſte Capitulo obſervámos os tempos, que gaſtava a ſuperficie da agua em deſcer huma altura dada, antes de ſe effeituar a cavidade. Para iſſo nos ſervimos de hum vaſo parallelepipedo rectangular ſituado verticalmente de 12 pés de altura, ſendo a baſe hum quadrado de tres pés por cada lado interior; e os orificios eraõ horizontais, abertos em huma chapa de cobre de meia linha de groſſura.

Sendo pois ſempre a altura primitiva do fluido acima do orificio de 11 pés, e 8 pollegadas, achámos

I. Que ſahindo a agua por hum orificio circular de huma pollegada de diametro, a ſuperficie della ſe abaixava 4 pés em $7' \, 25'', 5$.

II. E que ſahindo pelo meſmo orificio ſe abaixava a ſuperficie da agua 9 pés em $20' \, 24'', 5$.

III. Que ſahindo a agua por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſcia a ſuperficie 4 pés em $1' \, 52''$.

IV. E que ſahindo pelo meſmo orificio, a ſuperficie da agua deſcia 9 pés em $5' \, 6''$.

345 Calculando eſtas experiencias pela formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)} \right)$, que compete a eſte caſo (n. 313,), e havendo reſpeito á contracçaõ da veia, acharemos na primeira experiencia $t = 7' \, 22'', 4$, na ſegunda $t = 20' \, 16''$, na terceira $t = 1' \, 50'', 6$, e na quarta $t = 5' \, 4''$. Eſtes tempos ſaõ ſenſivelmente iguais aos obſerva-

ſervados ; e reflectindo nas circunſtancias, que podem alterar os reſultados das meſmas experiencias, parece que naõ podia eſperar-ſe maior conformidade. Aſſim concluiremos, que havendo reſpeito á contracçaõ da veia, póde a theorica applicar-ſe com exactidaõ ſufficiente aos uſos da pratica.

CAPITULO III.

Do movimento das aguas nas fontes de repuxo.

346 AS aguas, que devem fornecer a deſpeza de huma fonte de repuxo, ajuntaõ-ſe em huma arca, ou reſerva *ADCB* (Fig. 104.), donde ſaõ conduzidas ao ponto *O* por hum cano *GEO*, que ſe chama *tubo conductor*, ou ſimpleſmente *conductor*.

347 Qualquer que ſeja a direcçaõ de hum repuxo, a quantidade de agua que deſpende he ſempre a meſma, com tanto que o orificio *O*, e a altura *FO* da reſerva ſejaõ as meſmas; e eſta quantidade ſe calculará pelos methodos que propuzemos no Capitulo I. Agora examinaremos os meios de procurar, que os repuxos de agua tenhaõ toda a altura, ou amplitude que he poſſivel.

Dos repuxos verticais.

348 COmo a agua ao ſahir de hum orificio muito pequeno tem huma velocidade capaz de a fazer ſubir á altura do livel da arca *AB* (Fig. 104.); he evidente que o repuxo *OF* devia elevar-ſe á meſma altura, ſe naõ houveſſe muitas cauſas que lhe ſervem de obſtaculo, como a fricçaõ contra o circuito do orificio, e a reſiſtencia do ar. O effeito da fricçaõ he pequeno, mas o da reſiſtencia do ar he muito conſideravel, principalmente nas grandes alturas. — ff x.

349 A eſtas duas cauſas ſe ajunta o embaraço, que ſe fazem reciprocamente as particulas da agua. Porque ſendo cheio dellas o eſpaço comprehendido entre o orificio, e

o ponto onde acaba a ſua velocidade primitiva, eſtá claro que as moleculas que vaõ ſahindo empregaõ parte da ſua força na percuſſaõ das que encontraõ no caminho; donde reſulta alargar-ſe a columna á medida que ſe aparta do orificio, e perder huma parte da ſua velocidade. Além diſſo, quando o repuxo he bem vertical, as particulas que tem ſubido ao alto tornaõ a cahir pelo meſmo caminho em virtude da gravidade, embaraçaõ, e enfraquecem a velocidade das particulas aſcendentes; e por iſſo ſe obſerva, que inclinando hum pouco a direcçaõ do repuxo, ſobe eſte hum pouco mais alto.

350 Os repuxos mais groſſos ſobem mais alto que os delicados, porque ſendo as velocidades primitivas iguais os primeiros tem huma maſſa maior, e conſeguintemente mais força para vencer os obſtaculos contrarios. Quando as alturas ſaõ pequenas eſta differença he inſenſivel. Mas ſem embargo da maior altura, as quantidades de fluido que lançaõ naõ ſaõ maiores á proporçaõ, porque eſſas dependem das velocidades ao ſahir dos orificios, as quais ſaõ iguais preſcindindo do effeito da fricçaõ.

351 Para comparar as alturas dos repuxos com as do livel da reſerva, ao vaſo parallelepipedo rectangular, e vertical *AC* (Fig. 105.) de 12 pés de altura, cuja baſe era hum quadrado de 3 pés por cada lado, applicámos o tubo horizontal *OE* de folha de flandes tapado em *E*, de 6 pés de comprido, e de 3 pollegadas, e 8 linhas de diametro, no qual eſtavaõ abertos differentes orificios pela parte ſuperior *OF*. E conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 11 pés acima da parede ſuperior *OF*, achámos

I. Que o repuxo vertical pelo orificio *F* de 2 linhas de diametro ſe levantava á altura de 10 pés, e 10 linhas; e inclinando hum pouco a direcçaõ, a 10 pés 4 pollegadas, e 6 linhas.

II. Que pelo orificio *G* de 4 linhas de diametro ſubia a 10 pés, 5 pollegadas, e 10 linhas; e inclinando hum pouco a direcçaõ a 10 pés, 7 pollegadas, e 6 linhas.

III. Que pelo orificio *H* de 8 linhas de diametro ſubia a 10 pés, 6 pollegadas, e 6 linhas; e inclinando hum pouco a direcçaõ, a 10 pés, e quaſi 8 pollegadas.

IV. Que

IV. Que pelo tubo conico K*M* de 5 pollegadas e 10 linhas de altura, que tinha o diametro da baſe inferior de 9 linhas, e o da ſuperior de 4, ſe levantava a agua a 9 pés, 6 pollegadas, e 4 linhas.

V. E que pelo tubo cylindrico *IN* de 5 pollegadas e 10 linhas de altura, e de 4 linhas de diametro, ſe elevava a agua á altura de 7 pés, 1 pollegada, e 6 linhas; formando a agua colunnas muito bellas em todas eſtas experiencias, principalmente nas duas ultimas.

352 Ao meſmo vaſo *AC* (Fig. 106.) fizemos applicar outro tubo horizontal *OE* do meſmo comprimento que o primeiro, e que tinha de diametro de 9 até 10 linhas. E conſervando ſempre o vaſo cheio na altura de 11 pés acima da linha *OF*, achámos

VI. Que o repuxo vertical pelo orificio *F* de 2 linhas de diametro ſe levantava a 9 pés, e 11 pollegadas.

VII. Que pelo orificio *G* de 4 linhas de diametro ſubia a 9 pés, 7 pollegadas, e 10 linhas, desfigurando-ſe muito a colunna, e eſpalhando-ſe na parte ſuperior.

VIII. E que pelo orificio *H* de 8 linhas de diametro naõ ſubia mais que a 7 pés, e 10 pollegadas, ſendo a colunna extremamente eſpalhada, como formada de repuxos diſtinctos que ſuccediaõ huns aos outros.

353 Pelas tres primeiras experiencias ſe vê, que quando o tubo conductor fornece a agua com abundancia, os repuxos groſſos ſe elevaõ mais que os delgados; mas, ſendo o tubo conductor muito eſtreito, pelas tres ultimas ſe moſtra que os primeiros naõ ſobem taõ alto como os ſegundos. He pois neceſſario, que o diametro do conductor tenha certa raſaõ com o do orificio, para que a agua ſe levante a toda a altura que lhe he poſſivel. Mais abaixo determinaremos eſta grandeza.

354 Muitas vezes ſe fazem os bocais dos repuxos guarnecidos de tubos addicionais conicos, ou cylindricos. Eſte uſo he muito vicioſo, porque deſſa fórma (Exp. IV e V) naõ ſe eleva a agua a tanta altura. Os melhores orificios ſaõ os que ſe abrem na chapa horizontal que tapa a extremidade do conductor, a qual deve ſer delgada, de eſpeſſura uniforme, bem polida, e furada perpendicularmente.

355 Da comparaçaõ das experiencias precedentes, aſſim como das que fez M. Mariotte ſobre a meſma materia,

ria, resulta que *as differenças entre as alturas dos repuxos verticais, e as alturas das reservas saõ entre si sensivelmente na rasaõ duplicada das alturas dos repuxos.*

Sendo pois a altura de hum repuxo dado $= a$, e a da sua reserva $= b$, a altura de outro repuxo $= r$, e a da sua reserva $= z$, teremos $b - a : z - r :: a^2 : r^2$; donde se tira $r = \frac{-a^2 + a\sqrt{[a^2 + 4z(b-a)]}}{2(b-a)}$, ou $z = r + \frac{r^2(b-a)}{a^2}$. Assim, sendo dada a altura da reserva, se conhecerá a do repuxo; e reciprocamente.

356 Tambem se vê pelas primeiras experiencias, que póde ganhar-se alguma cousa na altura dos repuxos, quando se desviaõ hum pouco da direcçaõ vertical; mas entaõ naõ produzem hum effeito taõ agradavel á vista.

357 Algumas vezes a agua, que sahe pelo orificio, salta a muito maior altura do que permitte a altura da reserva. Este phenomeno, sempre momentaneo, he produzido pelo ar que traz a agua comsigo pelo conductor. Eisaqui de que modo.

Supponhamos, que estando o orificio *O* tapado (Fig. 104.) o ar se tem ajuntado no pequeno espaço *mnub*, extremidade do conductor. Entaõ destapando o orificio, este ar sahe para fóra, e a agua cahe no espaço que elle deixa vazio, e adquire no conductor huma velocidade, que ao sahir pelo orificio se aumenta na rasaõ da area do orificio para a area da secçaõ perpendicular ao conductor. Porque sendo *Ee* o espaço, que a agua corre no conductor em hum instante, está claro que no mesmo tempo deve sahir por *O* hum volume igual ao pequeno cylindro *eEHb*; e conseguintemente será a velocidade em *O* para a velocidade em *eb*, como a secçaõ *eb* para o orificio *O*. Assim póde ser muito consideravel a velocidade nos primeiros instantes, a qual bem depressa se reduz pela resistencia dos obstaculos ao estado natural, como effeito de huma causa accidental, e momentanea. Alguns autores attribuem erroneamente este phenomeno á elasticidade do ar, que vem atraz da agua que sahe pelo orificio, porque esse ar move-se com a agua contigua,

gua, como se moveria a porçaõ da agua, cujo lugar occupa.

358 Ja havemos advertido que o conductor deve ser de certo diametro, para que o repuxo tenha a maior elevaçaõ que lhe he possivel (n. 353.). Examinemos agora o menor diametro que se lhe pode dar relativamente ao do orificio, sem prejudicar á altura do repuxo.

Seja a altura da reserva $= h$, o diametro do conductor $= D$, o do orificio $= d$, a velocidade do fluido no conductor $= u$; e considerando que a velocidade permanente ao sahir do orificio póde representar-se por $\sqrt{h}$, teremos $\sqrt{h} : u :: DD : dd$, e por conseguinte $u = \frac{dd}{DD}\sqrt{h}$.

Pela mesma rasaõ em outro qualquer caso, designando as quantidades analogas a D, d, u, h pelas mesmas letras accentuadas, teremos $u' = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{h'}$.

Isto posto, querendo que os dous repuxos sejaõ fornecidos de agua da mesma maneira, faremos $u = u'$, ou $\frac{dd}{DD}\sqrt{h} = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{h'}$. Donde se tira $DD : D'D' :: dd\sqrt{h} : d'd'\sqrt{h'}$, ou $D : D' :: d\sqrt[4]{h} : d'\sqrt[4]{h'}$, isto he, *os diametros dos conductores deveráõ ser entre si na rasaõ composta da rasaõ dos diametros dos orificios e da subquadruplicada das alturas das reservas.*

Conhecendo pois por huma experiencia immediata o menor diametro, que póde ter hum conductor para supprir ao producto de hum orificio dado, debaixo de huma altura dada, sem prejuizo da altura do repuxo, facilmente calcularemos o diametro competente para outros casos.

359 Em consequencia disto, tomámos hum tubo de folha de flandes (Fig. 107.) de huma pollegada de diametro, guarnecido de hum grande funil ABC para receber a agua, que devia fornecer a despeza dos differentes orificios applicados successivamente á extremidade O. E conservando a altura da reserva FO constantemente de 3 pés, 2 pollegadas, e 11 linhas, observámos as alturas dos repuxos desta maneira

 Diame-

Diametros dos orificios	Alturas dos repuxos		
1 *linh.*	3 *pés*	1 *poll.*	6 *linh.*
2	3	1	8
3	3	2	0
4	3	1	7
5	3	1	5
6	3	0	4

360 Donde se vê, que hum orificio muito pequeno faz perder alguma cousa na altura do repuxo, pela rasaõ que acima dissemos (n. 350.). Mas a grandeza do orificio tem seus limites; e por estas experiencias podemos estabelecer, que para hum conductor de huma pollegada de diametro, e para huma altura de reserva de 3 pés, 2 pollegadas e 11 linhas, o orificio mais ventajoso deve ter o diametro de $3\frac{3}{4}$ linhas proximamente.

Supposta esta determinaçaõ, se buscarmos qual deve ser o diametro do conductor, para huma reserva de 52 pés de altura, e hum orificio de 6 linhas de diametro, pela regra acima estabelecida (n. 358.), acharemos que o conductor deve ter de diametro 38 linhas, que differe muito pouco de 36 linhas, que M. Mariotte determinou pela experiencia. Para facilitar os calculos, supporemos que para a altura de 16 pés, e hum orificio de 6 linhas, he necessario que o diametro do conductor seja de 28 linhas e meia. Aqui naõ fazemos mençaõ da contracçaõ da veia, porque entra do mesmo modo nas rasões que consideramos.

361 Se hum cano houver de servir de conductor a differentes repuxos, he necessario buscar a area de hum orificio igual á soma das areas de todos os orificios propostos, e determinar o diametro do conductor, como se houvesse de fornecer a agua ao orificio achado. Os conductores naõ devem ser mais estreitos do que permitte a regra, que havemos apontado; mas naõ se perde nada na pratica em se lhes dar mais largura, antes assim he necessario, para compensar o que elles se estreitaõ com o

o tempo, criando limo pelas paredes interiores, e enchendo-se de alguns outros obstaculos. Deve procurar-se, que os conductores naõ façaõ angulos, nem cotovelos muito violentos, porque destroem grande parte da velocidade; mas sendo, como he quasi sempre, necessario encurvallos, a curvatura se distribuirá docemente por todo o seu comprimento, ou ao menos por hum grande espaço delle.

362 Para facilitar mais a applicaçaõ pratica dos principios, que havemos estabelecido, ajuntaremos aqui huma Taboa, na qual se contém para differentes alturas de repuxos por hum orificio de 6 linhas de diametro, as alturas competentes da reserva, as quantidades que despendem em hum minuto, contadas em libras das quais 72 fazem hum pé cubico, e os diametros que se haõ de dar aos conductores, a fim de que os repuxos tenhaõ a maior elevaçaõ possivel. As alturas das reservas saõ as mesmas, que se achaõ na obra de M. Mariotte. Os productos foraõ calculados pelo methodo no nº. 302. E os diametros dos conductores foraõ calculados pela regra do nº. 358, supponde que para hum orificio de 6 linhas de diametro, debaixo de 16 pés de altura, deve o conductor ter 28 linhas e meia de diametro. Faltava huma colunna, para determinar a grossura que devem ter as paredes dos conductores para resistirem á pressaõ, que em cada hum dos casos se exercita contra ellas. Mas esta determinaçaõ depende dos principios, que havemos de expor no Capitulo seguinte.

Altu-

Alturas dos Repuxos	Alturas das Reservas		Productos effectivos por hum orificio de 6 linhas de diametro	Diametros dos conductores
Pés	*Pés*	*Polleg.*	*Libras*	*Linhas*
5	5	1	64	21
10	10	4	90	26
15	15	9	112	28
20	21	4	130	31
25	27	1	146	33
30	33	0	162	34
35	39	1	176	36
40	45	4	190	37
45	51	9	202	38
50	58	4	216	39
55	65	1	228	40
60	72	0	240	41
65	79	1	250	42
70	86	4	262	43
75	93	9	272	44
80	101	4	284	45
85	109	1	294	46
90	117	0	304	47
95	125	1	316	48
100	133	4	326	49

363 Ainda que a applicaçaõ dos resultados desta Taboa, e das regras precedentes, naõ tem difficuldade, mostralla-hemos com tudo em dous exemplos.

Exemplo I. *Pertende-se fazer hum repuxo vertical de 44 pés de altura por hum orificio de huma pollegada de diametro; pergunta-se a altura da reserva, a quantidade de agua, e o diametro do conductor.*

1º Por quanto hum repuxo de 45 pés requer a altura da reserva de 51 pés e 9 pollegadas, na formula do nº. 355 teremos $a = 45$, $b = 51$ pés 9 poll., $r = 44$ pés, e acharemos a altura procurada $z = 50$ pés, e 7 pollegadas.

2º Fazendo a porporçaõ $\sqrt{(51 \text{ pés } 9 \text{ poll.})} : \sqrt{(50 \text{ pés } 7 \text{ poll.})} :: 202$ libras ? o quarto termo 200 libras ferá a quantidade de agua, que lançaria o orificio de 6 linhas de diametro debaixo da altura de 50 pés e 7 pollegadas. E multiplicando esta quantidade por 4, por ser o orificio proposto de huma pollegada, teremos 800 libras pelo producto que buscamos.

3º E praticando esta porporçaõ $6 \sqrt[4]{(51 \text{ pés } 9 \text{ poll.})} : 12 \sqrt[4]{(50 \text{ pés } 7 \text{ poll.})} :: 38$ linhas ? o quarto termo 6 pollegadas e 3 linhas ferá o diametro do conductor (n. 358.).

Exempplo II. *Hum tanque de 4 pés de profundidade, que naõ póde encher-se senaõ por intervallos, e que contém 20 toesas cubicas de agua, está elevado 38 pés acima de hum jardim, no qual se quer formar hum repuxo por meio da agua que o tanque póde fornecer; pede-se a determinaçaõ das circunstancias relativas ao estabelecimento deste repuxo?*

Primeiramente buscaremos o tempo, que o tanque deve gastar em se esgotar por hum orificio dado. Para isso podia servir o Problema acima resolvido (n. 317.). Mas na pratica podemos, sem erro sensivel, suppôr o tanque constantemente cheio na ametade da sua altura, e procurar o tempo que gastará em despejar por hum orificio dado 20 toesas cubicas de agua (n. 304.). Assim, suppondo que do orificio do repuxo até o meio da altura do tanque saõ 36 pés, e que o orificio he de huma pollegada, acharemos que o tempo procurado he de $613'$ ou de $10^h\ 13'$. Se quizessemos que o repuxo durasse quatro vezes mais tempo, seria necessario tomar hum orificio quatro vezes menor, isto he, de meia pollegada de diametro &c. Estabelecida a grandeza do orificio, conforme o tempo que o repuxo deve durar, o resto da soluçaõ se acaba como no exemplo precedente.

Dos

Dos repuxos obliquos.

364 SEja *GEO* (Fig. 108.) o conductor de hum repuxo, que lança a agua por qualquer direcçaõ OK inclinada ao horizonte. Eſtá claro, que as particulas do fluido ſeguiriaõ conſtantemente eſta direcçaõ primitiva, ſe a gravidade as naõ deſviaſſe della a cada inſtante, e naõ as obrigaſſe a deſcrever huma curva *OSH*, cuja natureza queremos ſaber.

365 Como a velocidade de qualquer gota ao ſahir do orificio *O* he devida á altura da reſerva *FO*, com ella continuada uniformemente andaria o eſpaço OK duplo de *FO* no meſmo tempo, que gaſtaria hum grave em cahir da altura *FO* (n.231.). Tirando dos pontos O, K as horizontais *OH*, *KI*, imaginemos o eſpaço OK dividido em huma infinidade de elementos iguais *Oa*, *ab*, *bc* &c, e abaixemos as verticais *ad*, *bf*, *cg* &c, que determinaõ os elementos correſpondentes da curva *Od*, *df*, *fg* &c. Sobre *Od*, *df*, *fg* &c conſtruamos os parallelogrammos *Oadb*, *dlfm*, *fngp* &c, que tenhaõ hum dos lados vertical, e o outro parallelo a OK: e produzamos as rectas *fm*, *gp* &c até encontrarem a vertical *ON*. Aſſim podemos conſiderar o movimento da gota propoſta a cada inſtante pelos lados da curva *Od*, *df*, *fg* &c, como compoſto de outros dous, hum vertical produzido pela gravidade, e outro parallelo a OK que provêm da impulſaõ inicial. Eſtes movimentos para o primeiro lado ſaõ *Ob* e *Oa*: *dm* ou *bi*, e *dl* ou *ab* para o ſegundo &c; e diſcorrendo ſempre do meſmo modo até que a ſoma dos elementos *Oa*, *ab*, *bc* &c componha a recta finita *OL*, e a ſoma dos elementos *Ob*, *bi*, *ik* &c componha a vertical correſpondente *ON* ou *LM*, veremos que a gota deſcreve a curva *OSH* com eſta lei, que no tempo em que deſcreveria uniformemente qualquer eſpaço O L com a velocidade de projecçaõ, andaria em virtude da gravidade o eſpaço correſpondente *ON*, ou *LM*.

Deſignando pois por *a* a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo, ſerá o tempo empregado em cahir da altura *LM* repreſentado por $\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{a}}$, e da al-

tura

tura FO por $\frac{\sqrt{FO}}{\sqrt{a}}$; e por conſeguinte o tempo, que gaſtaria huma gota em correr uniformemente OK com a velocidade de projecçaõ, ſerá tambem $\frac{\sqrt{FO}}{\sqrt{a}}$. Donde acharemos o tempo empregado em correr OL com a meſma velocidade, fazendo eſta proporçaõ, OK ou $2FO : OL :: \frac{\sqrt{FO}}{\sqrt{a}} : \frac{OL.\sqrt{FO}}{2FO.\sqrt{a}} = \frac{OL}{\sqrt{a}.2\sqrt{FO}}$. Logo $\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{a}} = \frac{OL}{\sqrt{a}.2\sqrt{FO}}$, ou $4FO.LM = OL^2$; equaçaõ, que caracteriza a curva procurada OSH.

366 Mas para conhecer mais particularmente eſta curva, obſervaremos que os triangulos ſemelhantes OIK, OQL daõ $OL = \frac{OQ.KO}{KI} = \frac{OQ.2FO}{KI}$, $LQ = \frac{OQ.OI}{KI}$, $LM = LQ - MQ = \frac{OQ.OI}{KI} - MQ$. E ſubſtituindo os valores de OL, LM na equaçaõ precedente, acharemos $OQ^2.FO = OQ.OI.KI - MQ.KI^2$. Porém $MQ = 0$ quando $OQ = 0$, e quando $OQ = \frac{OI.KI}{FO}$. Logo tomando $OT = \frac{OI.KI}{2FO} = \frac{OH}{2}$, e elevando a vertical TS, ſerá $ST = \frac{OI^2}{4FO}$. Conduzindo tambem MP perpendicular a ST, ſerá $OQ = OT - MP = \frac{OI.KI}{2FO} - MP$, $MQ = ST - SP = \frac{OI^2}{4FO} - SP$. Logo ſubſtituindo os valores achados de OQ e MQ na equaçaõ $OQ^2.FO = OQ.OI.KI - MQ.KI^2$, feitas todas as reducçoens, acharemos $MP^2 = \frac{KI^2}{FO}.SP$. Donde ſe vê, que a curva OSH he huma parabola, que tem o vertice em S, o eixo ST, e o parametro $= \frac{KI^2}{FO}$.

Seja $FO = b$, o ſeno do angulo $KOI = m$, o ſeu coſeno $= n$; e teremos $KI = m.KO = 2bm$, $OI = n.KO = 2bn$. Logo $ST = \frac{OI^2}{4FO} = bn^2$, $OT = \frac{OI.KI}{2FO} = 2bmn$,

$2bmn$, e o parametro da parabola $\frac{KI^2}{FO} = 4bm^2$;

367 Daqui se segue esta construcçaõ. Sobre a altura da reserva OF, como diametro (Fig. 109.) descreva-se o semicirculo OLF, que encontre em L a direcçaõ inicial do repuxo; e conduzindo a ordenada LN produza-se até S de maneira que seja $LS = LN$. Do ponto S abaixe-se a vertical ST, que encontre em T a horizontal OH. Sobre as coordenadas rectangulas ST, OT descreva-se a parabola OSH, que tenha o vertice em S; e esta será a curva que fórma o repuxo. Porque tirando a corda FL, e conservando as denominaçoens estabelecidas, teremos $OT = 2\,LN =$ $\frac{2FL.OL}{FO} = \frac{2m.FO.n.FO}{FO} = 2bmn$, $ST = NO = NL$; $\frac{n}{m} = bn^2$, e o parametro $\frac{OT^2}{ST} = 4bm^2$.

368 Logo, se tomarmos $Fn = ON$, e conseguintemente $ln = LN$, e se descrevermos a parabola OsH do mesmo modo que a outra OSH, ambas teraõ os seus vertices na mesma vertical TSs, e se encontraráõ em H. O mesmo succede em todos os outros pares de parabolas, que se podem construir da mesma maneira.

369 Se o terreno naõ fosse horizontal, mas fizesse com a horizontal OH hum angulo dado KOH (Fig. 109.); sem difficuldade se acharia o ponto K, onde a parabola encontra o mesmo terreno. Porque abaixando a vertical KY, e conduzindo a ordenada KZ ao eixo ST, supponhamos as quantidades conhecidas $OT = a$, $ST = b$, $TX = c$, e o parametro da parabola $OSH = p$, a incognita KY ou $ZT = x$; e os triangulos semelhantes XTO, XZK daraõ $ZK = \frac{OT.ZX}{XT} = \frac{a(x-c)}{c}$. Logo, por ser $SZ = b - x$, e pela propriedade da parabola, teremos $\frac{a^2(x-c)^2}{c^2} =$ $p(b-x)$; donde se tira

$$x = c - \frac{pc^2}{2a^2} \pm \sqrt{\left[\frac{pbc^2}{a^2} - c^2 + \left(c - \frac{pc^2}{2a^2}\right)^2\right]};$$

equaçaõ, que facilmente se póde construir por meio do circulo.

370 Quan-

370 Quando o orificio he vertical (Fig. 110.), a parabola OM tem o parametro quadruplo da altura da reserva BO, e a ordenada $PM = 2\sqrt{(OP.OB)}$.

371 Por estas formulas se vê, que se hum conductor contiver agua, da qual se naõ saiba a altura acima do orificio, esta poderá determinar-se pela amplitude da parabola que descreve o repuxo. Por exemplo, se na Fig. 110 naõ conhecessemos OB, a equaçaõ $PM = 2\sqrt{(OP.OB)}$ nos daria $OB = \frac{PM^2}{4OP}$. De hum modo analogo se procederá na hypothese geral do n.º 367.

372 Seja $ADCB$ hum vaso prismatico vertical (Fig. 110.), que lança agua por hum orificio lateral O. Tomando $OH = OB$, e conduzindo a ordenada HQ da parabola OQM, a recta BQ será a tangente della em Q. E porque $HQ^2 = 4OB.OH$, será $HQ = HB$, e conseguintemente o angulo HBQ de 45°. Donde se vê, que se em todos os pontos da altura BC se abrirem orificios, todos os differentes repuxos por elles produzidos teraõ por tangente a recta que fórma com BC hum angulo de 45°.

373 Os repuxos obliquos naõ chegaõ taõ longe na pratica, como se acha pela theorica; porque saõ retardados pelas mesmas causas, que ponderámos a respeito dos verticais. Eisaqui duas experiencias, que fizemos sobre a amplitude delles.

I Sendo o orificio O de 6 linhas de diametro, e a altura OB de 9 pés, a huma abscissa vertical OP de 4 pés, 3 pollegadas, e 7 linhas correspondia huma ordenada horizontal PM de 11 pés, 3 pollegadas, e 3 linhas.

II E quando a altura OB era de 4 pés, a huma abscissa OP de 4 pés, 3 pollegadas, e 7 linhas correspondia a ordenada PM de 8 pés, 2 pollegadas, e 8 linhas.

374 Daqui se vê, que as amplitudes effectivas saõ hum pouco menores que as theoricas; mas as primeiras saõ entre si sensivelmente na rasaõ subduplicada das alturas da reserva, como as ultimas o saõ exactamente. Assim, conhecendo bem por huma experiencia immediata a amplitude effectiva, que corresponde a huma altura dada, por huma simples proporçaõ se achará a amplitude, que ha de ser produzida por qualquer outra altura, ou reciprocamente; bem entendido, que as alturas das reservas se suppoem medio-

mediocres. Quando estas forem muito consideraveis, naõ se póde suppor que as curvas dos repuxos sejaõ parabolas, nem taõ pouco que as amplitudes sejaõ na rasaõ subduplicada das alturas das reservas. Nesse caso as verdadeiras curvas saõ como indeterminaveis pela theorica; e seria necessario grande numero de experiencias, para chegar a conhecellas por approximaçaõ.

375 As dimensoens dos conductores, que fornecem a agua para os repuxos obliquos, determinaõ-se do mesmo modo que nos verticais, como he por si mesmo evidente; porque debaixo de alturas iguais, e por orificios iguais, o producto delles he sempre o mesmo, tanto nos repuxos obliquos como nos verticais.

376 Todos sabem, que os registos e fontes de repuxo contribuem muito para a decoraçaõ dos jardins, e dos edificios. A arte de os variar, e de os produzir em differentes figuras, que lizongeiem a vista, está muito adiantada. Tudo depende da altura das reservas combinada com os orificios, guarnecidos de differentes bocais, configurados e situados da maneira conveniente ao fim que se propoem. Naõ he do nosso assunto entrar por miudo neste mechanismo, que mais pertence ao gosto da Architectura, do que á Hydraulica. Quem puder ver o parque de Versalhes, os jardins de S. Cloud, de Chantilly &c, aprenderá cousas nesta parte, das quais naõ he possivel dar-se idêa clara em hum livro. Póde com tudo consultar-se o que diz Belidor a esse respeito (*Archit. Hydraul. tom. 2. pag. 389. e seg.*).

CA-

CAPITULO IV.

Do movimento das aguas pelos tubos conductores.

NO Capitulo I dissemos, como se ha de calcular a quantidade de licor, que produzem os tubos addicionais de pouco comprimento. Mas esse methodo naõ póde servir para os conductores, pelos quais se levaõ as aguas a lugares distantes; porque a fricçaõ repetida e accumulada por todo o seu comprimento produz hum effeito muito consideravel. Agora examinaremos particularmente esta materia, tomando a experiencia por guia; e primeiramente trataremos da quantidade de fluido que elles produzem em differentes circunstancias, e depois da pressaõ que o fluido exercita contra as paredes interiores delles.

Experiencias sobre a quantidade de agua que produzem os tubos conductores.

377 OS conductores saõ ordinariamente curvilineos, e inclinados ao horizonte. Mas primeiramente consideralloſ-hemos rectilineos, porque o exame deste caso, que he o mais simples de todos, dará maior clareza a esta materia em geral, como depois se verá.

Havendo pois applicado á caixa de huma reserva dous tubos de folha de flandes bem calibrados, dos quais hum tinha 16 linhas, e o outro 2 pollegadas de diametro, procurámos que a agua fosse bem coada antes de entrar na reserva, para que alguns corpusculos estranhos naõ alterassem o movimento della dentro dos conductores. Além disso de espaço em espaço abrimos nos mesmos conductores alguns buracos pequenos, para facilitar a sahida do ar interior, os quais depois se tapavaõ com cera. Assim, observando cada hum dos conductores por si, depois que o fluxo tinha adquirido toda a sua plenitude, e dando a cada hum delles differentes comprimentos de 30 até 180 pés, achámos os resultados seguintes.

Altu-

Altura constante da agua acima do eixo dos conductores.	Comprimento dos conductores.	Producto do conductor de 16 linhas de diametro.	Producto do conductor de 2 pollegadas de diametro.
Pés	*Pés*	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
1	30	2778	7680
1	60	1957	5564
1	90	1587	4534
1	120	1351	3944
1	150	1178	3486
1	180	1052	3119
2	30	4066	11219
2	60	2888	8190
2	90	2352	6812
2	120	2011	5885
2	150	1762	5232
2	180	1583	4710

378 Se buscarmos os productos, que dariaõ dous pequenos tubos addicionais do mesmo calibre que os conductores precedentes, acharemos que debaixo de hum pé de altura o tubo de 16 linhas de diametro daria 6330, e o de 2 pollegadas 14243 pollegadas cubicas de agua; e que debaixo de 2 pés de altura o primeiro tubo daria 8939, e o segundo 20112 pollegadas cubicas de agua. Comparando estes resultados com os da Taboa precedente, conheceremos de hum modo approximado a rasaõ em que diminue o producto dos conductores á medida que cresce o seu comprimento.

379 Assim veremos, que o producto de hum tubo de comprimento consideravel he muito menor do que devia ser, se a agua naõ encontrasse resistencia no attrito contra as paredes delle, mas conservasse sem alteraçaõ alguma a sua velocidade inicial. Esta resistencia varía conforme o comprimento dos tubos, a materia de que saõ feitos, o modo com que saõ polidos, a sua grossura, e a altura das reservas. Quando a altura da reserva he a mesma, e os tubos da mesma grossura, e materia, os produ-

productos diminuem á medida que elles ſaõ mais compridos. Alguns autores dizem, que a velocidade da agua diminue, conforme a ordem dos termos de huma progreſſaõ arithmetica, ſendo o primeiro delles a velocidade inicial com que a agua entra por huma extremidade do conductor, e o ultimo a velocidade com que ſahe pela outra. Aſſim havia de ſer, ſe todos os fios da columna fluida padeceſſem huma fricçaõ immediata contra as paredes do tubo, porque em tempos iguais encontrariaõ obſtaculos iguais, que lhes fariaõ perder gráos de velocidade tambem iguais. Mas ſomente os fios laterais encontraõ huma reſiſtencia immediata, os quais a communicaõ cadavez menor aos outros até o centro da columna; e por iſſo os fios laterais, e centrais naõ ſaõ retardados todos pela meſma lei.

380 As experiencias precedentes podem ſervir para determinar de hum modo approximado a lei, pela qual diminuem os productos dos conductores em raſaõ do ſeu comprimento. Porque tomando a recta AG (Fig. 111.) para repreſentar hum dos noſſos tubos, e dividindo-a em ſeis partes iguais AB, BC, CD, DE, EF, FG, ſupponhamos que os productos em A, B, C &c ſaõ repreſentados pelas ordenadas AH, BI, CK &c, e pelos pontos H, I, K &c façamos paſſar a curva $HIKLMNO$. Aſſim, ſendo os productos ligados entre ſi pela *Lei de continuidade*, que tem lugar em toda a natureza, qualquer ordenada PQ tomada de huma ou outra parte do ponto G, repreſentará o producto correſpondente ao ponto P.

381 Tomando pois huma abſciſſa qualquer $AP = x$, e a ſua ordenada $PQ = y$, ſupponhamos que a natureza da curva ſe exprime pela equaçaõ $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, que coincide ſenſivelmente com a verdadeira curva, quando os intervallos AB, BC ſaõ pequenos. Os coefficientes a, b, c &c ſe determinaráõ, obſervando que $x = 0$ dá $y = AH$, $x = AB$ dá $y = BI$ &c.

Por exemplo: Sendo AH, BI &c os productos que dá o conductor de 16 linhas de diametro debaixo de hum pé de altura, e tomando $AB = BC$ &c $= 1$, iſto he, tomando 30 pés por unidade de medida das abſciſſas, teremos eſtas ſete equações do primeiro gráo.

$$a = 6330$$
$$a + b + c + d + e + f + g = 2778$$
$$a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f + 64g = 1957$$
$$a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243f + 729g = 1587$$
$$a + 4b + 16c + 64d + 256e + 1024f + 4096g = 1351$$
$$a + 5b + 25c + 125d + 625e + 3125f + 15625g = 1178$$
$$a + 6b + 36c + 216d + 1296e + 7776f + 46656g = 1052,$$

pelas quais se determinaráõ as quantidades a, b, c, d, e, f, g; e substituindo os seus valores na equaçaõ $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, por ella conheceremos o producto y, que corresponde a qualquer comprimento do tubo x.

382 Igualmente se póde achar x em y, ou pelo methodo inverso das series, ou construindo huma curva, que tenha os y por abscissas, e os x por ordenadas. Mas estes calculos, ainda que muito faceis, e muito approximados, naõ saõ applicaveis á pratica ordinaria, na qual se requerem operações prontas, fundadas em regras, que se conservem facilmente na memoria; ventagem, que muitas vezes se procura, desprezando a exactidaõ rigorosa nos mesmos casos, em que ella se póde haver. Entaõ naõ há outro meio, senaõ o de recorrer a algumas experiencias, que naõ estejaõ longe do caso proposto, como abaixo mostraremos.

383 Sendo a altura da reserva constante, e os conductores da mesma materia, e de comprimentos iguais o de menor diametro dá sensivelmente menos á proporçaõ que o maior; porque relativamente á superficie do orificio, pelo qual sahe a agua, ha mais fricçaõ no primeiro que no segundo.

384 Quanto he maior a altura da reserva a respeito do mesmo conductor, tanto he menor a diminuiçaõ que á proporçaõ se experimenta no producto; porque sendo a fricçaõ proporcional á velocidade, ou á raiz quadrada da altura da reserva, quanto maior for a altura, tanto será menor á proporçaõ o effeito da mesma fricçaõ.

385 He facil de conceber, que o comprimento de hum conductor póde ser tal, que a agua naõ tenha a força necessaria para vencer a fricçaõ, ou que o effuxo naõ se faça senaõ em muito tempo, e gota a gota. Assim o experimentámos com os dous tubos referidos, a 180 pés da reserva, debaixo da altura de 16 linhas. Donde conclui-

cluiremos, que para haver hum desaguamento sensivel, e continuo, he necessaria huma altura da reserva, ou huma declividade do conductor de 20 linhas por 180 pés, ou de $\frac{2}{3}$ de linha por toesa.

386 Quando os conductores saõ verticais, ou inclinados, a gravidade accelera a velocidade do fluido que corre por elles. Da combinaçaõ desta força com a pressaõ da reserva, e com a fricçaõ resultaõ os effeitos, que agora examinaremos.

Seja *MR* (Fig. 112.) hum tubo cylindrico vertical, applicado ao fundo de huma reserva *AD* constantemente cheia até a altura *MK*. He evidente, que sendo a velocidade do fluido ao entrar por *MN* devida á altura *MK*, se cada particula fosse hum corpo insulado, e livre, sujeito unicamente á acçaõ da gravidade, em chegando a qualquer ponto *Q* da vertical *MQ*, teria huma velocidade devida á altura *KQ*. Mas ligando as particulas humas com as outras em virtude da sua viscosidade natural, em quanto formaõ huma colunna continua que enche a capacidade do tubo, devem necessariamente mover-se ao longo do espaço *MQ* com a mesma velocidade. Logo, sendo a velocidade produzida pela pressaõ em *MN* sempre a mesma, e recebendo cada particula tantas mais impressões da gravidade quanto mais se aparta de *MN*, he manifesto que as particulas inferiores devem accelerar as superiores por huma acçaõ consecutiva, para tomarem todas a mesma velocidade.

A maior parte dos Autores de Hydraulica pertendem que esta acceleraçaõ se faz de maneira, que a velocidade em qualquer ponto *Q* ou *O* he sempre como a raiz quadrada da altura correspondente *KQ* ou *KO*. Isto he sensivelmente verdadeiro, quando os tubos saõ pequenos, como acima dissemos (n. 294.), porém naõ quando saõ de consideravel comprimento, porque a adherencia reciproca das particulas, pela qual se communica a referida acceleraçaõ, tem seus limites, passados os quais se desunem as particulas, ou começa a colunna a estreitar-se até acabar em hum fio, ao qual he indifferente que o tubo seja ou naõ seja produzido para diante. Naõ he pois a asserçaõ exacta em geral; e muito menos, se attendertendermos ao effeito da fricçaõ, como logo veremos.

387 O que temos dito dos tubos verticais, igualmente ſe applica aos inclinados (Fig. 113.). A velocidade inicial em *M N* he a meſma, ſendo as alturas das reſervas iguais; e pela theorica dos planos inclinados, a velocidade produzida pela gravidade no eſpaço *M R* he igual á que produziria pela vertical *O R*. Aſſim, ſendo o tubo *M I* pequeno, ſerá o producto do orificio em *I* proporcional á raiz quadrada da altura correſpondente K *I*. Mas, ſendo o tubo muito comprido, as meſmas raſões que alteraõ eſta lei nos tubos verticais, fazem tambem que naõ tenha lugar nos inclinados.

388 Como ſeria difficil o fazer as experiencias com tubos verticais muito compridos, tomamos o partido de ſervirnos de hum tubo inclinado por huma direcçaõ bem rectilinea *M R*, o qual tinha 16 linhas de diametro, e 177 pés de comprimento, ſendo dividido em tres partes iguais *M I*, *I G*, *G R* cada huma de 59 pés, e formando a hypotheruſa de hum triangulo rectangulo, a qual era para a altura *O R* como 2124 para 241.

Aſſim, conſervando ſempre a agua da reſerva *AD* na altura conſtante de 10 pollegadas acima do centro do orificio ſuperior do tubo *M N*, achámos 1º que no ponto *I* com o comprimento de 59 pés dava 5808 pollegadas cubicas em hum minuto. 2º que em *G* na diſtancia de 118 pés dava 5801 pollegadas cubicas tambem por minuto. 3º que em *R* na diſtancia de 177 pés dava 5795 pollegadas cubicas no meſmo tempo.

389 Se foſſe hum tubo addicional de duas pollegadas de comprimento daria 5779 pollegadas cubicas em hum minuto (n. 301. 302.). Pelas experiencias precedentes ſe vê, que os productos ſaõ hum pouco maiores em cada ponto de diviſaõ; mas eſte exceſſo vai diminuindo á medida que o tubo he mais comprido; e he facil de ver, que os productos effectivos eſtaõ muito longe de ſerem na raſaõ ſubduplicada das alturas K *I*, *H G*, *L R*, iſto he, na raſaõ

$\sqrt{1,889}$ e $\sqrt{2,778}$. dos numeros 1, $\cancel{\sqrt{2}}$, $\cancel{\sqrt{3}}$.

390. Diminuindo hum pouco o angulo *R M O*, os productos em *I*, *G*, *R*, chegariaõ mais para o producto junto á origem *M N*. Daqui vem huma obſervaçaõ, que póde ſer util na pratica. Qualquer que ſeja o comprimento de hum tubo ſemelhante ao precedente, dará ſenſivelmen-

te

te na extremidade o mesmo producto que daria na origem, quando a declividade OR for a oitava ou nona parte do comprimento MR, ou quando o angulo RMO for proximamente de $6^{\circ} 31'$; porque entaõ a fricçaõ destroe a velocidade que provém da acçaõ da gravidade ao longo do tubo. Esta determinaçaõ talvez naõ terá lugar em todos os tubos, e em differentes alturas das reservas. Mas por aqui se póde fazer idea da inclinaçaõ, que convem dar aos tubos, quando por esse meio se quizer compensar a diminuiçaõ que resulta do attrito.

391 A este respeito observámos tambem, que tapando o orificio QR, pelos furos n, p, q destinados a facilitar a sahida do ar, se formavaõ repuxos que se elevavaõ até os pontos y, x, s conforme as leis explicadas no Capitulo precedente. Mas destapando o orificio QR, sem tapar os referidos furos, os repuxos cessavaõ, e o desaguamento por QR passados alguns segundos se fazia regular e permanente. Donde se vê, que a agua cessa entaõ de comprimir a parede superior do tubo, e que a velocidade instantanea produzida pela gravidade relativa da columna $MNQR$ he igual, ao menos, á velocidade destruida a cada instante pela resistencia da fricçaõ.

392 Passemos á consideraçaõ dos conductores curvilineos; e comparando os productos delles com os dos tubos rectilineos, examinemos se a curvatura produz alguma diminuiçaõ na velocidade.

Para isso mandámos fazer de chumbo laminado de huma linha de grossura hum tubo ON (Fig. 114.) de 50 pés de comprimento, e de huma pollegada de diametro interior bem calibrado. Na extremidade O soldámos outro tubo M de duas pollegadas de diametro, que communicava com a caixa da reserva, e era guarnecido de hum registo R, furado interiormente de hum buraco de 18 linhas de diametro, por meio do qual se permittia, ou impedia o desaguamento; e no tubo ON se tinhaõ aberto alguns furos E, F, G destinados a deixar sahir o ar, que a agua traz sempre comsigo. Isto posto observámos

I. Que posto o tubo rectilineo ON horizontalmente, e conservada a agua da reserva na altura constante de 4 pollegadas acima do eixo TV, sahiaõ pela extremidade N 576 pollegadas cubicas de agua em hum minuto.

II. Que conservando o mesmo tubo na mesma posiçaõ, e dando á agua da reserva a altura de hum pé acima do eixo *T V*, sahiaõ por *N* 1050 pollegadas cubicas no mesmo tempo.

III. Que encurvando o mesmo tubo, como se representa nas fig. 115 e 116, e sendo disposto o plano da curva *O Q S Z X Y N* horizontalmente (Fig. 115.), e conservando a agua da reserva na altura constante de 4 pollegadas acima da linha *T V*, sahiaõ por *N* 540 pollegadas cubicas em hum minuto.

IV. Que conservando o mesmo tubo na mesma posiçaõ, e dando á agua da reserva a altura constante de hum pé, sahiaõ por *N* 1030 pollegadas cubicas no mesmo tempo.

V. Que dispondo o plano do mesmo tubo verticalmente de maneira que a extremidade *N* ficasse na horizontal *T V*, e nenhum dos cotovelos se elevasse acima da mesma linha, conservando a reserva na altura de 4 pollegadas, e sendo tapados os furos *E*, *F*, *G* &c; o ar do conductor embaraçava o movimento da agua, e naõ começou a apparecer em *N*, senaõ depois que se abriraõ huns pequenos furos nos cotovelos superiores. E depois de bem estabelecido o desaguamento, sahiaõ por *N* 520 pollegadas cubicas de agua por minuto.

VI. Que conservando o mesmo tubo na mesma posiçaõ, e dando á agua da reserva a altura de hum pé, sahiaõ 1028 pollegadas cubicas no mesmo tempo.

393 Comparando a experiencia I com a III, e a II com a IV, vemos que as sinuosidades horizontais diminuem o producto que daria o mesmo tubo se fosse rectilineo. E porque a fricçaõ deve ser sensivelmente a mesma em ambos os casos, segue-se que a percussaõ da agua contra os angulos do tubo he a que faz diminuir a velocidade, e conseguintemente o producto. He verdade, que se a curvatura fosse perfeita, isto he, se o angulo comprehendido por dous lados consecutivos da curva differisse infinitamente pouco de 180°, o producto do conductor sinuoso deveria ser o mesmo que o do rectilineo.

Porque supponhamos, que qualquer corpo corre pelo tubo curvilineo horizontal *O Q S Z N* (Fig. 117.) em virtude de hum impulso primitivo recebido em *O*, e que em hum instante descreve o elemento da curva *Q q*. He manifesto, que no instante seguinte descreveria *q r* igual

a

a Qq, e na meſma direcçaõ. Repreſentando pois por qr a velocidade com que ſe moveria, ſe foſſe livre, reſolva-ſe em duas, huma qf perpendicular á curva, a qual ſerá deſtruida, e a outra qb na direcçaõ do elemento conſecutivo, a qual ſe conſervará. Deſcrevendo do ponto q com o intervallo qb o pequeno arco bt, ſerá tr a diminuiçaõ inſtantanea da velocidade do movel. Porém, ſendo o angulo rqb infinitamente pequeno, he tb infinitamente pequeno em comparaçaõ de qt, e temos por outra parte $qt:tb::tb:tr$. Logo tr he infinitamente pequeno da ſegunda ordem a reſpeito de qt, e com mais raſaõ a reſpeito de qr. Logo naõ perde o movel em qualquer ponto q, ſenaõ huma parte infinitamente pequena da ſegunda ordem da ſua velocidade. Donde concluiremos, que no eſpaço finito $OQSZN$ naõ terá perdido, ſenaõ huma parte infinitamente pequena da primeira ordem da ſua velocidade inicial finita, e aſſim deverá dar o meſmo producto como ſe foſſe rectilineo.

Se pelas experiencias pois achamos differença ſenſivel entre eſtes productos, he porque a velocidade perdida em cada ponto q naõ he infinitamente pequena da ſegunda ordem, e conſeguintemente porque os angulos rqb naõ ſaõ infinitamente pequenos. A pezar de toda a diligencia que ſe ponha em ſuavizar as voltas de hum tubo, naõ ſe póde chegar a huma curvatura rigoroſa, e ſempre haverá diminuiçaõ ſenſivel no producto, procedida da alliſaõ do fluido contra os lados do polygono. Póde oppor-ſe, que encurvando o noſſo tubo fizemos eſtreitar alguma couſa o ſeu diametro; mas eſta alteraçaõ he muito pequena, para produzir toda a differença que achamos nos productos.

394 Comparando a experiencia I com a V, e a II com a VI, vemos tambem que as ſinuoſidades verticais fazem diminuir os productos. Iſto provém igualmente da imperfeiçaõ da curvatura. Porque as colunnas OQ e SQ, SZ e XZ, XY e NY (Fig. 116.), fazem equilibrio entre ſi duas a duas (n. 35.). Donde ſe ſegue, que preſcindindo de toda a reſiſtencia, a agua ſe moveria pelo conductor curvilineo $OQSZXYN$, como ſe elle foſſe rectilineo. Mas no primeiro caſo a alliſaõ da agua contra os cotovelos do tubo ſe ajunta á fricçaõ, e aſſim deve o producto ſer menor do que no ſegundo.

395 Com-

395 Comparando em fim a experiencia III com a V; e a IV com a VI, achamos que as finuofidades horizontais faõ menos nocivas ao movimento da agua do que as verticais. Efta differença fe entenderá, confiderando que nas verticais he o movimento da agua compofto de hum horizontal primitivo recebido em *O*, e de outro vertical da gravidade, que he accelerado nas partes *OQ*, *SZ*, *XY*, e retardado nas partes *SQ*, *XZ*, *NY*; e que da combinaçaõ delles com a refiftencia da fricçaõ, e das voltas do tubo, póde refultar hum movimento differente do que tem lugar nas finuofidades horizontais, onde naõ ha mais que a impulfaõ primitiva combinada com a fricçaõ, e com a percuffaõ contra os lados do tubo. A figura do mefmo tubo deve influir alguma coufa nefte effeito.

396 Daqui refponderemos a huma queftaõ de pratica. *Havendo de conduzir-fe agua de hum ponto para outro, feparados por montes e valles, pergunta-fe qual he melhor: fe conduzillas por hum plano vertical na direcçaõ do terreno, ou rodear os montes, na fuppofiçaõ de fer igual o efpaço corrido pela agua em ambos os cafos?* Para hum tubo femelhante ao noffo, o fegundo módo he mais ventajofo, quando a altura da referva he pouco confideravel, como fe vê pelas experiencias III e V; mas quando a altura da referva naõ he menor que 1 pé, a ventagem defvanece quafi inteiramente, como fe vê pelas experiencias IV e VI.

397 Nos conductores longos que tem fubidas e defcidas, póde o ar mifturado com a agua accumular-fe nas partes eminentes, e embaraçar em todo ou em parte o movimento da agua. Por exemplo: no tubo *OMNQK* (Fig. 118.), cujo plano he vertical, correndo a agua de *O* para K, póde no fim de certo tempo encher-fe de ar o efpaço *DEN*, e impedir a paffagem da agua. Para prevenir efte inconveniente, he neceffario foldar nas partes eminentes *N*, K &c huns canudos pequenos de chumbo, guarnecidos de regiftos, que fe fechaõ depois que o ar tem fahido inteiramente, e o curfo da agua eftá bem eftabelecido.

398 M. Couplet (*Mem. de l' Acad.* 1732.) fez varias experiencias em grande fobre efta materia, examinando os canos que conduzem as aguas a differentes lugares em Paris. Como podem fervir de muito na pratica, ajuntallas-hemos com as que havemos referido na Taboa feguinte.

DIAME-

Diametros, comprimentos, e qualidades dos conductores.	Alturas das reservas acima do orificio da sahida em pés e pollegadas.	Relaçaõ entre o producto effectivo, e o q̃ teria lugar naõ havendo resistencia.
Conductor de chumbo, rectilineo, horizontal, de 1 pollegada de diametro, e 50 pés de comprimento.	0 4	$\frac{1}{3,55}$
	1 0	$\frac{1}{3,18}$
O mesmo conductor, com muitas sinuosidades horizontais.	0 4	$\frac{1}{3,78}$
	1 0	$\frac{1}{3,43}$
O mesmo conductor, com as mesmas sinuosidades, mas postas verticalmente.	0 4	$\frac{1}{3,93}$
	1 0	$\frac{1}{3,44}$
Conductor de folha de flandes, rectilineo, horizontal, de 16 linhas de diametro, e 180 pés de comprimento.	1 0	$\frac{1}{6,01}$
	2 0	$\frac{1}{5,64}$
Conductor de folha de flandes, rectilineo, horizontal, de 2 pollegadas de diametro, e 180 pés de comprimento.	1 0	$\frac{1}{4,57}$
	2 0	$\frac{1}{4,27}$
Conductor da mesma materia, de 16 linhas de diametro, de 177 pés de comprimento, com a inclinaçaõ de $\frac{241}{2124}$ do seu comprimento.	20 11	$\frac{1}{5}$
O mesmo conductor, reduzido a 118 pés de comprimento.	13 $4\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
O mesmo conductor, reduzido a 59 pés de comprimento.	6 $8\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2,82}$

Diametros, comprimentos, e qualidades dos conductores.	Alturas das reservas acima dos orificios da sahida em pés e pollegadas.	Relação entre o producto effectivo, e o q teria lugar, naõ havendo resistencia.
Conductor quasi inteiramente de ferro, de 4 pollegadas de diametro, e de 297 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais, e verticais.	0 9	$\frac{1}{28,5}$
	1 9	$\frac{1}{26,53}$
	2 7	$\frac{1}{25,79}$
Conductor da mesma materia, de 6 pollegadas de diametro, e 285 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais e verticais.	0 3	$\frac{1}{12,35}$
	0 $5\frac{1}{4}$	$\frac{1}{11,37}$
Conductor parte de barro, parte de chumbo, de 5 pollegadas de diametro, e 1170 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais e verticais.	0 $5\frac{7}{12}$	$\frac{1}{23,10}$
	0 $11\frac{1}{3}$	$\frac{1}{20,98}$
	1 $4\frac{3}{4}$	$\frac{1}{19,49}$
	1 $9\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18,78}$
	2 1	$\frac{1}{18,46}$
Conductor de ferro de 1 pé de diametro, e 600 toesas de comprimento, com sinuosidades horizontais e verticais.	12 $1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10,08}$
Conductor de ferro de 18 pollegadas de diametro, e 600 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais e verticais.	12 $1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6,05}$
Conductor de ferro de 18 pollegadas de diametro, e 790 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais e verticais.	4 $7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10,11}$
Conductor de ferro de 1 pé de diametro, e 2340 toesas de comprimento, com muitas sinuosidades horizontais e verticais.	20 3	$\frac{1}{19,34}$

399 Esta Taboa offerece muitos termos de comparaçaõ entre os productos effectivos e os que teriaõ lugar, se naõ fosse a resistencia da fricçaõ e da figura dos conductores, conforme os comprimentos e diametros delles, e as alturas das reservas. Quando pois se quizer conduzir a agua de huma reserva para hum ponto distante, e mais baixo que ella, procurar-se-ha na Taboa o caso mais analogo ao proposto, e assim se determinaráõ proximamente as dimensoẽns que convem ao conductor. Expliquemos isto com hum exemplo.

400 Seja *ADCB* huma mãi d'agua (Fig. 119.), que recebe 40000 pollegadas cubicas de agua por minuto, a qual se ha de conduzir pelo cano *GEDO* para o ponto *O*. Supponhamos, que a maior altura *AH* ou *FO* da agua da reserva acima do orificio *O* he de 4 pés; que o cano, attendidas as circunstancias do terreno, deve ser de 400 toesas; e que se haõ de suavizar quanto for possivel as sinuosidades. Isto posto, pergunta-se o diametro que deve ter, para conduzir ao ponto *O* toda a agua que entra na reserva.

Primeiramente acharemos, que para hum tubo addicional de poucas pollegadas dar neste caso em hum minuto 40000 pollegadas cubicas de agua devia ter 28, 54 linhas de diametro (n. 303.). Mas como o conductor *GEDO* ha de ter 400 toesas de comprido, pela Taboa precedente se vê, que no caso de naõ se lhe dar maior diametro, sómente produziria a oitava ou nona parte da agua que convinha. Supponhamos pois, que tendo o conductor proposto 28, 54 linhas de diametro dá 5000 pollegadas cubicas por minuto sómente; e imaginemos que a carga ou pressaõ total *AH* ou *FO* he composta de duas partes, huma *AN* ou *FQ* que faria passar 5000 pollegadas cubicas de agua por hum tubo de 28, 54 linhas de diametro izento de fricçaõ, e a outra *NH* ou *QO* que he empregada em vencer a resistencia da fricçaõ. Entaõ buscaremos o diametro que deveria ter outro tubo izento tambem de fricçaõ, para que debaixo da altura FQ ou *AN* désse 40000 pollegadas cubicas de agua por minuto, e acharemos que seria de 80, 73 linhas. Donde se vê, que se a resistencia da fricçaõ em dous tubos igualmente compridos de 28, 54 e 80, 73 linhas de diametros, fosse representada pela carga *NH*, o conductor proposto *GEDO* deveria ter 80, 73 linhas de diametro. Mas a resistena resistencia he hum pouco menor á proporçaõ no tubo de maior diametro (n.383.) . Sem embargo a differença naõ deve aqui ser muito sensivel , e poderemos sem erro notavel dar ao conductor o diametro de 6 pollegadas e 8 linhas.

Todos estes calculos saõ admissiveis na pratica , em falta de methodos exactos ; e servem para se evitar , ao menos em grande parte , o acaso de fazer o conductor muito estreito relativamente ao producto que deve dar , ou demasiadamente largo com despeza superflua. Mas será bem tomar no calculo a altura da reserva hum pouco menor do que ella póde ser , porque succedendo determinar-se o diametro do conductor alguma cousa menor do que convem , tenha a agua lugar para se levantar na reserva , e com a maior altura fazer desaguar sempre pelo conductor toda a quantidade que se pertende.

Da pressaõ que a agua em movimento exercita contra as paredes dos conductores.

401 SEja hum tubo cylindrico horizontal *EN* (Fig. 120.) applicado á reserva *ADCB* constantemente cheia até *EB* ; e supponhamos que a agua se move livremente sem experimentar resistencia alguma. He certo , que exceptuando a pressaõ que nasce do pezo da columna de agua *EN* , o tubo naõ experimentará força alguma ; porque tendo a velocidade da agua huma direcçaõ livre e horizontal , naõ póde resultar della força alguma contra as paredes do tubo.

402 Isto se confirma pela experiencia. Porque tendo o tubo horizontal *EN* 3 pés de comprido , e 9 até 10 linhas de diametro , e podendo andar em roda para que o pequeno furo *M* aberto no meio delle se pudesse virar para cima , para baixo , e para os lados ; observámos , que tapando a extremidade *N* , e conservando a reserva na altura de 4 pés acima do tubo , sahia por *M* hum repuxo , que tinha a altura , ou amplitude determinada no Capitulo precedente. Mas destapando o orificio *N* cessava inteiramente o repuxo , e somente quando o furo *M* estava para baixo destillava alguma cousa pelas bordas delle.

delle. He manifeſto, que a ceſſaçaõ do repuxo demonſtra huma ceſſaçaõ de preſſaõ contra as paredes do tubo.

403 Imaginando ſempre hum tubo horizontal EN (Fig. 121.) applicado a huma grande reſerva $ADCB$, no qual a agua ſe mova ſem experimentar a reſiſtencia da fricçaõ, ſupponhamos que eſtá tapada huma parte da extremidade PN, e que a agua ſahe pelo pequeno orificio pn. Entaõ, ſerá a velocidade de qualquer ſecçaõ vertical da columna do tubo GF para a velocidade da ſecçaõ da veia contrahida qr, como a area da ſecçaõ qr para a da ſecçaõ GF. E porque a velocidade em qr he devida á altura BH, fazendo $BH = b$, o diametro do tubo $= D$, o do orificio contrahido $qr = d$, teremos a velocidade do fluido ao longo do tubo EN repreſentada por $\frac{d^2 \sqrt{b}}{D^2}$. Porém cada ponto da camada, que a cada inſtante cobre o fundo PN, tende a mover-ſe com a velocidade $\sqrt{b}$, e realmente naõ ſe move ſenaõ com a velocidade $\frac{d^2 \sqrt{b}}{D^2}$; logo deve evidentemente comprimir cada hum dos pontos de Pp ou Nn com huma força igual á differença das preſſões que produzem as velocidades $\sqrt{b}$ e $\frac{d^2 \sqrt{b}}{D^2}$. Eſta preſſaõ ſe diſtribue igualmente a todos os pontos da maſſa EN, a qual actûa conſeguintemente contra as paredes do tubo, como ſe eſtiveſſe comprimida por huma columna de agua que tiveſſe a altura $= b - \frac{d^4 b}{D^4}$.

404 Daqui ſe ſegue, que abrindo no tubo EN hum buraco muito pequeno em comparaçaõ dos orificios PN, pn, a agua ſahirá por elle com huma velocidade devida á altura $b - \frac{d^4 b}{D^4}$. Eſta altura deſvanece quando $d = D$, como já temos viſto (n. 402.); e aſſim fica manifeſto, quanto ſe enganaõ os praticos que julgaõ, que abrindo huma pequena abertura lateral em hum tubo pelo qual corre agua, deve ſahir hum repuxo, que fazendo abſtracçaõ da fricçaõ e da reſiſtencia do ar ſe levante á altura devida á velocidade da agua ao longo do tubo. He

tanto

tanto pelo contrario, que ha casos em que pela dita abertura naõ sahirá agua nenhuma.

405 Nos casos em que sahe a agua pelo pequeno orificio lateral, he facil de calcular o seu producto em hum tempo dado. Porque sendo os productos de hum orificio no mesmo tempo na rasaõ subduplicada das alturas das reservas, e sendo Q a quantidade de agua que daria o orificio no tempo dado debaixo da altura b, e q a quantidade actual que produz, teremos $Q : q :: \sqrt{b} : \sqrt{\left(b - \frac{d^4 b}{D^4}\right)}$, e $q = \frac{Q}{D^2}\sqrt{\left(D^4 - d^4\right)}$. Assim, determinando Q pelo n° 302, immediatamente viremos no conhecimento de q.

406 Esta theorica igualmente tem lugar nos tubos inclinados, com tanto porém que a abertura pn seja muito pequena em comparaçaõ de PN. Se esta condiçaõ naõ tivesse lugar, naõ seria entaõ a velocidade ao sahir de pn devida a toda a altura da reserva; e seria necessario começar pela determinaçaõ de b por principios differentes dos que havemos empregado.

407 A mesma theorica póde servir para determinar, ao menos proximamente, as espessuras que devem ter os conductores guarnecidos de bocais estreitos nas extremidades, para resistirem á pressaõ da agua que conduzem. Porque sendo a pressaõ, que sofre cada ponto da circumferencia de qualquer secçaõ do nosso tubo EN representada por $b - \frac{d^4 b}{D^4}$, he evidente que para sustentar esta pressaõ deve ter a grossura, que seria necessaria para resistir á pressaõ de huma agua estagnada debaixo da altura $b - \frac{d^4 b}{D^4}$; e a questaõ se resolverá como no n.° 54.

408 Na pratica fazem-se sempre os tubos mais fortes do que se acharia pela theorica precedente, para resistirem a muitos accidentes, de que no calculo se naõ faz conta. Eisaqui as grossuras, que ordinariamente se daõ aos tubos de chumbo, e de ferro, relativamente aos seus diametros, ou tenhaõ bocais nas extremidades, ou naõ.

Tubos

Tubos de chumbo		*Tubos de ferro*	
Diametros em pollegadas	Espessuras em linhas	Diametros em pollegadas	Espessuras em linhas
1	2,5	1	1
1,5	3	2	3
2	4	4	4
3	5	6	5
4,5	6	8	6
6	7	10	7
7	8	12	8

O pezo destes tubos he sempre facil de se achar, tendo na lembrança que o pé cubico de chumbo peza 828 libras, e o de ferro 580 proximamente. Para os canos de páo e de barro, naõ ha regra fixa.

409 Supponhamos agora, que a agua se move pelo tubo horizontal *EN* (Fig. 120.) sujeita á resistencia da fricçaõ, estando a extremidade *N* toda aberta. Imaginando, que a fricçaõ contrahe a colunna fluida ao sahir por *N*, parece que poderemos determinar a pressaõ lateral do tubo pela formula do n.° 403, substituindo o tubo da Fig. 121 em que se naõ suppoem fricçaõ ao da Fig. 120 em que se suppoem, e entendendo que *D* representa o diametro verdadeiro do tubo, e *d* o diametro reduzido e contrahido pela fricçaõ. Mas consultemos sobre isso a experiencia.

410 Servindonos do conductor de 16 linhas de diametro, de que já fizemos mençaõ (n. 377), abrímos-lhe hum orificio lateral de $3\frac{1}{4}$ linhas de diametro, e observámos a agua que dava por elle em hum minuto, debaixo de differentes alturas da reserva, e dando ao conductor differentes comprimentos, como aqui se mostra.

Compri-

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo da altura de 1 pé	Productos do mesmo orificio debaixo da altura de 2 pés
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	171	240
60	186	256
90	190	261
120	191	264
150	193	265
180	194	266

Obſervámos tambem, que tapando a extremidade do conductor debaixo da altura de 1 pé ſahiaõ pelo orificio lateral 196 pollegadas cubicas de agua; e debaixo da altura de 2 pés, 274.

411 Agora, em virtude da ſuppoſiçaõ precedente (n. 409.), repreſentando d o diametro pelo qual a agua ſe julga ſahir na extremidade do tubo, e D o diametro verdadeiro do meſmo tubo, corregido ſomente em quanto á contracçaõ ordinaria da veia; eſtá claro, que ſerá o producto na extremidade do tubo alterado pela fricçaõ para o que teria lugar naõ havendo fricçaõ, como d^2 para D^2. Aſſim, pelo que acima temos viſto (n. 377. 378.), na origem do tubo quando a reſerva eſtá em hum pé de altura, ſerá $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ou $d = D$, a 30 pés da reſerva $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2778}{6330}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1957}{6330}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1587}{6330}$; a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1351}{6330}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1178}{6330}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1052}{6330}$. Do meſmo modo, quando a reſerva eſtá em 2 pés de altura, ſerá na origem do tubo $\frac{d^2}{D^2} =$

1,

1, ou $d = D$, a 30 pés de comprimento $\frac{d^2}{D^2} = \frac{4066}{8939}$, a 60 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2888}{8939}$, a 90 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2352}{8939}$, a 120 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2011}{8939}$, a 150 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1762}{8939}$, e a 180 pés $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1583}{8939}$.

412 Isto posto, na formula $q = \frac{Q}{D^2} \sqrt{(D^4 - d^4)}$ (n. 405.), ou $q = Q \sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$, quando a altura da reserva he de 1 pé temos $Q = 196$; e quando a altura he de 2 pés, $Q = 274$. Substituindo pois os valores de $\frac{d^2}{D^2}$ que acabamos de determinar em ambos os casos, acharemos os productos do orificio lateral, como se mostraõ na Taboa seguinte, os quais saõ taõ concordes com os observados, que naõ he possivel esperar mais exactidaõ em semelhantes indagações.

Comprimentos do conductor	Productos do orificio lateral debaixo de 1 pé de altura	Productos do mesmo orifico debaixo de 2 pés de altura
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
30	176	244
60	186	259
90	190	264
120	191	267
150	192	268
180	193	269

413 Daqui se segue hum meio simples de determinar o producto de hum tubo longo horizontal pelo producto de hum orificio lateral. Seja x a rasaõ entre o producto effectivo do tubo e o que daria naõ havendo fricçaõ; isto he, $x = \frac{d^2}{D^2}$; e a formula $q = Q \sqrt{\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$ se redu-

zirá

zirá a $q = Q\sqrt{(1 - xx)}$, donde se tira $x = \sqrt{(1 - \frac{q^2}{Q^2})}$.

Supponhamos, por exemplo, que o conductor tem 2 pollegadas de diametro, e que a reserva tem 3 pés de altura acima do eixo delle; que em qualquer ponto das paredes do mesmo tubo se abrio hum orificio lateral de 6 linhas de diametro, e que este dá 1000 pollegadas cubicas de agua por minuto, correndo a agua pelo conductor. Se a extremidade do conductor estivesse tapada, acharemos, que o mesmo orificio lateral deveria produzir 1178 pollegadas cubicas em hum minuto (n. 302.). Assim temos $Q = 1178$, $q = 1000$; e conseguintemente será $x = 0,5289$. Porém o conductor deveria dar pela sua extremidade, se naõ fosse a fricçaõ, 24504 pollegadas cubicas por minuto (n. 301. 302.). Logo será o producto effectivo $= 24504 \times 0,5289 = 12952$ pollegadas cubicas.

Tudo isto he applicavel aos tubos inclinados rectilineos, ou curvilineos, quando se póde julgar que a fricçaõ diminue consideravelmente o orificio da sahida. Mas he necessario advertir, que o orificio lateral deve abrir-se bem perpendicularmente á parede do tubo; porque naõ sendo assim, o producto delle naõ seria sómente effeito da pressaõ do fluido contra as paredes do tubo, mas tambem do movimento do mesmo fluido ao longo do conductor, como he facil de entender reparando na abertura lateral *M* do conductor *AMB* (Fig. 122.).

CAPITULO V.

Do movimento das aguas conduzidas por quaesquer canais.

414 OS canais, de que agora tratamos, saõ abertos pela parte superior, e daõ á superficie da agua a liberdade de se levantar, ou abaixar dentro delles. Em virtude desta liberdade póde o fluido tirar do seu proprio pezo huma velocidade, que se combina com a que lhe resta do impulso inicial; e a fricçaõ naõ póde seguir exactamente as mesmas leis, que nos tubos conductores, em que a agua he comprimida de todos

os lados. Muito he o que se tem escrito sobre esta materia, na qual primeiro exporemos as nossas indagações, e depois referiremos os meios principais, que diversos Autores tem proposto, para medir a velocidade das aguas correntes.

Experiencias, e reflexões sobre a velocidade da agua em canais rectangulares.

415 QUando hum fluido passa de huma reserva para hum canal por huma abertura que naõ he muito grande, cada molecula tende a mover-se ao primeiro instante com a velocidade devida á altura da reserva; e se fosse hum corpo solitario e livremente movel pelo canal, conservaria esta velocidade inicial ao longo delle, e além disso adquiriria outra pela acçaõ da gravidade, no caso de ser o canal inclinado. Mas a cada instante sahe pela abertura huma massa de moleculas, que obraõ humas contra as outras, e alteraõ os seus movimentos reciprocos. A veia he sujeita á contracçaõ, á fricçaõ, e á resistencia do ar. Todas estas causas influem sobre a velocidade, a qual he difficil de se determinar exactamente, quando o canal he de figura irregular, como abaixo se verá.

416 Para chegarmos pois a resultados simples, e facilmente comparaveis com a theorica, observámos o movimento da agua por hum canal rectangular *EF* de 105 pés de comprido, e aberto por cima (Fig. 123.), cujo fundo era de 5 pollegadas, e a altura de 8 até 9. Este canal estava applicado á face vertical *BC* da reserva *ADCB*, na qual se tinha praticado huma abertura *EC* na direcçaõ das paredes do canal, guarnecida de huma adufa rectangular de cobre, a qual se levantava e abaixava conforme era preciso. Deste modo, o orificio por onde sahia a agua para o canal era hum rectangulo, que tinha constantemente a base horizontal de 5 pollegadas ao livel do fundo da reserva, e a altura maior ou menor, conforme se levantava mais ou menos a adufa.

Dividindo o canal em 5 partes de 21 pés cada huma, procuramos examinar a velocidade da agua por meio de pequenos fragmentos de cortiça; mas logo conhecemos

mos a insufficiencia deste methodo, ao menos quando o canal estava situado horizontalmente. Porque entaõ a agua se entumece á medida que vai caminhando; e lançando o pequeno corpo fluctuante para hum e outro lado, naõ o deixa seguir direitamente o fio da corrente. Recorremos ao meio de lançar na agua materias coloradas, como sangue, carvaõ pilado &c; mas tambem o achámos defeituoso, porque a agua dissolvia facilmente estas materias, e assim havia incerteza na chegada dellas a qualquer ponto das divisões. Em fim reduzimonos a observar os tempos, que gastava a agua em chegar a cada huma das divisões, desde o instante em que se levantava a adufa; e para isso em cada hum dos ditos pontos collocamos huns molinetes pequenos, summamente moveis, que indicavaõ pelo seu movimento a chegada instantanea da agua. He verdade, que deste modo achámos somente a primeira velocidade da agua no canal, e que depois de ser a corrente perfeitamente estabelecida deve a velocidade ser maior. Mas ambas tem entre si huma rasaõ constante, ao menos sensivelmente, como veremos depois em muitos casos, em que huma e outra se podem determinar pela experiencia. Assim, sendo determinada esta rasaõ, pela primeira velocidade se poderá conhecer a velocidade permanente.

Por este meio pois, estando o canal horizontal achámos os resultados seguintes, nos quais a *elevaçaõ da adufa de meia pollegada*, *ou de huma pollegada* quer dizer que o orificio era hum rectangulo de 5 pollegadas de base, e de meia ou huma pollegada de altura; e o sinal + ou − adiante dos segundos indica que no numero delles falta ou abunda huma pequena parte da unidade.

Altu-

Altura constante da agua acima do fundo da reserva em pés e pollegadas	Elevaçaõ da adufa de meia pollegada		Elevaçaõ da adufa de huma pollegada	
	Segundos	*Numero dos pés corridos*	*Segundos*	*Numero dos pés corridos*
3 8	3 +	21	3 −	21
	9 +	42	6 +	42
	17 +	63	11 +	63
	27 +	84	18 +	84
	38 +	105	26	105
7 8	3 −	21	2 +	21
	7	42	5	42
	13 −	63	9	63
	20 −	84	14	84
	28 +	105	20	105
11 8	2	21	2	21
	5 −	42	4	42
	10 −	63	7	63
	16 −	84	11	84
	23 +	105	16 +	105

417 Se diminuirmos cada hum dos termos destas experiencias do que se segue immediatamente, acharemos que em todas ellas os espaços consecutivos de 21 pés cada hum, saõ corridos em tempos, que formaõ sensivelmente huma progressaõ arithmetica. Assim póde facilmente continuar-se a serie, e determinar-se, ao menos proximamente, o tempo que a agua gastaria em correr qualquer numero de pés, se o canal fosse produzido em cada hum dos casos.

418 Para conhecermos o effeito da fricçaõ, calcularemos a velocidade que deveria ter lugar, prescindindo da mesma fricçaõ. O fluido ao sahir do orificio rectangular padece huma contracçaõ, e depois seguindo o fundo e as paredes do canal torna-se a dilatar sensivelmente quanto se tinha contrahido. E porque no mesmo tempo passa igual quantidade de agua pela secçaõ da veia contrahida e por qualquer secçaõ do canal, as velocidades correspondentes nes-

tes dous lugares feráõ na rafaõ de 8 para 5 proximamente. Affim defignando por H a altura da referva, que he a devida á velocidade no ponto da contracçaõ, e por b a altura devida á velocidade da corrente no refto do canal, teremos $\sqrt{H} : \sqrt{b} :: 8 : 5$, e $\sqrt{b} = \frac{5\sqrt{H}}{8}$.

419 Como hum grave cahe em 1 fegundo da altura de 15 pés; e adquire huma velocidade, com a qual andaria uniformemente 30 pés no mefmo tempo, fe defignarmos por E o efpaço corrido uniformemente por qualquer movel no tempo t com huma velocidade devida á altura b, ferá $t : 1'' :: \frac{E}{\sqrt{b}} : \frac{30}{\sqrt{15}}$, e $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15b}}$. Suppondo pois, que E he o efpaço corrido pelo fluido no canal, e metendo por $\sqrt{b}$ o feu valor $\frac{5\sqrt{H}}{8}$, teremos

$$t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}.$$

420 Da formula geral $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15b}}$ fe tira $b = \frac{E^2}{60t^2}$. Donde fe vê, que fe hum efpaço E contado em pés for corrido uniformemente em hum tempo t contado em fegundos, a altura devida á velocidade do movel ferá reprefentada por $\frac{E^2}{60t^2}$.

421 Bufcando pois pela formula do nº 419 o tempo que a agua deveria gaftar em correr todo o canal, fe naõ encontraffe refiftencia, acharemos para a altura da referva de 3 pés e 8 pollegadas $t = 11'',33$; para a altura de 7 pés e 8 pollegadas, $t = 7'',83$; e para a altura de 11 pés e 8 pollegadas, $t = 6'',35$. Donde fe vê, que a refiftencia produz hum effeito muito confideravel, o qual fe deve attribuir quafi todo á fricçaõ, porque o ar influe niffo muito pouco. Pelas mefmas experiencias fe vê, que eftando a adufa mais levantada he menor o effeito da fricçaõ, porque entaõ a maior maffa tem mais força que a mais pequena para vencer os obftaculos, fendo ambas animadas de velocidades iguais.

422 Igualmente se manifesta por cada huma das experiencias, que a velocidade diminue á medida que a agua se aparta da reserva; e este movimento tem algumas particularidades, que merecem ser observadas. Quando se levanta a adufa, a agua sahe primeiramente pela direcçaõ do canal; mas como no caminho encontra obstaculos, começa a entumecer-se, e a superficie toma a fórma *EMG* (Fig. 124.). Entaõ do ponto mais elevado *M* começa a cahir em virtude da gravidade, e parte della torna para a banda da reserva pela direcçaõ *MN*, formando-se na parte *CM* do canal duas correntes contrarias, huma da agua inferior pela direcçaõ *CF*, e a outra da superior pela direcçaõ *MN*. Esta he muito sensivel no principio, e termina-se no ponto *N* distante do orificio 12 pés com pouca differença. Ao depois diminue pouco a pouco, ainda que subsistindo sempre; e a superficie acaba tomando a fórma *ERG*, em que o ponto *R* he o mais elevado acima do fundo. A agua que chega a cada instante a *NO* fére continuamente a massa *NOFG*, e mistura-se com ella, a qual renovando-se successivamente conserva a mesma figura permanente a que se reduzio. Estas correntes saõ hum exemplo sensivel das que devem formar-se nos rios, e no mar, quando a agua he retardada por alguns obstaculos.

423 He de notar que o desaguamento do orificio naõ he retardado pela agua do canal, porque esta tendo a liberdade de escapar ou de se elevar, naõ póde oppór á que vem atraz della se naõ huma resistencia infinitamente pequena. Isto he evidente, mas sem embargo fizemos a experiencia; e achamos, que em hum tempo dado se recebia na extremidade *F* a mesma quantidade de agua, que dava no mesmo tempo o orificio *EC* quando se tinha tirado o canal. Donde se vê, que ha huma differença muito grande entre o movimento da agua por hum canal, e por hum conductor fechado de todos os lados.

424 Os canais declives, sendo a velocidade inicial a mesma, saõ corridos pela agua em menos tempo que os horizontais, porque a gravidade acceléra entaõ o movimento. As experiencias seguintes mostrarão a lei das velocidades nesse caso. Por *declividade* do canal entendemos a distancia de huma das suas extremidades á linha horizontal que passa pela outra.

Sen

Sendo a adufa elevada $\frac{1}{2}$ pollegada.

Altura constante da reserva acima do fundo em pés e pollegadas.	Declividade de 3 pollegadas.		Declividade de 6 pollegadas.	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	6 + 18 + 34 +	35 70 105	6 18 – 31 +	35 70 105
7 8	4 + 14 + 26	35 70 105	4 + 14 25 +	35 70 105
11 8	4 11 + 22	35 70 105	3, 5 11, 5 21	35 70 105

Sendo a adufa elevada 1 pollegada

Altura constante da agua acima do fundo da reserva em pés e pollegadas.	Declividade de 6 pollegadas.		Declividade de 2 pés	
	Segundos.	*Pés corridos.*	*Segundos.*	*Pés corridos.*
3 8	5 – 13 – 23 –	35 70 105	4, 5 10, 5 17, 5	35 70 105
7 8	4 – 9 + 19 –	35 70 105	4 – 9 – 15 –	35 70 105
11 8	3 8 15	35 70 105	2 + 7 13	35 70 104

425 Neſtas experiencias naõ ſe trata, ſenaõ da primeira agua, que corre o canal. Eſta padece maior fricçaõ, porque topa nas prominencias e aſperezas do fundo e das paredes; mas enchendo as cavidades aplaina o caminho para a agua ſeguinte, a qual por eſſa raſaõ deve ter maior velocidade, aſſim que a corrente for bem eſtabelecida. Para a medirmos, uſamos de pequenos corpos fluctuantes, que ſeguiaõ exactamente a corrente, e que tomavaõ ſenſivelmente a ſua velocidade, quando o canal era ſufficientemente declive. Aſſim, ſendo a declividade de 10 pés e 6 pollegadas, achamos para o canal inteiro os reſultados ſeguintes

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés e pollegadas.	*Elevaçaõ da adufa de meia pollegada.*		*Elevaçaõ da adufa de 1 pollegada.*	
	Tempo da primeira agua em meios ſegundos.	Tempo da corrente eſtabelecida em meios ſegundos.	Tempo da primeira agua em meios ſegundos.	Tempo da corrente eſtabelecida em meios ſegundos.
3 8	28, 5	25	22, 7	19
7 8	24	21	19, 5	16
11 8	22	19	17, 5	14, 5

426 Eſtas experiencias foraõ feitas em 1764, e incorporadas em huma Memoria que enviei á Academia de Toloſa, e que conſeguio em 1765 o premio deſtinado á indagaçaõ das leis da fricçaõ dos fluidos em movimento. Eiſaqui outras experiencias, que fizemos depois em hum canal de 600 pés de comprido, o qual eſtava dividido em 6 partes iguaes, e tinha por declividade $\frac{1}{10}$ da linha de livel.

Altu-

Altura conſtante da agua acima do fundo da reſerva em pés.	Numero dos pés corridos.	*Elevaçaõ da aduſa de 1 pollegada*		*Elevaçaõ da aduſa de 2 pollegadas*	
		Tempo da primeira agua.	Tempo da corrente eſtabelecida.	Tempo da primeira agua.	Tempo da corrente eſtabelecida.
$\frac{1}{3}$	100	15″	13″	13″,5	11″,5
	200	31	26,5	26,7	23
	300	47	39,5	39,5	33,5
1	100	12 +	12	11 −	9
	200	25,5	23 +	22	18 −
	300	39	33	32,5	27
2	100	11	10	9	8 −
	200	23	20	19	16
	300	35	30	29	24
	400	46 +	40	39	32
	500	58	49	49	40
	600	69	58	58	48
4	100	10	8	8	7
	200	20 +	17	17	14,5
	300	31 −	26	26	22
	400	42 −	35	35 −	29 +
	500	52,5	43 +	43 +	37 −
	600	62 +	52	52 −	44 +

427 Por eſtas experiencias ſe vê em geral, que a velocidade creſce á medida que ſe aumenta a declividade. Comparando as velocidades da primeira agua com as da corrente eſtabelecida, tambem ſe vê, que ſaõ entre ſi ſenſivelmente em raſaõ conſtante, para o meſmo canal; e a raſaõ he, porque ſendo as aſperezas do canal as meſmas, a agua encontra os meſmos obſtaculos, e deve eſtabelecer a corrente ſenſivelmente do meſmo modo, ainda que a altura do orificio, e a velocidade do canal venhaõ a variar. Mas póde ſucceder, que as velocidades primitivas em differentes canais naõ ſejaõ entre ſi como as velocidades permanentes, porque a fricçaõ póde ſer differente em ambos os caſos.

428 Quando o canal he pouco declive, nem a velocidade primitiva, nem a permanente he uniforme, mas

á

á medida que a agua se aparta da reserva, as partes iguais do canal saõ corridas em mais tempo. No nosso canal achamos, que huma e outra velocidade naõ se fazia sensivelmente uniforme, senaõ quando a declividade era ao menos huma decima parte do comprimento delle; exceptuando a primeira divisaõ, que ainda entaõ era corrida em tempo hum pouco menor do que as outras.

429 Huma das questões para examinar, he saber em que rasaõ variaõ as velocidades, quando varia a declividade do canal, ficando o orificio constante. Seja EF o canal inclinado (Fig. 125.), EN a altura devida á velocidade que a agua deveria ter no canal, em virtude do impulso inicial, e adiante do ponto de contracçaõ. Conduzindo as horizontais EO, NK que encontrem em O, K a vertical GK, a parte OG he a declividade do canal; e imaginando este produzido até V, a velocidade da agua será como se tivesse descido pela parte VE, naõ experimentando nella fricçaõ, nem resistencia alguma. Assim se reduz a questaõ a saber a lei pela qual varia a velocidade, quando varia a altura KG.

430 Consideremos pois as tres experiencias do nº. 425, em que a adufa estava elevada 1 pollegada. Na primeira temos $EG = 105$ pés, $OG = 10,5$, e $EN = 1,416$ (n. 418.). Logo $KG = 11,916$ pés, e a altura devida á velocidade permanente com que he realmente corrido o espaço EG será $= 2,036$ pés (n. 420.); e esta altura he para KG como 2036 para 11916, ou como 1 para 5,84 proximamente.

Na segunda $EG = 105$ pés, $OG = 10,5$, $EN = 2,978$, $KG = 13,478$ pés; e acharemos 2,871 por altura devida á velocidade permanente com a qual he corrido o espaço EG, a qual he menor que KG na rasaõ de 2871 para 13478, ou de 1 para 4,69 proximamente.

Na terceira $EG = 105$ pés, $OG = 10,5$, $EN = 4,54$, $KG = 15,04$; e acharemos 3,495 por altura devida á velocidade permanente com que he corrido o canal EG, a qual he menor que KG na rasaõ de 3496 para 15040, ou de 1 para 4,3 proximamente.

431 Consideremos tambem as experiencias 6ª 12ª e 18ª do n.º 426, quando a adufa estava levantada 2 pollegadas; e para reduzirmos a primeira dellas a poder-se comparar com as outras, dobraremos tanto o espaço 300 pés como

o

o tempo correſpondente. Aſſim teremos $EG = 600$ pés; $OG = 59{,}702$, $EN = 0{,}358$, $KG = 60{,}06$; e acharemos 2,058 por altura devida á velocidade permanente da agua no canal, a qual he para KG como 1 para 29,45 proximamente.

Na ſegunda $EG = 600$ pés, $OG = 59{,}702$, $EN = 0{,}749$, $KG = 60{,}451$; e teremos 2,604 por altura devida á velocidade, a qual he para KG como 1 para 23,21 proximamente.

Na terceira $EG = 600$ pés, $OG = 59{,}702$, $EN = 1{,}53$, $KG = 61{,}232$; e acharemos 3,071 por altura devida á velocidade que buſcamos, a qual he para KG como 1 para 19,93 proximamente.

432 De todos eſtes calculos reſulta, que as alturas devidas ás velocidades no canal naõ ſaõ entre ſi como as alturas correſpondentes KG. Porém quanto a altura inicial EN he maior, menos differe de KG a altura devida á velocidade da agua; donde ſe ſegue, que a fricçaõ he á proporçaõ menos ſenſivel nas velocidades maiores do que nas menores. Naõ ſerá pois exacto na pratica calcular a velocidade de huma corrente pela ſua declividade. He preciſo determinar-ſe por huma experiencia immediata em cada caſo particular.

433 Quando huma maquina ha de ſer movida por huma corrente, e pelas circunſtancias do terreno he neceſſario aſſentalla a certa diſtancia da reſerva, convem inclinar o canal a decima parte do ſeu comprimento com pouca differença, querendo que a maquina receba a meſma força, como ſe eſtiveſſe ſituada ao pé da reſerva.

434 Outra queſtaõ para examinar, he ſaber ſe a velocidade varîa, quando a altura KG he conſtante, e a grandeza da abertura ſe aumenta, ou diminue. Na experiencia 12ª do nº 426 ſendo os orificios como 1 para 3, o eſpaço de 600 pés he corrido nos tempos 58 e 48, e conſeguintemente as velocidades ſaõ como 48 para 58, ou como 24 para 29. Donde ſe vê, que a velocidade he maior ſenſivelmente, quando ſe aumenta o orificio; e o meſmo ſe acha por todas as noſſas experiencias.

435 Alguns autores eſcreveraõ, que creſcendo o orificio, a velocidade deve aumentar proporcionalmente, ou que as velocidades ſaõ na raſaõ das quantidades de agua que daõ os canais no meſmo tempo. Eſta aſſerçaõ puramente

mente gratuita he desmentida pela experiencia ; porque no exemplo que acabamos de referir , os orificios , ou as quantidades de agua por elles produzidas , saõ na rasaõ de 1 para 2 , e as velocidades somente na rasaõ de 24 para 29.

436 Em conformidade das experiencias precedentes, e das reflexões que ellas tem occasionado , póde fazer-se idea do movimento das aguas nos aqueductos , conforme o comprimento , e declividade delles. He conveniente dar-lhes a maior declividade que póde ser. Ordinariamente se fazem de differentes partes horizontais , que se vaõ abaixando por degráos , ou resaltos , porque os officiais trabalhaõ mais facilmente por huma linha de livel do que por huma inclinada ; mas esta pratica he muito viciosa. Para que a agua corra mais facilmente , e seja menos exposta a gelar-se nos grandes frios , deve o canal fazer-se em declive por todo o seu comprimento , practicando reservas de espaço em espaço , que recebaõ as immundicias que a agua traz comsigo , e que sirvaõ para pôr o aqueducto em seco , quando for necessario reparallo. Tambem he conveniente , que o canal seja antes fundo que largo , para que a agua se ajude do proprio pezo a vencer a fricçaõ.

437 Para dizermos em fim huma palavra sobre a pressaõ da agua contra as paredes dos canais , he evidente que contendo ellas a agua de se derramar horizontalmente para todos os lados , saõ comprimidas pelo pezo della ; e quanto a esta parte , cada ponto das paredes he comprimido perpendicularmente com huma força proporcional á altura do fluido que lhe corresponde. Além disto , se a velocidade primitiva da agua vem a diminuir em virtude da fricçaõ , ou de qualquer outro obstaculo , desta perda de velocidade resultará huma pressaõ nova contra as paredes do canal , que será igual ao excesso da pressaõ que produziria a velocidade que a agua deveria ter naturalmente , sobre a pressaõ devida á velocidade effectiva della. Daqui se deduzirá o modo de proporcionar convenientemente as aberturas laterais feitas em hum canal ou aqueducto , quando se quizer derivar huma parte da agua delle.

Meios

Meios propostos por diversos Autores para medir a velocidade das aguas correntes.

438 ATé agora naõ tratámos senaõ dos canais, e aqueductos regulares, e esses de pouca altura, de maneira que a velocidade podia considerar-se a mesma em toda a sua profundidade. Agora consideremos a velocidade em quaisquer canais. De distancia em distancia póde variar sensivelmente; e póde tambem naõ ser a mesma na superficie que no resto da altura. Eisaqui os meios principais, que se tem imaginado para a medir.

439 Os corpos fluctuantes sobre a agua, tomaõ em pouquissimo tempo toda a velocidade della. Assim póde medir-se a velocidade de huma corrente, lançando nella hum pequeno corpo mais leve, e observando-se o tempo que gasta em correr hum espaço dado. Este corpo deve mergulhar-se quasi inteiramente, para ser o menos que he possivel exposto ás agitações do ar.

M. Mariotte servio-se muito deste methodo; e observou que a agua de hum rio varía de velocidade da superficie até o fundo. Para isso tomou duas bolas de cera prezas a hum fio de hum pé de comprido. Huma dellas tinha interiormente algumas pedrinhas para ficar mais pezada que a agua, de maneira que sendo metidas na agua a mais pezada estendia o fio, e a outra ficava na superficie quasi inteiramente mergulhada. Assim achou, que em huma corrente de tres pés de altura, a bola debaixo ficava sempre para traz, e mais notavelmente quando o fundo era mais aspero e desigual. Mas nos lugares, em que a agua pelo encontro de algum obstaculo se levantava, e depois tomava hum curso mais rapido, como se observa debaixo das pontes, a bola inferior passava adiante da superior.

Por este exemplo se vê, que a velocidade augmenta ou diminue da superficie para o fundo, conforme as circunstancias. Naturalmente devia sempre augmentar, em virtude da pressaõ da agua superior que he cada vez maior; mas póde succeder que seja mais retardada pela resistencia da fricçaõ, e de outros obstaculos, doque accelerada pela pressaõ.

440 Para o mesmo fim se usa de hum molinete de

15 até 18 pollegadas de diametro, muito leve e perfeitamente movel ſobre o ſeu eixo, que deve ſer delgado, e bem polido, e que póde em cada extremidade aſſentar ſobre dous cylindros moveis, para ſe deſtruir quaſi totalmente o effeito da fricçaõ. Do eixo para a circumferencia ſahem 15 ou 18 pennas muito delgadas de folha de flandes, nas quais faz impreſſaõ a corrente. Aſſim conhecendo o raio medio, iſto he, a diſtancia do eixo ao ponto em que ſe julga reunida a impreſſaõ da agua, acharemos a circumferencia media; e havendo contado as revoluções em hum tempo dado, ſaberemos o eſpaço corrido pela agua, e conſeguintemente a ſua velocidade.

Eſte inſtrumento tem o inconveniente de naõ moſtrar commodamente a velocidade, ſenaõ junto á ſuperficie, e o de ſer expoſto na ſua rotaçaõ á reſiſtencia do ar. Mas he muito ſimples, e póde empregar-ſe utilmente algumas vezes.

441 M. Guglielmini (*Aquarum fluentium menſura lib. 4.*) propoem o meio de encerrar a corrente entre dous muros verticais e parallelos, de aplainar bem o fundo, e de fechar a entrada com huma comporta movediça verticalmente, por meio da qual ſe dê ao fluido huma abertura ou paſſagem rectangular, que o Autor chama *regulador.* A ſuperficie da agua na frente da comporta deve eſtar ſenſivelmente eſtagnante. A quantidade de agua que paſſa em hum tempo dado pelo regulador ſe determina pelo nº. 245, e a velocidade media della pelo nº. 246. Mas eſte methodo naõ he praticavel, ſenaõ em pequenos regatos.

442 M. Pitot propoem (*Mem. de l' Acad.* 1732.) hum tubo de vidro AB (Fig. 126.) encurvado em C, o qual ſe merguiha verticalmente na corrente ſendo fixamente applicado a huma regoa ſolida de madeira, ſobre huma graduaçaõ aberta em huma chapa de cobre. A altura CM a que a agua ſe levanta no tubo he a devida á velocidade da corrente em A; porque a preſſaõ da columna CM faz equilibrio á força que tende a levantar a agua por ACM, e conſeguintemente a velocidade em A deve ſer a meſma, como ſe a agua neſte lugar tiveſſe cahido da altura MC. Mergulhando mais ou menos o tubo, teremos as alturas que correſpondem ás velocidades dos differentes pontos da corrente.

Naõ

Naõ ha couſa mais ſimples que eſte inſtrumento. O Autor ſe ſervio delle para medir a velocidade do Sena debaixo da ponte real. Mas he muito difficil de ſe fixar com a ſolidez neceſſaria, para que a agua naõ ſeja ſujeita a movimentos oſcillatorios, os quais produzem grande incerteza no juizo da ſua verdadeira elevaçaõ. Eſte inconveniente he tanto mais ſenſivel, quanto mais ſe merguIha o tubo, e quanto a velocidade da corrente he maior.

443 Tambem ſe uſa muito na pratica de hum quarto de circulo ACB (Fig. 127.), guarnecido no centro de dous fios, hum mais curto que ſuſtenta no ar o pezo P, e outro mais comprido CH ou CM, o qual ſuſtenta outro pezo que ſe merguIha mais ou menos, conforme ſe larga mais ou menos o fio. Pela deviaçaõ deſte fio da vertical ſe mede primeiramente a força, e depois ſe conclue a velocidade da corrente, deſta maneira.

444 Seja F o pezo conſtante deſtinado a ſer merguIhado no fluido, e repreſente-ſe pelas verticais HK, MO iguais entre ſi. Reſolvendo cada huma deſtas forças em duas, huma HL ou MQ na direcçaõ do fio, e outra HI ou MN na direcçaõ da corrente, teremos $HI = F.\frac{\text{ſen}\,XCR}{\text{ſen}\,XRC}$, e $MN = F.\frac{\text{ſen}\,XCS}{\text{ſen}\,XSC}$. Donde ſe ſegue, que a força igual e contraria da corrente he o producto do pezo F pela raſaõ do ſeno do angulo formado pelo fio com a vertical ao ſeno do angulo formado pelo fio com a corrente. O primeiro angulo he dado immediatamente pela graduaçaõ do inſtrumento, e o ſegundo XRC ou XSC he ſempre facil de determinar; porque tirando
R/x/Xx a horizontal xy, conheceremos o angulo xXy, por ſer dada a direcçaõ da corrente, e teremos $XRC = XxC - RXx$, e $XSC = XsC - SYs$.

Quando a direcçaõ da corrente he horizontal, temos
/R/x $xXy = 0$, e $\frac{\text{ſen}\,XCR}{\text{ſen}\,XRC} = \text{tang}\,XCR$, $\frac{\text{ſen}\,XCS}{\text{ſen}\,XSC} = \text{tang}\,XCS$. Donde ſe ſegue, que entaõ he a força da corrente como a tangente do angulo formado pelo fio com a vertical.

445 Suppondo agora, que a impulſaõ de hum fluido contra o meſmo corpo he na raſaõ duplicada da velocidade

dade, como se mostrará na theorica da percussaõ dos fluidos, e designando por u a velocidade em H, e por V a velocidade em M, teremos $uu : VV :: \frac{F . sen\ XCR}{sen\ XRC} : \frac{F . sen\ XCS}{sen\ XSC}$, e $V = u \sqrt{\frac{sen\ XCS . sen\ XRC}{sen\ XSC . sen\ XCR}}$.

Póde pois medir-se a velocidade u na superficie por meio dos corpos fluctuantes. Entaõ dando ao fio CH o comprimento necessario para que o pezo H se mergulhe precisamente até a altura do seu diametro, e depois deixando-o mergulhar a qualquer profundidade, medir-se-haõ os angulos XCR, XRC, XCS, XSC, e achar-se-ha V pela equaçaõ precedente.

446 Querendo exactidaõ nos resultados, he necessario ter muita precauçaõ no uso deste instrumento. O fio, que sustenta o pezo mergulhado, está sujeito a movimentos de oscillaçaõ, que o chegaõ e apartaõ da vertical, e que fazem incerta a medida do angulo que faz com ella. Isto succede principalmente, quando a gravidade especifica do pezo mergulhado excede pouco a do fluido. Por outra parte naõ se póde aumentar muito a sua gravidade especifica, porque entaõ as pequenas variações das velocidades naõ seriaõ sensiveis no instrumento.

CAPITULO VI.

Do movimento dos Rios.

447 A Indagaçaõ das leis, que seguem os rios nos seus movimentos, he hum ramo da Hydraulica, que tem dado occasiaõ a muitas obras. Hum dos melhores livros nesta parte he o Tratado da natureza dos rios de Guglielmini, que se imprimio a primeira vez em 1697, e depois se reimprimio em 1739 com as notas muito instructivas de Eustachio Manfredi. M. de Buffon na sua Historia Natural fez muitas reflexões novas e importantes sobre o movimento dos rios. Eisaqui tambem o resultado do que tenho lido e reflectido sobre a mesma materia.

Considera-

Considerações gerais sobre o movimento dos rios.

448 MUito tempo se disputou sobre a origem dos rios. Descartes imaginou, que a agua do mar por canais subterraneos inclinados se encaminhava para as grandes cavidades preparadas pela natureza debaixo das montanhas; que alli sendo exposta á acçaõ de hum fogo, que ardia perpetuamente debaixo daquellas immensas caldeiras, se elevava em vapores pelo corpo das montanhas acima, como pelo capitel de hum alambique; e que depondo desta maneira o sal, formava huma massa de agua doce, que ajuntando-se de varias partes, pelo seu proprio pezo se restituia ao mar. Mas este systema ingenhoso he fundado em supposições gratuitas, e absolutamente inadmissiveis. Donde podia nascer aquelle fogo, que continuamente havia de estar applicado a taõ vastas caldeiras? e para onde se recolhiaõ todos os sais, que a agua depunha pela evaporaçaõ no interior das montanhas?

Os que disseraõ, que as aguas do mar penetraõ por toda a parte o globo terrestre, e que depois de haverem filtrado e deposto os sais, tornaõ doces para o mesmo mar, ainda imagináraõ peor. Porque as aguas naõ podem por si mesmas elevar-se acima do seu livel, nem conseguintemente formar correntes, que desçaõ dos lugares elevados para o mar.

He demonstrado, e reconhecido hoje de todo o mundo, que o cabedal das fontes e dos rios he fornecido pelas aguas da chuva, que se ajuntaõ nas cavidades das montanhas, donde descem pelo seu pezo, e se restituem ao mar por canais abertos pela arte, ou pela natureza. M. Halley fez ver pelo calculo (*Transact. Philos.* nº. 192.), que os vapores que se levantaõ do mar, e que os ventos transportaõ sobre a terra, saõ mais que sufficientes para formar todas as fontes, e rios da superficie terrestre.

449 Para se mover a agua de hum rio, naõ he necessario que o fundo seja declive; basta que a superficie esteja mais elevada que o livel do mar. Porque qualquer massa de fluido, que tem a liberdade de se derramar, abaixa-se até se pôr de livel em toda a sua extensaõ. Mas no estado physico e actual das cousas as madres dos rios saõ

ſaõ inclinadas, ao menos na maior parte. As ſuas differentes inclinações e ſinuoſidades dependem da reſiſtencia do fundo e dos obſtaculos, que a agua encontra no caminho.

450 Seja $ADCX$ (Fig. 128.) huma grande reſerva, donde o rio $XCEF$ tira o ſeu cabedal. Sendo as particulas inferiores da reſerva comprimidas pelas ſuperiores, eſtá claro, que preſcindindo dos obſtaculos, a velocidade da particula C ſerá como ſe ella houveſſe cahido da altura XC, e a velocidade de cada huma das outras devida á altura correſpondente. A' medida que a agua caminha pelo plano inclinado CE, a velocidade ſe accelera pela acçaõ da gravidade; de maneira que conduzindo a horizontal HG, a velocidade em P ſerá devida á altura HP, a velocidade em M á altura HM &c.

451 Donde ſe ſegue, que a profundidade da agua deve diminuir á medida que ſe retira da origem, ſendo a largura conſtante. Porque eſtando o rio em hum eſtado permanente, e paſſando conſeguintemente a cada inſtante a meſma quantidade de agua por duas quaiſquer ſecções MP, VR, he evidente que ſendo maior a velocidade em cada hum dos pontos de VR do que em cada hum dos pontos correſpondentes de MP, deve ſer VR neceſſariamente menor que MP.

452 Mas as profundidades MP, VR, poſto que ſempre deſiguais entre ſi, chegar-ſe-haõ tanto mais para a igualdade, quanto mais ſe tomarem longe da origem, porque as velocidades das particulas differem de menos em menos. Com effeito deſignando por M, V, P, R as velocidades reſpectivas deſtes pontos, teremos $M : P :: \sqrt{HM} : \sqrt{AP} :: \sqrt{HM} : \sqrt{(HM + MP)}$, e $V : R :: \sqrt{GV} : \sqrt{(GV + VR)}$. Logo $\frac{M}{P} = \sqrt{\frac{HM}{HM + MP}}$, e $\frac{V}{R} = \sqrt{\frac{GV}{GV + VR}}$. Porém $\frac{GV}{GV + VR} > \frac{HM}{HM + MP}$, ou $GV.HM + GV.MP > GV.HM + HM.VR$, e conſeguintemente $GV.MP > VR.HM$, por ſer $MP > RV$ e $GV > HM$. Logo tambem $\frac{V}{R} > \frac{M}{P}$; e por conſeguinte, a velocidade V differe menos de R do que a velocidade

P

cidade *M* differe de *P*. Mas ſe a velocidade foſſe conſtante em cada huma das profundidades, tambem o ſeriaõ as meſmas profundidades. Logo variando menos as velocidades, á medida que ſaõ mais diſtantes da origem, tambem as profundidades devem variar cada vez menos, ou chegar-ſe cada vez mais para a igualdade.

453 Por iſto ſe póde fazer huma idêa geral do movimento dos rios. Mas muitas cauſas impedem que naõ ſejaõ as couſas em rigor, como temos repreſentado. Tais ſaõ as deſigualdades do fundo, as ſinuoſidades da madre, o alargamento e eſtreitamento della, a fricçaõ, e obſtaculos de toda a eſpecie que a agua encontra, e que perturbaõ a ſua corrente natural; e daqui reſultaõ differentes variedades na velocidade dos rios. Muitas vezes em lugares diſtantes da origem, e muito mais baixos do que ella, he a velocidade menor do que na meſma origem, quando devia ir ſempre em creſcimento Em cada ponto ſe fazem novas combinaçoens entre o movimento adquirido, e o que he produzido a cada inſtante pela altura actual da agua. Nos lugares eſtreitos e profundos, a velocidade primitiva he como nenhuma em comparaçaõ da que he devida á altura actual; e nos largos, onde a agua tem pouca profundidade, quaſi que ſe naõ move ſenaõ em virtude da velocidade adquirida precedentemente. O ponto da maior velocidade raras vezes he perto do fundo, algumas ſe acha na ſuperficie, e de ordinario naõ longe do meio da profundidade. A ſua poſiçaõ depende da reſiſtencia do fundo combinada com as forças activas que produzem a corrente.

454 Deſtas reflexoens ſe vê, que naõ he poſſivel ſujeitar a hum calculo rigoroſo e exacto o movimento dos rios, tomado em toda a ſua complicaçaõ. Sem embargo moſtraremos como poderia determinar-ſe, ſe foſſe conhecida a lei da retardaçaõ de cada particula, que provêm da reſiſtencia dos obſtaculos.

Seja *XCEF* (Fig. 129.) a ſecçaõ vertical e longitudinal de hum rio, que tira a ſua agua da reſerva *AXCD*; e ſupponhamos que cada particula experimenta huma reſiſtencia proporcional a huma potencia dada da ſua velocidade. Deve achar-ſe eſta velocidade.

Havendo produzido a horizontal *AX*, tire-ſe *KQ* perpendicular á direcçaõ da corrente; e conſiderando na parte della

della TQ o elemento Mm, dos pontos T, M, Q levantem-se as verticais TS, ML, QH. Entaõ ſuppondo, que ML repreſenta a preſſaõ que ſofreria o ponto M em virtude do pezo da agua debaixo da altura ML, e que OR repreſenta a reſiſtencia que experimenta o ponto T ſituado na ſuperficie em virtude da fricçaõ do fundo e das margens; ſeja $KT = a$, $TS = b$, $KM = x$, e conſeguintemente $ML = \frac{bx}{a}$, $OR = c$, a altura devida á velocidade do ponto $T = b$, a altura devida á velocidade do ponto $M = y$, e o expoente da potencia da velocidade á qual he proporcional a reſiſtencia $= n$.

Iſto poſto, repreſentando as velocidades pelas raizes quadradas das alturas que lhes ſaõ devidas, teremos pelas condiçoens do Problema $c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}$ por expreſſaõ da reſiſtencia, que padece o ponto M em virtude da fricçaõ. Porém ſe naõ houveſſe fricçaõ, o meſmo ponto ſe moveria como ſe houveſſe cahido da altura ML, ou como ſe eſtiveſſe ſujeito á preſſaõ $\frac{bx}{a}$. Logo, tirando deſta força a reſiſtencia achada, ſerá $\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}$ a força que actualmente impelle o ponto M, e $Mm\left(\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}\right)$ a força abſoluta que impelle a agua que paſſa pelo elemento Mm. Eſta força he proporcional á quantidade de movimento, que produz; e porque a maſſa de agua, que paſſa a cada inſtante por Mm, he na raſaõ compoſta da velocidade e do elemento Mm, teremos $Mm.\sqrt{y}.\sqrt{y}$, ou $Mm.y$ por expreſſaõ da quantidade de movimento. Logo $Mm\left(\frac{bx}{a} - c\sqrt{\frac{y^n}{b^n}}\right) = Mm.y$, e conſeguintemente

$$b^n(bx - ay)^2 = a^2c^2y^n.$$

Para uſar deſta equaçaõ determinaremos b por meio de algum corpo fluctuante, e mediremos as rectas KT, KQ, *KQ*, *TS*, e *QH*. Pelo que respeita á linha *OR* ou c, notaremos que fazendo $x = a$, temos $y = b$, e a equaçaõ precedente se reduz a $(b - b)^2 = c^2$, ou $c = b - b$. Se $n = 1$, a equaçaõ que dá y he do segundo gráo; se $n = 2$, do primeiro; se $n = 3$, do terceiro &c. Naõ me demoro em discutir por miudo as consequencias particulares destas equaçoens, porque o meu objecto principal naõ he de offerecer ao espirito verdades theoricas, mas de escrever huma obra, que ceda em proveito da pratica. Assim nos viramos para as questoens relativas a esta tençaõ; e quando ellas naõ saõ susceptiveis de soluçoens rigorosas, tratamolas physicamente, isto he, de hum modo algum tanto vago, mas sufficiente para o uso que dellas se póde fazer.

455 A superficie de hum rio naõ está sempre de livel de huma borda para a outra; mas algumas vezes he mais ou menos elevada no meio, conforme as circumstancias. O primeiro caso succede, quando o rio tem hum curso perfeitamente livre, e vem a aumentar consideravelmente, ou pela descongelaçaõ das neves, ou pela entrada de outro rio. Sendo as aguas das margens mais retardadas pela fricçaõ que as do meio, estas conservaõ necessariamente maior parte da velocidade inicial. Porém, em virtude da perda respectiva de velocidade, estas aguas se comprimem lateralmente humas ás outras (n. 409. 437.); e como a superficie do rio se suppoem em hum estado permanente, estas pressoens devem fazer equilibrio entre si. Logo onde he menor a perda de velocidade deve corresponder a maior altura de livel, a fim de que o excesso de huma altura sobre outra produza huma velocidade que tambem se destrua em parte, e que assim occasione huma nova pressaõ, a qual se ajunte á pressaõ devida á altura commua de livel, de maneira que a soma destas pressoens seja igual á pressaõ da agua das margens. Deve pois formar o rio neste caso huma curva convexa para a parte do meio, cuja sagitta ou abscissa póde algumas vezes chegar a 2 ou 3 pés.

456 Póde succeder pelo contrario, que a agua se levante mais nas margens do que no meio, quando encontra algum obstaculo no caminho. Por exemplo, se o rio se lança em hum mar sujeito a enchentes e vasantes, está claro que tendo a agua das margens menos veloci-

dade

dade ſerá reppellida mais facilmente no tempo da enchente, e conſeguintemente ſubirá maior quantidade de agua do mar ao longo das margens do que pelo meio do rio, e em virtude deſte aumento de agua para a parte das margens, póde o rio ſer mais elevado nellas do que no meio. Muitas vezes ſe formaõ duas correntes diſtintas, e contrarias, huma no meio que ſe dirige ao mar, e outra nas bordas que ſobe ao longo do rio.

457 Em todos os rios ha frequentes remanſos de agua, occaſionados pela poſiçaõ dos obſtaculos que ſe oppoem ao movimento livre da corrente. Neſtes ſe vê a agua algumas vezes como eſtagnada, outras vezes agitada com fortes movimentos turbinatorios, donde ſahem com bem difficuldade os barcos, que paſſaõ por elles.

458 Obſerva-ſe conſtantemente, que eſtando para vir huma cheia, a agua para a parte do fundo corre com mais velocidade que a ordinaria. A raſaõ deſte effeito he, porque o pezo das aguas ſuperiores ſe faz ſentir até huma grande diſtancia; e aſſim vindo a aumentar-ſe a carga do fundo, deve a velocidade aumentar-ſe tambem.

459 Quando a madre de hum rio vem a eſtreitar-ſe, a profundidade aumenta neceſſariamente, e por conſequencia a velocidade. Muitas vezes he neceſſario conhecer, ao menos proximamente, a mudança que ſuccede na altura de hum rio, quando ſe faz alguma mudança na extenſaõ da madre. Eſta queſtaõ he ſobre tudo neceſſaria, quando ſe trata de conſtruir huma ponte. Examinemos eſte caſo particular.

460 Para maior ſimplicidade ſupponhamos, que a ſecçaõ vertical e latitudinal do rio he hum rectangulo *ACDB* (Fig. 130.), e preſcindamos de toda a reſiſtencia. Levantando a vertical indefinida *KN*, ſupponhamos que a velocidade na ſuperficie *AB* he devida á altura *OM*. Por quanto preſcindimos de toda a reſiſtencia, a velocidade de qualquer ponto *R* ou K ſerá devida á altura correſpondente *MR* ou *MK*; e a agua correrá, como ſe ſahiſſe pela abertura *ACDB* da reſerva *aCDb* conſtantemente cheia na altura *MK*. Agora, ſupponhamos que ſendo a agua coanguſtada pelos arcos da ponte, corre pela abertura rectangular *EFGH*, da qual ſe conhece a baſe *FG*. Sendo *IN* a altura devida á nova velocidade da ſuperficie *EH*, o movimento ſe fará como ſe a agua ſahiſſe pela abertura

EFGH

EFGH de huma reserva $fCDg$ constantemente cheia na altura *NK*.

Seja pois $CD = c$, $MK = H$, $MO = b$, a quantidade de agua que no tempo t corre por $ACDB = Q$, $FG = c'$, $NK = H'$, $NI = b'$, a quantidade de agua que no mesmo tempo passa por $EFGH = Q'$, e altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo $= a$; e teremos $Q = \frac{4}{3} tc((H\sqrt{H} - b\sqrt{b})\sqrt{a}$, $Q' = \frac{4}{3} tc'(H'\sqrt{H'} - b\sqrt{b})\sqrt{a}$ (n. 245.). Porém $Q = Q'$; logo $c(H\sqrt{H} - b\sqrt{b}) = c'(H'\sqrt{H'} - b'\sqrt{b'})$.

461 Supponhamos, que a velocidade he nulla na superficie em ambos os casos, o que he sensivelmente verdadeiro em muitas occasioens; e teremos $c H\sqrt{H} = c'H'\sqrt{H'}$, donde se tira $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$, isto he, que *a profundidade do rio antes da existencia da ponte he para a profundidade que depois ha de ter, como a raiz cubica do quadrado da soma das larguras dos arcos para a raiz cubica do quadrado da largura do rio.*

462 Quando as alturas b, b' naõ saõ nullas, devem ser sensivelmente proporcionais ás alturas H, H', e conseguintemente $b' = \frac{bH'}{H}$. Substituindo este valor na equaçaõ, e dividindo tudo por $H\sqrt{H} - b\sqrt{b}$, acharemos igualmente $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. E porque a proporçaõ $H : H' :: b : b'$ dá $H - b : H' - b' :: H : H'$, teremos $H - b : H' - b' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Porém $H - b$, $H' - b'$ saõ as profundidades do rio nos dous casos; logo nesta hypothese seraõ as profundidades na mesma rasaõ, que havemos enunciado no n.º precedente.

463 Se naõ se quizesse admittir a hypothese do n.º 460, que as velocidades da agua saõ como as raizes quadradas das alturas, mas em virtude da fricçaõ se suppuzesse ser OS a altura devida á velocidade media na secçaõ $ACDB$, e IT á velocidade da secçaõ $EFGH$, o problema naõ seria mais difficultoso. Porque fazendo $AC = b$, $CD = c$, $SO = H$, $EF = b'$, $FG = c'$, $IT = H'$,

H', está claro, que sendo iguais as quantidades de agua que no mesmo tempo passaõ por ambas as secções, teremos $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$; e porque a lei pela qual os pontos S, T estaõ postos sobre as alturas KO, KI se suppoem dada, teremos outra equaçaõ, que combinada com a primeira determinará as incognitas H', b'.

Quando, por exemplo, os pontos S, T estaõ semelhantemente postos sobre as rectas K O, K I, teremos $H : H' : b : b'$, e $b' = \frac{bH'}{H}$. Substituindo este valor na equaçaõ $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$, acharemos $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$, e por conseguinte $b : b' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Donde se vê, que as profundidades saõ tambem neste caso na rasaõ que já fica enunciada.

Em todos estes calculos havemos supposto, que a madre do rio he hum canal rectangular, o que nunca tem lugar em rigor. Mas sempre será facil de se modificar a theorica, conforme a exigencia dos casos, e de se adaptar, ao menos proximamente, aos problemas deste genero, que na pratica podem occorrer.

Considerações physicas sobre o modo com que os rios estabelecem as suas madres.

464 A Corrente de hum rio, pela fricçaõ que experimenta na madre, faz desapegar alguma terra que leva comsigo; e o canal se alarga, e profunda necessariamente, em quanto a resistencia que oppoem na sua superficie naõ chega a igualar a força da agua. Porém como a madre fazendo-se maior perde pouco a pouco a sua declividade, como a velocidade primitiva diminue pelo encontro dos cotovelos e de outros obstaculos, e como as terras mais fundas tem maior tenacidade, succede em fim que a resistencia dellas se poem sensivelmente em equilibrio com a força das aguas; e se para o perturbar se mete algum obstaculo de novo á corrente, a força da agua torna a lutar contra elle, até restabelecer outra vez o equilibrio.

Os

Os rios mais depressa cessaõ de profundar do que de alargar a madre. Porque a tenacidade do fundo, e a diminuiçaõ da velocidade concorrem a afrouxar, ou a impedir a profundaçaõ, e pelo contrario a diminuiçaõ da velocidade e declividade aumentaõ a altura da agua, e conseguintemente a pressaõ e fricçaõ que resulta nas margens. Por esta rasaõ, os rios que correm por terras homogeneas, e de pouca consistencia, sendo as mais cousas iguais, saõ mais largos que fundos.

465 Todos os rios naõ formaõ do mesmo modo as suas madres; pois he certo, por exemplo, que a mesma corrente cava e leva comsigo mais facilmente hum fundo de areia, do que outro de greda ou de cascalho. Mas supponhamos que he dada a força da agua, e a resistencia do terreno, e vejamos o effeito que deve resultar. He evidente, que os obstaculos de hum plano inclinado tem tanta mais ventagem, quanto elle se chega mais para a situaçaõ horizontal, porque tanto mais se diminue o effeito da gravidade. O mesmo succede na madre de hum rio; e a força da corrente naõ cessa de combater com a resistencia do terreno, em quanto a diminuiçaõ da declividade naõ faz a segunda força igual á primeira.

466 Daqui se segue, que sendo a resistencia do terreno constante, quanto maior for a força da corrente, tanto menor será a declividade, no caso do equilibrio. E porque a velocidade da agua perto do fundo mais he devida á pressaõ da agua superior que ao movimento adquirido precedentemente, segue-se tambem que quanto mais fundo for hum rio, tanto menor será a declividade. Se elle contém por toda a parte a mesma quantidade de agua, poderá o fundo considerar-se rectilineo em huma pequena extensaõ; mas em hum longo espaço formará huma spiral, cujas tangentes faràõ sempre angulos iguais com as perpendiculares correspondentes tiradas do centro da terra, que he o centro da mesma spiral; e esta se chegará tanto mais para hum circulo, quanto mais se chegarem os ditos angulos para rectos.

Quando a quantidade de agua aumenta, ou pelas chuvas, ou pela entrada de outro rio, a força da corrente aumenta tambem, e o fundo por conseguinte tende cada-vez mais a fazer-se horizontal. Daqui vem, que se muitos rios se reunem, a madre commua naõ tem tanta decliviclividade como tinhaõ as madres particulares delles antes da uniaõ.

467 Temos visto (n. 450.), que prescindindo da resistencia a velocidade da corrente se deveria accelerar continuamente em virtude da declividade. Supponho agora, que a pezar da resistencia subsiste em parte esta acceleraçaõ sobre hum espaço determinado, está claro que a força da agua se aumenta. Por conseguinte a declividade irá sempre diminuindo, e será a menor possivel quando a acceleraçaõ da velocidade for a maior que he possivel. Donde se segue, que se dous rios desiguais se accelerarem do mesmo modo, o maior terá menor declividade. Em quanto durar a acceleraçaõ, o fundo formará huma curva concava, cujas tangentes faraõ com as perpendiculares tiradas do centro da terra angulos cada vez maiores á medida que se aparta da origem da acceleraçaõ. Mas assim que a velocidade vem a ser uniforme, o fundo se faz sensivelmente rectilineo, ou fórma a spiral que já dissemos.

468 Quando hum rio tem por si mesmo a força de excavar o fundo, sem ajuda da declividade, o fundo será necessariamente horizontal. Porque no caso de que se lhe desse declividade, muito mais facilmente o excavaria, e pelo que temos visto o reduziria á situaçaõ horizontal. Seja, por exemplo, *AEBD* (Fig. 131.) a secçaõ vertical e longitudinal de hum rio, que no lugar proposto tem o fundo *EB* horizontal; e supponhamos, que adiante do ponto *B* a força da corrente se aumenta, ou por receber nova agua, ou por se estreitar a madre &c. Está claro, que ganhando a agua mais força excavará mais o fundo de *B* para diante, e ao mesmo tempo irá gastando o angulo *HBC*, e o fundo todo tomará a inclinaçaõ *HC*, a qual favorecendo a força da corrente fará restituir o fundo á posiçaõ *MCG* horizontal, ou quasi horizontal. Digo *quasi horizontal*; porque sendo a agua *AEBD* sustentada por *DFGC*, quando o fundo *EB* se abaixa para *MC*, naõ póde a superficie *AD* abaixar-se sem que as aguas *DFGC* caiaõ hum pouco sobre as aguas *AEBD*, o que diminue a velocidade da corrente, que por isso poderá naõ ter a força necessaria para restituir o fundo inteiramente á situaçaõ horizontal.

469 Póde logo succeder que hum rio que tem a força de manter

manter o fundo horizontal, em recebendo outro rio perca parte desta força, e requeira declividade; esta porém naõ he produzida pela elevaçaõ do fundo, mas por huma excavaçaõ real. Supponde que ella se representa por *E C*, e que corta *B E* no ponto *E*, he evidente que o rio terá ganhado outra vez no ponto *E* a altura primitiva, e a força de fazer o fundo horizontal. A declividade *E C* irá diminuindo, se o rio na vezinhança do ajuntamento se estreitar em virtude do obstaculo que lhe oppoem o rio afluente, porque entaõ o movimento perdido será mais que compensado pela maior pressaõ da agua e aumento da massa.

469 Seja *A D* (Fig. 132.) hum rio que tem simplesmente a força de conservar o fundo *C D* horizontal; e supponhamos, que em *D* se alarga, ou divide em muitos braços, de maneira que se reduz á altura *B E* menor que *A C*. Entaõ naõ terá força para manter o fundo horizontal; e se a corrente trouxer comsigo materias estranhas, formarse-ha sobre *DG* o aterro *D E F G*, com a superficie *EF* em declive. E porque a face *D E* naõ póde suster-se a prumo, o angulo *E* será levado, e se estabelecerá a aclividade *H L* terminada de huma parte no fundo horihorizontal *C H*, e da outra no declive *E F*. Donde se vê, que póde formar-se em *D* hum aterro, sem diminuir a força da agua *A H*, e sem o fundo *C H* deixar de ser horizontal.

Diminuindo a força da agua em quanto se fórma a escarpa *H L*, deveria elevar-se; mas como entaõ havia de cahir sobre *A B*, acha mais facilidade em se alargar e corroer as margens. Este alargamento tem lugar no espaço das margens fronteiro á escarpa *H L*, em quanto ella se estabelece, depois do que formando-se em *L* a declividade *L F*, e conservando-se a agua na mesma altura, a largura será tambem a mesma.

470 Temos visto (n. 466.) que sendo a resistencia do terreno constante, a declividade he tanto menor quanto a força da corrente he maior. Do mesmo principio se segue tambem, que sendo a força da corrente constante, quanto maior for a tenacidade do terreno, tanto maior será a declividade. E dahi nasce que os rios que correm sobre fundos de greda, ou de tufo, tem maior declividade do que os que correm sobre lodo, ou areia. Quando o fundo

he

he de materia que a agua naõ póde excavar, a declividade naõ se altera senaõ muito pouco pela continuaçaõ do tempo. E se o fundo naõ for igualmente resistente, a declividade mudará á proporçaõ da resistencia, conforme ao que temos explicado. Em tudo isto suppomos, que a declividade do fundo naõ permitte ás materias estranhas misturadas com a agua a liberdade de pararem, e se depositarem em algum lugar. Se isto succeder, resultaráõ muitas outras variações na profundidade, largura, e direcçaõ da madre, conforme os lugares onde se fizer esse deposito.

471 Supponhamos que hum rio, pela combinaçaõ da sua força com a resistencia do terreno, deveria estabelecer o fundo *AB* (Fig. 133.), e que este está cuberto com o triangulo *ABC* da mesma materia. He evidente, que a agua correndo sobre o fundo *CB* terá a força de o excavar; mas como o naõ póde fazer em hum instante, supponhamos que no tempo que gasta em levallo de *CB* até *DB*, recebe pela afluencia de huma torrente a materia que basta para restituir o fundo a *CB*; entaõ tornará a excavallo de novo até *DB*, e assim por diante; de maneira que o fundo naõ chegará jámais a *AB*, mas andará sempre alternativamente entre os limites *CB*, *DB*.

He de notar que a enchente do rio, e o abaixamento da madre produzem variedades na força da corrente, ainda que a quantidade da materia arrastada pela maior declividade *CB* no tempo da enchente seja igual á que he arrastada pela menor declividade *DB* quando a agua tem menos altura. Mas em tudo isto póde tomar-se hum meio arithmetico, e suppor-se que as excavações saõ proporcionais aos tempos em que saõ feitas.

472 Como a quantidade da materia conduzida ao rio pela afluencia da torrente augmenta ou diminue, conforme a torrente he mais ou menos copiosa, segue-se que o rio terá menos declividade quando for maior o intervallo entre duas cheias consecutivas da torrente, e quando estas forem menores, e durarem menos tempo. Mas por outra parte, tendo o rio mais força para excavar, quando he mais cheio e por mais tempo, a declividade do fundo será tanto menor quanto maiores forem as suas enchentes e durarem por mais tempo. Como pois a enchente do rio tanto em grandeza como em duraçaõ depende

pende da cheia da torrente, e como a primeira faz maior excavaçaõ, e a segunda traz maior copia de materia, será necessario examinar como estas duas causas se combinaõ em cada caso, para avaliar o effeito da que for superior.

473 Quando hum rio recebe de huma torrente tal quantidade de terra ou areia, que naõ póde incorporar-se com a agua, deposita-se no fundo, e fallo levantar: e cessando o curso da torrente, a materia depositada será excavada, e levada pelo rio pouco a pouco. Se para produzir este effeito, he necessario mais tempo do que media entre duas cheias da torrente, o fundo naõ poderá ser reduzido á menor declividade, que requer a força da agua e a resistencia do terreno; mas andará entre dous limites, da maior excavaçaõ que o rio póde fazer, e da maior elevaçaõ que a torrente póde produzir.

474 Tais saõ as leis gerais, que os rios observaõ na declividade. Examinemos agora a sua direcçaõ.

Todo o movimento he essencialmente rectilineo; e os rios, se nada os embaraçasse, caminhariaõ por huma linha recta desde a origem até a foz. Mas a resistencia desigual do terreno, os depositos que se formaõ pelas materias que a agua acarreta, os obstaculos naturais ou artificiais que encontra, produzem no fundo e nas margens bojos, cotovelos, e tortuosidades de toda a especie.

475 Seja *ACDEB* (Fig. 134.) a secçaõ latitudinal de hum rio rectilineo, cujo fundo actual he mais resistente na parte *DE* que em *CD*; e supponhamos que a força da corrente basta simplesmente para impedir que se depositem as novas materias conduzidas pela agua, e que a resistencia da parte *DE* basta simplesmente para impedir a excavaçaõ. Neste caso a parte menos resistente *CD* cederá, e se profundará, por lhe ser necessaria menor declividade para resistir á separaçaõ do terreno. Supponhamos pois que a agua tem excavado até *FD*; he evidente, que havendo adquirido maior altura *FG*, ainda terá mais força para excavar. Porem neste tempo deve necessariamente diminuir a altura da agua em *HI* de huma quantidade conveniente á parte *CDF* de que a secçaõ do rio se tem augmentado; logo sendo pela hypothese a velocidade primitiva em *I* simplesmente bastante para impedir o deposito das materias estranhas, agora naõ será

capaz

capaz deste effeito. Assim levantar-se-ha o fundo *DE* para *DK*, e será a nova secçaõ do rio *ACFDMKB*. A maior velocidade da agua será para a parte da margem *AC*, a qual será necessariamente gastada; quando pelo contrario a margem *EB* distando cada vez mais da veia da agua receberá os depositos das materias estranhas, e o rio perderá neste lugar a sua direcçaõ rectilinea.

476 Seja *BDFC* (Fig. 135.) a secçaõ rectangular estabelecida de hum rio em hum terreno uniforme, a qual por conseguinte naõ póde mudar-se em quanto a agua for pura, e na mesma quantidade. Sendo a velocidade nas margens menor que no fundo, e supponde que a velocidade primitiva no ponto *E* he simplesmente a que basta para impedir o deposito de materias estranhas, he manifesto que entrando no rio alguma quantidade dellas deveráõ formar hum deposito para a parte das margens, e a secçaõ se fará mais pequena. Entaõ fazendo-se maior a altura da agua sobre o ponto *E* entrará a excavar até *K*; e resultando da maior profundidade da secçaõ huma velocidade maior em todos os pontos della, a força primitiva da corrente, que estava em equilibrio com a resistencia das bordas, agora começará a gastallas, e a secçaõ se alargará pela parte superior tomando a forma *ROKHG*.

Combinando os effeitos, que resultaõ do deposito de materias estranhas, com os da resistencia desigual do terreno, daremos a rasaõ de muitas desigualdades, que se observaõ tanto na direcçaõ, como na profundidade dos rios.

477 Supponhamos que hum rio *AXDC* (Fig. 136.) rectilineo, ou tortuoso, encontra o lanço de hum dique ou açude *BE*, situado obliquamente sobre a borda *AX*. Se as particulas que ferem este muro fossem insuladas e elasticas, ou se o muro fosse perfeitamente elastico, cada huma dellas reflectiria fazendo o angulo de reflexaõ igual ao de incidencia. Ainda que esta supposiçaõ naõ he admissivel em rigor, póde com tudo empregar-se para conhecer proximamente o movimento reflexo da agua.

Seja pois *GH* hum fio de agua, que reflecte por *HL* fazendo o angulo *EHL* igual a *GHB*. Encontrando *HL* o fio vezinho *SF* no ponto *F*, este ponto será sollicitado pelas direcções *FM*, *FL*, e descreverá a diagonal *FN*. Esta, encontrando o muro em *P* será reflectida por *PO*; e assim por diante. Deste modo conheceremos o movimen-

to

to, que o obſtaculo *B E* faz tomar a corrente. He evidente, que elle tende a dirigir a corrente para a margem oppoſta por huma direcçaõ mais ou menos obliqua, e que o effeito depende da ſua poſiçaõ combinada com a velocidade primitiva da agua; donde devem reſultar as mudanças proporcionadas na madre. Naõ me demoro em examinallas por miudo, pois ſe achaõ diſcutidas amplamente na Peça ſobre a conſtrucçaõ mais ventajoſa dos Diques, compoſta em commum por M. Viallet e por Mim, a qual ganhou o premio quadrupulo da Academia de Toloſa em 1762. Para ella remettemos o Leitor, que ſe quizer inſtruir mais profundamente ſobre eſta materia.

Do movimento dos rios na ſua embocadura; e da uniaõ, e ſeparaçaõ delles.

478 QUando a ſuperficie de hum rio ſe acha em eſtado permanente, iſto he, quando naõ ſe levanta nem abaixa, paſſaõ neceſſariamente no meſmo tempo quantidades iguais de agua por quaiſquer ſecções delle perpendiculares á direcçaõ da corrente. Donde ſe ſegue, que ſe hum rio permanece eſtavel na embocadura, deſpeja preciſamente tanta agua quanta recebe nas partes ſuperiores; ſe a ſuperficie ſe levanta, deſpeja menos do que recebe, e a differença produz a elevaçaõ; e ſe a ſuperficie ſe abaixa, deſpeja mais do que recebe, e o exceſſo produz a depreſſaõ.

479 Póde ſucceder que hum rio ſe deſpeje cahindo de certa altura, como ſe vê nas catadupas. Entaõ a deſcarga ſe faz livremente, e ceſſando na queda a reſiſtencia do fundo e das margens, a agua diminue no volume e aumenta na velocidade; aceleraçaõ, que ſe communica á agua ſuperior, e que lhe faz inclinar mais a ſuperficie ao horizonte. Mas como os rios, que tem o fundo ſuſceptivel de excavaçaõ, naõ admittem catadupas, ordinariamente ſe ajunta a ſuperficie do rio com a da reſerva em que ſe deſpeja, de maneira que as duas ſuperficies ſe pódem conſiderar como dous planos, que ſe cortaõ no lugar da embocadura. Eſta interſecçaõ varîa de lugar, conforme o rio leva mais ou menos agua, mas a mudança naõ paſſa de certos limites; e póde tomar-ſe hum termo medio

ćlio entre as ſuas excurſões por interſecçaõ conſtante das duas ſuperficies.

Tudo iſto he applicavel aos rios, que ſe lançaõ em alagoas, ou em outros rios. Os que entraõ em hum mar ſujeito a marés tem alguma differença. A enchente repreza as aguas do rio, e as faz ſubir até certa altura, as quais tornaõ no tempo da vaſante á ſua direcçaõ primitiva. Aſſim anda a interſecçaõ das duas ſuperficies ſempre em movimento, e naõ póde attribuir-ſe-lhe lugar fixo.

480 A agua de hum rio, que entra em outro, experimenta huma reſiſtencia, que naõ he facil de avaliar exactamente. Sejaõ $ABCD$, $ECGF$ (Fig. 137.) dous rios que ſe unem em CMN; e imaginemos, por hum momento, em CN hum muro que ſepare as duas maſſas de agua. He evidente, que a preſſaõ contra o muro he igual de ambas as partes; e conſeguintemente, que as duas maſſas naõ obraõ entre ſi, ſenaõ em virtude das ſuas velocidades de translaçaõ. Deſta percuſſaõ deve naſcer huma velocidade, cuja direcçaõ dividirá o angulo DCE em partes iguais ou deſiguais, conforme os rios ſe encontrarem com forças iguais ou deſiguais. Alguns autores tem procurado determinações exactas deſtes movimentos, pelas leis da percuſſaõ dos fluidos; mas elles ſaõ taõ complicados em ſi meſmos, e taõ alterados por differentes circunſtancias phyſicas, que naõ poderáõ ſer jamais reduzidos a formulas, ſenaõ de hum modo muito imperfeito.

481 Diminuindo a declividade dos rios á medida que ſe chegaõ para o mar, o fundo ſe faz ſenſivelmente horizontal, e a agua corre para os lugares que lhe offerecem mais facilidade, aumentando em ſuperficie, e diminuindo em altura; e aſſim ſe forma nas embocaduras huma eſpecie de banco, ou barra, onde a agua tem pouca altura. Havendo marés, a enchente tende a tranſportar para cima a terra que forma a barra, e o rio na vaſante tende a reſtituilla ao primeiro eſtado, até que o conflicto das duas correntes contrarias faz tomar ao fundo do rio huma forma permanente, propria para eſtabelecer huma eſpecie de equilibrio entre os effeitos reciprocos que ellas produzem.

Na Fig. 138, que he hum perfil do rio e do mar, tomado ao longo do rio, a curva DEF repreſenta o fundo do do rio *ABED*, e do mar *CBEF*, ſendo *E* o ponto mais alto da barra. Póde *B E* conſiderar-ſe como huma abertura, por onde paſſaõ ſucceſſivamente as duas correntes que havemos dito. Eſta abertura toma a altura conveniente ás forças que a eſtabelecem, e tem por elementos principais das ſuas dimenſões, a quantidade da agua do rio, a ſua velocidade, e a elevaçaõ da preamar.

482 Ainda que os depoſitos das materias trazidas pela agua pódem produzir algumas mudanças na figura e dimenſões da barra, naõ ſaõ com tudo as cauſas primordiais della, como ordinariamente ſe penſa. Quando as aguas foſſem perfeitamente puras, ſempre na embocadura ſe formaria huma eſpecie de banco mais ou menos ſenſivel, da maneira e pela raſaõ que havemos expoſto. Tambem as areias tranſportadas pelos ventos formaõ algumas vezes grandes aterros ou dunas nas embocaduras, que fazem mudar a corrente dos rios, e a poſiçaõ das barras.

483 Ha hum famoſo banco na embocadura do Adur abaixo de Bayona. Para o deſtruir ou diminuir, muitas vezes ſe tem mudado a corrente do rio por meio de marachões obliquos, que naõ tiveraõ effeito perduravel, até que em fim ſe determinou em 1729 encanallo deſde a aldeia *Boucau* até o mar entre dous longos diques de alvenaria, que foraõ logo principiados, e que ainda ſe naõ acabáraõ. Eſta obra interrompida e continuada por varias vezes, naõ tem chegado até o preſente (1769) ſenaõ a produzir 6 até 7 pés de altura na baixamar. Como a preamar ſobe de 11 até 12 pés, a barra tem 18 pés de altura neſte ponto, a qual ſeria baſtante para receber grandes embarcações, ſe foſſe bem franca. Mas como na entrada das barras naõ ſe póde eſperar o ponto juſto da preamar, e como ſe deve abater alguma couſa em raſaõ das ondas, naõ ſe deve contar mais que por 12 pés de altura na preamar, a qual naõ he baſtante, e ainda ſe procura aumentar.

He certo, que o melhor meio de o conſeguir he encerrar o rio entre dous diques rectilineos, que ſe produzaõ hum pouco avante pelo mar dentro; porque aumentando-ſe a velocidade do rio combate mais ventajoſamente a corrente contraria do mar, e o fundo toma a fórma *DHe*, tranſportando-ſe o ponto *E* para *e* onde lhe correſponde a

altura

altura Ce maior que BE. Seria conveniente, que descendo para o mar diminuisse a largura do canal, porque assim aumentaria a agua do rio no tempo da vasante cada vez mais em velocidade e profundidade, e a do mar pelo contrario no tempo da enchente diminuiria cada vez mais. Huma precauçaõ essencial nestas obras he levar os diques sempre emparelhados, ou estabelecer huma especie de equilibrio entre as suas partes correspondentes. Por falta desta advertencia, as obras que se fazem de huma banda lançaõ a agua para a outra, e formaõ entulhos, que depois he necessario tirar com grandes despezas, para formar o dique opposto.

As mesmas observaçoens se applicaõ, guardada a proporçaõ, á embocadura de dous rios, que saõ sujeitos a encher e diminuir em tempos differentes, como succede de ordinario. Na sua embocadura se fórma huma especie de fluxo e refluxo, que produz effeitos semelhantes aos do mar.

484 Supondo hum mar izento de marés, ou prescindindo dellas, os rios que nelle entraõ no tempo das cheias levantaõ-se menos na embocadura do que nas partes distantes. Porque a agua de hum rio na embocadura naõ se levanta acima do livel da superficie do mar, e esta naõ se eleva senaõ insensivelmente pela agua que recebe do rio afluente. Assim deve a superficie do rio no tempo das cheias formar com o prolongamento da superficie do mar hum angulo maior. Quando pois se vê, que hum rio cresce huma certa quantidade nas vezinhanças da foz, póde concluir-se que tem crescido muito mais sensivelmente nas partes superiores.

485 Daqui se entenderá a rasaõ de hum phenomeno assaz notavel. Hum pequeno rio desagua em outro maior, que conserva a mesma quantidade de agua ou o mesmo livel, e que entra pela foz do primeiro, de sorte que a agua se acha como estagnada no rio pequeno por hum largo espaço desde a sua embocadura. De repente ha huma grande cheia no pequeno rio; e sem embargo a superficie da agua na vezinhança da foz naõ se levanta mais do que antes. Porque a agua se eleva entaõ nas partes superiores do pequeno rio, e dando impulso á da vezinhança da embocadura accelera a sua velocidade.

486 Supondo agora que hum rio tem sempre a mesma

quantidade de agua, a ſua velocidade ſerá retardada, e a agua ſubirá a maior altura na vezinhança da foz do que nas partes ſuperiores, quando a maré encher. Porque ſendo *BR* (Fig. 139.) a ſuperficie do mar, e e *BF* a embocadura do rio, eſtá claro que ſe a ſuperficie *BR* ſe levantar para *AT*, a agua do mar reſiſtirá ao movimento do rio, e a ſuperficie delle *EB* ſe levantará no ponto *D* onde encontra a ſuperficie do mar *TAM*, e tomará conſeguintemente a poſiçaõ *EK*. E como a reacçaõ do mar naõ paſſa de certa extenſaõ, e ſe pelo ponto *M* onde a horizontal *TAM* encontra o fundo do rio ſe conduzir a ſecçaõ *ME* perpendicular á direeçaõ da corrente, o ponto *E*, quando menos, eſtá fóra deſta reacçaõ; he viſivel, que a ſuperficie *EK* eſtá mais elevada na ſecçaõ *KDG* do que em qualquer outra entre os pontos *E*, K, e com mais forte raſaõ adiante do ponto E.

487 Igualmente ſe vê, que á medida que ſe elevar a ſuperficie *AT*, o ponto *K* ſe elevará tambem, e correrá mais para dentro do rio. Eſte ponto K naõ deve conſiderar-ſe em todos os caſos como a interſecçaõ de duas linhas. Algumas vezes a ſuperficie do mar he muitos pés mais elevada que a do rio, e toma hum movimento muito conſideravel por elle acima, como ſuccede no Sena até muitas leguas acima de Ruaõ. O meſmo, guardada a proporçaõ, ſe obſerva na embocadura de dous rios confluentes, quando hum delles enche ſem o outro encher ao meſmo tempo, e na meſma proporçaõ.

488 Quando dous rios ſe unem, e naõ formaõ mais que hum ſó, a largura do *compoſto* he ſempre menor que a ſoma das larguras dos rios *ſimples* antes da uniaõ; porque a ſuperficie, que reſiſte á corrente do rio compoſto, he neceſſariamente menor que a ſoma das ſuperficies, que reſiſtiaõ á corrente dos rios ſimples. Suppondo pois que a velocidade junto ás margens he a meſma em ambos os caſos, a veia da agua ſerá mais rapida no rio compoſto, e as materias eſtranhas conduzidas pela agua ſe depoſitaráõ nas margens. Donde ſe ſegue que a madre ſe eſtreitará e profundará proporcionalmente; e aſſim reſultará maior altura de agua, e conſeguintemente maior velocidade. Tudo iſto he conſtante pela experiencia. Vemos muitos rios, principalmente quando tem pouca declividade, receber outros ſem parecerem augmentar ſenſivelmente de volume; mas a velocidade ſe faz maior. 489

489 Aſſim como dous rios, que ſe ajuntaõ, podem ter, e tem ordinariamente quantidades de agua, declividades, e velocidades muito differentes; do meſmo modo, quando hum rio ſe divide em muitos braços, eſtes teraõ quantidades de agua, declividades, e velocidades differentes, conforme as circunſtancias. Naõ he pois de admirar, que quando hum rio ſe divide na ponta de huma ilha, os dous braços ſe naõ conſervem ſempre no meſmo livel. Cada livel particular póde abaixar-ſe, ou elevar-ſe a reſpeito dos outros, conforme a agua pela ſua quantidade e declividade achar mais ou menos facilidade na corrente.

490 Em 1760 appareceu hum pequeno Tratado ſobre a corrente dos rios, cujo autor pertende que he indifferente, quanto á altura de hum rio, aumentar ou diminuir o ſeu volume, porque a velocidade creſce, ao ſeu entender, proporcionalmente ás quantidades da agua. E daqui combate rijamente o uſo ordinario de ſangrar hum rio, com o fim de o fazer abaixar, e prevenir as inundaçoens, que póde cauſar nos campos vezinhos.

491 Eſte ſyſtema, que tem enganado algumas peſſoas, deve reduzir-ſe aos limites que permitte a verdade, os quais ſaõ muito eſtreitos. A hypotheſe em que ſe funda, que *as velocidades creſcem como as quantidades da agua*, naõ he exacta (n.435.). He certo, que aumentando-ſe a quantidade da agua tambem ſe aumenta a velocidade, naõ porém na meſma raſaõ. Nos rios que tem pouca declividade, cujo livel he ſenſivelmente o meſmo que o do mar, como ſuccede na vezinhança da embocadura, naõ ſe fará abaixar o livel ſenſivelmente, ainda que elles ſe repartaõ em muitos braços. Seja por exemplo, o rio *AB* (Fig. 140.), cujo livel he o meſmo que o do mar *GHEF*. Eſtá claro, que fazendo as novas aberturas *CF*, *DE*, as aguas naõ abaixaráõ por iſſo na parte *ACD*, ou ao menos naõ abaixaráõ ſenaõ na raſaõ da ſoma das ſuperficies *CF*, *DE* para a ſoma das ſuperficies *AB*, *GHEF*, que he huma quantidade inſenſivel. Donde concluiremos, que as ſangrias feitas em hum rio perto da embocadura, ou em geral em todo o rio que tem pouca declividade, devem produzir ordinariamente ventagens pouco conſideraveis. Mas ſe o rio tiver huma declividade e velocidade ſenſivel, he ſem duvida que creſcendo a quantidade de agua, tambem creſce a altura; e reciprocamente, que póde abaixar-ſe conſideravelmente de livel, por meio das ſangrias.

492

492 Algumas vezes he neceſſario derivar certa quantidade de agua de hum rio, e quer-ſe ſaber, quanto elle ha de diminuir de altura, porque he de pouco cabedal, e naõ ſe lhe quer tirar a qualidade de navegavel. Eiſaqui a ſoluçaõ, primeiramente na hypotheſe de que o rio, e o canal de derivaçaõ ambos ſaõ rectangulares.

493 Seja $ABCD$ (Fig. 141.) a ſecçaõ horizontal do rio, $EFHG$ a do canal, e ſupponhamos que o rectangulo $MOPN$ (Fig. 142.) repreſenta a ſecçaõ vertical e latitudinal do rio, ſendo MN o livel da agua antes da exiſtencia do canal de derivaçaõ, e VX depois de ſer eſtabelecido o dito canal, cuja ſecçaõ vertical e latitudinal repreſentamos pelo rectangulo $SQRT$. He evidente, que a ſoma das quantidades de agua que paſſaõ em hum tempo dado t pelas duas aberturas $VOPX$, $SQRT$ deve ſer igual á que paſſava no meſmo tempo pela abertura $MOPN$. Aſſim fazendo $MO = H$, $OP = c$, $SQ = H'$, $QR = c'$, preſcindindo dos obſtaculos, e ſuppondo que a velocidade na ſuperficie da corrente he como inſenſivel, e conſeguintemente que a velocidade em cada ponto da profundidade he devida á altura correſpondente da agua, ſerá a quantidade de agua que paſſa pela abertura $VOPX = \frac{4}{3} tcH' \sqrt{aH'}$ (n. 245.), a que paſſa por $SQRT = \frac{4}{3} tc'H' \sqrt{aH'}$, e a que paſſava por $MOPN = \frac{4}{3} tcH \sqrt{aH}$. Logo teremos

$$cH' \sqrt{H'} + c'H' \sqrt{H'} = cH \sqrt{H}.$$

E porque a quantidade de agua, que deve ſer derivada no tempo t, ſe ſuppoem dada, deſignando-a por q, teremos $q = \frac{4}{3} c'tH' \sqrt{aH'}$; e combinando eſta equaçaõ com a precedente, acharemos as duas incognitas H', c' pelas duas equaçoens ſeguintes

$$H' = \sqrt[3]{\frac{(4tcH\sqrt{aH} - 3q)^2}{16 t^2 c^2 a}},$$

$$c' = \frac{3cq}{4tcH\sqrt{aH} - 3q}.$$

Aſſim

Assim conheceremos a largura e profundidade do canal de derivaçaõ ; e juntamente a quantidade $H - H'$ que o livel do rio se ha de abaixar.

494 O problema seria igualmente facil de se resolver, se naõ suppuzessemos que a velocidade de cada fio da corrente era devida á altura que lhe corresponde, mas fixassemos a altura media da mesma corrente, como fizemos no n.º 463. Deixamos este calculo ao Leitor.

495 Como os rios naõ tem já mais a fórma rectangular, a soluçaõ precedente naõ he applicavel á practica, senaõ por meio de algumas operaçoens preliminares, as quais será conveniente que indiquemos aqui. Seja em geral $MFGHIKN$ (Fig. 143.) a secçaõ vertical e latitudinal de hum rio. Havendo dividido a largura MN em grande numero de partes iguais MA, AB, BC, CD, DE, EN, medir-se-haõ com a sonda as alturas correspondentes AF, BG, CH, DI, EK. Entaõ considerando os pequenos arcos MF, FG, GH &c como linhas rectas, e a secçaõ como hum polygono rectilineo, a area delle será $= (AF + BG + CH + DI + EK) MA$, isto he, igual ao producto da soma das profundidades multiplicada por hum dos intervallos iguais da largura. Dividindo este producto pela largura inteira MN, supondo que a vertical MO representa o quociente, e acabando o rectangulo $MOPN$, a area delle será igual á do polygono. Isto posto, poderemos na practica, sem receio de erro attendivel, considerar o rectangulo $MOPN$ como a secçaõ do rio ; e supondo que pela derivaçaõ o livel deste rectangulo se abaixa até VX, a secçaõ real do rio depois da derivaçaõ será o polygono $mFGHIKn$, e o abatimento do livel será MV sensivelmente. Do mesmo modo se praticaria com o canal de derivaçaõ, se elle naõ houvesse de ser rectangular.

O mesmo methodo se póde applicar ao problema, que acima resolvemos n.º 460, e seg.

CAPI-

CAPITULO VII.

Da percussaõ dos fluidos.

496 QUando hum fluido em movimento encontra hum corpo, ou obstaculo, necessariamente emprega contra elle certa quantidade de força; porque as particulas do fluido saõ tambem pequenos corpos, que multiplicados pela sua velocidade compoem huma quantidade determinada de movimento. Se o fluido estiver em quietaçaõ, e vier hum corpo a encontrallo com certa velocidade, a *resistencia* que o fluido lhe deve oppor será igual a *percussaõ* que exercitaria contra elle, se o fluido se movesse com a velocidade do corpo, e este estivesse em quietaçaõ. Isto he evidente por si mesmo. A percussaõ, e a resistencia dos fluidos seguem pois as mesmas leis, e medem-se do mesmo modo.

497 Todos sabem a distinçaõ das forças mortas, e vivas. As primeiras saõ simples pressões, que naõ produzem velocidade actual finita, senaõ depois de haverem obrado por hum tempo finito; e as outras, que tambem se chamaõ forças de percussaõ, produzem huma velocidade finita, e actual, e podem considerar-se como somas de infinitas pressões accumuladas. He evidente, que toda a força de pressaõ póde medir-se por hum pezo, porque o pezo naõ he outra cousa, senaõ huma massa sujeita á acçaõ da gravidade, a qual he huma força de pressaõ. Quanto ás forças de percussaõ, suppondo-se que produzem o seu effeito em hum instante, seraõ infinitas em comparaçaõ das pressões, e naõ poderáõ medir-se por pezo algum. Mas naõ se entende, como a força de hum corpo, que he huma quantidade finita, póde em hum instante produzir hum effeito finito, isto he, imprimir em outro corpo huma quantidade determinada de movimento. Toda a communicaçaõ de movimento se faz em hum tempo finito, ainda que seja de huma brevidade inperceptivel aos nossos sentidos. Podemos pois considerar em geral as forças de percussaõ obrando por degraos como as da pressaõ, e naõ produzindo o seu effeito senaõ em hum tempo finito, ainda que summamente breve. Entaõ podem medir-se por pezos; porque a gravidade applicada a hum corpo por hum

hum tempo finito produz huma força viva capaz de fazer equilibrio a outra força viva ; e assim quando hum fluido fére qualquer corpo , a percussaõ que exercita contra elle he sempre reductivel a hum certo pezo.

498 He muito difficultoso determinar as leis da percussaõ dos fluidos de hum modo exacto , e applicavel á practica. Até agora naõ se tem achado huma theorica , que satisfaça perfeitamente nesta parte. A que se segue ordinariamente , e que tem a ventagem de ser muito simples , suppoem que o fluido he composto a cada instante na direcçaõ do seu movimento de huma infinidade de fios parallelos , cada hum dos quais dá o seu golpe , sem se embaraçarem huns aos outros ; o que naõ póde ter lugar em rigor , e em certos casos conduz a resultados muito distantes da verdade , para se poderem admittir. Dous motivos com tudo me obrigaõ a expôr aqui esta theorica. O primeiro , porque facilitará aos Leitores a intelligencia de muitas obras de Architectura Naval , ás quais serve de fundamento. O segundo , porque póde servir , sem erro attendivel, no calculo das maquinas, que se movem por meio de rodas , impellidas pela acçaõ da agua , ou do ar ; objecto importante , que principalmente temos em vista neste lugar. Porém depois de a expormos , referiremos varias experiencias , pelas quais se verá em que casos póde a dita theorica ser admittida , ou deve ser absolutamente rejeitada.

Theorica ordinaria da percussaõ dos fluidos.

499 S*E o mesmo fluido MXGN* (Fig. 144.) , *cujas particulas se movem todas com igual velocidade , ferir perpendicularmente os dous planos AB , AR, as forças das impulsões seraõ entre si na rasaõ dos mesmos planos.*

Porque , movendo-se todas as moleculas do fluido pelas direcções *IK* , *OR* &c perpendiculares aos planos propostos , a impulsaõ sobre *AB* he para a impulsaõ sobre *AR* , como o producto do numero das moleculas , que ferem *AB*, multiplicado pela sua velocidade , para o producto do numero das moleculas, que ferem no mesmo tempo *AR* , multiplicado pela velocidade. Porém as massas que ferem

ferem os dous planos em tempos iguais saõ dous prismas, que tem por base os mesmos planos, e por altura commua a velocidade do fluido. Logo a impulsaõ contra *AB* he para a impulsaõ contra *AR*, como o plano *AB* para o plano *AR*.

500 *Se dous fluidos da mesma especie MXZN (Fig. 144), e EGHF (Fig. 145.) movidos com differentes velocidades, ferirem perpendicularmente os dous planos AB, CD em quietaçaõ, as forças das impressões seraõ entre si como os planos multiplicados pelos quadrados das velocidades dos fluidos.*

Porque supppondo a impulsaõ contra $AB = F$, contra $CD = f$, a massa que fere $AB = M$, a que fere $CD = m$, a velocidade da primeira $= V$, a da segunda $= u$, teremos $F : f :: MV : mu$. Porém as massas M, m da mesma especie saõ entre si na rasaõ dos volumes, e os volumes na rasaõ composta das bases AB, CD e das velocidades V, u que representaõ as alturas; logo $M : m :: AB.V : CD.u$, e por conseguinte $MV : mu :: AB.V^2 : CD.u^2$. Mas temos $F : f :: MV : mu$; logo $F : f :: AB.V^2 : CD.u^2$.

501 Deve notar-se, que se os fluidos naõ fossem da mesma especie, a rasaõ das densidades deveria entrar na rasaõ das massas. *Entaõ as percussões seraõ na rasaõ composta dos planos, das densidades dos fluidos, e dos quadrados das velocidades dos mesmos fluidos.*

fl —

502 Note-se tambem, que todas as moleculas do mesmo fluido se suppoem animadas da mesma velocidade. Se assim naõ for, deverá tomar-se a velocidade *media*, como se fosse a de todo o fluido.

503 Se os planos AB, CD se moverem uniformemente, sendo sempre perpendiculares ás direcções dos fluidos, he igualmente facil de achar a rasaõ das impressões.

Supponhamos, que em hum tempo dado o plano AB com a sua velocidade uniforme, e primitiva chegaria a ab, e o plano CD com a sua a cd, de maneira que sejaõ as suas velocidades representadas por KT, PQ; e por VT, LQ, as velocidades contemporaneas dos dous fluidos. He facil de ver, que as impressões sobre os planos AB, CD seraõ como se elles estivessem em quietaçaõ, e os fluidos viessem a encontrallos somente com as velocidades VK, LP, porque os planos se subtrahem á percussaõ com as velo-

velocidades KT, PQ. Deſignando pois a velocidade VT por V, KT por V', LQ por u, PQ por u', e as impulſões por F,f; teremos $F:f::AB\,(V-V')^2:CD\,(u-u')^2$.

Do meſmo modo ſe vê, que ſe os planos em lugar de fugir directamente os fluidos, vieſſem a encontrallos com as velocidades V', u', teriamos $F:f::AB\,(V+V')^2:CD\,(u+u')^2$. Aſſim reunindo os dous caſos, ſerá $F:f::AB\,(V\mp V')^2:CD\,(u\mp u')^2$.

504 Póde ſucceder, que hum dos planos, por exemplo AB, eſteja em quietaçaõ. Entaõ $V'=0$, e a proporçaõ ſe reduzirá a $F:f::AB.V^2:CD\,(u\mp u')^2$; donde ſe tira $f=\dfrac{F.CD.(u\mp u')^2}{AB.V^2}$, formula que ſervirá para comparar a impulſaõ perpendicular ſobre hum plano, que ſe move, com a impulſaõ perpendicular ſobre outro, que eſtá em quietaçaõ.

505 *Se o fluido $MXZN$ (Fig. 144.) ferir perpendicularmente o plano AB em quietaçaõ, e o fluido $EGHF$ (Fig. 146.) obliquamente o plano CD tambem em quietaçaõ, a impulſaõ ſobre o primeiro ſerá para a que reſulta perpendicularmente ſobre o ſegundo na raſaõ compoſta dos planos, dos quadrados das velocidades dos fluidos, e da raſaõ do quadrado do raio para o quadrado do ſeno do angulo de incidencia RCD.*

Porque ſendo a impulſaõ ſobre $AB=F$, ſobre $CD=f$, a velocidade do fluido $MXZN=V$, de $EGHF=u$, a maſſa que fere $AB=M$, a que fere $CD=m$, a ſua velocidade perpendicular a $CD=u'$, o ſeno total $=R$, e o ſeno do angulo $RCD=p$, teremos primeiramente $F:f::MV:mu'$. E porque, conduzindo a recta DR perpendicular á direcçaõ do fluido CR, he evidente que o numero das moleculas que ferem DC he o meſmo que o das que ferem DR, teremos $M:m::AB.V:DR.u::AB.V:CD.\frac{p}{R}.u::AB.V.R:CD.u.p$. Além diſto, ſuppondo que $ny=u$ repreſenta a velocidade do fluido $EGHF$, e reſolvendo-a em duas, huma $nt=u'$ perpendicular ao plano, e a outra nr que lhe he parallela, e que naõ contribue nada para a percuſſaõ, teremos $u':u::ry:ny::p:R$, e

$u' = u . \frac{p}{R}$. Logo ferá $MV : mu' :: AB.V^2 . R : CD.$

$u^2 . \frac{p^2}{R} :: AB.V^2.R^2 : CD.u^2.p^2$, e conſeguintemente

$F : f :: AB.V^2.R^2 : CD.u^2.p^2$.

506 Quando as velocidades V, u ſaõ iguais, temos ſimpleſmente $F : f :: AB.R^2 : CD.p^2$, iſto he, *ſaõ as forças na raſaõ composta da raſaõ dos planos, e da raſaõ do quadrado do raio para o quadrado do ſeno do angulo da incidencia.*

507 Deſignando a ſuperficie AB por A, CD por B, e ſuppondo hum terceiro plano C que ſeja ferido obliquamente por outro fluido com a velocidade v debaixo de hum angulo de incidencia, cujo ſeno ſeja $= q$, e deſignando por Φ a força que reſulta perpendicularmente ao dito plano, teremos

$$F : f :: A.V^2.R^2 : B.u^2.p^2 ,$$
$$\Phi : F :: C.v^2.q^2 : A.V^2.R^2 ;$$

e multiplicando por ordem eſtas duas proporções, reſultará $\Phi : f :: C.v^2.q^2 : B.u^2.p^2$. Donde ſe ſegue, que *as percuſſões obliquas ſaõ entre ſi na raſaõ composta dos planos, dos quadrados das velocidades, e dos quadrados dos ſenos dos angulos de incidencia.*

508 Supponhamos agora, que eſtando o plano AB (Fig. 144.) em deſcanço, quando he ferido perpendicularmente pelo fluido, o plano CD (Fig. 147.) ſe move parallelamente a ſi meſmo por qualquer direcçaõ Cc ou Dd, quando he ferido obliquamente pelo fluido. Tomando ſobre a direcçaõ do fluido a recta LQ para repreſentar a ſua velocidade, e reſolvendo-a em outras duas, huma LI igual e parallela a Cc, e a outra LK, eſtá claro que a velocidade LK he a unica, pela qual o fluido obra contra o plano, e que a percuſſaõ ſerá como ſe o plano CD eſtiveſſe em quietaçaõ, e o fluido vieſſe a ferillo pela direcaaõ RLK com a velocidade LK. Logo deſignando eſta velocidade por v, o ſeno do angulo RLD por m, e a força que reſulta perpendicularmente ao plano CD por f, teremos $F : f :: AB.V^2.R^2 : CD.v^2.m^2$ (n.505.).

509 Agora do ponto K abaixe-ſe KT perpendicular a LQ; e fazendo a velocidade $LQ = u$, a velocidade LI ou $KQ = u'$, o ſeno do angulo KQT ou $QLI = n$, o ſeu coſeno $= p$, o ſeno do angulo $QLC = q$, e o ſeu

coſe-

coseno $= r$, será $KT = \frac{nu'}{R}$, $QT = \frac{pu'}{R}$, $LT = u - \frac{pu'}{R}$.
E porque o angulo KLC he a differença dos angulos QLC, QLK, teremos $m = q\frac{LT}{LK} - r\frac{KT}{LK} = \frac{q}{v}\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{r}{v}.\frac{nu'}{R}$. Logo $m^2 v^2 = \left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$; e substituindo este valor na propo^r^ção do nº precedente, será finalmente $F : f :: AB.V^2 . R^2 : CD\left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$.

510 Havendo-se assim apprendido a comparar entre si as differentes especies de percussões dos fluidos, naõ he necessario mais que conhecer a medida absoluta de huma dellas, para concluir a de todas as outras. Como a percussaõ perpendicular contra hum plano immovel he a mais simples de todas, he muito natural o tomalla aqui por unidade fundamental. Esta he conhecida pela Taboa seguinte, que tiramos de M. Bouguer (*Manœuvre des Vaisseaux pag.* 185.).

Por meio della, e da theorica precedente, póde determinar-se a impulsaõ da agua sobre huma superficie plana *dada*, conhecendo-se o angulo da incidencia, a velocidade da agua, e a da mesma superficie no caso de naõ estar em quietaçaõ ao tempo que he ferida pela agua. Quanto ás impulsões dos outros fluidos, tambem se acharáõ, conhecendo-se a rasaõ das suas densidades com a da agua. Supponđo, por exemplo, que a densidade do ar he $\frac{1}{850}$ da densidade da agua, se dividirmos cada huma das impulsões da Taboa por 850, teremos as impulsões correspondentes do vento.

Impul-

Impulsões da agua sobre a superficie plana de hum pé quadrado, ferida perpendicularmente.

Velocidade em hum segundo	Impulsoens		Velocidade em hum segundo	Impulsoens	
Pés	*Libr.*	*onç.*	*Pés*	*Libr.*	*onç.*
1	1	3	13	203	0
2	4	13	14	235	0
3	10	12	15	270	0
4	19	3	16	300	0
5	30	0	17	334	0
6	43	0	18	389	0
7	59	0	19	434	0
8	75	0	20	480	0
9	97	0	21	529	0
10	120	0	22	580	0
11	145	0	23	635	0
12	172	0	24	688	0

Para mostrar o uso da theorica, faremos algumas applicações gerais nos Exemplos seguintes.

511 Exemplo I. *Sendo o triangulo isosceles* ACB (Fig. 148.) *exposto á percussaõ de hum fluido, cuja direcçaõ he perpendicular á base* AB, *determinar a rasaõ entre a impulsaõ que ha de receber parallelamente á sua altura* CD, *e a impulsaõ directa que receberia perpendicularmente sobre a base* AB.

Designando por F a impulsaõ directa contra AD ou DB, e por f a impulsaõ que resulta perpendicularmente sobre AC ou CB, temos $F : f :: AD \,.\, R^2 : AC \,.\, sen\, ACD^2$ (n.506.), ou $F : f :: AD \,.\, AC^2 : AC \,.\, AD^2 :: AC : AD$, e por conseguinte $f = \frac{F \,.\, AD}{AC}$. Representando esta força pelas rectas RF, rf, e resolvendo cada huma dellas em duas

duas huma RE ou re parallela a CD, e a outra RH ou rb parallela a AB, he evidente que as forças RH, rb iguais e contrarias saõ destruidas, e que as forças RE, re constituem o effeito total da impulsaõ parallelamente a CD. Porém designando qualquer das forças RE ou re por φ, teremos $f : \varphi :: RF : RE :: AC : AD$, e $\varphi = \frac{f . AD}{AC}$. Logo, substituindo o valor de f, será

$$\varphi = \frac{F . AD^2}{AC^2}, \text{ e conseguintemente } \varphi : F :: AD^2 : AC^2,$$

ou $2\varphi : 2F :: AD^2 : AC^2$. Donde se vê, que *a impulsaõ recebida pelo triangulo parallelamente á sua altura he para a impulsaõ directa que receberia na base, como o quadrado da ametade da base para o quadrado de hum dos lados.*

512 Quando o triangulo isosceles he rectangulo, a impulsaõ que recebe parallelamente á altura he ametade da que receberia directamente a sua base, porque nesse caso temos $AD^2 : AC^2 :: 1 : 2$.

513 Se hum quadrado receber o fluido na direcçaõ da diagonal CM (Fig. 149.), e depois perpendicularmente a hum dos lados, a primeira impulsaõ será para a segunda como 1 para $\sqrt{2}$, ou como 7 para 10 proximamente. Porque designando a primeira por M, a segunda por A, e a impulsaõ directa que receberia AB por B, teremos

$$M : B :: AD^2 : AC^2 :: 1 : 2 \text{ (n.512.)},$$
$$B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1 \text{ (n. 499.)};$$

e multiplicando estas proporções por ordem, será $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

514 Exemplo II. *Sendo a semicircumferencia AQB (Fig. 150.) exposta á percussaõ de hum fluido, cuja direcçaõ he perpendicular ao diametro AB, determinar a rasaõ entre a impulsaõ que ha de receber parallelamente a QC, e a impulsaõ directa que receberia o diametro AB.*

Havendo dividido AQB em huma infinidade de elementos Ff, Ll &c pelas rectas FL, fl parallelas ao diametro, e conduzido as ordenadas FS, fs &c, se designarmos por F a impulsaõ directa que receberia FR ou Ss, e por φ a impulsaõ que recebe o elemento Ff paralelrallelamente a QC, teremos $\varphi = \frac{F \cdot FR^2}{Ff^2}$ (n. 511.); é porque os triangulos ſemelhantes FRf, FSC daõ $\frac{FR^2}{Ff^2} = \frac{FS^2}{CF^2}$, ſerá $\varphi = \frac{F \cdot FS^2}{CF^2}$. Fazendo pois $CS = x$, $CF = r$, e deſignando F por Ss ou dx, ſerá a impreſſaõ φ ſobre o elemento propoſto $= \frac{dx(r^2 - x^2)}{r^2}$. Integrando, e tomando o valor quando $x = r$, teremos a impulſaõ ſobre QA parallelamente a $QC = \frac{2}{3} r$, e conſeguintemente ſobre $BQA = \frac{2}{3} AB$. Donde ſe vê, que ſendo a impulſaõ directa contra AB repreſentada pela meſma linha AB, a impulſaõ ſobre a ſemicircumferencia BQA he repreſentada por $\frac{2}{3} AB$; e conſeguintemente, que eſtas impulſões ſaõ entre ſi na raſaõ de 3 para 2.

515 Segue-ſe daqui que a impulſaõ recebida por hum cylindro vertical ſituado no meio de huma corrente he $\frac{2}{3}$ da que receberia o parallelepipedo rectangulo circunſcrito, expoſto por huma das faces perpendicularmente á direcçaõ da meſma corrente; porque o ſemicylindro anterior, e a face correſpondente do parallelepipedo ſaõ as unicas partes, que recebem a percuſſaõ do fluido.

516 Exemplo III. *Suppondo que AQB (Fig. 150.) repreſenta hum hemisferio produzido pela revoluçaõ do quarto de circulo AQC ao redor de QC, e que eſtá expoſto á corrente de hum fluido, que corre ſegundo a direcçaõ QC, determinar a raſaõ entre a impreſſaõ que reſulta parallelamente a QC, e a impulſaõ directa que receberia o circulo da baſe produzido pela revoluçaõ do raio CA.*

Temos viſto, que repreſentando por dx a impulſaõ directa ſobre o elemento Ss, a impulſaõ do elemento Ff parallelamente a QC he repreſentada por $\frac{dx(r^2 - x^2)}{r^2}$ (n.

(n. 514.). Designando a rasaõ da circumferencia ao raio por c, e multiplicando ambas as expressões por $2cx$, he evidente que as impulsões sobre a zona circular descrita pelo elemento Ss, e sobre a zona esferica descrita pelo elemento Ff seráõ representadas, a primeira por $2cx\,dx$, e a segunda por $\frac{2cx\,dx\,(r^2-x^2)}{r^2}$. Integrando ambas as expressões, e fazendo $x=r$, será a impulsaõ total sobre a base representada por cr^2, e sobre o hemisferio por $\frac{1}{2}cr^2$. Donde se segue, que *a impulsaõ recebida pelo hemisferio parallelamente a QC he a ametade da impulsaõ directa que receberia o circulo maximo, que lhe serve de base.*

517 He manifesto, que o outro hemisferio naõ receberia impulsaõ alguma da parte do fluido; e assim he indifferente expor á corrente de hum fluido huma esfera, ou somente hum hemisferio, com tanto que neste ultimo caso a direcçaõ da corrente seja perpendicular ao circulo maximo que lhe serve de base. No nº 105 fizemos uso desta proposiçaõ.

518 Exemplo IV. *Sendo o plano CD* (Fig. 151.) *exposto obliquamente á corrente de hum fluido, e sendo por alguma causa exterior necessitado a mover-se parallelamente a si mesmo por huma direcçaõ dada Cc, pergunta-se o angulo pelo qual se deve fazer a percussaõ, para que o fluido imprima no mesmo plano a maior quantidade de movimento que he possivel pela direcçaõ Cc.*

Tomando LQ para representar a velocidade do fluido, e resolvendo-a em duas, huma LI igual e parallela á velocidade do plano Cc, e a outra LK; em virtude desta resultará perpendicularmente a CD huma impulsaõ proporcional a $CD.LK^2.\mathit{sen}\,CLK^2$ (n. 508.). Representemos esta força por LA, e resolvamo-la em outras duas, huma LH parallela, e a outra LZ perpendicular á direcçaõ dada Cc. He evidente, que naõ tendo o plano liberdade para se mover senaõ pela direcçaõ Cc, a força LH he a unica que se deve attender, e que deve ser hum *maximo*. Porém temos $LH = LA.\mathit{sen}\,LAH$; logo substituindo o valor de LA, e advertindo que $LAH = CLN$, será $LH = CD.LK^2.\mathit{sen}\,CLN.\mathit{sen}\,CLK^2$. Nesta expressaõ CD he constante, e porque LQ, LI, e o angulo

gulo QLI saõ constantes, tambem LK, e o angulo KLN seráõ constantes. Fazendo pois $KLN = p$, $CLK = x$, teremos $LH = CD \cdot LK^2 \, sen\,(p - x)\, sen\, x^2$; e a questaõ se reduzirá a fazer que $sen\,(p - x)\, sen\, x^2$ seja hum *maximo*. Logo será $2\, cos\, x\, sen\,(p - x) - sen\, x\, cos\,(p - x) = 0$, ou $2\, sen\, p\, cos\, x^2 - 3\, cos\, p\, sen\, x\, cos\, x - sen\, p\, sen\, x^2 = 0$, ou $tang\, x^2 + 3\, cot\, p\, tang\, x - 2 = 0$; donde se tira

$$tang\, x = -\frac{3}{2}\, cot\, p + \sqrt{\left(\frac{9}{4}\, cot\, p^2 + 2\right)}.$$

519 Por quanto $2\, cos\, x^2 - sen\, x^2 = \dfrac{1 + 3\, cos.\, 2x}{2}$, e $sen\, x\, cos\, x = \dfrac{sen\, 2x}{2}$, a equaçaõ $2\, sen\, p\, cos\, x^2 - 3\, cos\, p\, sen\, x\, cos\, x - sen\, p\, sen\, x^2 = 0$, póde reduzir-se a esta fórma $\dfrac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x} = \dfrac{sen\, p}{cos\, p}$, que offerece a construcçaõ seguinte.

Com o raio arbitrario LK (Fig. 152.) descreva-se hum arco de circulo KV, faça-se o angulo $KLX = p$, produza-se KL, tome-se $LR = \dfrac{KL}{3}$, pelo ponto R tire-se RV parallela a LX, e pelo ponto V o raio VL. Entaõ divida-se o angulo VLK em duas partes iguais pela recta LM, e será $KLM = x$. Porque abaixando dos pontos X, V as perpendiculares XE, VH ao raio KL, os triangulos semelhantes XEL, VHR daraõ $\dfrac{VH}{RH} = \dfrac{XE}{LE}$, ou $\dfrac{VH}{RH} = \dfrac{sen\, p}{cos\, p}$; porém fazendo $KLV = 2x$, temos $\dfrac{VH}{RH} = \dfrac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x}$; logo $\dfrac{sen\, 2x}{\frac{1}{3} + cos\, 2x} = \dfrac{sen\, p}{cos\, p}$.

520 Quando o plano CD está em quietaçaõ (Fig. 151.) no tempo em que he ferido pela corrente, sendo sempre sujeito a mover-se pela direcçaõ dada Cc; a velocidade inicial delle LI he nulla, a velocidade LK coincide com

LQ,

LQ, e a soluçaõ fica sendo a mesma, só com a differença de pôr o angulo *CLQ* em lugar de *CLK*.

521 Daqui se segue a determinaçaõ do angulo mais ventajoso, que deve fazer a direcçaõ do vento com a vela de hum moinho de vento, quando ella está em quietaçaõ ao momento que começa a ser impellida, ou quando a velocidade do vento se póde considerar como infinita em comparaçaõ da velocidade da mesma vela. O eixo horizontal em que estaõ postas as velas anda em roda, e poem-se sempre na direcçaõ do vento, supposta horizontal. Qualquer das velas suppoem-se como hum rectangulo vertical, situado obliquamente a respeito do eixo, a fim de que a impulsaõ do vento possa resolver-se em duas, huma parallela ao eixo que seja destruida, e a outra situada em hum plano perpendicular ao mesmo eixo, a qual he a que produz a rotaçaõ. Para determinar pois a posiçaõ mais ventajosa da vela neste caso, deveremos naõ sómente fazer $LI = 0$, mas tambem suppor Cc perpendicular á direcçaõ *OL* do fluido. Assim teremos $p = 90°$, e as formulas precedentes daraõ $tang\, x = \sqrt{2}$, ou $cos\, 2x = -\frac{1}{3}$, isto he, $x = 54° 44'$.

522 A hypothese geral de que o plano *CD* tem huma velocidade inicial finita *LI*, quando he ferido pelo fluido, póde dar alguma idêa da posiçaõ mais ventajosa das velas, quando a sua velocidade he comparavel com a do vento, como succede sempre na practica. Neste caso deve o angulo ser maior que 54° 44′. Mas para o determinar com rigor, he necessario advertir que os differentes pontos da mesma vela estando a differentes distancias do eixo tem differentes velocidades de rotaçaõ, de que se deve ter conta no calculo; e que a velocidade póde ser tal, que sendo a parte inferior da vela ferida pelo vento, a superior pelo contrario exercite huma impulsaõ contra elle, e nesse caso naõ deve tomar-se a soma, mas a differença das impulsoens. Todas estas condiçoens complicaõ o problema, e fazem o calculo muito prolixo. Veja-se o *Tratado das Fluxoens* de Maclaurin nº 910 e seg. o *Tratado dos Fluidos* de M. d'Alembert da nova ediçaõ pag. 397, e o tom. V dos *Opuscu-los Math.* p. 148 e seg. M. Euler nas indagaçoens profundas desta materia (*Nouv. Mem. de Petersb. tom. IV*) determina naõ sómente a posiçaõ que deve ter huma vela, e a veloci-

locidade que deve tomar, para que a maquina produza o maior effeito, mas tambem examina a questaõ no caso das velas serem curvas, e determina em geral a melhor figugura dellas, ou o angulo pelo qual a superficie de huma vela deveria ser cortada em cada ponto pela direcçaõ do vento &c.

Experiencias e Reflexoens sobre a percussaõ dos fluidos.

523 A Theorica, que temos exposto, he sujeita a algumas difficuldades. Suppoem-se, que todas as moleculas do fluido ferem a superficie do corpo, como se fossem livres, e insuladas; e para isso cada huma, depois de haver dado o seu golpe, deveria aniquilar-se, a fim de naõ embaraçar as outras. Mas no estado real das cousas, as moleculas centrais saõ impellidas pelas que vem a traz dellas, e haõ de buscar sahida para os lados. Donde resulta, que a colunna fluida correspondente ao plano deve alargar-se até huma certa distancia delle, e que a percussaõ naõ póde ser calculada, como se o plano recebesse effectivamente a impulsaõ de todos os fios fluidos parallelos, que lhe correspondem. Mas naõ poderia ser, que as impulsoens fossem semelhantemente alteradas, e que guardassem entre si a mesma proporçaõ que as theoricas, ao menos sensivelmente? sobre isso consultaremos a experiencia, examinando 1.° qual he a medida da percussaõ perpendicular; 2.° se as percussoens perpendiculares com a mesma velocidade saõ proporcionais ás superficies; 3.° se as percussoens perpendiculares contra superficies iguais saõ proporcionais aos quadrados das velocidades; 4.° se as percussoens obliquas, sendo as mais cousas iguais, saõ proporcionais aos quadrados dos senos dos angulos de incidencia.

524 As Figuras 153, 154, 155 representaõ a balança de que nos havemos servido para isso. O travessaõ *AB* he de 3 pés e meio, e pela parte superior cortado em fio, para que se naõ ajunte agua sobre elle. Em huma das extremidades tem huma chapa de cobre bem plana e polida de 2 pollegadas e meia de diametro, cuja superficie superior produzida passaria pelo eixo do movimento da balança, e cujo centro *A* correspondia ao eixo *TA* de hum pequeno tubo addicional

cional e vertical $PQqp$, pelo qual a agua sahia, e vinha ferir a chapa. O semicirculo graduado MON guarnecido de hum prumo servia para pôr a balança horizontal, ou com huma inclinaçaõ dada.

525 Conservando pois a agua na altura constante TA de 4 pés, e deixando huma pollegada de intervallo entre o centro A da chapa e a extremidade do tubo, para dar á agua a liberdade de sahir livremente, observámos

I. Que sendo o diametro do tubo pq de 10 linhas, o pezo S que fazia equilibrio á percussaõ perpendicular da agua (Fig. 153.) era de 1 libr. 5 onç. 7 oit. e 8 gr. ou de 12608 graõs.

II. E que conservando o mesmo tubo, e inclinando a balança de maneira que o angulo TAB fosse de 60° (Fig. 155.), o pezo que fazia equilibrio á percussaõ obliqua era de 12248 graõs.

III. Que sendo o diametro pq de 6 linhas, a percussaõ perpendicular era de 4484 graõs.

IV. E que conservando o mesmo tubo, a percussaõ obliqua pelo angulo TAB de 60° fazia equilibrio a 4315 graõs.

526 Depois conservando a agua da reserva na altura constante de 2 pés, e deixando sempre huma pollegada de intervallo entre o ponto A e a extremidade do tubo, achámos

V. Que sendo o diametro pq de 10 linhas, a percussaõ perpendicular era de 6306 graõs.

VI. E que conservando o mesmo tubo, a impulsaõ obliqua pelo angulo TAB de 60° era de 6125 graõs.

VII. Que sendo o diametro pq de 6 linhas, a impulsaõ perpendicular era de 2243 graõs.

VIII. E que conservando o mesmo tubo, a impulsaõ obliqua pelo angulo TAB de 60° era de 2158 graõs.

527 Alguns autores pertendem, que a percussaõ perpendicular sobre hum plano he igual ao pezo de huma columna do mesmo fluido, que tenha por base a superficie do plano, e por altura a mesma que he devida á velocidade do fluido; e outros, que seja o dobro desta quantidade. Vejamos, qual destes sentimentos he mais bem fundado.

Por quanto o producto theorico de hum orificio he para o producto effectivo de hum tubo addiccional do mesmo diametro na rasaõ de 16 para 13 (n. 295.), as velocidades do fluido ao sahir delles seraõ na mesma rasaõ, e conseguinſeguintemente as alturas que lhes ſaõ devidas na raſaõ de $(16)^2$ para $(13)^2$, ou proximamente de 3 para 2. Será pois a velocidade no ponto *A* das noſſas experiencias devida a $\frac{2}{3}$ da altura *TA*; e aſſim ſuppondo que o pé cubico de agua peza 70 libras, acharemos nas experiencias I e V que as colunnas que tem a baſe circular de 10 linhas de diametro e as alturas $\frac{8}{3}$ e $\frac{4}{3}$ de hum pé tem os pezos de 6518 e 3259 graõs, e nas experiencias III e VII que as colunnas que tem a baſe de 6 linhas de diametro e as alturas de $\frac{8}{3}$ e $\frac{4}{3}$ de hum pé tem os pezos de 2346 e 1173 graõs.

Comparando pois eſtes reſultados com os das quatro experiencias citadas, veremos que o primeiro ſentimento ſobre a medida da percuſſaõ dos fluidos he abſolutamente erroneo, e que o ſegundo naõ ſe aparta muito da verdade. Com tudo parece, que entaõ ſe ſuppoem a força maior do que he na realidade.

Obſervámos porém, que chegando a chapa a tocar o orificio *pq*, e ſendo todas as mais couſas iguais, a percuſſaõ era ſenſivelmente menor do que quando ſe deixava hum certo intervallo entre a chapa e o orificio, para que a agua adquiriſſe toda a plenitude da velocidade, de que era ſuſceptivel. No primeiro caſo era a percuſſaõ directa com pouca differença igual ao pezo da colunna de agua, que tinha a baſe igual ao orificio, e a altura igual á da reſerva acima do orificio. Tal vez que os autores do primeiro ſentimento fizeſſem deſte modo as experiencias, em que ſe fundáraõ.

528 Pela comparaçaõ da experiencia I com a III, e da V com a VII, ſe vê que as percuſſoens directas ſaõ ſenſivelmente proporcionais ás ſuperficies, ſendo as velocidades iguais. Com tudo ſempre he bom obſervar, que a percuſſaõ parece aumentar ou diminuir em raſaõ maior que a ſuperficie, ou porque o deſvio das moleculas he realmente mais ſenſivel, e á proporçaõ diminue mais o impulſo ſobre huma ſuperficie pequena do que ſobre huma grande, ou porque a velocidade do fluido nas experiencias diminue algu-

alguma cousa em virtude da fricçaõ quando o orificio he menor, ou por ambas as causas juntamente. Na pratica porém julgo, que sem erro consideravel se póde suppor, como a theorica prescreve (n. 499.), que sendo a velocidade constante a percussaõ directa de hum fluido sobre as superficies planas he na rasaõ das mesmas superficies.

529 Comparando a experiencia I com a V, e a III com a VII, tambem se vê que as percussões directas contra huma mesma superficie saõ entre si como as alturas da reserva acima dos centros de percussaõ, ou (que vem a ser o mesmo) como os quadrados das velocidades. Nisto concorda a experiencia sensivelmente com a theorica (n. 500.).

530 Quando a agua fere obliquamente o plano, como nas experiencias II, IV, VI, e VIII, conforme a theorica resulta huma força perpendicular á superficie, a qual he representada por $\frac{F.B.p^2}{A.R^2}$ (n. 506.), sendo R o seno total, p o seno do angulo TAB, A a parte da chapa que corresponde ao orificio quando a balança está horizontal, F a impulsaõ directa que entaõ recebe, e B a parte da mesma chapa que a agua fere obliquamente. Esta força deve considerar-se applicada ao braço CA, e o pezo S ao braço CL. Logo teremos $\frac{F.B.p^2}{A.R^2}.CA = S.CL$. Porém $CL = CB.\frac{p}{R} = CA.\frac{p}{R}$, e pela theorica das projecções temos $B = A.\frac{R}{p}$. Logo, substituindo estes valores na equaçaõ precedente, será $S = F$. Pela theorica pois o mesmo pezo S deveria fazer equilibrio á impulsaõ da agua, ou estivesse a balança horizontal, ou fizesse qualquer angulo com o horizonte. As experiencias citadas saõ contrarias a este resultado, pois o pezo diminue á medida que diminue o angulo TAB. Donde concluiremos, que a respeito do modo com que entraõ os senos dos angulos de incidencia nas expressões das impulsões directa e obliqua comparadas entre si, a theorica naõ concorda com a experiencia.

He verdade que na percussaõ directa tem as moleculas menos

menos liberdade de sahirem da chapa depois de haverem dado o seu golpe, do que na percussaõ obliqua; e que assim deve no primeiro caso ajuntar-se sobre a chapa huma pequena quantidade de agua que pelo seu pezo aumente hum pouco a percussaõ. Mas esta causa he muito pequena, para se lhe attribuirem as differenças observadas.

531 Segue-se pois destas discussões, que as percussões perpendiculares dos fluidos contra as superficies planas guardaõ entre si sensivelmente as proporções estabelecidas pela theorica. Naõ succede porém o mesmo nas percussões obliquas contra as superficies planas, nem conseguintemente contra as superficies curvas, as quais se podem considerar como compostas de huma infinidade de superficies planas elementares expostas á corrente debaixo de obliquidades differentes.

Ha de dizer-se sem duvida, que as minhas experiencias foraõ feitas muito em pequeno, para serem decisivas. Eu naõ as dou por tais. Mas devo advertir, que ellas saõ muito difficeis de se fazerem em grande com exactidaõ; que as minhas tem a ventagem de serem directas, pois tenho medido immediatamente a percussaõ, sem empregar movimento algum de rotaçaõ, e sem haver fricçaõ, ou resistencia alguma, que considerar e deduzir; e que em fim saõ susceptiveis de grande precisaõ. M. de Borda (Mem. de l' Acad. 1763 e 1767.) fez varias experiencias sobre esta materia, e dos seus resultados conclue igualmente que a theorica ordinaria da percussaõ dos fluidos he erronea, e que seria inutil, e ainda perigoso applicalla á construcçaõ dos navios.

Mas naõ basta destruir, he necessario edificar, sendo possivel. Se o methodo proposto se engeita, que se ha de pôr em seu lugar? Esta he huma difficuldade, que naõ se tem vencido até o presente, sem embargo dos esforços que nisso tem empregado os maiores Geometras. Eisaqui huma idea geral das tentativas, que se tem publicado sobre este assunto.

532 M. Newton (*Princip Math. L. II. Sect. VII.*) toma a questaõ em differentes pontos de vista, conforme a differença dos fluidos. Primeiramente suppoem hum fluido raro, composto de partes iguais, e situadas livremente em distancias iguais; e mostra (como no n.° 516.)

516.) que se hum globo e hum cylindro de diametros iguais se moverem nelle com velocidades iguais, a resistencia do globo será a ametade da resistencia do cylindro. Estabelecida esta proposiçaõ, busca a resistencia absoluta que o globo experimenta, ou as partes do meio sejaõ elasticas, ou naõ; e no primeiro caso acha que a resistencia do globo he para a força, pela qual o movimento total delle póde ser produzido ou destruido, no tempo que gastaria em correr os dous terços do seu diametro com a sua velocidade uniformemente continuada, como a densidade do meio para a densidade do globo; e no segundo, que a resistencia he duas vezes menor.

Examina depois a resistencia nos meios continuos, como saõ a agua, o mercurio &c, nos quais o globo naõ fere immediatamente todas as partes resistentes do fluido, mas communica somente ás partes vezinhas huma impulpulsaõ, que ellas transmettem successivamente de humas a outras. Conforme a theorica que deduz, fundada em muitas proposições, que naõ saõ susceptiveis de extracto, a resistencia do globo he a mesma que a do cylindro circunscrito; resultado inteiramente contrario á experiencia, e donde se deve concluir, sem ir mais longe, que a theorica he fundada sobre principios erroneos.

533 M. Daniel Bernoulli no segundo volume das Memorias antigas da Academia de Petersburg determina a resistencia dos fluidos por hum methodo, que depois abandonou por achar os resultados contrarios á experiencia. Mas no volume oitavo das mesmas Memorias propoem outro methodo muito ingenhoso e elegante, para determinar a percussaõ perpendicular de huma veia fluida, que sahe de hum vaso contra huma superficie plana. Observa, que suppondo-se o plano de certa extensaõ os fios de que a veia se compoem acabaõ em tomar direcçoens parallelas ao mesmo plano. Considera a curva descrita por cada hum dos fios, como hum canal, no qual se move hum corpo, o qual experimenta conseguintemente em cada ponto a força centrifuga, e que o Autor suppoem além disso sujeito á acçaõ de huma força tangencial, variavel por qualquer lei. Calcula todas estas forças; e acha, que deve resultar parallelamente ao eixo da veia, ou perpendicularmente ao plano, huma impulsaõ igual ao pezo de hum cylindro fluido, que tenha por base a secçaõ primiti-

va

va da veia, e por altura o dobro da altura devida á velocidade do fluido, como he proximamente conforme á experiencia (n. 527.).

Este methodo difficilmente se applicaria ás percussões obliquas; e naõ póde ter lugar para medir a resistencia dos corpos, que se movem dentro dos fluidos, nos quais estaõ mergulhados.

534 M. d'Alembert no seu *Ensaio sobre a resistencia dos fluidos*, determina as leis da resistencia pelas do equilibrio; e este methodo, que he inteiramente novo, tem de mais a ventagem de ser muito directo. Suppoem primeiramente hum corpo sustentado em quietaçaõ por huma causa exterior, no meio de hum fluido em movimento. Os fios do fluido, que topaõ no corpo, se dobraõ por differentes direcções; e a porçaõ que cobre a parte anterior do corpo fica como estagnante até huma certa extensaõ. A pressaõ que o corpo experimenta, ou a resistencia que oppoem ao movimento das particulas, he produzida pela perda que ellas fazem das suas velocidades; porque hum corpo naõ obra contra outro, senaõ em quanto lhe communica, ou tende a communicar huma parte do seu movimento. Assim se reduz a questaõ a achar primeiramente a velocidade do fluido, que corre immediatamente sobre a superficie do corpo, e o Autor a determina por dous methodos differentes. Sendo achada esta velocidade, por ella se determina a formula rigorosa da pressaõ. O que falta, he acabar este calculo, e deduzir resultados applicaveis á pratica; mas isso he o que se naõ póde conseguir, tratando a questaõ geralmente, e sem desprezar nenhum dos elementos que lhe saõ essenciais.

O Autor determina pelo seu methodo hum pouco modificado, e menos rigoroso, a acçaõ de huma veia fluida que fere perpendicularmente hum plano; e acha que he hum pouco menor que o pezo do cylindro, que tem por base a secçaõ primitiva da veia, e por altura o dobro da altura devida á velocidade do fluido, resultado que se conforma proximamente com a experiencia (n. 527.).

535 M. Euler movido da simplicidade dos principios, e resultados da theorica ordinaria, e suppondo por outra parte que a impulsaõ de hum fluido contra hum corpo naõ he mais que a pressaõ experimentada por elle da parte dos fios do fluido, que correm ao longo da sua superficie,

cie, combina os dous methodos entre si (*Mem. de l' Acad. de Petersb.* 1763.), e fórma hum methodo misto, que julga proprio para determinar a resistencia dos fluidos de hum modo simples, e exacto em muitas occasiões. Eisaqui brevemente em que consiste. 7.

536 Seja $AMBN$ (Fig. 156.) hum corpo em quietação, exposto á corrente de hum fluido; e para maior simplicidade, supponhamos que he dividido pelo eixo AB situado na direcção do fluido em duas partes iguais e semelhantes AMB, ANB, e consideremos somente a parte AMB, porque o mesmo se entenderá da outra. O fluido he composto de fios, que pelo encontro da parte anterior do corpo se dobraõ, e formaõ as curvas $fgqe$, $f'g'q'e'$. Seja Mm hum elemento da curva AE, e representemos por v a altura devida á velocidade actual do fluido em M, e por k a altura devida á velocidade que teria naturalmente no mesmo ponto, se o corpo lhe naõ oppuzesse obstaculo. Pela idea que temos dado da pressaõ dos fluidos em movimento (n. 437.) será a pressaõ que padece o elemento Mm representada por $Mm.(k-v)$. Por outra parte, conduzindo MR parallela a AB, fazendo o raio $=1$, e o angulo $mMR=\phi$, teremos pela theorica ordinaria (n. 505.) a impulsaõ que resulta em Mm perpendicularmente $= Mm.k\,sen\,\phi^2$. Logo igualando os dous valores, será $Mm\,(k-v)=Mm.k.sen\,\phi^2$, ou $v=k-k\,sen\,\phi^2=k\,cos\,\phi^2$; e conseguintemente $\sqrt{v}=cos\,\phi.\sqrt{k}$. Assim, he a velocidade do fluido em M para a velocidade primitiva e naõ alterada, como o coseno do angulo que faz a tangente em M com o eixo AB he para o seno total. Logo no ponto E, onde a tangente se faz parallela ao eixo, a velocidade do fluido será igual á velocidade primitiva. Assim se determinará k, medindo a velocidade actual do fluido no dito ponto E; e dahi se conhecerá de hum modo commodo na pratica a velocidade correspondente a qualquer ponto M, e a pressaõ $Mm\,(k-v)$ que padece o elemento Mm.

537 Este methodo, como advertio o mesmo Autor, naõ se deve applicar á parte posterior do corpo ESB, mas somente á anterior AME. Porque he evidente, que supposto que o fluido ao longo de EB tem a mesma velocidade que ao longo de AE, o corpo seria igualmen-
te

te impellido pelas direcções oppoſtas AB , BA , e conſeguintemente naõ receberia movimento algum da parte do fluido ; o que naõ póde jámais ter lugar.

Mas he mais de advertir , que a difficuldade referida ſempre ſubſiſtirá , de qualquer maneira que ſe determinem as velocidades dos fios do fluido . Ella carrega ſobre o principio meſmo, que a acçaõ de hum fluido contra hum corpo expoſto á ſua corrente provenha da preſſaõ do meſmo fluido. Se iſto aſſim he , ſegue-ſe que todas as vezes que a figura do corpo for tal , que os fios do fluido tenhaõ a meſma velocidade na parte poſterior que na anterior (o que póde ſucceder em muitos caſos) , o fluido naõ poderá imprimir no corpo movimento algum ; reſultado inadmiſſivel. Parece pois , que alem da preſſaõ ha no fluido huma perda de movimento , que paſſa ao corpo expoſto á corrente delle.

538 Que devemos em fim concluir de tudo iſto ? que a theorica da reſiſtencia dos fluidos ainda eſtá imperfeita nos ſeus principios e fundamentos , e que naõ ſe póde fazer applicavel ſeguramente á pratica , ſenaõ quando ſe fundar ſobre experiencias em grande , multiplicadas , e bem feitas. Em quanto ſe naõ executar eſte trabalho penoſo e delicado , o melhor partido que talvez ſe póde tomar na pratica he uſar da theorica ordinaria , quando naõ ha neceſſidade de grande exacçaõ nos reſultados , e quando a percuſſaõ he ſobre ſuperficies planas , por angulos que naõ ſejaõ muito pequenos.

CAPITULO VIII.

Do melhor modo de empregar a acçaõ de hum fluido para mover huma maquina.

539 DE todos os meios , que ſe podem applicar para fazer ſervir a acçaõ de huma corrente para mover qualquer maquina , o mais ſimples , mais commodo , e menos ſujeito a inconvenientes , he guarnecella de huma ou muitas rodas , que recebaõ a impulſaõ da agua , e que lha communiquem. He verdade , que ſe tem intentado neſtes ultimos tempos uſar da reacçaõ da agua para o meſmo fim , depois que M. Daniel Bernoulli obſervou que a agua ao ſahir de hum vaſo o repelle com certa

ta força, da qual calculou o effeito preciſo. M. Joaõ Alberto Euler, digno herdeiro do talento e ſciencia do ſeu illuſtre Pay, em huma Peça coroada pela Academia de Gottinga em 1754 propoem huma maquina movida pela reacçaõ da agua, a qual conforme os ſeus calculos he mais ventajoſa, do que ſe foſſe movida pela impulſaõ, ou pelo pezo da agua, que ſe emprega neſte effeito. Mas eſta maquina parece que deve encontrar muitas difficuldades na practica; e naõ ſei, que tenha ſido executada. Aqui nos limitaremos a indagar o effeito de huma roda hydraulica, ou ſeja movida pela impulſaõ, ou pelo pezo da agua; e procuraremos a forma, e dimenſões que deve ter, a fim de empregar com a maior economia poſſivel a força movente. Eſte objecto importante ſerá tratado de hum modo, que póde conſiderar-ſe novo em grande parte. Se contradigo alguns autores, naõ tenho outro fim que o de illuſtrar a verdade.

Theorica das rodas movidas pela impulſaõ da agua.

540 POſto que a theorica ordinaria da percuſſaõ dos fluidos he ſujeita a muitas difficuldades, como temos viſto, ſervirnos-hemos della aqui, porque as percuſſões de que tratamos naõ ſaõ ordinariamente muito obliquas, e porque neſſe caſo a theorica naõ ſe aparta muito da verdade. Mas ſempre depois ajuntaremos varias experiencias, que ſerviráõ de rectificar os reſultados, e de fixar a confiança que elles merecem.

Para que huma roda $AHLK$ (Fig. 157.) poſſa girar pela impulſaõ de hum fluido, he neceſſario que ſeja guarnecida na circumferencia de *pennas* AB, DE, KS &c, as quais ſejaõ impellidas pelo fluido ſucceſſivamente. Eſtas pennas ſaõ ordinariamente huns rectangulos dirigidos ao centro C, cujas alturas ſaõ repreſentadas pelas rectas AB, DE, KS &c, e as larguras por outras rectas perpendiculares ao plano da roda. Digo *ordinariamente*, porque algumas vezes naõ ſaõ dirigidas ao centro, nem tem a forma rectangular, como veremos adiante.

541 He facil de entender, que a força de huma roda movida pelo impulſo da agua depende da poſiçaõ, numero,

mero, e grandeza das pennas, e da rasaõ que existe entre a sua velocidade e a da corrente. Examinemos pois, como todos estes elementos concorrem para produzir a dita força, a fim de descobrirmos a combinaçaõ mais ventajosa, que lhe póde dar toda a intensaõ de que he susceptivel.

542 Seja *XYTZ* (Fig. 157.) huma corrente horizontal, cujos pontos se movem todos com a mesma velocidade, e que faz andar a roda vertical *AHLK* guarnecida de pennas rectangulares *AB*, *DE*, *KS* &c dirigidas ao centro *C*; e supponhamos, que a roda levanta o pezo *Q* por meio da corda *Qgbf* que passa pela roldana fixa *g*, e se enrosca no cylindro ou tambor *fbd*. Nos primeiros instantes o movimento do pezo *Q* será accelerado, mas depois de tres ou quatro voltas da roda se fará uniforme. Entaõ a impulsaõ do fluido estará a cada instante em equilibrio com o pezo *Q* e com a resistencia da fricçaõ. Donde se vê, que representando a velocidade uniforme do pezo *Q* por *v*, o producto *Qv* deverá representar o effeito real da máquina, feita a deducçaõ das resistencias, que absorbem continuamente huma parte da força movente.

543 Muito tempo se tem agitado a questaõ, se huma penna tem mais força para girar quando he ferida perpendicularmente, ou quando obliquamente. Para saber o que devemos ter sobre este ponto, supponhamos a penna *AB* vertical, e conseguintemente *DE* inclinada á corrente. Tomando sobre *AB* dous pontos infinitamente vezinhos *R*, *r*, conduzaõ-se as horizontais *RM*, *rm*, que determinaõ sobre *DE* o elemento *Mm* correspondente a *Rr*. Comparando entre si o momento de impulsaõ que receberia o elemento *Rr*, se fosse ferido livremente, ou se a penna *DE* que o encobre fosse aniquilada, com o momento de impulsaõ que resulta perpendicularmente sobre o elemento *Mm*; he manifesto, que a percussaõ sobre cada ponto de *Rr* he maior que sobre cada ponto de *Mm*; mas por outra parte *Rr* he menor que *Mm*, e o braço de alavanca *CR* de *Rr* he menor que o braço *CM* de *Mm*. A determinaçaõ exacta destes dous momentos he a que somente póde decidir qual delles he maior.

544 Supponhamos pois que *Mx* representa o espaço corrido pelo fluido em hum instante, e que *Rt*, *My* representaõ os espaços corridos pelos pontos *R*, *M* das duas pennas

nas no mesmo tempo. Tomando CM por seno total, e representando a velocidade Mx por V, e Rt por u, será a impulsaõ sobre Rr representada por $Rr \cdot CM^2 \cdot (V - u)^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro da roda por $Rr \cdot CM^2 \cdot (V-u)^2 \cdot CR$.

Para conhecer o momento de impulsaõ contra Mm, resolvamos a velocidade Mx em outras duas, huma My igual á do ponto M e na mesma direcçaõ, a qual naõ obra conseguintemente sobre o elemento Mm, e a outra Mz. Em virtude desta resulta perpendicularmente a Mm a impulsaõ representada por $Mm \cdot Mz^2 \cdot sen\, DMz^2$ (n. 508.), e o momento della relativo ao centro C por $Mm \cdot Mz^2 \cdot sen\, DMz^2 \cdot CM$. Ora os triangulos semelhantes Mnx, MRC daõ $xn = \frac{CR \cdot Mx}{CM} = \frac{CR \cdot V}{CM}$, e temos $zx = My = \frac{CM \cdot Rt}{CR} = \frac{CM \cdot u}{CR}$; logo $nz = nx - zx = \frac{CR \cdot V}{CM} - \frac{CM \cdot u}{CR} = \frac{CR}{CM}\left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)$. Mas $sen\, DMz = \frac{CM \cdot nz}{Mz}$ (sendo sempre CM o seno total); e por conseguinte $sen\, DMz = \frac{CR}{Mz}\left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)$. Logo, substituindo este valor na expressaõ do momento, teremos $Mm \cdot Mz^2 \cdot sen\, DMz^2 \cdot CM = Mm \cdot CR^2 \cdot CM \left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)^2$.

He pois o momento da impulsaõ contra Rr para o momento da impulsaõ contra Mm, como $Rr : CM (V-u)^2$ para $Mm \cdot CR \left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)^2$. E porque temos $Rr : Mm :: CR : CM$, e conseguintemente $Rr \cdot CM = Mm \cdot CR$, será em fim o primeiro momento para o segundo como $(V-u)^2$ para $\left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)^2$. Mas $\frac{CM^2}{CR^2} > 1$, e conseguintemente $(V-u)^2 > \left(V - \frac{CM^2 \cdot u}{CR^2}\right)^2$. Logo o primeiro momento he sempre maior que o segundo. O mes-

mesmo raciocinio tem lugar em todos os outros elementos correspondentes das partes finitas AO, VE; e assim concluiremos, que a penna vertical he mais ventajosa que a inclinada.

545 Quando as pennas estaõ em quietaçaõ no momento em que saõ feridas pelo fluido, temos $u = o$; e nesse caso o momento de impulsaõ contra cada elemento de Rr he igual ao momento do elemento correspondente Mm. Entaõ he indifferente, que o fluido fira a parte AO da penna vertical, ou a parte correspondente da penna inclinada. Mas como a parte OB da penna vertical he ferida tambem pela corrente, bem se vê que ainda nesse caso he mais ventajosa a situaçaõ vertical do que a inclinada.

546 Alguns autores tem estabelecido em geral a ventagem da penna vertical de hum modo erroneo. He certo, dizem elles, que se a penna DE tem entrado na agua quando AB está ainda na vertical, a parte VE da primeira cubrirá a parte AO da segunda, que naõ será ferida conseguintemente senaõ na parte OB. He verdade, continuaõ, que esta diminuiçaõ parece ser reparada pela impulsaõ que recebe a parte VE maior que AO; mas a compensaçaõ naõ he completa. Porque a percussaõ directa contra AO ou VI he para a percussaõ que resulta perpendicularmente contra VE, como $VI.(\text{sen tot.})^2$ para $VE.\text{sen}\,VEI^2$, ou como $VI.VE^2$ para $VE.VI^2$, ou em fim como VE para VI. Donde concluem ser necessario, que a extremidade E da penna DE (Fig. 158.) naõ toque a superficie do fluido, senaõ quando a penna AB começa a deixar a situaçaõ vertical. Entaõ he facil de determinar o numero das pennas, que a roda deve ter. Porque no triangulo rectangulo EAC conhece-se o lado CA que he o raio da roda, e a hypothenusa CE, porque he dada a altura da penna DE. Assim se conhecerá o arco DA; e dividindo por elle a circumferencia inteira da roda, o quociente dará o numero das pennas.

Os autores, de quem fallamos, calculáraõ assim, e com muito trabalho, longas taboadas do numero das pennas convenientes a cada roda, relativamente ao raio della, e á altura das pennas.

547 Todo este apparato de calculaçoens vem abaixo, 1° porque naõ se teve conta com os differentes braços de alavanca da penna vertical e da inclinada. 2.° porque se

ſe no caſo da Fig. 158, o momento da impulſaõ contra a penna vertical *AB* he o maior poſſivel; por outra parte quando a penna *DE* tiver tomado huma poſiçaõ tal, que o angulo *ECB* ſeja dividido pela vertical em partes iguais, o momento ſerá menor do que ſeria quando a roda tiveſſe maior numero de pennas; e fica incerto, ſe o momento *medio* no ſegundo caſo ſerá maior que no primeiro.

548 O meſmo paralogiſmo foi já advertido em huma Memoria ſobre as Maquinas Hydraulicas, impreſſa ha poucos annos. Mas o Autor della emprega tambem hum principio falſo, do qual concluio que o momento de impulſaõ contra a parte *VE* da penna inclinada *DE* (Fig. 157.) he ſempre igual ao momento contra a parte correſpondente *AO* da penna vertical; o que naõ he verdadeiro, ſenaõ quando a roda eſtá em quietaçaõ ao inſtante da percuſſaõ (n. 544. 545.). O modo que tem eſte Autor em medir a percuſſaõ de hum fluido contra hum plano movel, he defeituoſo. Reſolve a velocidade do plano em outras duas, huma parallela, e outra perpendicular á direcçaõ do fluido; e ſuppoem que o fluido naõ obra ſobre o plano, ſenaõ em virtude do exceſſo da ſua velocidade ſobre a primeira das duas precedentes, deſprezando inteiramente a ſegunda. Mas he evidente, que em virtude da velocidade que o plano tem perpendicularmente á direcçaõ do fluido, he repellido pela agua como ſe elle eſtiveſſe em quietaçaõ, e a agua vieſſe a ferillo com eſſa meſma velocidade; donde reſulta outra impulſaõ, que ſe combina com a primeira, e que o Autor deſprezou inadvertidamente. A ſua memoria contém por outra parte muitas couſas verdadeiras, e uteis.

549 Por quanto o momento da impulſaõ ſobre *VE* he igual ao momento ſobre *AO* (n. 545.), quando a roda eſtá em quietaçaõ no tempo que he ferida pelo fluido, ſegue-ſe que entaõ quanto maior for o numero das pennas tanto maior ſerá o momento; porque aſſim ſe diminue o angulo *ECB* comprehendido entre duas pennas vezinhas, e ſe aumenta o momento quando ellas ſe achaõ na poſiçaõ menos favoravel, que he quando o dito angulo he dividido pela vertical em duas partes iguais. Donde concluiremos, pela lei de continuidade, que ſe a roda andar com huma velocidade muito pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido, a ſua força ſe aumentará dando-lhe grande numero de pennas.

Em

Em rigor parece, que sendo a roda immovel no instante da percussaõ, o numero mais ventajoso das pennas deveria ser infinito, e as suas extremidades formariaõ huma circumferencia de circulo *FBGO* (Fig. 159.). Entaõ a impulsaõ, que resultará perpendicularmente sobre cada elemento *KN* do arco *FBG*, será dirigida ao centro *C*, e naõ produzirá movimento algum de rotaçaõ: donde se segue, que bem longe de receber entaõ o maior momento possivel de impulsaõ, naõ receberá nenhum. Esta difficuldade se desvanece, reflectindo que as pennas se consideraõ no nosso calculo, como huma serie de planos differentemente inclinados, todos dirigidos ao centro. A supposiçaõ de ser *FBG* hum arco de circulo continuo, cujos elementos *KN* taõ longe estaõ de serem dirigidos ao centro, que saõ perpendiculares aos raios *CK*, he inteiramente contraria á precedente; e assim naõ he de admirar, que conduza a hum resultado muito differente.

Além disto, como os fios de agua saõ compostos de moleculas physicas, e tem conseguintemente grossuras finitas, as extremidades das pennas devem deixar entre si hum certo intervallo, que permitta ao fluido exercitar a sua acçaõ quanto lhe he possivel. E por isso o numero das pennas que se deve dar a huma roda em quietaçaõ, e com mais forte rasaõ em movimento, he sempre finito e limitado. Accresce tambem, que multiplicando o numero das pennas, a roda se faz mais pezada, e sujeita a maior fricçaõ.

550 Quando o movimento da roda chega ao estado uniforme, a sua velocidade he ordinariamente muito comparavel com a do fluido; e entaõ he difficil de determinar o momento de impulsaõ da agua contra todas as pennas a qualquer instante, e de concluir o numero mais ventajoso dellas. Adiante daremos a soluçaõ geometrica desta questaõ. Aqui indicaremos hum meio indirecto, que he sufficiente para o uso ordinario.

Havendo fixado o raio da roda, a quantidade que as pennas devem mergulhar-se na agua, e a velocidade que se quer fazer tomar a hum ponto dado da roda em comparaçaõ da velocidade do fluido, supporemos que ella tem successivamente differentes numeros de pennas; e determinaremos, para differentes posiçoens da mesma roda, os momentos de impulsaõ da agua contra todas as partes mergulhadas

gulhadas ao mesmo tempo. O numero de pennas, que der maior momento *medio* de impulsaõ será o mais ventajoso. Bastará considerar tres posiçoens de cada roda; quando huma penna *AB* (Fig. 157.) está vertical; quando o angulo *BCe*, ametade do angulo *BCE* comprehendido por duas pennas vezinhas, he dividido pela vertical em duas partes iguais; e quando a recta *Ce* estiver vertical. Deste modo, supondo a velocidade do ponto *B* igual a hum terço da velocidade do fluido, $AB = \frac{1}{5} CB$, e consequintemente o arco *FBG* de 72°, achámos que convém dar 36 pennas á roda. Suppondo a velocidade do ponto *B* constante, será necessario maior, ou menor numero de pennas, conforme o arco *FBG* for menor ou maior que 72°. Estes calculos saõ longos, e penosos; e a experiencia he o caminho mais simples e expedito, para resolver a questaõ.

551 Examinemos agora a rasaõ, que deve ter a largura com a altura das pennas. He evidente, que sendo dado o raio exterior da roda *CB*, e a velocidade do fluido, o momento da impulsaõ contra á superficie *dada* de huma penna será tanto maior, quanto maior for o braço de alavanca, a que a impulsaõ se applicar. Este braço aumenta á medida que se aumenta a largura da penna, e se diminue proporcionalmente a sua altura. Donde se segue, que he ventajoso dar muita largura ás pennas, que se mergulhaõ em hum rio. Mas quando as rodas se movem por canais estreitos, ou por correntes, cuja agua se deve economizar, e empregar-se com a maior utilidade possivel, a cousa requer novas consideraçoens.

552 Seja *ABKD* (Fig. 160.) a face vertical de huma reserva, na qual se tem practicado a abertura rectangular *MNOP*, e represente *AB* o livel da agua. Supponhamos que á abertura *MNOP* está applicado hum canal rectangular, que conduz a agua a ferir as pennas de huma roda; e porque he necessario para evitar a fricçaõ, que as pennas tenhaõ hum jogo livre no vaõ do canal, imaginemos que a parte de huma penna que recebe a percussaõ perpendicular he representada pelo rectangulo *mnop*, cujos lados saõ parallelos aos do rectangulo *MNOP*, e distantes delles huma quantidade dada. Assim sómente a agua,

 que

que ſahe pela abertura *mnop*, he a que ſe emprega em mover a penna, perdendo-ſe a que ſahe pelos interſticios rectangulares Mp, No, Oz. Imaginemos agora, que a penna *mnop* ſe transforma em outra *efgh* tambem rectangular, e de igual ſuperficie; e que a abertura *MNOP* ſe transforma em outra *EFGH*, de maneira que os interſticios Ee, Ff, Hi ſejaõ iguais reſpectivamente aos primeiros Mm, Nn, Pz. Suppondo que a quantidade que a reſerva póde fornecer he limitada, e *dada*, eſtá claro que o livel primitivo ſe abaixará até certa altura ab; e reſta ſaber, ſe em virtude deſta depreſſaõ diminuirá o momento de impulſaõ. O fundamento deſta duvida he, porque ſe perde mais agua quando o vazio Gi tem maior baſe GH, por ſer nelle maior a preſſaõ do que nos vazios laterais. Adiante daremos a ſoluçaõ directa e geometrica deſte problema. Aqui nos contentaremos de indicar o meio ſeguinte de apreciar o effeito da transformaçaõ propoſta em cada caſo particular.

553 Conduza-ſe a vertical TR, que divida cada huma das aberturas *MNOP*, *EFGH* em duas partes iguais, e ſemelhantes; e ſupponhamos $TS = b$, $Sm = b$, $Sr = c$, $Mm = d$, $rR = e$, $tV = b'$, $Ve = p$, $Vr = q$, o tempo $= t$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$. Aſſim teremos $TR = b + c + e = H$, $SM = b + d = f$, $tR = b' + q + e$, $VE = p + d$. Iſto poſto, como a penna *efgh* deve ſer igual a *mnop*, teremos primeiramente eſta equaçaõ $pq = bc$.

Depois, como a quantidade de agua que ſahe no tempo t pela abertura *SMPR* he repreſentada por $\frac{4}{3} tf\left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a}$ (n. 245.), e a que ſahe pela abertura *VEHR* por $\frac{4}{3} t(p + d)\left((b' + q + e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a}$; igualando entre ſi eſtas quantidades teremos eſta ſegunda equaçaõ, $f\left(H^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right) = (p + d)\left((b' + q + e)^{\frac{3}{2}} - b'^{\frac{3}{2}}\right)$;

Don:

Donde se vê, que sendo dada huma das tres quantidades b', p, q, as unicas que podem ser desconhecidas, viremos no conhecimento de todas tres. Quando for dada p, ou q, a equaçaõ será do quarto gráo; e do quinto, se for dada b'. Estas equaçoens se resolveráõ na practica pelos methodos conhecidos de approximaçaõ.

554 Havendo pois determinado pelas operaçoens indicadas o valor das linhas tV, Vr, Ve, será facil de comparar o momento de impulsaõ contra a penna $mnop$ com o momento de impulsaõ contra $efgb$, e de julgar qual he mais ventajosa. Porque, seja X o centro de impressaõ da penna $mnop$, isto he, o ponto ao qual corresponderia a altura media do fluido, se elle sahisse pelo orificio $mnop$, e Z o centro de impressaõ da penna $efgb$, determinado como X; e supponhamos que C he o centro da roda, e Cr o raio exterior. Entaõ, imaginando para maior simplicidade que a penna está em quietaçaõ quando he ferida pelo fluido, e advertindo que a impulsaõ perpendicular sobre huma superficie plana he proporcional á mesma superficie multiplicada pelo quadrado da velocidade, ou (que vem a ser o mesmo) pela altura media do fluido, será o momento de impulsaõ sobre $mnop$ representado por $mnop.TX.CX$, e sobre $efgb$ por $efgb.tZ.CZ$. Assim teremos a rasaõ destes dous momentos, e pronunciaremos se se ganha ou perde alguma cousa em transformar a penna $mnop$ em $efgb$.

555 Passemos ao exame da velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que a maquina produza o maior effeito possivel.

O effeito da maquina he a quantidade de movimento impresso no pezo Q, que ella eleva uniformemente. Fazemos abstracçaõ das resistencias, ou ao menos suppomo-las comprehendidas no pezo Q. Assim, suppondo que o pezo Q tem a velocidade uniforme v, he necessario combinar de tal maneira o pezo com a velocidade, que o producto Qv seja hum *maximo*. Quando todos os fios da agua se movem com igual velocidade, e a roda está em quietaçaõ ao tempo que vem a ser ferida pelo fluido, o momento que resulta de todas as impulsões sobre as partes das pennas mergulhadas na agua he sempre igual ao momento, que receberia huma superficie plana vertical da mesma largura das pennas, e igualmente mergulhada (n.545.). O cen-

S 2 tro

tro de impressaõ desta superficie coincide com o seu centro de gravidade, por se suppor que todas as moleculas de agua a ferem com velocidades iguais, e parallelas. Naõ succede o mesmo em huma roda, que já se move quando he ferida pelo fluido. Porque as partes de huma mesma penna tem differentes velocidades, conforme as distancias do eixo, e será necessario calcular o momento elementar de cada parte, e attender ao numero das pennas, como adiante mostraremos.

556 Aqui suppomos, conforme ao uso ordinario, que em lugar das pennas se substitue huma superficie plana vertical, que antes da percussaõ actual tenha já huma velocidade uniforme e permanente. Representando esta superficie por A, a velocidade primitiva e uniforme do seu centro de impressaõ por u, a distancia deste centro ao da roda por b, a velocidade constante do fluido por V, o pezo elevado por Q, a sua velocidade por v, e o seu braço de alavanca por c; e suppondo que a impulsaõ perpendicular do fluido sobre huma superficie B em quietaçaõ he representada pelo pezo F; será a impulsaõ sobre a superficie A representada por $\frac{F.A.(V-u)^2}{B.V^2}$ (n.504.). Logo, em rasaõ do equilibrio que ha a cada instante entre esta impulsaõ e o pezo Q, teremos $\frac{F.A(V-u)^2}{B.V^2}\cdot b = Q.c$; e multiplicando o segundo membro por v, e o primeiro por $\frac{cu}{b}$ quantidade igual a v, acharemos $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$. Como pois he constante o coefficiente $\frac{F.A}{B.V^2}$, a questaõ se reduz a fazer que $(V-u)^2 u$ seja hum *maximo*. Assim teremos $(V-u)^2 du - 2(V-u)udu = 0$, e $u = \frac{1}{3}V$; donde se segue, que *para ser o effeito da maquina hum maximo, he necessario que a velocidade do centro de impressaõ da superficie A seja hum terço da velocidade do fluido.*

557 Subs-

557 Substituindo o valor achado de u na equaçaõ $Qv = \frac{F.A(V-u)^2 u}{B.V^2}$, teremos $Qv = \frac{4F.A.V}{27B}$, ou (fazendo a superficie dada $B = A$), $Qv = \frac{4F.V}{27}$. Porém sendo H a altura devida á velocidade V, temos proximamente $F = 2A.H$; logo $Qv = \frac{8A.H.V}{27}$. Donde se vê, que quando a maquina produz o maior effeito, póde imprimir a hum pezo de agua representado por $\frac{8A.H}{27}$ a velocidade do fluido V, ou (que vem a ser o mesmo) póde dar a hum pezo $A.H$ huma velocidade que seja $\frac{8}{27}$ da velocidade da corrente.

558 Tudo o que havemos dito das rodas mergulhadas verticalmente em huma corrente, se entenderá tambem das rodas horizontais, que tem as pennas rectangulares, e que saõ movidas por hum fluido cuja direcçaõ está no plano da roda. Algumas vezes se usa de rodas desta especie; mas ordinariamente a direcçaõ do fluido he obliqua ao plano da roda horizontal, e se dá certa inclinaçaõ ás pennas a respeito do mesmo plano. A fig. 161 representa huma destas rodas, movida pela corrente VQ que cahe de certa altura, e que fere cada huma das pennas á medida que a sua linha do meio AB se acha na horizontal CB perpendicular ao plano vertical que passaria pela direcçaõ VQ do canal. Bem se vê, que convem dar a esta especie de rodas hum grande numero de pennas, a fim de que os golpes do fluido se succedaõ huns aos outros sem interrupçaõ, pois o pezo que a roda se suppoem levantar actua continuamente em sentido contrario. Deve com tudo evitar-se o multiplicar as pennas a ponto de fazer a roda muito pezada.

559 Sendo dada a direcçaõ do fluido, e a velocidade da roda, entre todas as posições, que podem dar-se a cada penna relativamente á direcçaõ do fluido, ou do plano da roda, haverá huma que será mais ventajosa para

ra imprimir força na roda. Esta posiçaõ se determina, como no n.º 518.

Seja o plano da penna representado por ef (Fig. 162.) $= A$, a direcçaõ do fluido VQH, e a sua velocidade representada por $QH = V$, a velocidade horizontal da roda por $QF = u$, e a percussaõ perpendicular do mesmo fluido sobre hum plano dado B por F. Assim teremos a percussaõ que resulta perpendicularmente sobre o plano inclinado $ef = \frac{F.A.QG^2.MB^2}{B.QA^2.V^2}$ (n. 508.), representando QA o seno total. Tomando QR perpendicular a ef, para representar esta impulsaõ, e resolvendo-a em duas, huma Qs pela direcçaõ de QF, e a outra QT perpendicular a QF, he evidente que a força QT he destruida, e que somente QS tende a mover a roda. Porém os triangulos semelhantes RQS, MQN daõ $QS = \frac{QR.MN}{QM}$ $= \frac{QR.MN}{QA}$. Logo, substituindo o valor de QR será a força $QS = \frac{F.A.QG^2.MB^2.MN}{B.QA^3.V^2}$, ou (supponda o raio arbitrario $QA = 1$) $QS = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,GQM^2.\mathit{sen}\,FQf}{B.V^2}$, ou (fazendo o angulo constante $GQN = p$, e o angulo $GQM = x$) $QS = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x)}{B.V^2}$. Esta força faz equilibrio a cada instante com o pezo Q' (Fig. 161.); e assim designando o raio da roda CQ por b, e o braço de alavanca do pezo Q' por c, teremos $Q'.c =$ $\frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x)\,b}{B.V^2}$. Sendo pois a velocidade do pezo $= v$, e multiplicando por $v = \frac{cu}{b}$, acharemos $Q'v = \frac{F.A.QG^2.\mathit{sen}\,x^2.\mathit{sen}\,(p-x).u}{B.V^2}$. Nesta equaçaõ

he

he constante o factor $\frac{F.A.QG^2}{B.V^2}$, e a questaõ se reduz a fazer que $sen\, x^2\, sen\,(p - x)$ seja hum maximo; donde acharemos, como no n.° 518,

$$tang\, x = -\frac{3}{2}\cot p + \sqrt{\left(\frac{9}{4}\cot p^2 + 2\right)},$$

ou faremos huma construcçaõ como no n.° 519.

Tambem he facil de calcular trigonometricamente o angulo AQX (Fig. 162.), ou a sua ametade AQM. Porque sendo dado o angulo VQF, no triangulo FQH conheceremos o angulo FQH e os dous lados QH, QF, e determinaremos o angulo FHQ, ou o seu igual HQG. Logo conheceremos o angulo GQF, e o seu supplemento GQN. No triangulo QKX conhecemos os lados QK, QX e o angulo $QKX = GQN$; e assim determinaremos o angulo QXK, ou o seu igual XQN. Logo conheceremos o angulo AQX, soma dos dous calculados GQN, XQN.

Tendo de qualquer maneira determinado em cada caso particular os valores de $sen\, x^2$, e $sen\,(p - x)$, substituir-se-haõ na equaçaõ, para conhecer o valor absoluto do *maximo*, isto he, o effeito $Q'v$ da maquina quando elle he o maior possivel.

560 Se os angulos formados pela direcçaõ do fluido com o plano da penna, e com o da roda, forem dados, e quizermos saber a velocidade que deve ter a roda para o seu effeito ser hum maximo, faremos a mesma construcçaõ do n.° precedente (Fig. 163.), e acharemos a mesma equaçaõ $Q'v = \frac{F.A.QG^2.\, sen\, x^2.\, sen\,(p - x).\, u}{B.V^2}$.

Entaõ he facil de ver que tudo he constante, exceptuando a quantidade $QG^2.\, sen\, x^2.u$. Tirando pois dos pontos A, G as perpendiculares AI, GZ, GP para as rectas QM, QH, e representando por m o seno do angulo dado GHP, teremos $QG : GZ :: QA : AI :: QM : MB :: 1 : sen\, x$, e conseguintemente $QG^2.\, sen\, x^2 = GZ^2$; teremos tambem $GH = QF = u = \frac{GP}{m}$. Logo será $QG^2.\, sen\, x^2.\, u = \frac{GZ^2.GP}{m}$; e desprezando o divisor constante m, a questaõ se ſe reduzirá a fazer que $GZ^2 . GP$ ſeja hum *maximo*. E porque o ponto G deve achar-ſe na recta HY dada de poſição e de grandeza, fazendo $HY = b$; e abaixando a perpendicular QO, os triangulos ſemelhantes QOY, GZY daraõ $GZ = \frac{GY . QO}{QY} = \frac{QO(b-u)}{QY}$, e os triangulos ſemelhantes QOH, GPH daraõ $GP = \frac{QO . GH}{QH} = \frac{QO . u}{QH}$. Logo $GZ^2 . GP = \frac{QO^3 (b-u)^2 u}{QY^2 . QH}$; e deſprezando o factor conſtante $\frac{QO^3}{QY^2 . QH}$, ſeremos reduzidos a fazer que $(b-u)^2 u$ ſeja hum maximo. Aſſim teremos $(b-u)^2 du - 2u(b-u) du = 0$, e $u = \frac{1}{3} b$.

Donde ſe vê, que conduzindo pelo ponto dado H parallelamente á direcçaõ dada QF a recta HY que encontre em Y o prolongamento da penna fe; e que tomando $HG = \frac{1}{3} HY$, conduzindo QG, e acabando o parallelogrammo $QGHF$, a velocidade mais ventajoſa da roda ſerá repreſentada por QF. Calculando pois em cada caſo particular o valor de QF ou HG, ſubſtituir-ſe-ha na equaçaõ geral para determinar o valor abſoluto do maior effeito poſſivel da maquina $Q'v$.

561 As pennas naõ ſaõ ordinariamente planas, mas encurvaõ-ſe á maneira de culheres (Fig. 164.). Por meio deſta figura, depois de ſerem feridas pela agua conſervaõ parte della por algum tempo, a qual pelo ſeu pezo aumenta a velocidade, e a força da roda. Devem pois os reſultados dos calculos precedentes modificar-ſe hum pouco, relativamente a eſta circunſtancia. Em muitas Provincias de França, principalmente no Delfinado, e na Provença, ſe uſa de rodizios deſta forma na conſtrucçaõ dos moinhos.

562 Em Guienna e Languedoc applicaõ tambem aos moinhos outra eſpecie de rodas (Fig. 165.), que tem a forma de huma pyramide conica inverſa, ſituada verticalmente, e guarnecida na ſuperficie de pennas obliquas, ou ſpirais. Eſtas rodas ſe poem dentro de tinas de alvenaria

naria construidas de proposito para esse effeito. He bem difficil calcular rigorosamente os effeitos desta especie de rodizios; mas poderá fazer-se huma idêa sufficiente na practica, por meio da theorica que havemos dado para as outras especies.

563 Ha pouco tempo que entre as Memorias da Academia appareceraõ indagações muito ingenhosas sobre as rodas hydraulicas, nas quais se serve o Autor de huma theorica diversa da precedente. Suppoem, que as pennas de huma roda recebem todo o effeito da agua, e naõ deixaõ escapar parte alguma deste fluido, sem lhe haver tirado o excesso da sua velocidade sobre a dellas. Deste modo compara a percussaõ dos fluidos á de hum corpo duro em movimento, que vai encontrar outro duro em quietaçaõ; e acha, que para o maior effeito possivel da maquina deve a velocidade da roda ser a ametade, e naõ o terço da velocidade do fluido, como se diz ordinariamente. Mas esta theorica naõ he applicavel ás rodas mergulhadas nos rios, onde o fluido naõ he contido de ambos os lados, nem por conseguinte necessitado a perder ametade da sua velocidade contra as pennas. Tambem sofre restricções muito sensiveis nas rodas, que se movem dentro de canais; porque se perde sempre huma parte do fluido pelos intersticios, que he necessario deixar entre as extremidades das pennas e o interior do canal. De mais, supposto dados estes intersticios, a theorica referida conduz sempre aos mesmos resultados, seja qual for o numero das pennas; ou ao menos naõ parece propria para determinar, se ha hum numero de pennas mais ventajoso que outro. Porém agora veremos pela experiencia, que o numero das pennas naõ he indifferente, relativamente ao effeito da maquina. 91

Experiencias e Reflexões sobre as Rodas movidas pela impulsaõ da agua.

564 A Fig. 166 representa huma roda, que primeiramente tinha 48 pennas, e que successivamente reduzimos a 24, e a 12, todas planas, e dirigidas ao centro, cuja largura era de 5 pollegadas justas, e a altura de 4 até 5. Ellas mergulhavaõ na agua do canal, que referimos no nº. 426, a 50 pés de distancia da refer-

reserva, deixando meia linha de interſticio entre as extremidades dellas, e o fundo e paredes do canal. O diametro exterior *B K* era de 3 pés 1 poll. 10 linh.; o do cylindro, em que ſe enroſcava a corda de 2 poll.; o das eſpigas do eixo de 2 linhas e meia; o da roldana *O* de 3 poll. 8 linh.; o das eſpigas do ſeu eixo de 2 linhas e 2 terços; e o da corda de 2 linh. A velocidade da corrente tinha ſido determinada pelas experiencias do nº. 426; e as voltas da roda em todas as experiencias ſeguintes naõ ſe começáraõ a contar, ſenaõ depois que o movimento ſe tinha feito uniforme; o que ſuccede ſempre, quando a roda tem dado 4 ou 5 voltas.

565 Sendo pois a elevaçaõ da adufa de 1 pollegada, e a velocidade permanente da agua no canal de 300 pés em 33 ſegundos (n. 426.), obſervámos os factos ſeguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	60''	33, 25
48	16	60	28, 5
24	12	60	29
24	16	60	25, 5
12	12	60	25, 5
12	16	60	19, 25

566 E ſendo a elevaçaõ da adufa a meſma, porém a velocidade da agua no canal de 300 pés em 30 ſegundos (n. 426.), achámos os factos ſeguintes.

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	12 *libr.*	48''	34
48	16	48	31, 25
24	12	48	30, 33...
24	16	48	28, 5
12	12	48	25
12	16	48	23

567 Por

567 Por eſtas experiencias ſe vê, que a roda com o meſmo pezo anda mais velozmente, quando tem maior numero de pennas. Logo em todos os caſos ſemelhantes ás meſmas experiencias, ſerá conveniente dar a huma roda ao menos 48 pennas, ſe ella as puder ter ſem ficar muito pezada, e ſem enfraquecer o anel, em que ellas encaixaõ. Vejamos pois, qual he o valor do arco *MBN*, que mergulha na agua. A extremidade de huma penna vertical mergulhava-ſe 13 linhas proximamente. Com eſta quantidade, e com o raio da roda, acharemos $MBN = 24^{\circ}\ 54'$. Nas rodas grandes, que tem perto de 20 pés de diametro, e que ſaõ movidas por huma corrente rapida, o arco mergulhado naõ excede de 25° até 30°; e ordinariamente ſe lhes naõ dá mais que 40 pennas. Se foſſe maior o numero dellas, ſeriaõ mais ventajoſas.

568 He praxe recebida dar hum pequeno numero de pennas ás rodas, que mergulhaõ em rios; e iſſo, para impedir que as pennas ſe naõ cubraõ humas ás outras, ou para que cada huma receba inteiramente a percuſſaõ da agua. A experiencia nos enſinará o que devemos penſar neſte ponto.

A roda, de que nos ſervimos para iſto (Fig. 167. 168.) he de conſtrucçaõ diverſa da precedente. *BGFHbbgf* he a elevaçaõ commua de duas coroas de ferro, cuja largura *Bb* he de 9 linhas, e a groſſura de 1 linha. As pennas ſaõ de folha de ferro de meia linha de eſpeſſura. A extremidade exterior *B* de cada huma he ſuſtentada por huma pequena cavilha de ferro, que ſe encaixa nas duas coroas, e a outra extremidade por duas haſtes *AR* de de ferro, que eſtaõ prezas em *R* á roda *K* movel ao redor do centro *C*. Por eſte meio ſe póde diminuir o numero das pennas, quando for neceſſario, e dirigillas ao centro, ou inclinallas ao raio, conforme ſe quizer. O diametro exterior *BF* he de 3 pés, a largura das pennas de 5 pollegadas, e a altura de 6; o diametro do cylindro que recebe a corda de 2 poll. 6 linh., o das eſpigas do ſeu eixo de 3. linh., o da roldana de 3 poll. 8 linh., o das eſpigas do ſeu eixo de 2 linh. e 2 terços, e o da corda de 2 linhas. O eixo da roda he guarnecido de huma pequena roda dentada, que por meio de huma taramella a faz parar no inſtante que ſe quer, e que ſerve para medir as fracções de huma volta. O pezo total da maquina he de 44 libras. 569 Pro-

569 Procurando pois huma corrente incluida entre dous muros verticais, parallelos, e diſtantes hum do outro de 12 até 13 pés, cujo fundo era bem unido, e a profundidade da agua de 7 até 8 pollegadas, aſſentámos a maquina (Fig. 167.), de maneira que as pennas ſe mergulhaſſem 4 pollegadas ſegundo a vertical, e que naõ houveſſe obſtaculo que alteraſſe os effeitos da percuſſaõ; e aſſim achamos os reſultados ſeguintes

Numero das pennas	Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
48	24 *libr.*	60''	$27 \frac{19}{48}$
24	24	60	$27 \frac{7}{48}$
24	40	40	$15 \frac{28}{48}$
12	40	40	$13 \frac{15}{48}$

570 Por eſtas experiencias ſe vê, que a roda levanta o meſmo pezo com maior velocidade ſenſivel quando tem 24 pennas, do que quando tem 12 ſómente; mas quando tem 48 pennas a velocidade naõ differe quaſi nada da que ſe obſerva quando tem 24 pennas. O arco mergulhado *MBN* era de $77^{\circ}\ 53'$. He pois certo, que em caſos ſemelhantes a eſte convém dar ao menos 24 pennas á roda; e ſe o mergulhamento foſſe mais conſideravel, poderia ſer o numero menor. Na practica ordinaria daõ-ſe ás rodas dos moinhos mergulhadas em rios 8 até 10 pennas, e algumas vezes menos. Eſte numero he muito pequeno; e ellas andariaõ muito melhor, ſe tiveſſem de 12 até 18 pennas.

571 Havemos determinado pela theorica (n. 556.) a velocidade, que a roda deve tomar em comparaçaõ da velocidade do fluido, para que reſulte o maior momento poſſivel. Agora conſultemos ſobre iſſo a experiencia.

Sendo

Sendo a roda de 48 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 425, cuja velocidade era 300 pés em 27 seg.			Sendo a roda de 24 pennas (Fig. 167.) applicada ao canal do n. 569, e as pennas mergulhadas 4 polleg. verticalmente,		
Pezo levantado.	*Tempo.*	*Voltas da roda.*	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
33 libr.	40″	21 $\frac{8}{48}$	57 libr.	40″	12 $\frac{19}{48}$
33 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{44}{48}$	58	40	12 $\frac{10}{48}$
34	40	20 $\frac{32}{48}$	59	40	12 $\frac{1}{48}$
34 $\frac{1}{2}$	40	20 $\frac{21}{48}$	60	40	11 $\frac{40}{48}$
35	40	19 $\frac{44}{48}$	61	40	11 $\frac{30}{48}$
35 $\frac{1}{2}$	40	19 $\frac{15}{48}$	62	40	11 $\frac{19}{48}$
36	40	18 $\frac{28}{48}$	63	40	11 $\frac{7}{48}$

572 Como os differentes pezos levantados tem o mesmo braço de alavanca, e os tempos saõ iguais, as suas velocidades seraõ como os numeros das voltas respectivas da roda. Assim, desprezando a fricçaõ e resistencia do ar, o maior effeito da maquina será, quando for maior o producto do pezo levantado pelo numero correspondente das voltas da roda. No primeiro caso acharemos, que o maior destes productos he o que corresponde ao pezo de 34 $\frac{1}{2}$ libras, quando a roda dá 20 $\frac{7}{16}$ voltas em 40 segundos.

Sendo pois a velocidade do fluido de 300 pés em 27″, ou de 5334 poll. em 40″, busquemos a velocidade do centro de impressaõ da roda no mesmo tempo. Por quanto o diametro da roda era de 36 pollegadas, e o diametro da circumferencia descrita pelo centro de impressaõ de 34 proximamente, o dito centro descrevia em 40″ o espaço

paço de $34 \cdot \frac{355}{113}\left(20 + \frac{7}{16}\right)$, isto he, de 2183 pollegadas. Assim achamos, que a velocidade da agua era para a velocidade do centro de impressaõ, como 5334, para 2183, ou como 5 para 2 proximamente. Donde se vê, que a velocidade do centro de impressaõ das pennas he maior que o terço, e menor que a ametade da velocidade do fluido, quando a roda se move em canal estreito.

573 Mas esta rasaõ será a mesma, havendo respeito ás resistencias? a questaõ póde reduzir-se a isto. Temos duas quantidades semelhantes, e consecutivas Mv, Nv', cada huma das quais exprime o producto do pezo pela sua velocidade, e suppoem-se que Mv he hum *maximo*, e por conseguinte $Mv > Nv'$. Entaõ, para ter conta das resistencias, cada hum dos pezos M, N deve suppor-se aumentado de certa quantidade. Suppondo pois que M se torna em $M + m$ e N em $N + n$; pergunta-se, se a mesma velocidade v que faz Mv hum *maximo*, fará tambem $Mv + mv$ hum *maximo*, ou $Mv + mv > Nv' + nv'$? He evidente, que em geral póde ser, ou naõ ser, conforme a rasaõ dos pezos m, n. Mas aqui he provavel, que as forças das resistencias mv, nv' saõ, ao menos sensivelmente, como as forças Mv, Nv'. Assim teremos $mv : nv' :: Mv : Nv'$, e conseguintemente $Mv + mv : Nv' + nv' :: Mv : Nv'$. Porém $Mv > Nv'$; logo $Mv + mv > Nv' + nv'$.

574 No segundo caso medimos a velocidade da corrente por meio de hum molinete muito ligeiro, situado ao lado da roda, e achámos que a velocidade *media* da agua era de 2740 em 40″. E multiplicando cada pezo das experiencias pelas voltas correspondentes da roda, vemos que o *maximo* corresponde ao pezo de 60 libras, quando a velocidade da circumferencia da roda he de 1338 pollegadas em 40″, e a do centro de impressaõ de 1189 pollegadas no mesmo tempo. Donde se vê, que tambem nas rodas mergulhadas nos rios deve ser a velocidade do centro de impressaõ 2 quintos da velocidade da corrente, sem grande differença.

575 Examinemos agora, se nas rodas verticais he ventajoso, ou naõ, inclinar as pennas ao raio, como se pratica algumas vezes (Fig. 168.).

Primeiramente no canal estreito do n.º 426, sendo a velo-

velocidade da agua de 300 pés em $27''$ com a roda de 48 pennas, para differentes inclinaçoens dellas, ou angulos *CBA*, achamos os resultados seguintes

Inclinação.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	34 libr.	$40''$	$20\frac{26}{48}$
8	34	40	$19\frac{20}{48}$
8	38	40	$17\frac{5}{48}$
12	34	40	$19\frac{40}{48}$
12	38	40	$17\frac{22}{48}$
16	34	40	$20\frac{24}{48}$

E depois no canal largo do nº 569, sendo a roda de 12 pennas, e estando mergulhada na agua 4 pollegadas verticalmente, achamos os resultados seguintes

Inclinação.	*Pezo levantado.*	*Tempo.*	*Voltas da roda.*
0°	40 libr.	$40''$	$13\frac{17}{48}$
15	40	40	$14\frac{21}{48}$
30	40	40	$14\frac{22}{48}$
37	40	40	$14\frac{15}{48}$

576 Donde se vê, que no primeiro caso, as pennas dirigidas ao centro saõ mais ventajosas que as inclinadas de

de 8° ; porém estas menos ventajosas que as inclinadas de 12°, e estas menos que as inclinadas de 16°. A rasaõ he; porque sendo as pennas inclinadas, a percussaõ obliqua se resolve em duas, huma perpendicular á penna, a qual só executa a percussaõ, e a outra parallela á mesma penna, a qual faz subir a agua ao longo della. Esta agua elevada fica por algum tempo sobre a penna, e pelo seu pezo compensa, e póde exceder o que se tinha perdido na percussaõ pela obliquidade.

No segundo caso se vê, que a obliquidade mais ventajosa se acha entre 15° e 30°. Sempre ha huma obliquidade que se naõ deve passar, porque se perderia mais na percussaõ do que se ganharia no pezo da agua. M. Deparcieux (*Mem. de l'Acad.* 1759.) refere muitas outras experiencias, em que as pennas inclinadas ao raio saõ mais ventajosas, que as dirigidas ao centro.

Das rodas movidas pelo pezo da agua; ou pelo pezo, e pela impulsaõ ao mesmo tempo.

577 AS rodas de que agora tratamos, e que ordinariamente se chamaõ *rodas de cubos*, saõ as que recebem a agua de huma corrente em certas vasilhas *Amn* practicadas na circumferencia (Fig. 170.), cujo pezo as faz andar. Os cubos devem conservar a agua recebida o mais que he possivel, e conseguintemente naõ devem começar a despejar-se, senaõ quando tem chegado perto do ponto *D* extremidade inferior da vertical *AD*.

578 Algumas vezes a roda tem menos velocidade, do que o fluido que entra nos cubos; e entaõ he movida ao mesmo tempo pela percussaõ da agua que entra de novo a cada instante, e pelo pezo da que elles contém.

579 O movimento da roda he accelerado nos primeiros instantes; mas depois de algumas revoluções se faz uniforme. Entaõ, a força que a roda recebe ou do pezo do fluido, ou do pezo combinado com a percussaõ, faz continuamente equilibrio com o pezo *Q*, que a maquina levanta, ou que se considera levantar, e com a resistencia da fricçaõ. Neste caso o equilibrio he, como se a maquina estivesse em quietaçaõ; e por isso naõ consideramos o movimento, senaõ depois de haver chegado á uniformidade.

580 Isto posto, seja $ABDE$ (Fig. 171.) huma roda vertical perfeitamente movel ao redor do centro C; e seja cuberta de agua a porçaõ da coroa $GgBbH$, cuja altura Gg ou Hb se considera infinitamente pequena em comparaçaõ do raio CM. Do centro C tirem-se os raios infinitamente vezinhos CM, Cm, que determinaõ a quantidade elementar de agua $MNnm$; e pelos pontos G, H, M, m tirem-se as horizontais GF, HV, MP, mp, e abaixe-se a vertical MI, que encontre em I o diametro horizontal BE, e em t a ordenada mp ao diametro vertical AD. A porçaõ de agua $MNnm$ póde representar-se por $Mm.MN$; e o seu momento relativo ao centro C será $Mm.MN.CI$, ou $Mm.MN.MP$. Porém os triangulos semelhantes Mtm, MPC daõ $Mm.MP = CM.Pp$. Logo o momento será representado por $MN.CM.Pp$; e conseguintemente o momento total de toda a agua $GgBbH$, por $MN.CM.FV$.

581 Logo, se a roda girar com velocidade igual á da agua que entra nos cubos, de maneira que naõ haja percussaõ, e se designarmos o pezo elevado por Q, o seu braço de alavanca por c, e a sua velocidade por v, a velocidade da circumferencia da roda por u, a secçaõ rectangular de hum cubo por A, cuja largura he horizontal, e a altura MN; teremos $Qc = A.CM.FV$, e

$$v = \frac{cu}{CM}$$; donde se tira $Qv = A.FV.u$.

582 Seja primeiramente huma roda vertical $ABDE$ (Fig. 172.), movida pela agua de hum canal fechado $OZGg$, de maneira que conduzindo a horizontal GF, a velocidade em G seja devida á altura RF da reserva provisional $XZYT$; e supponhamos, que a roda se move com huma velocidade igual á do fluido, e que a porçaõ da coroa $GBHbbg$ representa a agua que está constantemente nos cubos, de maneira que se vase tanta por Hb como entra por Gg. Guardando as denominações do n.º precedente, e suppondo que H he a altura devida a huma velocidade dada V, e fazendo $RV = b$, $RF = x$, teremos $u = V\sqrt{\frac{x}{H}}$, e $Qv = \frac{AV(b-x)Vx}{\sqrt{H}}$.

Assim para ser o effeito maior que he possivel, deverá

 ser

ser $(b-x)\sqrt{x}$ hum *maximo*, e conseguintemente teremos $\frac{(b-x)dx}{2\sqrt{x}} - dx\sqrt{x} = 0$; donde se tira $x = \frac{1}{3}b$. Para ser pois o effeito da maquina o maior que he possivel, he necessario que a altura devida á velocidade da roda seja hum terço da altura da reserva acima do ponto mais baixo, onde a agua dos cubos se despeja.

ſ.

583 Substituindo o valor achado de x na equaçaõ $Qv = \frac{AV(b-x)\sqrt{x}}{\sqrt{H}}$, teremos $Qv = \frac{2AVb\sqrt{b}}{3\sqrt{3H}}$ por expressaõ do maior effeito possivel.

584 A soluçaõ deste problema póde ser util, quando tendo construido huma roda se quer fazer andar do modo mais ventajoso, e quando sendo dada a altura da reserva, temos a liberdade de tomar mais ou menos agua, conforme for necessario. Bem se vê, que entaõ he necessario conduzir o canal $OZGg$ de maneira, que a agua seja recebida toda nos cubos, que a altura RF seja hum terço de RV, e que a circumferencia da roda tome a velocidade do fluido em G. He indifferente, que a agua entre por cima da roda como na Fig. 172, ou de ilharga como na Fig. 173.

585 Quando podemos dar ao fluido a queda RV, perguntar-se-ha se em lugar da roda de cubos naõ seria mais ventajoso empregar huma roda de pennas, que fosse movida pela percussaõ do fluido com a velocidade devida á dita altura. Para responder a isto observaremos, que supponde a superficie A constante, e sendo a velocidade adquirida por RV representada por $\frac{V.\sqrt{RV}}{\sqrt{H}}$, o maior effeito da roda de pennas será $\frac{8A.V.RV.\sqrt{RV}}{27\sqrt{H}}$ (n.557.). Logo o maior effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{8}{27}$, ou como 9 para $4\sqrt{3}$. Donde se vê, que a roda de cubos he mais ventajosa que a de pennas na rasaõ de 9 para 7 proximamente: ao que se

ſe deve acreſcentar, que a primeira deſpende menos que a ſegunda na raſaõ de $\sqrt{RF}$ para $\sqrt{RV}$, ou de 1 para $\sqrt{3}$.

586 A hypotheſe, que ſerve de baſe aos n.os 582, 583, 584, que ſendo conſtante a altura da reſerva podemos tomar mais ou menos agua conforme quizermos, naõ tem lugar ordinariamente na practica. Pela maior parte ſuccede, que a reſerva dá quantidades iguais de agua em tempos iguais, de qualquer maneira, e em qualquer altura que ella ſe receba na roda.

Supponhamos pois, que $ABDE$ (Fig. 174.) he huma roda vertical, movida pela agua de hum canal aberto; e repreſentemos por M a quantidade conſtante de agua, que elle fornece em hum tempo dado, em hum ſegundo por exemplo. A velocidade u da circumferencia da roda ſerá o eſpaço deſcrito por ella no meſmo tempo; e teremos $Au = M$, ou $A = \frac{M}{u}$. Logo ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ do n.º 581, teremos $Qv = M.FV$. Donde ſe vê, que para fazer o effeito Qv o maior que he poſſivel, he neceſſario aumentar FV quanto for poſſivel.

587 Daqui ſe ſegue, que ſendo dada a altura RV, e conſervando-ſe ſempre a meſma deſpeza M por meio das mudanças que ſe podem fazer no orificio OZ, quanto mais ſe diminuir a parte RF, mais ſe aumentará o effeito da maquina. Porém á medida que diminue RF, diminue a velocidade do fluido, e conſeguintemente a da roda. Logo a roda produzirá hum effeito maior, quando girar com menor velocidade. Mas iſto tem ſeus limites; porque ſendo dadas as dimenſões dos cubos pela equaçaõ $A = \frac{M}{u}$, deve creſcer A quando u diminue, e o aumento de A deve ter ſeus limites, de outra ſorte a roda deveria ſer muito alta, e muito larga, e conſeguintemente muito pezada.

588 Sendo pois o effeito deſta roda repreſentado por $M.FV$, ou por $M(RV - RF)$, he facil de ver (n. 557.) que o maior effeito de huma roda de pennas debaixo da altura RV ſeria repreſentado por $\frac{8\,M.RV}{27}$; porque

a despeza da agua he como a velocidade multiplicada pelo orificio, e a velocidade como a raiz quadrada da altura. Logo o effeito da roda de cubos he para o maior effeito da roda de pennas como 27 ($RV - RF$) para $8RV$; e porque RF se suppoem muito menor que RV, o effeito da primeira será muito maior que o da segunda.

589 Supponhamos agora huma roda, que ande com menor velocidade que a do fluido em G; e seja u a velocidade da roda, V a do fluido em G, F a impulsaõ perpendicular que elle daria em hum plano B em quietaçaõ, e C a superficie plana a que se reduz a superficie dos cubos ferida perpendicularmente pelo fluido. Conservando as outras denominações dos n.os precedentes, acharemos $Qv = M.FV + \frac{F.C(V-u)^2 u}{B.V^2}$ (n. 556. e 586.).

590 Para determinar o maximo, reflectiremos, que no segundo membro tudo he constante, excepto $(V-u)^2 u$, e acharemos $u = \frac{1}{3}V$. Metendo este valor na equaçaõ, tomando $B = C$, fazendo $F = 2C.RF$ (n. 527.), e advertindo que $M = C.V$, acharemos $Qv = M.FV + \frac{8\,M.RF}{27}$, ou $Qv = M\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$.

Donde se vê, que esta roda produzirá tanto maior effeito, quanto menor for a sua velocidade, e que o seu maior effeito será para o de huma roda de pennas debaixo da queda RV, como $27\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$ para $8RV$.

591 De tudo isto se segue, que as rodas de cubos saõ mais ventajosas que as de pennas, quando se póde dar á agua grande queda. Porém ha occasiões, em que he necessario que a roda ande com grande velocidade, e por outra parte a agua he em abundancia. Entaõ saõ preferiveis as rodas de pennas; porque produzindo as de cubos o maior effeito quando andaõ de vagar, seria necessario, que endentassem em alguns carretes ou lanternas, o que complicaria a maquina, e aumentaria a fricçaõ. As rodas de pennas saõ tambem as unicas, que podem servir nas correntes dos rios.

592 So-

592 Sobre as rodas de cubos fizemos poucas experiencias; mas naõ deixará de ser util ajuntarmolas aqui.

A Fig. 170 representa a maquina, de que nos servimos. O canal *XYTZ* que conduzia a agua era horizontal, de 5 pollegadas de largura, e dava constantemente 1194 pollegadas cubicas por minuto. A roda tinha 48 cubos de 3 pollegadas de altura, e 5 de largura; o diametro da roda *AD* era de 3 pés, o do eixo de 2 pollegadas e 7 linhas, e o das suas espigas de 2 linhas e meia. A roldana *O* era a mesma, que nas experiencias das rodas de pennas.

593 Contando pois o numero das voltas, assim que o movimento tinha chegado á uniformidade, o que succede sempre depois de 5 ou 6 revoluções, observámos os factos seguintes

Pezo levantado	Tempo	Voltas da roda
11 *libr.*	60″	11 $\frac{46}{48}$
12	60	11 $\frac{11}{48}$
13	60	10 $\frac{25}{48}$
14	60	9 $\frac{40}{48}$
15	60	9 $\frac{10}{48}$
16	60	8 $\frac{31}{48}$
17	60	8 $\frac{9}{48}$
18	60	7 $\frac{32}{48}$

Com o pezo de 19 libras ainda se movia a roda, mas muito de vagar; e com 20 libras parava, aindaque se puzesse primeiro em movimento com a maõ, para lhe fazer

fazer tomar a agua; e naõ tendo pezo algum, dava $40\frac{1}{4}$ voltas em hum minuto.

594 Multiplicando cada pezo pelo numero correſpondente das voltas da roda, acharemos que o maior producto correſponde proximamente ao pezo de 17 libras; e entaõ he a velocidade da roda ſenſivelmente, como a formula do nº 590 requer.

Por quanto no caſo do maior effeito dá a roda $8\frac{3}{16}$ voltas em 1 minuto, e no meſmo tempo daria $40\frac{1}{4}$, ſe naõ levantaſſe pezo algum, ſegue-ſe que a velocidade competente ao maior effeito he para a velocidade, que a roda tomaria naturalmente ſendo deſcarregada, como 1 para 5 proximamente. Eſta reflexaõ póde ſer util na practica.

Determinaçaõ geral dos effeitos das rodas de pennas.

595 O Objecto, que aqui nos propomos, he determinar em geral o effeito de huma roda de pennas, havendo reſpeito á impulſaõ do fluido contra todas as pennas, que elle fere ao meſmo tempo. Eſte problema he inteiramente novo. Todos os Autores que eſcreveraõ ſobre eſta materia, naõ conſideráraõ mais que a impulſaõ contra huma ſó penna; o que facilita a ſoluçaõ, mas perde a generalidade, que he de tanto preço para os Geometras.

596 Seja $AKDB$ (Fig. 169.) a circumferencia exterior de huma roda vertical, guarnecida de qualquer numero de pennas Ee, Ff &c dirigidas ao centro C, e mergulhadas em huma corrente horizontal $XYTZ$, cujos pontos ſe movem todos com a meſma velocidade. Seja Mm hum elemento qualquer da penna Ee; e do ponto A onde a ſuperficie do fluido encontra a circumferencia $AKDB$, conduza-ſe para o centro o raio AC, e abaixe-ſe o raio vertical CI. Supponhamos o raio da roda $CA = a$, a largura das pennas $= b$, o ſeno total $= 1$, o angulo $ACI = m$, o angulo ECI que faz a primeira penna ferida com a vertical $= p$, o angulo comprehendido por duas pennas conſecutivas $= q$, a velocidade do fluido $= V$, a

de

de qualquer ponto da circumferencia $AKDB = u$, $EM = x$, $Mm = dx$, e a impulsaõ do fluido contra hum plano B em descanço $= F$.

Assim resolvendo a velocidade do fluido, como acima fizemos (n. 544.), teremos evidentemente My ou $zx = \frac{CM \cdot u}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$, $nx = V\cos p$, $nz = nx - zx = V\cos p - \frac{u(a-x)}{a}$, e em fim $\text{sen}\, z M n = \frac{nz}{Mz} = \frac{aV\cos p - u(a-x)}{a \cdot Mz}$. Logo a impulsaõ, que resulta perpendicularmente a Mm, será representada pela quantidade $\frac{Fb\,dx(aV\cos p - u(a-x))^2}{a^2 B V^2}$; e designando por dM o momento elementar que ella produz, teremos

$$dM = \frac{Fb\,dx(aV\cos p - u(a-x))^2 \cdot (a-x)}{a^2 B V^2},$$

ou fazendo, por abbreviar $\frac{Fb}{BV^2} = f$, e mudando hum pouco a fórma da equaçaõ

$$(A) \ldots dM = f\,dx\left(V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}\right)^2 \cdot \cos p^2 \cdot (a-x).$$

597 Bem se vê, que esta equaçaõ se integra sem difficuldade. Mas antes de fazer esta operaçaõ, observaremos que se a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$ fosse negativa, a penna seria a que feriria o fluido; e porque o quadrado he huma e outra expressaõ he o mesmo, naõ se poderia discernir qual dos dous casos tem lugar, se a integraçaõ se fizesse do modo ordinario. Eisaqui pois o que se deve fazer em geral.

Examinar-se-ha o que dá a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a\cos p}$, quando $x = EV = CE - CV = a - \frac{a\cos m}{\cos p}$, e quando $x = 0$. Isto posto, 1º Se a dita quantidade for positiva em ambos os casos, o fluido ferirá a penna em toda a exten-

extenſaõ VE, e o calculo ſe fará como logo veremos; 2º. Se for negativa em ambos os caſos, a penna ferirá o fluido em toda a extenſaõ VE, e o calculo ſe fará do meſmo modo; 3º. Se for poſitiva no primeiro caſo e negativa no ſegundo huma parte VR ſerá ferida pelo fluido, e a outra RE o ferirá a elle. Entaõ determinaremos o momento M, de maneira que o integral deſvaneça quando tivermos $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p} = 0$, ou quando $x = \frac{au - Va \cos p}{u}$, e que tenha o ſeu valor completo quando $x = EV = a - \frac{a \cos m}{\cos p}$. Seja G eſte integral, que exprime o momento de impulſaõ da agua contra VR. Tambem determinaremos M de maneira que o integral deſvaneça quando $x = 0$, e tenha o valor completo quando $x = ER = \frac{au - Va \cos p}{u}$. Seja H eſte integral, que exprime o momento da impulſaõ da parte RE contra o fluido. Eſtá claro, que $G - H$, ou $H - G$ repreſentará o momento da força reſultante que impelle a penna, ou o fluido.

598 He evidente, que o proceſſo do calculo he o meſmo nos tres caſos, e que ſe trata ſempre de tomar huma ſoma, ou huma differença de momentos de impulſaõ. Aqui naõ examinaremos mais que o primeiro, porque he o que tem lugar quaſi ſempre. Para que a quantidade $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p}$ ſeja poſitiva em toda a extenſaõ EV, baſta que ſeja $V \cos p = u$; e na practica temos quaſi ſempre $V \cos p > u$. Porque, ſeja $u = \frac{V}{3}$, como ſuccede ordinariamente; a equaçaõ $V \cos p = u$ daria $\cos p = \frac{1}{3}$, e o angulo $p = 70° 30'$. Porém he extremamente raro que o angulo p ſeja taõ conſideravel, ou que a penna ſe mergulhe na agua até dous terços do raio. Sendo a quantidade

dade $V - \frac{u(a-x)}{a \cos p}$ positiva, com maior rasaõ o seraõ as quantidades $V - \frac{u(a-x)}{a \cos(p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \cos(p-2q)}$ &c.

599 Integrando pois a equaçaõ (A) de maneira que o integral desvaneça quando $x = 0$, e receba o valor completo quando $x = EV = a - \frac{a \cos m}{\cos p}$, acharemos

$$M = \frac{fa^2 V^2 (\cos p^2 - \cos m^2)}{2} - \frac{2fa^2 Vu}{3}\left(\cos p - \frac{\cos m^3}{\cos p^2}\right) + \frac{fa^2 u^2}{4}\left(1 - \frac{\cos m^4}{\cos p^4}\right).$$

E fazendo, por abbreviar, $fa^2 V^2 = N$, e $u = kV$; sendo k hum coefficiente dado, teremos

$$M = N\left[\frac{\cos p^2 - \cos m^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos p - \frac{\cos m^3}{\cos p^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos m^4}{\cos p^4}\right)\right].$$

600 Pelo ponto E seja conduzida $E\,1$ parallela á superficie XY da agua. Está claro, que só a parte FV' da penna Ff he ferida pelo fluido; e designando por M' o momento de impulsaõ contra esta parte, acharemos pelo mesmo methodo

$$M' = N\left[\frac{\cos(p-q)^2 - \cos p^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos(p-q) - \frac{\cos p^3}{\cos(p-q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos p^4}{\cos(p-q)^4}\right)\right].$$

Do mesmo modo, conduzindo $F\,2$, $G\,3$ &c parallelas á superficie do fluido, e representando por M'', M''',....M'' os momentos de impulsaõ contra as partes GV'', HV''' &c, e contra huma parte indeterminada, teremos as equações seguintes

$$M'' = N\left[\frac{\cos(p-2p)^2 - \cos(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos(p-2q) - \frac{\cos(p-q)^3}{\cos(p-2q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \right.\right.$$

cos

$$\frac{cos(p-q)^4}{cos(p-2q)^4}\Big)\Big],$$

$$M''' = N\Big[\frac{cos(p-3q)^2 - cos(p-2q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\Big(cos(p-3q) - \frac{cos(p-2q)^3}{cos(p-3q)^2}\Big) + \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{cos(p-2q)^4}{cos(p-3q)^4}\Big)\Big],$$

. . . .

$$M^n = N\Big[\frac{cos(p-nq)^2 - cos(p-(n-1)q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\Big(cos(p-nq) - \frac{cos(p-(n-1)q)^3}{cos(p-nq)^2}\Big) + \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{cos(p-(n-1)q)^4}{cos(p-nq)^4}\Big)\Big];$$

reprefentando-fe pelo numero inteiro $n+1$ o numero das pennas feridas pela agua.

601 Por confeguinte, fe por abbreviar a expreffaõ, tomarmos $S = \frac{M + M' + M'' \ldots\ldots + M^n}{N}$, omittindo os termos que fe deftroem, teremos a equaçaõ feguinte

$$S = \frac{cos(p-nq)^2 - cos\,m^2}{2}$$

$$-\frac{2k}{3}\times\left\{\begin{array}{l} + cos\,p - \frac{cos\,m^3}{cos\,p^2} \\ + cos(p-q) - \frac{cos\,p^3}{cos(p-q)^2} \\ + cos(p-2q) - \frac{cos(p-q)^3}{cos(p-2q)^2} \\ + cos(p-3q) - \frac{cos(p-2q)^3}{cos(p-3q)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + cos(p-nq) - \frac{cos(p-(n-1)q)^3}{cos(p-nq)^2} \end{array}\right.$$

+

$$+\frac{k^2}{4}\times\left\{\begin{array}{l}+1-\frac{\cos m^4}{\cos p^4}\\ +1-\frac{\cos p^4}{\cos(p-q)^4}\\ +1-\frac{\cos(p-q)^4}{\cos(p-2q)^4}\\ +1-\frac{\cos(p-2q)^4}{\cos(p-3q)^4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ +1-\frac{\cos(p-(n-1)q)^4}{\cos(p-nq)^4};\end{array}\right.$$

formula, que dá o momento total da impulſaõ da agua a cada inſtante, qualquer que ſeja o numero das pennas. Eſtá claro, que S varîa á medida que varîa o angulo p, ſendo as mais quantidades conſtantes, iſto he, á medida que a roda na ſua revoluçaõ toma differentes poſiçoens, deſde que huma penna entra no fluido até entrar a ſeguinte.

602 Além das denominaçoens precedentes, repreſentemos por Q o pezo variavel, ao qual a percuſſaõ da agua póde fazer equilibrio a cada inſtante, por c o ſeu braço de alavanca, por dt o elemento do tempo, e por dy o pequeno arco deſcrito por hum ponto da circumferencia $AKDB$ no inſtante dt. Aſſim teremos $Q.c = N.S$, e $Qcdt = NSdt$. Mas $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$ (ponho $-dp$, porque creſcendo t diminue p). Logo $Qcdt = -\frac{aNSdp}{u}$, e conſeguintemente $c\int Qdt = \frac{aN}{u}\int -Sdp$.

603 Subſtituindo no ſegundo membro o valor de S acima achado (n. 601.), teremos differentes eſpecies de termos, de cujos coefficientes conſtantes preſcindimos por agora.

Primeiramente o termo $dp\,(\cos(p-nq)^2 - \cos m^2)$ ſe integra facilmente: porque ſe reduz á fórma $\frac{dp}{2}+$

dp

$\frac{dp\,cos(2p-2nq)}{2} - dp\,cos\,m^2$, cujo integral he $\frac{p}{2} +$
$\frac{sen(2p-2nq)}{4} - p\,cos\,m^2$. O integral de $dp\,cos\,p$ he $sen\,p$; o de $dp\,cos(p-q)$, he $sen(p-q)$; o de $dp\,cos(p-2q)$, he $sen(p-2q)$; e assim dos mais desta especie.

A unica difficuldade he integrar os termos $\frac{dp\,cos\,m^3}{cos\,p^2}$, $\frac{dp\,cos\,p^3}{cos(p-q)^2}$, $\frac{dp\,cos(p-q)^3}{cos(p-2q)^2}$ &c, assim como tambem os termos $\frac{dp\,cos\,m^4}{cos\,p^4}$, $\frac{dp\,cos\,p^4}{cos(p-q)^4}$, $\frac{dp\,cos(p-q)^4}{cos(p-2q)^4}$. &c. Eisaqui o modo de fazer estas integraçoens.

604 1.° He facil de integrar $\frac{dp}{cos\,p^2}$. Porque fazendo $cos\,p = \frac{1}{z}$, teremos $\frac{dp}{cos\,p^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-1)}}$, cujo integral he $\sqrt{(zz-1)} = \frac{sen\,p}{cos\,p}$.

2.° Para integrar $\frac{dp\,cos\,p^3}{cos(p-q)^2}$, observaremos que $cos\,p = cos((p-q)+q) = cos(p-q)\,cos\,q - sen(p-q)\,sen\,q$, e por conseguinte acharemos que he $\frac{dp\,cos\,p^3}{cos(p-q)^2} = dp\,cos(p-q)\,cos\,q^3 - 3\,dp\,sen(p-q)\,sen\,q\,cos\,q^2 + \frac{3\,dp\,sen(p-q)^2\,sen\,q^2\,cos\,q}{cos(p-q)} - \frac{dp\,sen(p-q)^3\,sen\,q^3}{cos(p-q)^2} = cos\,q^3 \,.\, dp\,cos(p-q) - 3\,sen\,q\,cos\,q^2 \,.\, dp\,sen(p-q) + 3\,sen\,q^2\,cos\,q \,.\, \frac{dp}{cos(p-q)} - 3\,sen\,q^2\,cos\,q \,.\, dp\,cos(p-q) - sen\,q^3 \,.\, \frac{dp\,sen(p-q)}{cos(p-q)^2} + sen\,q^3 \,.\, dp\,sen(p-q)$. Porém $\int dp\,cos(p-q) = sen(p-q)$; $\int dp\,sen(p-q) = -cos(p-q)$.

$-q$). O termo $\frac{dp}{\cos(p-q)}$ ſe integra fazendo $\cos(p-q) = \frac{1}{s}$; o que dá $dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)}} = \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}}$, $\frac{dp}{\cos(p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, cujo integral he $l(s+\sqrt{(ss-1)}) = l\left(\frac{1+\operatorname{sen}(p-q)}{\cos(p-q)}\right)$. O termo $\frac{dp \operatorname{sen}(p-q)}{\cos(p-q)^2}$ he o meſmo que $\frac{-d.\cos(p-q)}{\cos(p-q)^2}$, e tem conſeguintemente por integral $\frac{1}{\cos(p-q)}$. Aſſim o integral inteiro de $\frac{dp \cos p^3}{\cos(p-q)^2}$ he $\cos q^3 \operatorname{sen}(p-q) + 3 \operatorname{sen} q \cos q^2 \cos(p-q) + 3 \operatorname{sen} q^2 \cos q . l\left(\frac{1+\operatorname{sen}(p-q)}{\cos(p-q)}\right) - 3 \operatorname{sen} q^2 \cos q \operatorname{sen}(p-q) - \frac{\operatorname{sen} q^3}{\cos(p-q)} - \operatorname{sen} q^3 \cos(p-q)$.

Do meſmo modo, obſervando que $\cos(p-q) = \cos((p-2q)+q) = \cos(p-2q)\cos q - \operatorname{sen}(p-2q)\operatorname{sen} q$, acharemos que o integral do termo $\frac{dp(p-q)^3}{\cos(p-2q)^2}$ he $\cos q^3 \operatorname{sen}(p-2q) + 3 \operatorname{sen} q \cos q^2 \cos(p-2q) + 3 \operatorname{sen} q^2 \cos q . l\left(\frac{1+\operatorname{sen}(p-2q)}{\cos(p-2q)}\right) - 3 \operatorname{sen} q^2 . \cos q \operatorname{sen}(p-2q) - \frac{\operatorname{sen} q^3}{\cos(p-2q)} - \operatorname{sen} q^3 \cos(p-2q)$. E pelo meſmo methodo ſe integraráõ as quantidades analogas $\frac{dp \cos(p-2q)^3}{\cos(p-3q)^2}$, $\frac{dp \cos(p-3q)^3}{\cos(p-4q)^2}$ &c.

3.° Para integrar $\frac{dp}{\cos p^4}$, faremos $\cos p = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$; e teremos $\frac{dp}{\cos p^4} = dz + z^2\,dz$, cujo integral he $z + \frac{z^3}{3}$ $= \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} + \frac{\text{sen}\, p^3}{3\cos p^3}$.

4.° Para integrar $\frac{dp\cos p^4}{\cos(p-q)^4}$, observaremos que $\cos p$ $= \cos((p-q)+q) = \cos(p-q)\cos q - \text{sen}(p-q)\,\text{sen}\, q$; e conseguintemente, que $\frac{dp\cos p^4}{\cos(p-q)^4} = dp\cos q^4 -$ $4\cos q^3\,\text{sen}\, q\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)}{\cos(p-q)} + 6\cos q^2\,\text{sen}\, q^2\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)^2}{\cos(p-q)^2}$ $-4\cos q\,\text{sen}\, q^3\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)^3}{\cos(p-q)^3} + \text{sen}\, q^4\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)^4}{\cos(p-q)^4}$ $= dp(\cos q^4 - 6\cos q^2\,\text{sen}\, q^2 + \text{sen}\, q^4) - (4\cos q^3\,\text{sen}\, q$ $-4\cos q\,\text{sen}\, q^3)\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)}{\cos(p-q)} + (6\cos q^2\,\text{sen}\, q^2 -$ $2\,\text{sen}\, q^4)\,\frac{dp}{\cos(p-q)^2} - 4\cos q\,\text{sen}\, q^3\,\frac{dp\,\text{sen}(p-q)}{\cos(p-q)^3} +$ $\text{sen}\, q^4\,\frac{dp}{\cos(p-q)^4}$. Os differentes termos desta quantidade integraõ-se por methodos e transformações analogas ás precedentes; e acharemos que o integral inteiro de $\frac{dp\cos p^4}{\cos(p-q)^4}$ he $p(\cos q^4 - 6\cos q^2\,\text{sen}\, q^2 + \text{sen}\, q^4) +$ $(4\cos q^3\,\text{sen}\, q - 4\cos q\,\text{sen}\, q^3)\,l\cos(p-q) + (6\cos q^2\,\text{sen}\, q^2$ $-\text{sen}\, q^4)\,\frac{\text{sen}(p-q)}{\cos(p-q)} - \frac{2\cos q\,\text{sen}\, q^3}{\cos(p-p)^2} + \frac{\text{sen}\, q^4\,\text{sen}(p-q)^3}{3\cos(p-q)^3}$.

As quantidades $\frac{dp\cos(p-q)^4}{\cos(p-2q)^4}$, $\frac{dp\cos(p-2q)^4}{\cos(p-3q)^4}$ &c integrar-se-haõ da mesma maneira.

605 Acabados estes calculos, tomaremos o integral

∫-

$\int -S\,dp$ de maneira que desvaneça quando $p = m$, e receba o valor completo quando $p = m - q$; e acharemos differentes series de termos, tais que de huma serie para a outra se destroem em parte. Assim omittindo todos esses termos, a equaçaõ $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$ se reduzirá á fórma seguinte

$$(B) \ldots\ldots c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\Big[\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos m^2}{2}\right) q +$$

$$\frac{1}{8}\Big(\text{sen}\,(2m - 2nq) - \text{sen}\,(2m - 2(n+1)q)\Big)$$

$$+ \frac{2k\cos m^3}{3}\left(\frac{\text{sen}\,m}{\cos m} - \frac{\text{sen}\,(m-a)}{\cos(m-q)}\right) - \frac{2k}{3}\Big(\text{sen}\,m -$$

$$\text{sen}\,(m-(n+1)q)\Big) + \frac{2k}{3}(\cos q^3 - 3\,\text{sen}\,q^2\cos q)(\text{sen}\,(m$$

$$-q) - \text{sen}\,(m-(n+1)q)) + \frac{2k}{3}(3\,\text{sen}\,q\cos q^2 -$$

$$\text{sen}\,q^3)\,(\cos(m-q) - \cos(m-(n+1)q)) -$$

$$\frac{2k\,\text{sen}\,q^3}{3}\left(\frac{1}{\cos(m-q)} - \frac{1}{\cos(m-(n+1)q)}\right) + 2k\,\text{sen}\,q^2\cos q$$

$$l\left(\frac{1 + \text{sen}\,(m-q)\,(\cos(m-(n+1)q))}{\cos(m-q)\,(1 + \text{sen}\,(m-(n+1)q))}\right) +$$

$$\frac{k^2 q}{4}(n + 1 - \text{sen}\,q^4 - \cos q^4 + 6\cos q^2\,\text{sen}\,q^2) -$$

$$\frac{k^2\cos m^4}{4}\left(\frac{\text{sen}\,m}{\cos m} + \frac{\text{sen}\,m^3}{3\cos m^3} - \frac{\text{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} - \frac{\text{sen}\,(m-q)^3}{3\cos(m-q)^3}\right)$$

$$-k^2(\cos q^3\,\text{sen}\,q - \cos q\,\text{sen}\,q^3)\,l\left(\frac{\cos(m-q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right)$$

$$-\frac{k^2}{4}(6\cos q^2\,\text{sen}\,q^2 - \text{sen}\,q^4)\left(\frac{\text{sen}\,(m-q)}{\cos(m-q)} -\right.$$

$$\left.\frac{\text{sen}\,(m-(n+1)q)}{\cos(m-(n+1)q)}\right) + \frac{k^2\cos q\,\text{sen}\,q^3}{2}\left(\frac{1}{\cos(m-q)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos(m-(n+1)q)^2}\right) - \frac{k^2}{12}\,\text{sen}\,q^4\left(\frac{\text{sen}\,(m-q)^3}{\cos(m-q)^3}\right.$$

−

$$-\frac{sen\,(m-(n+1)q)^3}{cos\,(m-(n+1)q)^3}\Big)\Big]..$$

606 Nesta formula, $\int Q\,d\,t$ representa o pezo, ao qual a percussaõ da agua póde fazer equilibrio durante o tempo t, que a roda emprega em descrever o angulo q. Supponhamos $\frac{\int Q\,d\,t}{t}=Q'$, sendo Q' simplesmente hum pezo; e consideremos, que $t=\frac{a\,q}{u}$. Além disso, supponhamos que no instante em que a primeira penna $E\,e$ entra no fluido, a penna $K\,k$ está situada na vertical; o que dá $m=(n+1)q$. Entaõ dividindo o primeiro membro da equaçaõ (B) por t, e o segundo por $\frac{a\,q}{u}$, e pondo m em lugar de $(n+1)q$, teremos a equaçaõ seguinte

$$(C)\,....\,Q'c=\frac{N}{q}\Big[\Big(\frac{1}{4}-\frac{cos\,m^2}{2}\Big)q+\frac{sen\,2\,q}{8}$$
$$+\frac{2\,k\,cos\,m^3}{3}\Big(\frac{sen\,m}{cos\,m}-\frac{sen\,(m-q)}{cos\,(m-q)}\Big)-\frac{2\,k\,sen\,m}{3}+$$
$$\frac{2\,k}{3}(cos\,q^3-3\,sen\,q^2\,cos\,q)(sen\,(m-q)+\frac{2\,k}{3}(3\,sen\,q\,cos\,q^2$$
$$-sen\,q^3)(cos\,(m-q)-1)-\frac{2\,k\,sen\,q^3\,(1-cos\,(m-q))}{3\,cos\,(m-q)}$$
$$+2\,k\,sen\,q^2\,cos\,q\,.\,l\Big(\frac{1+sen\,(m-q)}{cos\,(m-q)}\Big)+\frac{k^2\,q}{4}\Big(n+1$$
$$-sen\,q^4-cos\,q^4+6\,cos\,q^2\,sen\,q^2\Big)-\frac{k^2\,cos\,m^4}{4}\Big(\frac{sen\,m}{cos\,m}+$$
$$\frac{sen\,m^3}{3\,cos\,m^3}-\frac{sen\,(m-q)}{cos\,(m-q)}-\frac{sen\,(m-q)^3}{3\,cos\,(m-q)^3}\Big)-k^2\,(cos\,q^3\,sen\,q$$
$$-cos\,q\,sen\,q^3)\,l\,cos\,(m-q)-\frac{k^2}{4}\,(6\,cos\,q^2\,sen\,q^2-$$
$$sen\,q^4)\Big(\frac{sen\,(m-q)}{cos\,(m-q)}\Big)+\frac{k^2\,cos\,q\,sen\,q^3\,sen\,(m-q)^2}{2\,cos\,(m-q)^2}$$
$$-\frac{k^2\,sen\,q^4\,sen\,(m-q)^3}{12\,cos\,(m-q)^3}\Big];$$

formu-

formula, na qual Q' reprefenta o pezo que em cada inftante fe póde julgar em equilibrio com a impulfaõ do fluido.

607 Para moftrarmos huma applicaçaõ muito fimples defta formula, fupponhamos que a roda anda com huma velocidade, que fe póde confiderar infinitamente pequena em comparaçaõ da velocidade do fluido. Em confequencia teremos $k = 0$, e a equaçaõ (C) dará fimplefmente

$$Q'c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{cof\, m^2}{2}\right) + \frac{N\, fen\, 2\, q}{8\, q}.$$

Logo, fe quizermos que o momento de impulfaõ feja hum *maximo*, fazendo variar q fomente, teremos $2\, q\, d\, q\, cof\, 2\, q - d\, q\, fen\, 2\, q = 0$, e confeguintemente $q = 0$. Donde fe fegue, que entaõ deveria fer o numero das pennas infinito; refultado conforme ao que achamos (n. 549.), e fobre o qual fe faraõ as mefmas reflexões.

Aqui obfervaremos mais, que conftruindo a curva, cuja equaçaõ he $y = \frac{fen\, 2\, q}{q}$, acharemos que apartando-fe da origem dos q, onde correfponde a maior ordenada $= 2$, a curva naõ cortará o eixo de huma e outra parte da mefma origem, fenaõ a diftancias infinitas. Donde refulta que tendo aumentado o numero das pennas até hum certo ponto, naõ fe ganharia quafi nada em aumentallo mais. Póde cada hum fegurar-fe defta conclufaõ por applicações numericas da mefma formula. A experiencia fe acha de concerto com a theorica a efte refpeito.

608 Naõ he facil de achar directamente pela noffa formula geral o numero mais ventajofo de pennas para huma roda, que anda com huma velocidade finita, e comparavel com a do fluido, porque a equaçaõ do *maximo* he extremamente compofta, e quafi intratavel. Mas podemos confeguillo de hum modo indirecto, que confifte em bufcar pela mefma formula os momentos de impulfaõ para differentes numeros confecutivos de pennas, e efcolher entre elles o que dá momento maior. Pela analogia das coufas, e pela lei de continuidade, facilmente fe entende, que á medida que a roda andar mais de vagar deverá ter maior numero de pennas.

609 Na pratica, antes de fixar o numero das pennas, he

he neceffario fazer huma obfervaçaõ effencial. Ás pennas Kk, Oo, Pp, &c, que eftaõ adiante da vertical CI tendem a impellir o fluido, o qual pela percuffaõ tem perdido huma parte confideravel da fua velocidade. Por confeguinte, fe lhe naõ refta velocidade fufficiente para fubtrahir-fe da percuffaõ das pennas, refultará huma perda de movimento na maquina. O momento de impulfaõ das mefmas pennas contra o fluido he reprefentado por huma quantidade analoga á dos n.os 605 e 606. Nefte cafo pois os mefmos meios, que aumentaõ o momento de impulfaõ do fluido anterior á roda, aumentaõ tambem a refiftencia do pofterior; e entaõ naõ convem multiplicar muito o numero das pennas. He o que fe practîca com rafaõ nas rodas que fe affentaõ fobre os rios; antes a precauçaõ he exceffiva nefta parte (n. 570.). As rodas que fe movem em calhes eftreitas requerem mais pennas, principalmente havendo a attençaõ (como fe practîca de ordinario) de dar hum pouco adiante da vertical CI maior quéda á agua, para lhe facilitar a fahida de maneira que naõ faça refiftencia ao movimento da roda.

610 Supponhamos agora que he dado o numero das pennas, e vejamos qual deve fer a velocidade da roda, para que o effeito feja hum *maximo*. Havendo multiplicado o primeiro membro da equaçaõ (C) por v velocidade do pezo levantado Q', e o fegundo por $\frac{cu}{a}$ quantidade igual a v, e pondo em lugar de k o feu valor $\frac{u}{V}$; teremos huma equaçaõ defta fórma

$$Q'v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

fendo A, B, C coefficientes conftantes e dados. Logo, para que o effeito da maquina feja hum maximo, he neceffario que tenhamos $A\,du + 2Bu\,du + 3Cu^2\,du = 0$; e confeguintemente

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3A.C)}}{3C}.$$

611 Já indicámos (n. 552.) o modo de comparar os effeitos de duas aberturas rectangulares $MNOP$, $EFGH$ (Fig. 160.), relativamente aos momentos de impulfaõ contra as pennas de huma roda. Eifaqui o modo geometrico de

de achar directamente a abertura mais ventajoſa.

Seja $SMPR$ a ametade da abertura, e $Smpr$ a ametade da penna ſuppoſta em quietaçaõ. Conſervando as meſmas denominações das letras b, b, c, d, e, t (n.553.), ſupponhamos que ſe toma ſobre TR hum ponto indeterminado L; e façamos $TL = y$, a gravidade $= g$, o momento elementar da impulſaõ da agua contra o pequeno rectangulo $Lldc = dM$, o raio Cr da roda $= R$. Eſtá claro, que a velocidade do fluido ao ſahir do pequeno orificio $Lldc$ ſerá repreſentada por $\sqrt{2gy}$, e que teremos $dM = 2gbydy \,.\, CL = 2gbydy(CT + TL) = 2gbydy(R - b - c + y)$. Logo $M = gby^2(R - b - c) + \frac{2gby^3}{3}$.

Eſte integral deve deſvanecer quando $y = TS = b$, e tomar-ſe quando $y = Tr = b + c$. Logo ſerá $M = gb[(b + c)^2(R - b - c) + \frac{2}{3}(b + c)^3 - b^2(R - b - c) - \frac{2}{3}b^3]$.

Como pois a abertura mais ventajoſa he a que dá o maior M que he poſſivel, igualaremos a quantidade precedente a hum maximo, fazendo variar b, b, c; e aſſim teremos huma equaçaõ entre b, b, c, e as ſuas differenças. E porque a ſuperficie da penna $Smpr$ he dada, teremos tambem $bc = const.$ Em fim, como a quantidade de agua que fornece a abertura $SMPR$ he dada, teremos $\frac{4}{3}t(b + d)\left((b + c + e)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a} = const.$ Por meio deſtas tres equações chegaremos a conhecer as tres indeterminadas b, b, c.

Todos eſtes calculos ſaõ longos em geral; mas podem abbreviar-ſe, conſiderando que as quantidades d, e ſaõ muito pequenas em comparaçaõ das outras.

612 Eiſaqui tudo o que pertence á theorica das rodas, quando ellas ſaõ verticais, e as pennas ſaõ dirigidas ao centro. As meſmas formulas ſe pódem applicar igualmente a toda a ſorte de rodas, verticais, ou horizontais, ſendo ou naõ ſendo as pennas dirigidas ao centro, perpendiculares ou inclinadas ao plano das meſmas rodas. Somente

mente os coefficientes do angulo q, do seu seno e coseno, e dos senos e cosenos dos seus multiplos, seráõ differentes conforme os differentes casos. Estes coefficientes dependem em parte do angulo que a penna faz com o raio, ou com o plano da roda; e esta consideraçaõ naõ introduz difficuldade alguma de novo no calculo. Deixamos ao Leitor o cuidado de fazer por si mesmo estas applicaçoẽs.

8.

CAPITULO IX.

Do movimento de oscillaçaõ, e undulaçaõ dos fluidos.

613 HE demonstrado (n. 171.) que se hum pendulo P (Fig. 175.) suspendido pelo fio *O P* descrever pequenos arcos de circulo *P p*, *Q q* oscillando ao redor do ponto fixo *O*, todas as suas oscillaçoens seráõ isochronas, ou da mesma duraçaõ, aindaque os arcos corridos *P p*, *Q q* sejaõ desiguais. Este isochronismo he fundado em que os espaços corridos *P p*, *Q q* saõ proporcionais ás forças que os fazem correr.

Tambem he demonstrado (n. 207.), que se dous pendulos de comprimentos desiguais descreverem pequenos arcos de circulo, os tempos das suas oscillaçoẽs seráõ entre si como as raizes quadradas dos seus comprimentos.

614 Isto posto, seja *K L N M* (Fig. 176.) hum tubo de grossura uniforme, composto de dous braços verticais, e hum horizontal. Havendo lançado nelle certa quantidade de licor, as duas superficies *A B*, *C D* estaráõ de nivel no caso do equilibrio. Supponhamos que se faz subir o licor até *E F* no braço *K L*, e conseguintemente descer até *G H* no braço *M N*, e que depois se deixa á acçaõ livre da gravidade. Está claro, que o fluido subirá e descerá alternativamente.

Supponhamos pois hum pendulo *P* (Fig. 175.), cujo comprimento *O P* seja ametade do comprimento *x y z* da colunna fluida, e que descreva até o ponto mais baixo *I* arcos *P I* iguais aos espaços *A E*. A força que faz oscillar o fluido he o excesso do pezo da agua contida em hum dos braços do tubo sobre o pezo da agua contida no outro. Assim, quando a agua sobe até *E F* e desce até *G H*,

esta

esta força he o pezo da colunna $E S T F$, ou o dobro do pezo da colunna $E A B F$; e conseguintemente he para o pezo de toda a a agua como $2 A E$ para $x y z$, ou como $A E$ para $O P$.

Donde concluiremos 1º que sendo o comprimento $x y z$ constante, a força que faz oscillar a agua he sempre proporcional ao espaço que lhe faz correr; e por conseguinte, que as oscillações da agua saõ isochronas entre si.

2º Que estas oscillações saõ da mesma duraçaõ que as do pendulo P; porque a força que faz descrever ao pendulo P o arco $P I$ he para o pezo do mesmo pendulo, como $P I$ para $O P$, ou como $A E$ para $O P$; e sendo a agua animada da mesma força que o pendulo, deverá fazer as suas oscillações no mesmo tempo que elle.

615 Por quanto as oscillações da agua seguem as mesmas leis que as dos pendulos, se aumentarmos ou diminuirmos o comprimento da colunna da agua, tambem se aumentará ou diminuirá o tempo das suas oscillações, e seguirá a rasaõ subduplicada do dito comprimento.

616 Esta theorica das oscillações dos fluidos se applica ao movimento das ondas. Seja $ABCDEF$ (Fig. 177.) huma massa de agua estagnante, cuja superficie se levanta e abaixa por ondas successivas, sendo A, C, E as eminencias dellas, e B, D, F as cavidades intermedias. Por quanto a força, que faz descer as partes mais altas, e subir alternativamente as mais baixas, he sempre o pezo da agua elevada, está claro que as oscillações das ondas saõ da mesma especie que as da agua no tubo $KLNM$. Tomando pois hum pendulo, cujo comprimento seja ametade das distancias entre os lugares mais altos A, C, E e os mais baixos B, D, F, as partes mais altas A, C, E viráõ a ser as mais baixas no tempo de huma oscillaçaõ deste pendulo, e no tempo de outra oscillaçaõ tornaráõ a ser as mais altas. Logo fará o pendulo duas oscillaçoens em quanto as ondas fazem huma, isto he, em quanto cada huma dellas corre a sua largura. E como hum pendulo que tivesse o comprimento quadruplo do precedente faria huma oscillaçaõ em quanto elle faz duas, seguese que as ondas fazem as suas oscillações no mesmo tempo que hum pendulo, que tiver por comprimento a largura das mesmas ondas.

617 Logo a velocidade das maiores ou das menores ondas

das

das aumentará ou diminuirá na rasaõ subduplicada da sua largura. As ondas, que tem 3 pés e 8 $\frac{1}{2}$ linhas de largura, correm-na em hum segundo, e conseguintemente 183 pés 6 pollegadas e 6 linhas em 1 minuto.

Tudo isto naõ deve tomar-se como verdadeiro em rigor, mas proximamente; porque havemos supposto que nas undulaçoens todas as partes da agua sobem e descem em linhas rectas, o que naõ succede na realidade, sendo o dito movimento mais chegado a circular que a rectilineo.

Determinaçaõ geral das oscillações de hum fluido em hum tubo de qualquer figura.

618 SEja *ABFDEG* (Fig. 178.) hum tubo de qualquer figura, no qual se contém huma porçaõ de fluido, que em virtude de huma causa exterior se levanta a certa altura no braço *ABFG*, e se abaixa conseguintemente no outro *DEGF*, e depois se deixa á acçaõ livre da gravidade. Para determinar as suas oscillações, he necessario conhecer a direcçaõ que tomaõ as particulas no seu movimento.

Sobre isto podem propor-se duas hypotheses. A primeira, que as particulas sobem e descem verticalmente, isto he, que supposto-se o fluido dividido em camadas horizontais, estas conservaõ sempre o seu parallelismo; a segunda, que as particulas se movem parallelamente á curva $Mxyz$ considerada como eixo do tubo, ou de outra sorte, que supposto-se o fluido dividido em camadas perpendiculares á curva xyz, estas camadas conservaõ o seu parallelismo de humas a outras. O problema resolve-se simplesmente na primeira hypothese, pelo methodo que já havemos practicado (n. 236. 334.). Aqui o resolveremos na segunda, a qual tem sido abraçada por grandes Geometras.

619 Supponhamos, que o fluido no tempo t tem chegado á posiçaõ indeterminada *ABFDEG*, e consideremo-lo composto de huma infinidade de camadas $OLlo$ iguais entre si, e perpendiculares em cada ponto á curva $Mxyz$. A força da gravidade, que obra verticalmente sobre cada camada, se resolverá em duas, huma perpendicular á curva

curva que ſerá deſtruida, e a outra pela direcçaõ della, que produzirá o movimento.

Seja pois a gravidade $= g$; as ſecçoens $AB = K$, $DE = G$, $OL = y$; o arco xy da curva $= x$, a velocidade da ſuperficie $AB = u$, da ſecçaõ $OL = v$, o ſeno total $= 1$, o coſeno do angulo variavel myn que faz em y a vertical com a curva $= f$, a altura devida á velocidade $u = r$. Iſto poſto, a parte da gravidade que obra na direcçaõ yn ſerá gf; e ſe as camadas naõ obraſſem entre ſi, a velocidade v no fim do inſtante dt ſeria $v + gfdt$; e porque ella ſe faz realmente $v + dv$, he manifeſto que as differentes camadas animadas da velocidade $gfdt - dv$ deveriaõ fazer equilibrio entre ſi. Logo teremos $\int dx(gfdt - dv) = 0$; donde ſe tira (pondo por dt o ſeu valor $\frac{dx}{v}$, e por v o ſeu valor $\frac{Ku}{y}$)

$$\frac{gydx}{Ku}\int fdx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Os integrais indicados devem tomar-ſe para a curva xyz. Sendo pois entaõ $\int fdx = F$, $\int\frac{dx}{y} = N$, e reflectindo que $\int\frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2K^2} - \frac{1}{2G^2}$, a equaçaõ ſe reduzirá á fórma ſeguinte

$$(A) \ldots . F.G^2ydx - K^2G^2Ndr + rydx(G^2 - K^2) = 0.$$

620 Supponhamos, que o fluido no primeiro inſtante occupa o eſpaço $VZFHRG$; e repreſentemos por z o arco Mx corrido pela ſuperficie AB. Eſtá claro, que ſendo dada a natureza da curva $Mxyz$, e ſendo os dous eſpaços $VZFHRG$, $ABFDEG$ occupados ſucceſſivamente pelo fluido iguais entre ſi, as quantidades F, G, K, N, ydx, podem ſer repreſentadas em funçoens de z, dz, e conſtantes. Logo a velocidade u da ſuperficie AB ſerá tambem huma funçaõ de z; e por ſer $dt = \frac{dz}{u}$, do meſmo modo teremos t em funçaõ de z.

621 Para moſtrarmos a applicaçaõ deſta theorica a alguns exemplos, ſupponhamos que o tubo he cylindrico, e que a curva $MxyzT$ he a ſemicircumferencia de hum

circulo

circulo, cujo diametro MT está horizontal. Neste caso teremos $G = K = y$, e cada huma destas quantidades será constante, e dada. Seja o raio $CM = 1$, o arco $Mx = z$, o arco indeterminado $Mxy = q$, a semicircumferencia $MxyzT = c$, o arco xyz occupado pelo fluido $= nc$, sendo n hum numero constante menor que a unidade. Assim teremos $F = \int f dx = \int dq \cos q = \operatorname{sen} q$; integral, que deve desvanecer quando $q = z + nc$, e começar quando $q = z$, porque na extremidade z do arco zyz cessa a gravidade de obrar sobre o fluido, e o ponto x he a origem do mesmo fluido. Logo $F = \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(z + nc)$. Além disto $N = \frac{nc}{G}$, e $dx = dz$. Logo a equaçaõ geral (A) se reduzirá á fórma seguinte

$$dz(\operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(z + nc)) - nc\,dr = 0,$$

donde se tira (supponDo que o fluido parte do ponto M, e conseguintemente que $r = 0$ quando $z = 0$)

$$r = \frac{1 - \cos nc - \cos z + \cos(z + nc)}{nc},$$

expressaõ geral da altura devida á velocidade da superficie AB.

Se fizermos $z = c - nc$, isto he, se suppusermos que a superficie anterior DE chega a T, acharemos igualmente $r = 0$. Donde se segue, que o fluido haverá perdido toda a sua velocidade, e tornará a descer de T para M, e assim por diante.

O tempo de cada huma das oscillações se achará pela equaçaõ $t = \int \frac{dz}{u} = \int \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$; e substituindo o valor de r,

$$t = \sqrt{\frac{cn}{2g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - \cos nc - \cos z + \cos(z + nc))}}.$$

612 Por segundo exemplo, supponhamos que o tubo proposto se compoem de tres rectilineos $GFKH$, MFG, NKH (Fig. 179.) de diametros iguais, estando o primeiro delles horizontal, e os outros inclinados. Levantando as verticais FI, KS, seja a secçaõ constante e perpendicular de cada tubo $= K$, o coseno do angulo $BFI = p$, o do angulo $DKS = q$, o comprimento dado $xytz$ do espaço occupado pelo fluido $= l$, o espaço dado My comprehendido

dido entre hum ponto fixo M tomado a arbitrio e o ponto $y = b$, o comprimento dado do tubo horizontal $= c$, o espaço Mx corrido no tempo t pela superficie do fluido $AB = z$.

Isto posto, como se naõ observa a lei de continuidade na passagem de hum tubo para outro, applicaremos a cada hum delles os raciocinios do nº 619; e acharemos, que para o tubo $ABFG$ he a quantidade $\int f dx = p(b-z)$, e para o tubo $EDKH$ será $\int f dx = q \cdot tz = q(z+l-b-c)$. Tirando a segunda quantidade da primeira, o resto $p(b-z)-q(z+l-b-c)$ será o valor de F para o tubo total. Tambem teremos aqui $\int \frac{dx}{y}$, ou $N = \frac{l}{K}$; e observando, que $y = K$, $dx = dz$, $G = K$, a equaçaõ geral (A) se reduzirá á fórma seguinte

$$dz(p(b-z)-q(z+l-b-c))-ldr=0;$$

donde se tira

$$r = \frac{p+q}{2l}\left(\frac{2(pb+qb+qc-ql)z}{p+q} - zz\right).$$

E porque $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, teremos tambem

$$t = \sqrt{\frac{l}{g(p+q)}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(pb+qb+qc-ql)z}{p+q} - zz\right)}};$$

integral, que depende em geral da quadratura do circulo.

623 Representemos, por abbreviar, o coefficiente de z por $2A$; e seja B o quarto da circumferencia descrita com o raio A, e T o tempo empregado em correr o espaço A. Assim teremos $t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{g(p+q)}} \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az-zz)}}$, e $T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g(p+q)}} \cdot \frac{B}{A}$; porém $\frac{B}{A}$ he huma quantidade constante, qualquer que seja o raio A; logo T he huma quantidade constante, e conseguintemente as oscillaçoens inteiras do fluido saõ isochronas entre si, quaisquer que sejaõ as suas amplitudes.

624 Seja L o comprimento de hum pendulo que descreve pequenos arcos de circulo, C a distancia inicial delle á vertical, D o quarto da circumferencia para o raio C,

z o eſpaço que o pendulo deſcreve circularmente no tempo t com a velocidede v, T' o tempo que gaſta em chegar á vertical; e teremos $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$, e conſeguintemente $vv = \frac{g(2Cz-zz)}{L}$. Logo $t = \int \frac{dz}{v} = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz-zz)}}$, e $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{D}{C}$. Igualando eſte valor de T' ao de T, e reflectindo que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$; teremos $L = \frac{l}{p+q}$, expreſſaõ do comprimento do pendulo, que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido. Eſte reſultado concorda com o que foi dado por M. Bernoulli ſem demonſtraeçaõ (*Oper. tom. III. pag.* 125.).

625 Quando os tubos *ABFG*, *EDKH* ſaõ verticais, temos $p = 1$, $q = 1$; e a equaçaõ $L = \frac{l}{p+q}$ ſe reduz a $L = \frac{1}{2}l$, iſto he, que o comprimento do pendulo que faz as ſuas oſcillaçoens no meſmo tempo que as do fluido he a ametade do comprimento da colunna fluida, como já moſtrámos de outro modo (n. 614.).

CAPITULO X.

Do movimento dos fluidos elaſticos.

626 NAõ he da minha intençaõ tratar muito por extenſo do movimento dos fluidos elaſticos, porque a theorica delles ſe acha ainda imperfeita nos ſeus elementos eſſenciais. O frio, e o calor produzem na virtude elaſtica variaçoens continuas, cuja lei ſe naõ ſabe com a exactidaõ que convinha, para fundar huma theorica ſegura. Sem me entregar pois a generalidades hypotheticas, e embaraçadas pela prolixidade dos calculos, examinarei ſómente o movimento do ar, e neſſe meſmo naõ tocarei mais que os problemas que podem ſer de mais uſo na practica.

627 Seja

627 Seja *ABCD* (Fig. 180.) hum cylindro fechado de todos os lados, que contém hum ar homogeneo, e igualmente denſo em toda a ſua extenſaõ. Eſte ar eſtá comprimido, e aſſim que ſe lhe der alguma ſahida, ou ſe lhe facilitar a dilataçaõ, dilatar-ſe-ha uniformemente, e a ſua elaſticidade ſe diminuirá. A força elaſtica em cada eſtado de compreſſaõ he ſempre igual á força que tem produzido eſſa compreſſaõ (n. 73. 89.). Aſſim, por exemplo, ſe o ar *ABCD* he ſemelhante ao exterior, e conſeguintemente foi comprimido pelo pezo da atmosfera, ou por huma força equivalente, ſuſtentará pela ſua elaſticidade o pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura; iſto he, ſe a tampa ſuperior *AE* ſe conſiderar livremente movel ao longo das paredes laterais, e ſe imaginar carregada em toda a ſua ſuperficie de huma colunna de agua de 32 pés de altura, haverá equilibrio entre o pezo da agua, e a força elaſtica do ar; e a tampa naõ poderá ſubir, nem deſcer. Suppomos, que o ar ſe conſerva ſempre no meſmo gráo de calor; porque ſe eſte vieſſe a aumentar ou diminuir, tambem a elaſticidade aumentaria, ou diminuiria. Do meſmo modo, quando compararmos entre ſi as elaſticidades de differentes maſſas de ar, ſupporemos ſempre que todas eſtaõ no meſmo gráo de temperatura.

628 Conſta pela experiencia (n. 92.94.), que ſe a meſma quantidade de ar ſe reduzir a occupar ſucceſſivamente differentes volumes, as forças que a comprimem, e conſeguintemente as ſuas forças elaſticas ſaõ na raſaõ inverſa dos volumes, ou na directa das denſidades. Porém reduzir huma meſma maſſa de ar a occupar differentes volumes, he o meſmo que fazer entrar em hum meſmo volume differentes quantidades de ar, cujas denſidades ſejaõ as meſmas reſpectivamente que as da maſſa propoſta nos differentes eſtados. Logo, ſe differentes quantidades de ar occuparem ſucceſſivamente o meſmo volume, as elaſticidades ſeraõ proporcionais ás meſmas quantidades, porque eſtas, ſendo o volume conſtante, ſaõ na raſaõ das denſidades.

629 Daqui ſe ſegue, que abrindo em *C* hum pequeno orificio, pelo qual o ar tenha a liberdade de ſahir para o vacuo, continuamente ſahirá com a meſma velocidade que tiver no primeiro inſtante; porque a denſida-

de

de do fluido, e a força elastica que produz a fluxaõ pela abertura C, diminuem na mesma rasaõ; e quando a massa movida, e a força movente conservaõ entre si a mesma rasaõ, a velocidade he constante. Se isto naõ parece claro, eisaqui huma prova mais sensivel.

Seja no primeiro instante a força elastica $= P$, a densidade do fluido $= Q$, a sua velocidade $= V$, e no fim de hum tempo t seja a densidade $= q$, e a velocidade $= u$. Está claro, que a força elastica no fim do tempo t será $\frac{Pq}{Q}$; e como as forças motrizes saõ proporcionais ás quantidades de movimento, representando por M, m as massas de ar que nos dous casos sahem pelo orificio em instantes iguais, teremos $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Porém as massas M, m saõ na rasaõ composta dos seus volumes e densidades, e os volumes saõ na rasaõ das velocidades, por ser o orificio constante. Logo $M : m :: QV : qu$, e conseguintemente $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$; donde se tira $u = V$.

630 Sendo pois a força elastica primitiva P igual ao pezo de huma colunna de agua de 32 pés de altura, he facil de ver que o ar sahirá continuamente pelo orificio C com a mesma velocidade, com que a agua sahiria de huma reserva debaixo de 32.850 ou de 27260 pés de altura.

631 Seja H a altura devida á velocidade constante do fluido V no orificio C, A o volume do cylindro, C a area do orificio, a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. No instante dt sahirá pelo orificio hum pequeno volume de ar representado por $2Cdt\sqrt{aH}$ (n. 233.), e conseguintemente huma pequena massa representada por $2Cqdt\sqrt{aH}$. Mas por outra parte he evidente, que depois do tempo t a massa de ar contida no cylindro he $AQ - Aq$. Logo teremos $2Cqdt\sqrt{aH} = d(AQ - Aq)$, ou $dt = -\frac{dq}{q} \cdot \frac{A}{2C\sqrt{aH}}$. E integrando de maneira, que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$t =$

$$t = \frac{A}{2C\sqrt{aH}} \cdot l\,\frac{Q}{q}.$$

Por esta expressaõ do tempo se vê, que o vaso naõ poderá evacuar-se de todo, senaõ em hum tempo infinito.

632 Supponhamos agora, que o ar naõ sahe do vaso $ABCD$ para hum espaço vazio, mas para hum espaço cheio de ar mais raro, de huma extensaõ infinita, como se póde suppor a da atmosfera em comparaçaõ do vaso. Guardando as denominações do n° 629, e fazendo a densidade do ar exterior $= D$, he evidente que a resistencia constante que elle oppoem á sahida do interior, he $\frac{PD}{Q}$. Assim será a força expulsiva do ar interior no primeiro instante $P - \frac{PD}{Q}$, e depois do tempo t será $\frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q}$. Logo teremos $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q} :: MV : mu :: QVV : quu$. Donde se tira

$$u = V\sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}};$$

equaçaõ, que dá a cada instante a relaçaõ entre u e q; porque todas as mais quantidades saõ constantes. Por ella se vê, que o ar cessará de correr quando for $q = D$, e que naõ haverá movimento, se for $Q = D$.

633 Sendo H a altura devida á velocidade V, he evidente que a altura devida á velocidade u haverá de ser $\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}H$. Por tanto sahirá no instante dt a pequena massa de ar $2Cqdt\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}} = d(AQ - Aq)$; donde se tira $dt = -\frac{dq}{\sqrt{(qq-Dq)}} \cdot \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}}$. E integrando de maneira que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$$t = \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(qq - Dq)}}\right);$$

E por quanto temos visto que o ar cessa de correr; quando

quando $q = D$, substituindo este valor de q na equaçaõ precedente, teremos o tempo total do movimento pela equaçaõ seguinte

$$t = \frac{A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot l\left(\frac{Q-\frac{1}{2}D+\sqrt{(Q^2-DQ)}}{\frac{1}{2}D}\right).$$

634 Supponhamos agora pelo contrario, que o cylindro $ABCD$ está vazio no primeiro instante, e que o ar exterior (sempre infinito em extensaõ) entra nelle pelo orificio C. Sendo a força elastica constante do ar externo $= F$, a sua densidade $= D$, a velocidade com que entra no primeiro instante $= V$, e depois de qualquer tempo $t = u$, a densidade do ar no cylindro no fim do mesmo tempo $= q$; está claro, que a força impulsiva do ar externo será no primeiro instante $= F$, e depois do tempo $t = F - \frac{Fq}{D}$. Assim teremos $F : F - \frac{Fq}{D} :: DVV : Duu :: VV : uu$, e conseguintemente

$$u = V\sqrt{\left(1 - \frac{q}{D}\right)}.$$

635 Se na mesma hypothese houvesse no primeiro instante alguma quantidade de ar no cylindro, cuja densidade fosse $= Q$, teriamos $F - \frac{FQ}{D} : F - \frac{Fq}{D} :: VV : uu$, e conseguintemente

p. —

$$u = V\sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}.$$

Donde se vê que em ambos os casos cessará o movimento do fluido, quando $D = q$.

636 A equaçaõ entre o tempo t e a densidade q, fazendo que $q = Q$ dê $t = 0$, se achará

$$t = \frac{A\sqrt{(D-Q)}}{CD\sqrt{aH}}\left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right);$$

e fazendo $q = D$, a duraçaõ total do movimento será determinada pela equaçaõ

$$t = \frac{A(D-Q)}{CD\sqrt{aH}}.$$

637 Sejaõ em fim dous cylindros $ABCD$, $CFGH$ (Fig.

(Fig. 181.) fechados de todos os lados, cheios de ar differentemente condenſado. Abrindo-ſe em C hum orificio de communicaçaõ, o ar mais denſo do vaſo $ABCD$ correrá para o outro $CFGH$. Seja no primeiro inſtante a força elaſtica do ar $ABCD = P$, a ſua denſidade $= Q$, a ſua velocidade $= V$, e a denſidade do ar $CFGH = D$; e depois do tempo t, ſeja a denſidade do ar $ABCD = q$, a ſua velocidade $= u$, e a denſidade do ar $CFGH = \delta$. Aſſim teremos $P \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{P\delta}{Q} :: QVV : quu$. Donde reſulta

$$u = V \sqrt{\frac{Q(q-\delta)}{q(Q-D)}};$$

e por conſeguinte, o movimento ceſſará, quando for $\delta = q$.

Como a maſſa total do ar incluido nos dous cylindros he conſtante, fazendo a capacidade de $ABCD = A$, e de $CFGH = B$, teremos $AQ + BD = Aq + B\delta$; donde ſe tira $\delta = \frac{A(Q-q)+BD}{B}$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, acharemos

$$u = V \sqrt{\frac{Q(B(q-D)-A(Q-q))}{Bq(Q-D)}};$$

equaçaõ, que dá a velocidade u correſpondente a cada denſidade q.

638 Fazendo, para abbreviar, $Q(B+A) = M$, $BQD + BQ^2 = N$, $BQ - BD = R$, $\frac{N}{M} = m$, acharemos do meſmo modo $2Cq\,dt \sqrt{\left(\frac{aH(Mq-N)}{Rq}\right)} = d(AQ - Aq)$, ou $dt = \frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{(qq-mq)}}$. E integrando de maneira, que $q = Q$ dê $t = 0$, acharemos

$$t = \frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(q^2 - mq)}}\right);$$

E porque o movimento ceſſa quando $\delta = q$, e neſſe caſo ſo a equaçaõ $AQ + BD = Aq + BS$ dá $q = \frac{AQ + BD}{A + B}$, repreſentando eſta quantidade por G, e ſubſtituindo-a na equaçaõ precedente, teremos

$$t = \frac{A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \cdot l\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{G - \frac{1}{2}m + \sqrt{(G^2 - mG)}}\right)$$

por expreſſaõ do tempo total do movimento.

639 Se ás forças da elaſticidade ſe ajuntaſſe a acçaõ de hum embolo, que movendo-ſe uniformemente contribuiſſe para o movimento do fluido, os problemas precedentes naõ ſeriaõ por iſſo mais difficeis. Naõ ſeria neceſſario mais que ajuntar ás velocidades acima determinadas a velocidade produzida pela acçaõ do embolo na paſſagem do orificio. Por exemplo, ſe no caſo do nº 629 ſe conſiderar AD como huma tampa movel, que deſce uniformemente com huma velocidade k em virtude de qualquer força, repreſentando por n a raſaõ da area AD para a area do orificio, o fluido terá por eſta cauſa na paſſagem do meſmo orificio a velocidade nk. Ajuntando-a pois á velocidade V produzida pela força elaſtica, a ſoma $V + nk$ ſerá a velocidade total; e do meſmo modo ſe diſcorrerá nos outros caſos.

640 Se o fluido tiveſſe huma altura conſideravel, de maneira que foſſe neceſſario attender ao ſeu pezo, naõ ſe comprimiria, nem dilataria uniformemente nos ſeus differentes eſtados; e a determinaçaõ do movimento ſeria mais difficultoſa. Naõ diremos nada deſte caſo, que poucas vezes póde occorrer na practica; por quanto a applicaçaõ principal de toda eſta theorica ſe reduz á determinaçaõ do movimento do ar na maquina pneumatica, e nas bombas, onde naõ he neceſſario attender á referida circunſtancia.

FIM.

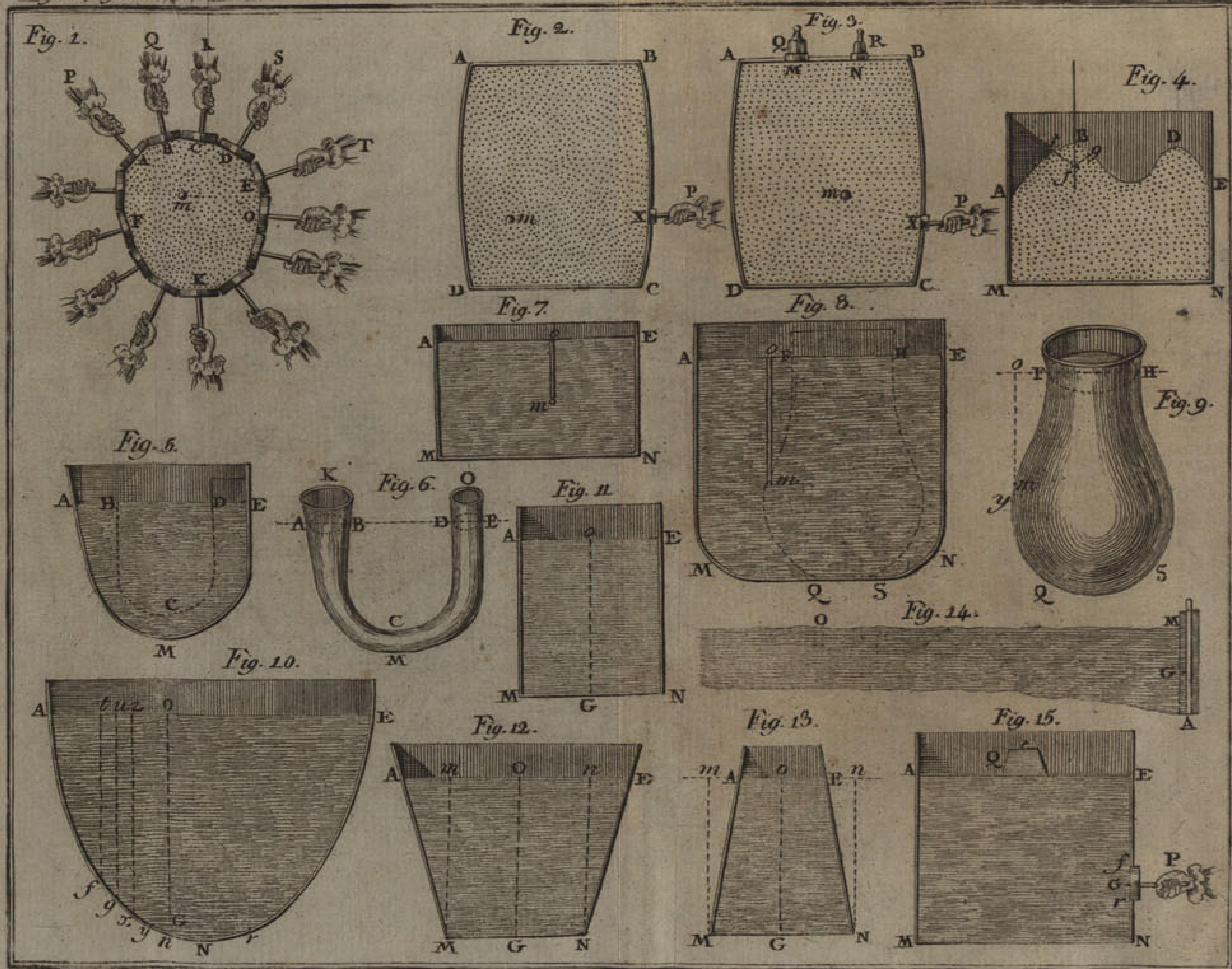
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

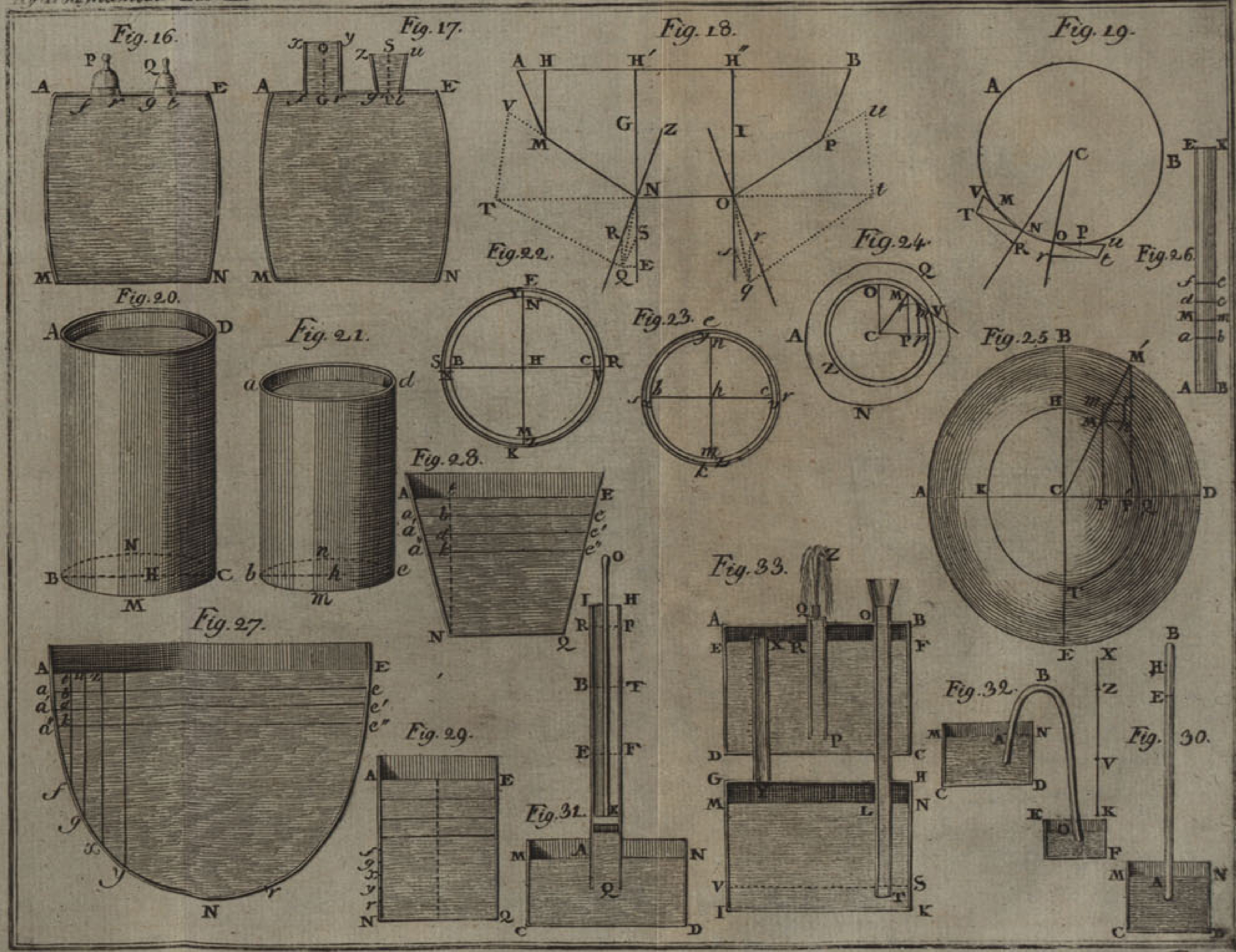
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.

Fig. 34.

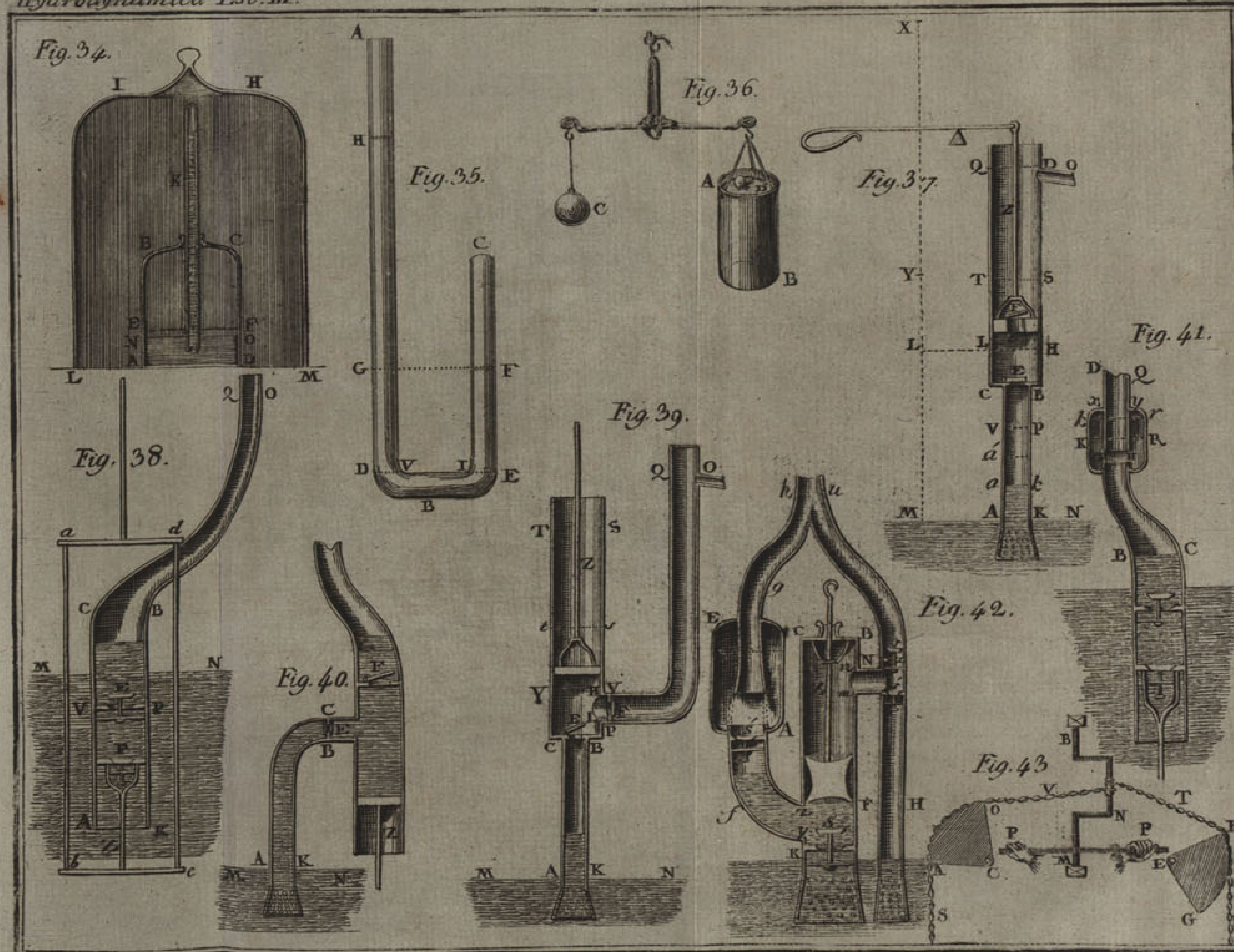
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.

Fig. 43.

Hydrodynamica Est. IV.

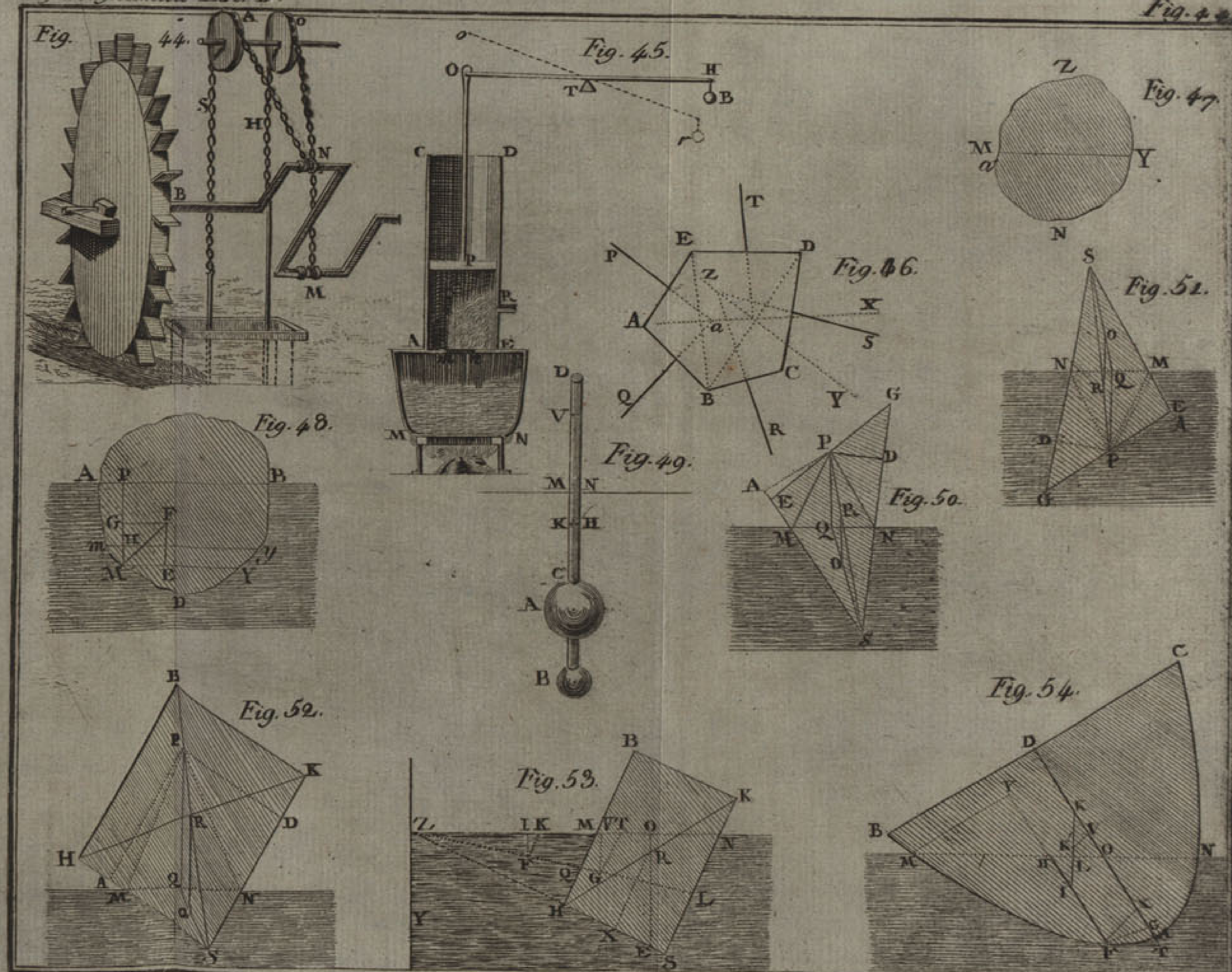

Fig. 44.

Fig. 54.

Fig. 55.

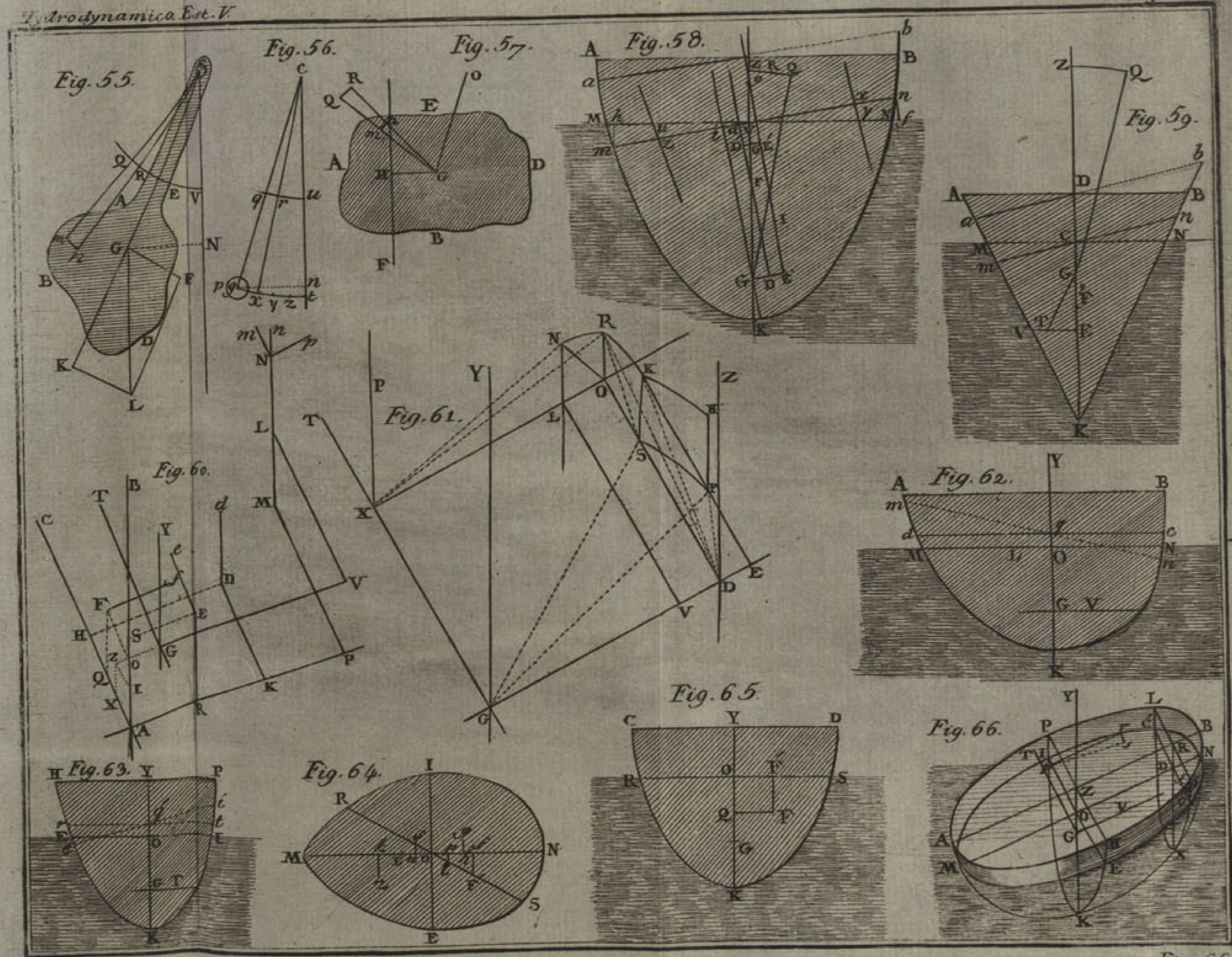
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.

Fig. 66.

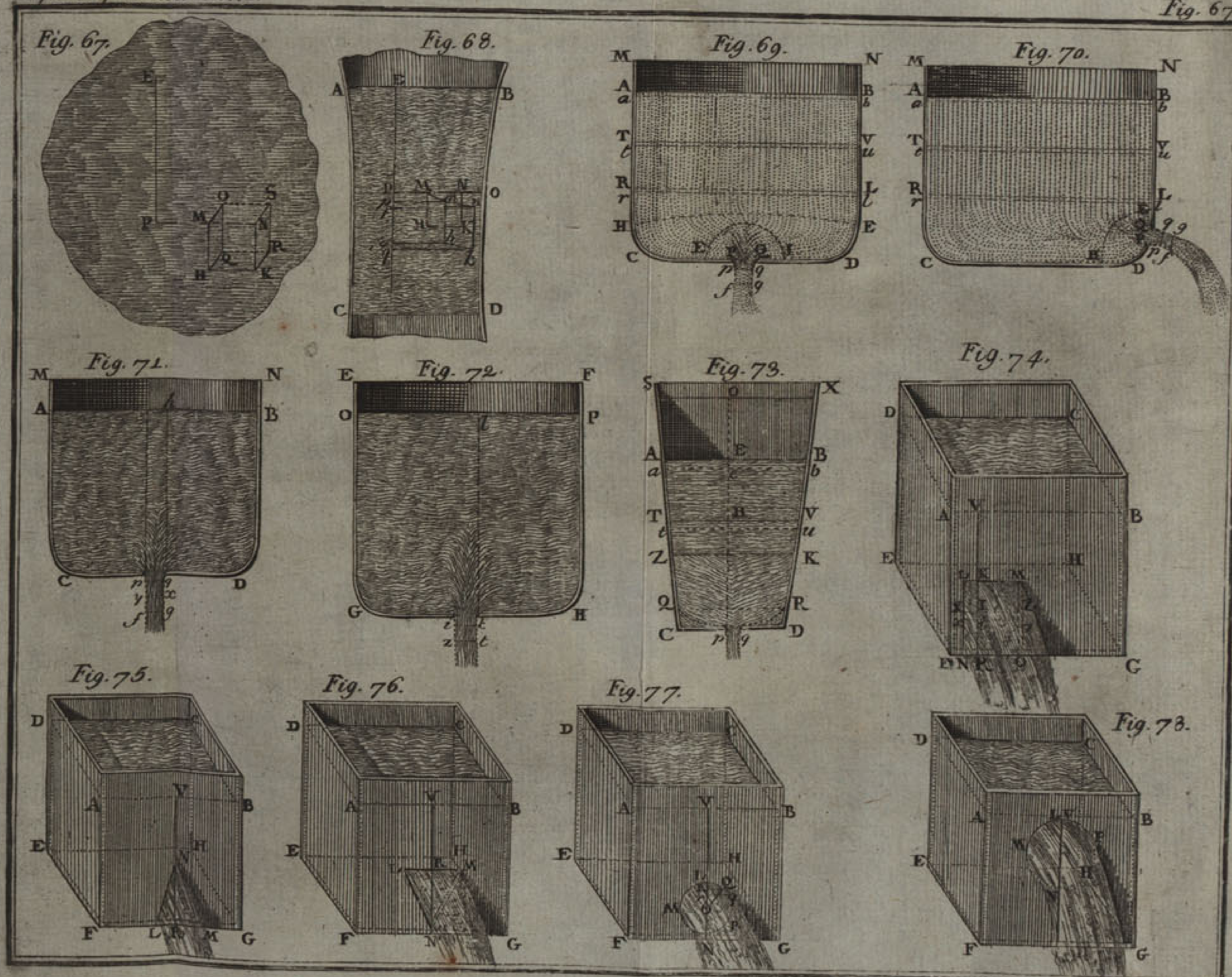
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.

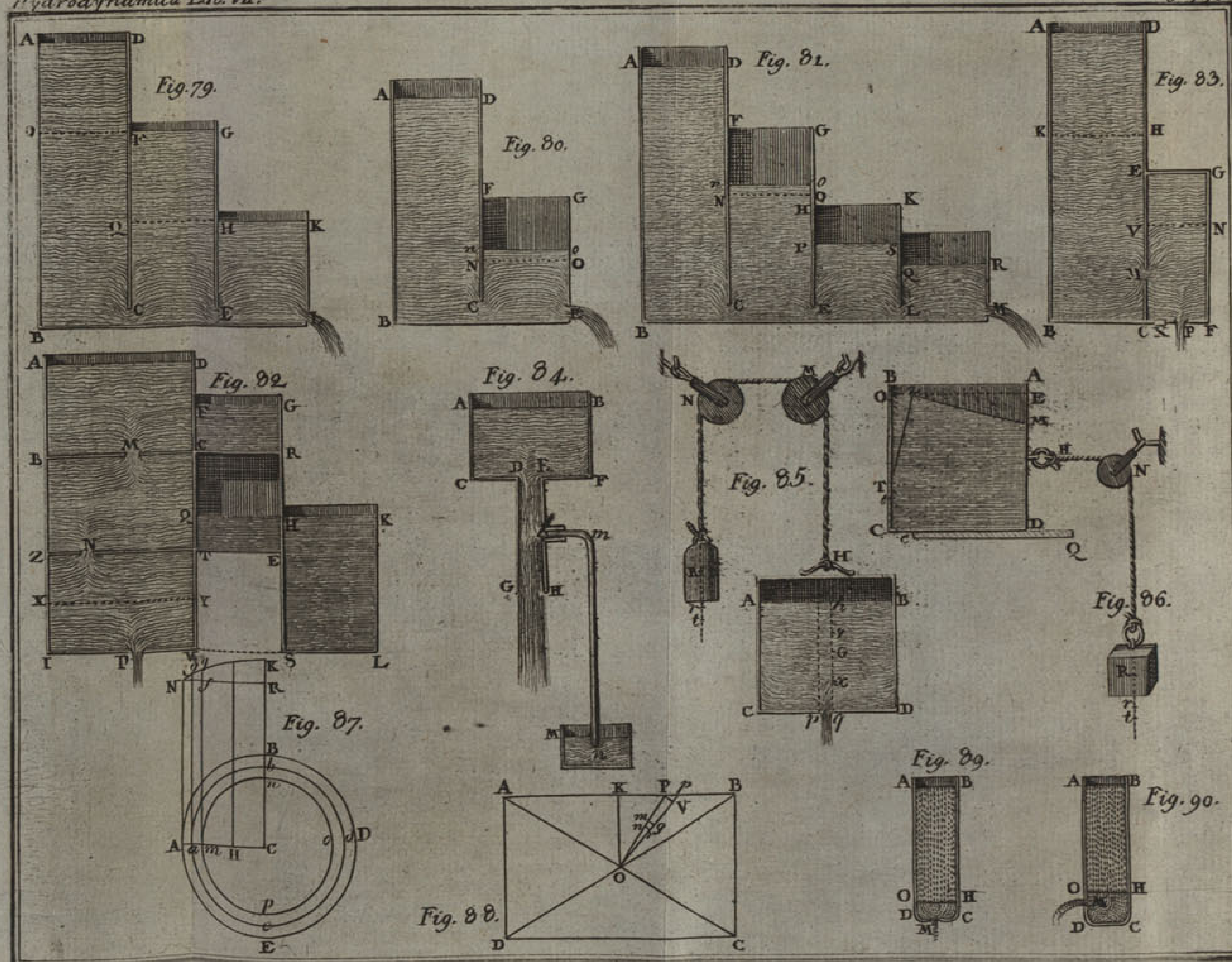
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.

 Fig. 91.

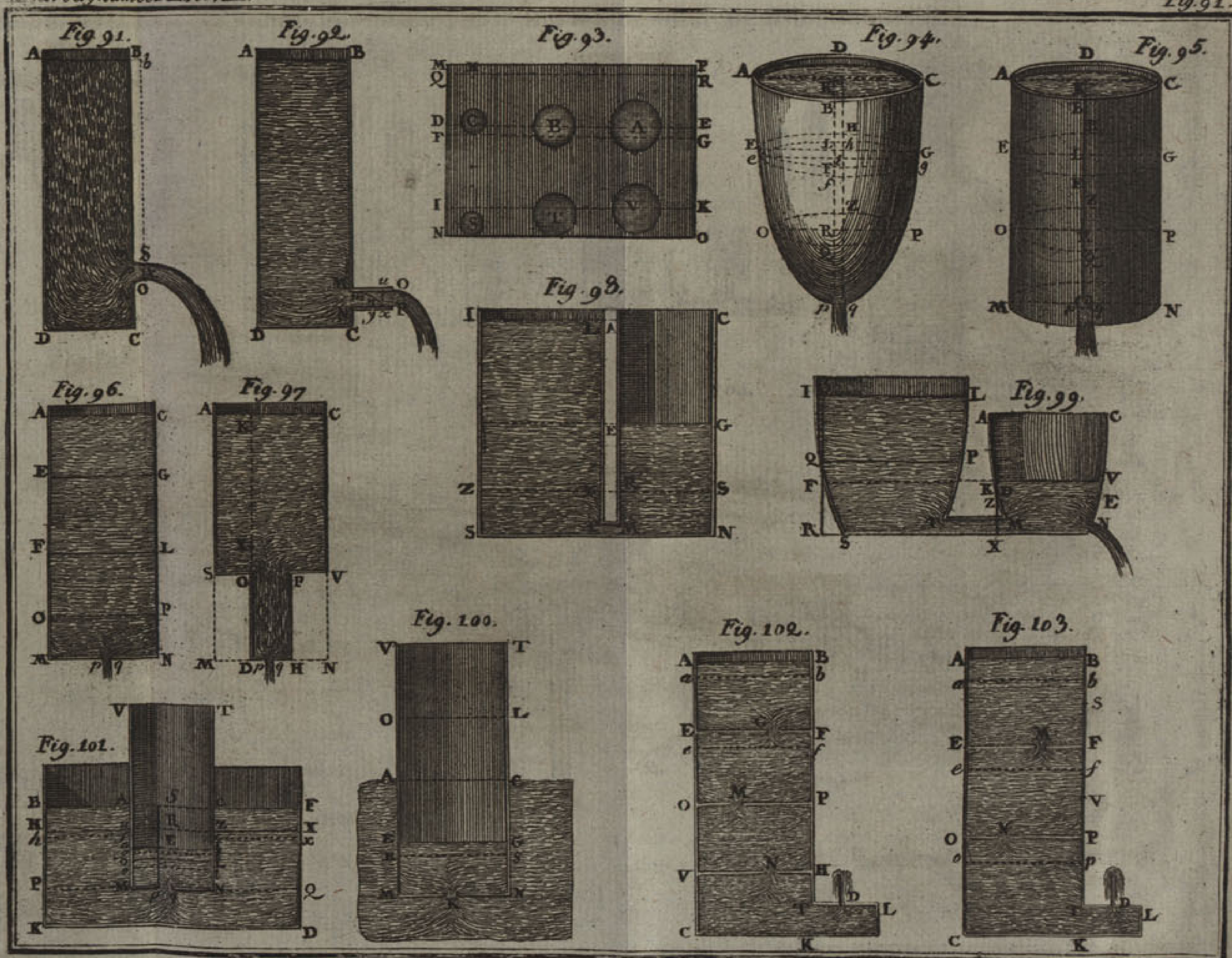

Fig. 103.

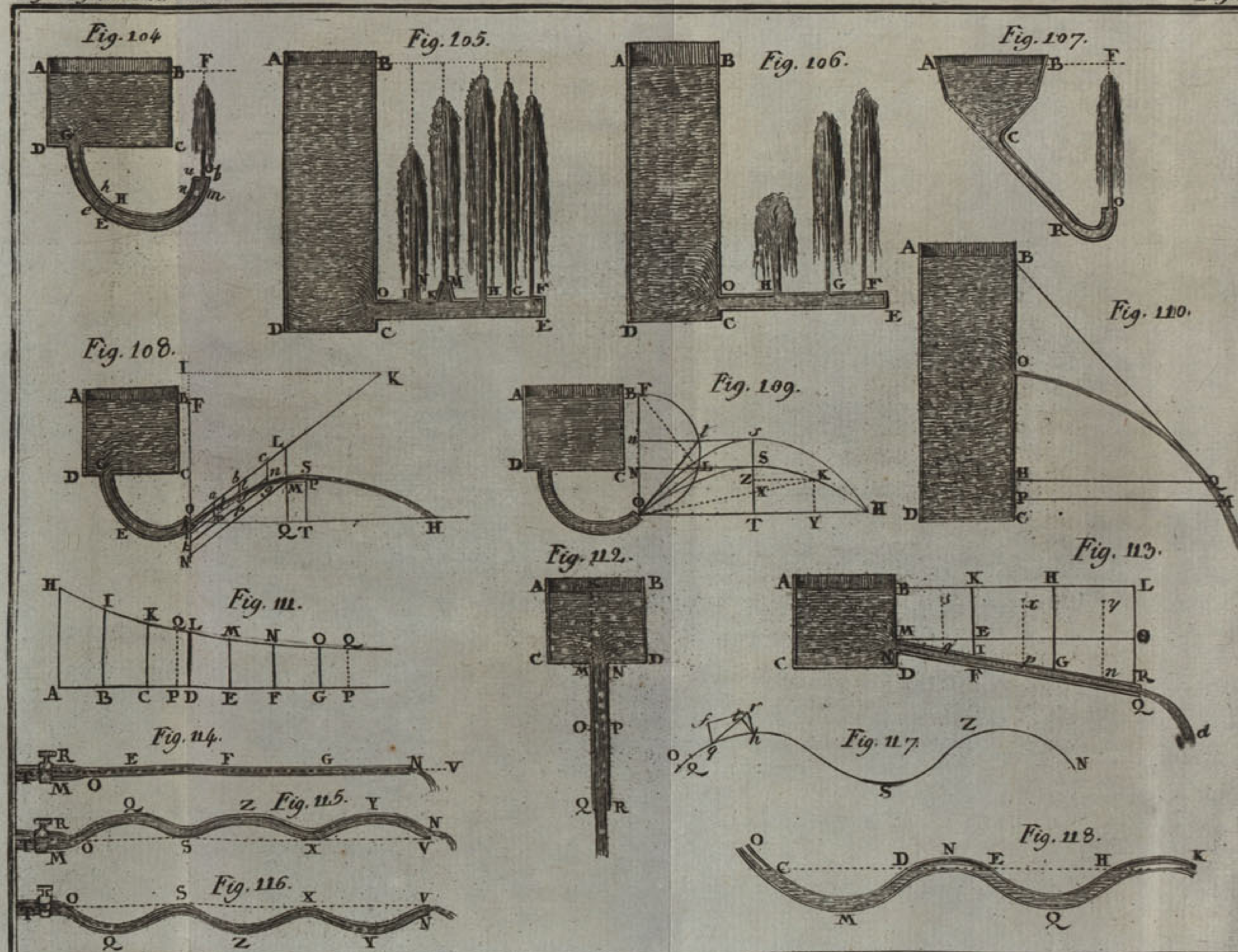
Fig. 104
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.

Hydrodynamica Tab. X. Fig. 119.

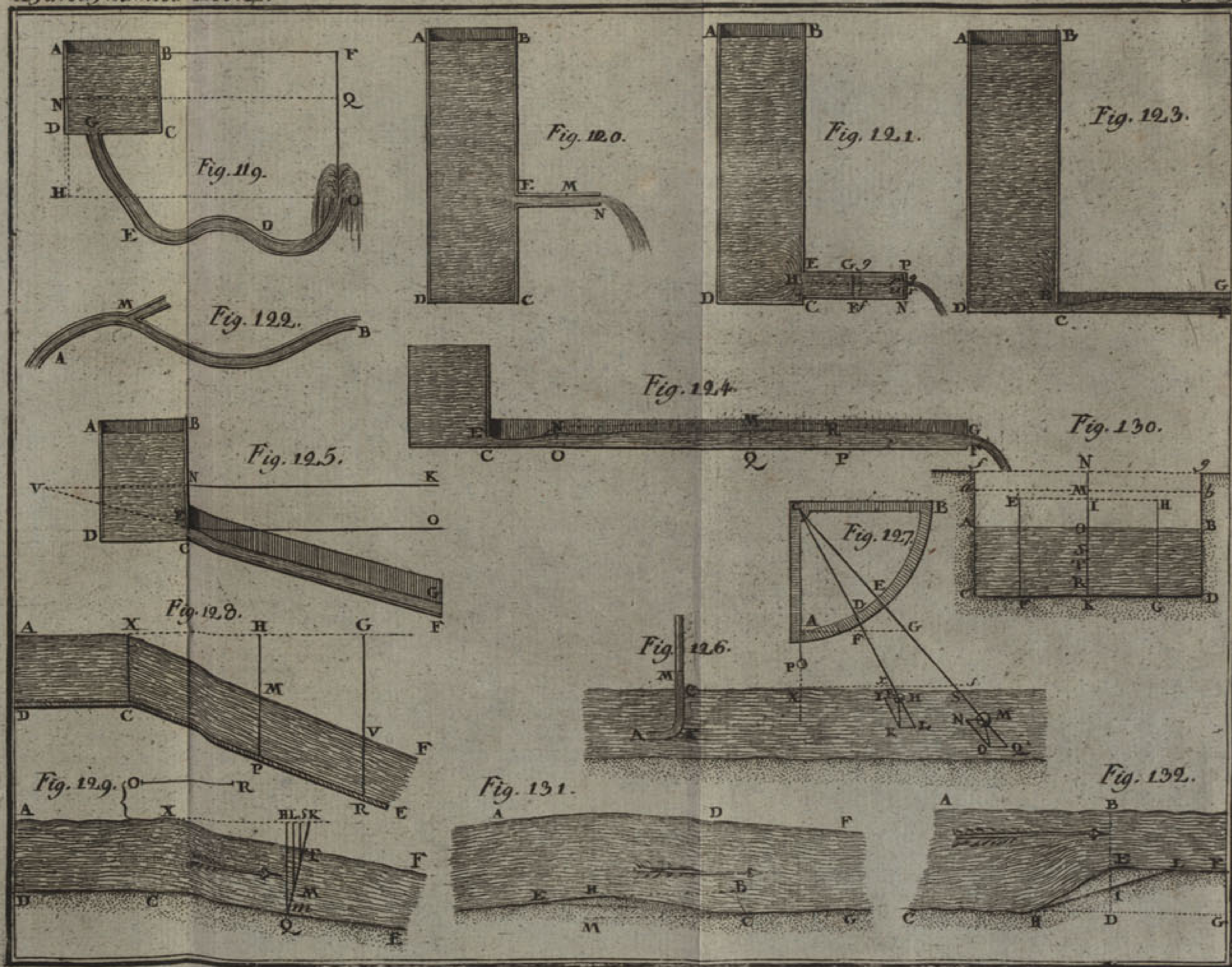

Fig. 132.

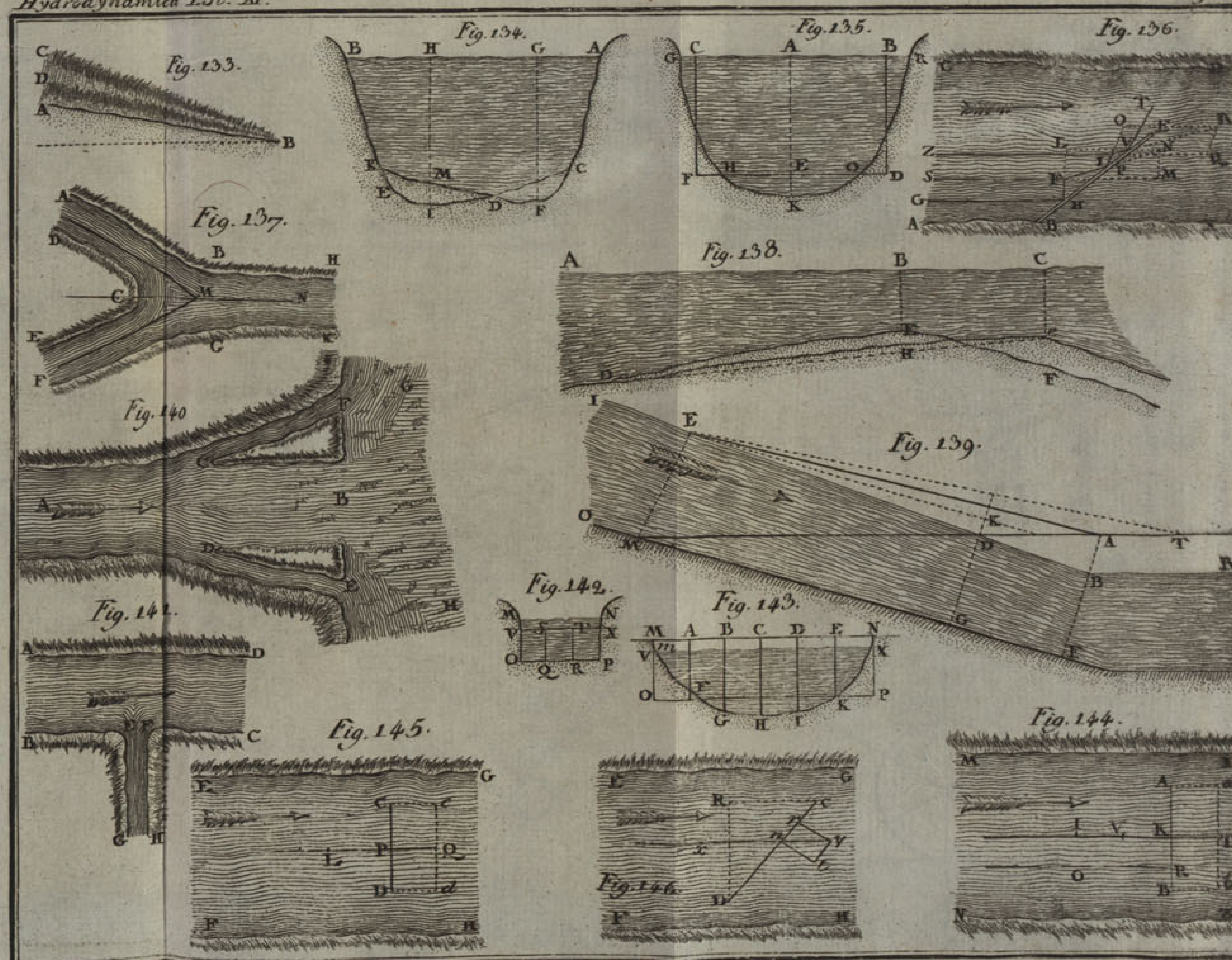
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.

Fig. 147.

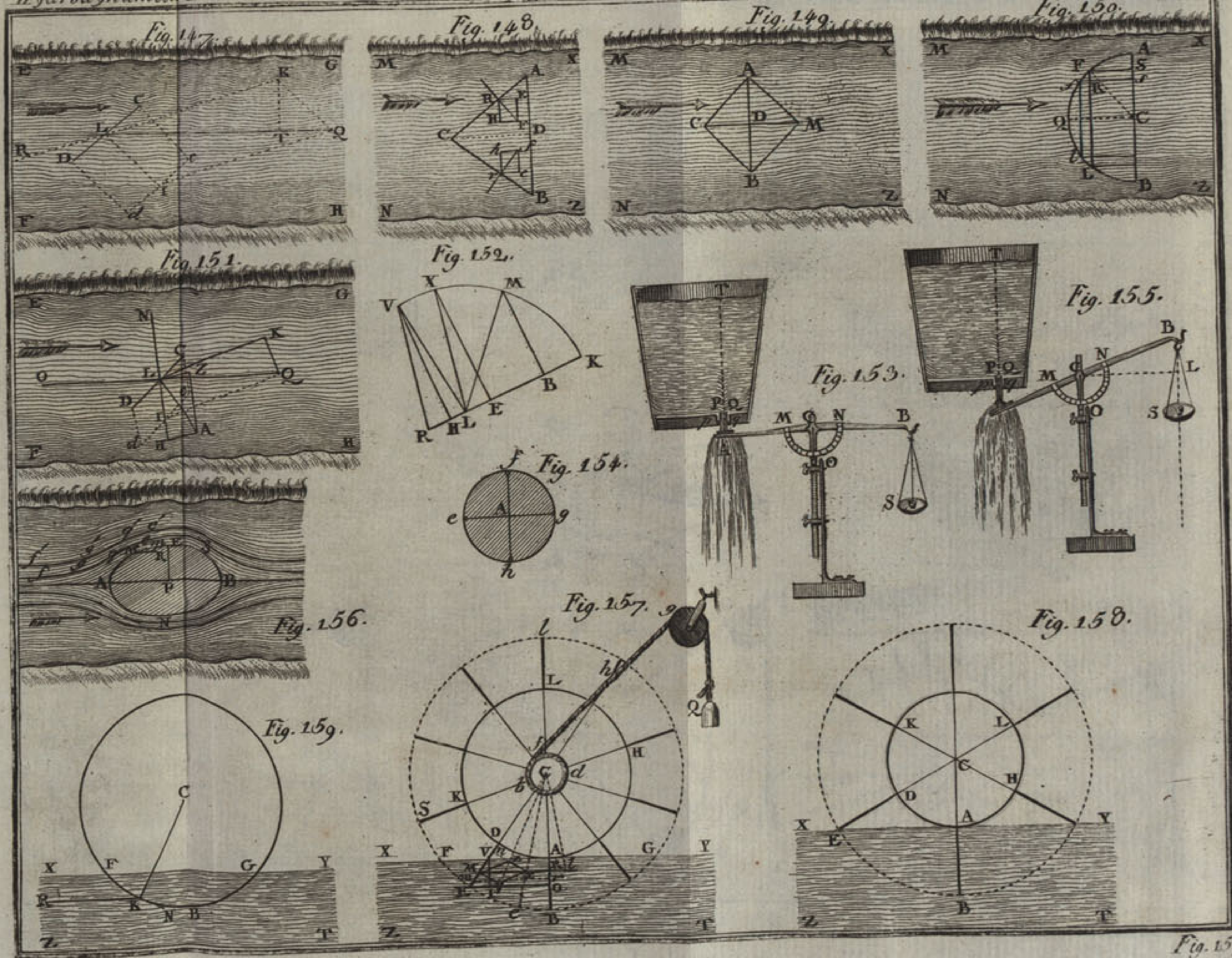

Fig. 159.

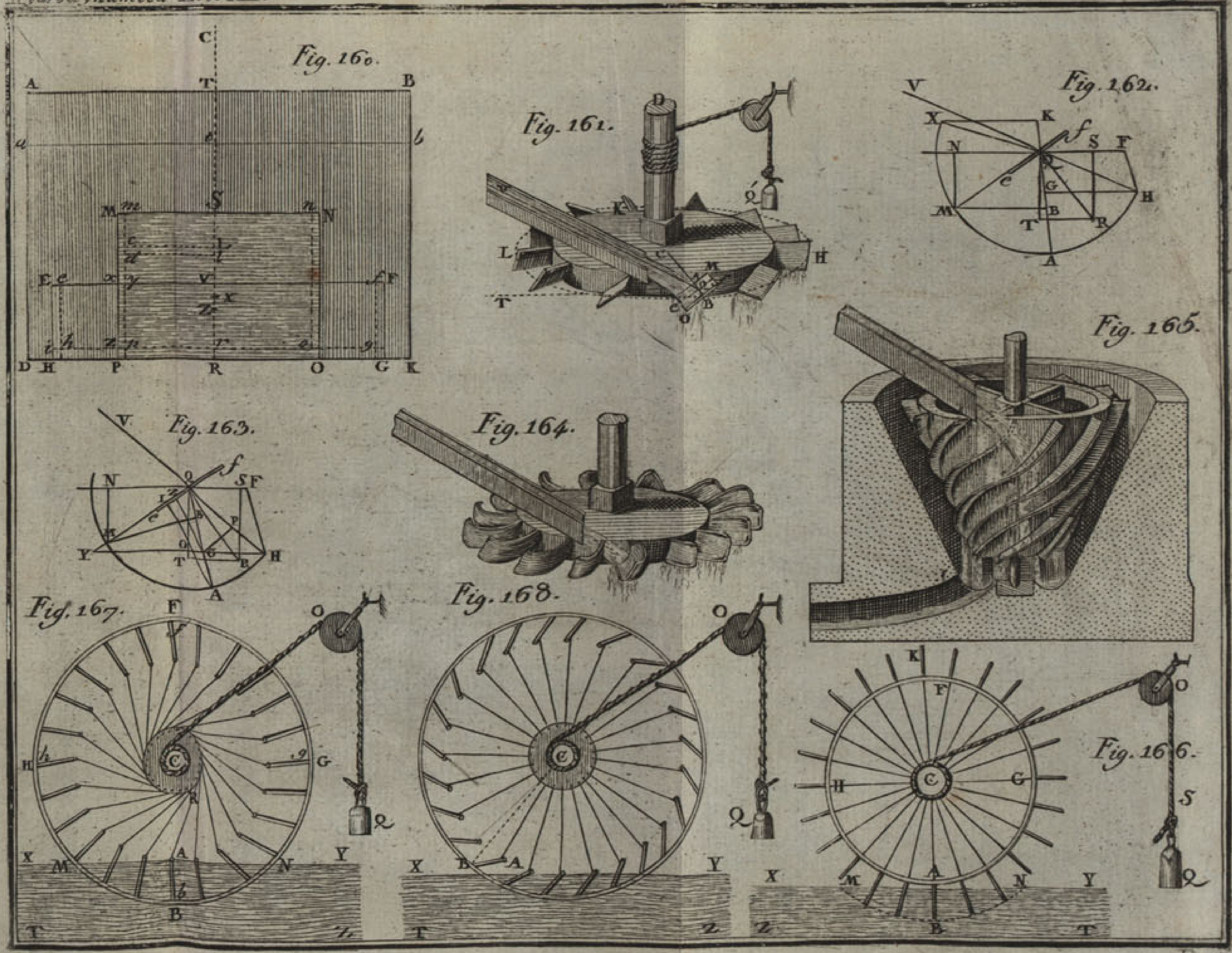
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.

Hydrodynamica Est. XV.

Fig. 169

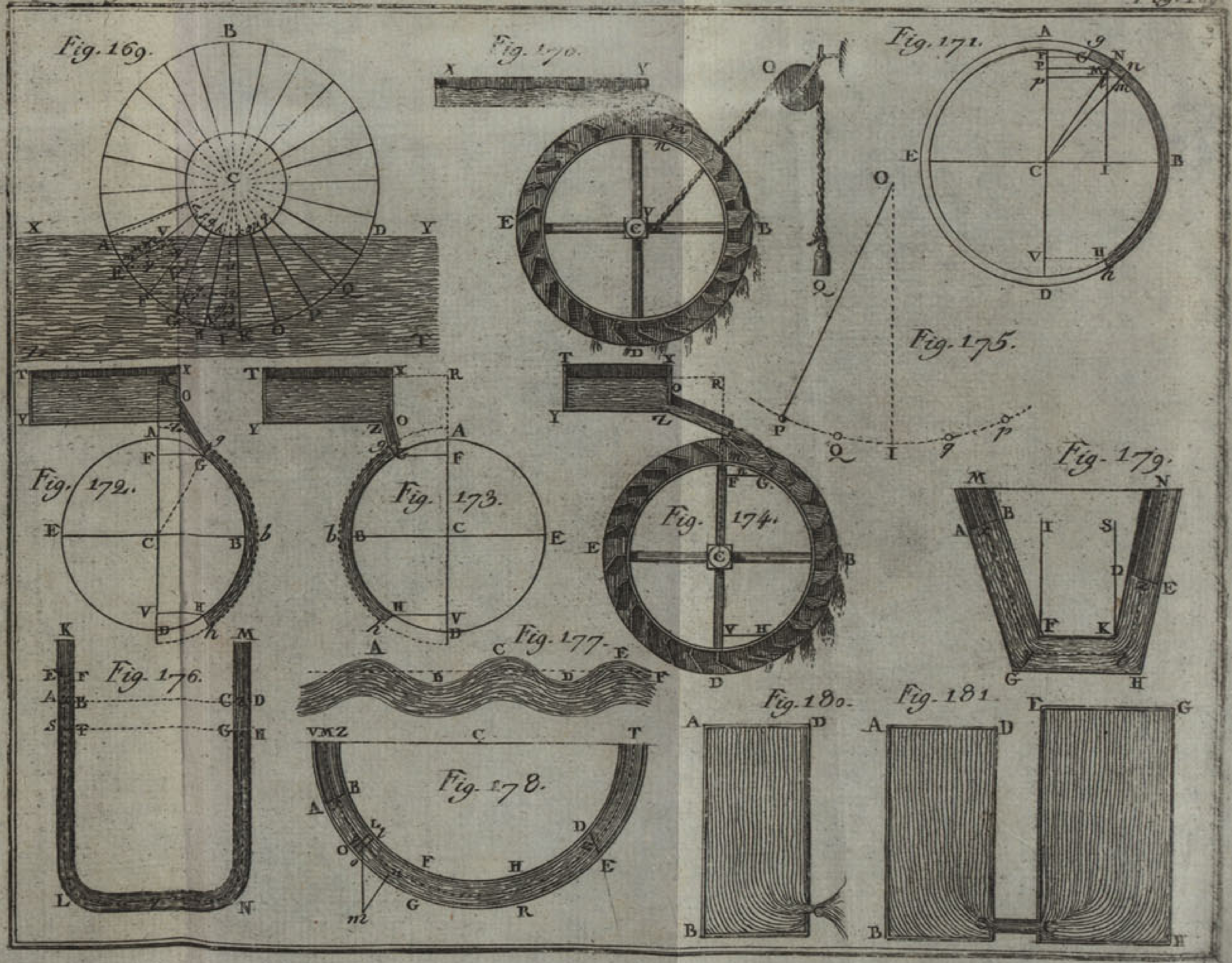

Fig. 181