ponhamos, que por qualquer acçaõ externa ſe inclina hum pouco a figura para a banda de B, ou que qualquer ponto Z da dita vertical deſcreve o pequeno arco ZQ, de maneira porém que a nova parte mergulhada mnK ſeja igual á primeira MNK; e que neſte eſtado ſe deixa á acçaõ da gravidade, e da preſſaõ do fluido. Bem ſe vê, que ſendo $mn\text{K} = MN\text{K}$, o centro de gravidade da figura naõ ha de ſubir, nem deſcer; e que tirando a parte commua NVmK, ficará $NVn = MVm$, ou $NV.nf = MV.mb$, ſendo nf, mb as alturas dos dous triangulos. Porém $nf : mb :: Vf : Vb :: VN : VM$, por ſer a inclinaçaõ muito pequena; logo $nf = \frac{VN.mb}{VM}$, e conſeguintemente $NV.nf$ ou $MV.mb = \frac{VN^2\,mb}{MV}$, e $MV = NV$. Donde ſe ſegue, que o ponto V, onde ſe cortaõ as duas linhas de fluctuaçaõ MN, mn eſtá no meio de MN.

Conduzindo agora pelo ponto I, centro de gravidade de mnK, a recta Ig perpendicular á ſuperficie actual do fluido mn, até encontrar a vertical GZ no ponto g; eſtá claro, que ficando g acima do centro de gravidade da figura G, o esforço do fluido que obra de baixo para cima da parte para onde ſe fez a inclinaçaõ, tende a levantar a figura, e reſtituilla á primeira ſituaçaõ, na qual haverá conſeguintemente eſtabilidade. Falta achar a medida deſta, ou o momento da preſſaõ vertical actual do fluido a reſpeito do centro de gravidade G, ao redor do qual ſe faz o movimento de rotaçaõ.

Do ponto G tire-ſe GE perpendicular á direcçaõ Ig da preſſaõ vertical do fluido; e pelos pontos G, F, e pelos centros de gravidade dos triangulos NVn, MVm, as rectas Gi, Fd, yx, zu parallelas a Eg. He evidente, que $mn\text{K} . GE$ he o momento de mnK em ordem ao ponto G, e que deve ſer igual ao de ($MN\text{K} + NVn - MVm$) em ordem ao meſmo ponto. Repreſentando pois a reſultante da preſſaõ vertical por mnK, ou por ($MN\text{K} + NVn - MVm$); deve notar-ſe, que as forças MNK, NVn ſaõ dirigidas de baixo para cima, e MVm de cima para baixo; e por conſeguinte, que todas tres ſaõ conſpirantes, e tendem a fazer girar a figura segundo a direcçaõ AKB para a restituir á primeira situaçaõ. Isto posto, temos o momento de MNK $= MNK.GD$, o de $NVn = NVn.xi = \frac{NV.nf.xi}{2}$, e o de $MVm = MVm.zi = \frac{NV.nf.zi}{2}$. Logo $mnK.GE = MNK.GD + \frac{NV.nf}{2}(xi + zi) = MNK.GD + \frac{MN.nf}{4}(mn - \frac{1}{3}mn)$; e porque $mn = MN$ sensivelmente, será $mnK.GE = MNK.GD + \frac{MN^2.nf}{6}$. Mas sendo QZ, que mede a inclinaçaõ, hum arco descrito com hum raio dado GQ, temos $GD = FG\frac{QZ}{GQ}$, e $nf = NV\frac{QZ}{GQ} = \frac{MN}{2}.\frac{QZ}{GQ}$. Logo $mnK.GE = \left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}$, expressaõ da estabilidade da figura proposta.

177 Daqui se mostra, que a figura neste caso sempre terá estabilidade; e que sendo as mais cousas iguais, a estabilidade será tanto maior, quanto mais baixo estiver o centro de gravidade da figura a respeito do centro de gravidade da parte mergulhada, ou quanto for maior a distancia FG destes dous centros.

178 Supponhamos, que partindo a figura da posiçaõ bKa para vir á primeira BKA, descreve o ponto Q ao redor do ponto G o arco QR em hum instante; e representando por S o momento de inercia da figura ABK em ordem ao eixo perpendicular em G ao plano da figura, teremos $\frac{QR}{GQ} = \frac{\left(MNK.FG + \frac{MN^3}{12}\right)\frac{QZ}{GQ}}{S}$ (n.173.), ou $QR = QZ\left(\frac{12\,MNK.FG + MN^3}{12\,S}\right)$. Donde se vê, que sendo constante o segundo factor do segundo membro,

bro, a figura deverá oscillar á maneira dos pendulos; e comparando a equaçaõ com a outra $gx = \frac{gt}{cg}$ (n. 171.), suppondo $gx = QR$, e $gt = QZ$, teremos o valor de $cg = \frac{12\,S}{12\,MNK + MN^3}$, comprimento do pendulo simples, que fará as oscillações isochronas ás da figura ABK.

/. 3g

Hum navio no mar está no caso da figura proposta. Se pela pancada de huma vaga, ou por hum tufaõ de vento he tirado da situaçaõ do equilibrio, assim que he deixado á acçaõ do seu pezo e da pressaõ vertical da agua, começa a arfar de popa a proa, ou a balançar de costado a costado, fazendo oscillações isochronas entre si em cada especie, até que sendo destruidos estes movimentos pela resistencia da mesma agua se torna a pôr na situaçaõ do equilibrio.

4. — 179 Agora para examinarmos o segundo caso, supponhamos que tudo fica da mesma maneira que no precedente, exceptuando sómente que o centro de gravidade da figura ABK em lugar de estar em G estará em G', acima do centro de gravidade F da parte primitivamente mergulhada MNK. Pelo ponto G' conduza-se a recta $E'G'D'$ perpendicular ás duas parallelas Fd, Ig que passaõ pelos centros de gravidade das partes mergulhadas nas duas respectivas situações, e que saõ perpendiculares á superficie actual do fluido mn. Está claro, que representando a pressaõ vertical do fluido pela area mnK ou MNK, o momento desta força será $mnK \,.\, G'E'$; e tomando em lugar delle o da força ($MNK + NVn - MVm$) composta das tres forças MNK, NVn, MVm, he facil de ver que a força MNK dirigida por Fd tende a aumentar a inclinaçaõ da figura, fazendo-a girar segundo BKA; e que as outras duas tendem, como no caso precedente, a fazella girar segundo AKB, e a restituir conseguintemente o equilibrio. Assim acabando a soluçaõ do mesmo modo, acharemos por expressaõ da estabilidade da figura a quantidade $\left(\frac{MN^3}{12} - MNK.FG'\right)\frac{QZ}{GQ}$.

180 He logo manifesto, que sendo $\frac{MN^3}{12} > MNK.FG'$,

a figura terá eſtabilidade, e tanto maior quanto maior for o exceſſo do primeiro membro ſobre o ſegundo; que ſendo $\frac{MN^3}{12} = MNK.FG'$, a figura ſerá indifferente para girar ſegundo AKB, ou ABK; e que ſendo $\frac{MN^3}{12} < MNK.FG'$, a figura naõ terá eſtabilidade nenhuma, e longe de tornar á primeira ſituaçaõ, cadavez ſe apartará mais della até ſe virar.

181 Donde ſe ſegue, que o limite da maior altura, que póde ter o centro de gravidade da figura, acima do centro de gravidade da parte mergulhada, compativelmente com a eſtabilidade, he determinado pela equaçaõ $FG' = \frac{MN^3}{12 MNK}$. E porque neſta ſuppoſiçaõ o momento da preſſaõ vertical do fluido he nullo, e eſte he repreſentado em geral por $mnk.G'E'$, ſerá $G'E' = 0$, e conſeguintemente o ponto G' coincidirá com g, interſecçaõ das duas perpendiculares conduzidas á ſuperficie do fluido nas duas poſições da figura. Eſte ponto g he o que M. Bouguer no ſeu *Tratado do Navio* chama *metacentro*; e abaixo delle deve cahir ſempre o centro de gravidade do pezo total de hum navio com a ſua carga, para ter eſtabilidade ſobre as ondas do mar.

K/

182 Repreſentando por S o momento de inercia relativo ao eixo perpendicular ao centro de gravidade da figura G', acharemos tambem do meſmo modo que o comprimento do pendulo ſimples, que deve fazer as oſcillações equidiuturnas ás da figura propoſta, ſerá repreſentado por $\frac{12S}{MN^3 - 12 MNK.FG'}$.

183 Para reduzirmos pois eſta ſoluçaõ, ſeja a linha de fluctuaçaõ $MN = a$, a area mergulhada $MNK = b^2$, a diſtancia do centro de gravidade G ou G' da figura ao da parte mergulhada $F = h$, o raio conſtante $GQ = 1$, o arco $QZ = z$, o momento da força que tende a reſtituir a figura ao primeiro eſtado, e que conſtitue a ſua eſtabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo que faz as oſcillaçoens no meſmo tempo que as da figura $= L$; e teremos para ambos os caſos,

 $A =$

$$A = \frac{(a^3 \pm 12 b b^2) z}{12}$$

$$L = \frac{12 S}{a^3 \pm 12 b b^2} \,..$$

Quando ſe houverem de applicar eſtas formulas a exemplos particulares, deve conſiderar-ſe que em conſequencia das noſſas ſuppoſições, e raciocinios, b^2 repreſenta a preſſaõ vertical do fluido, ou (que vem a ſer o meſmo) o pezo abſoluto da figura ABK; que a^3 he o producto do pezo abſoluto da area a^2, ſuppoſta do meſmo pezo eſpecifico que o fluido, multiplicado pela linha a; e que S he o producto de hum pezo conhecido (que ſempre ſe póde converter no de huma parte conhecida do fluido) multiplicado pelo quadrado de huma linha dada.

184 Exemplo. Seja a figura propoſta ABK (Fig. 59.) hum triangulo iſoſceles homogeneo, e a parte mergulhada MNK hum triangulo tambem iſoſceles. Conduzindo do vertice K a recta KD perpendicular ás baſes MN, AB, e ſuppondo $MN = a$, $KC = c$, $AB = f$, $KD = g$, e o pezo eſpecifico do fluido $= p$, ſerá neceſſario pôr na primeira formula do ſegundo caſo $p a^3$ em lugar de a^3, $\frac{pac}{2}$ em lugar de b^2, $\frac{2}{3} g - \frac{2}{3} c$ em lugar de b; e teremos $A = \frac{p[a^3 - 4ac(g-c)]z}{12}$, quantidade que deve ſer poſitiva para haver eſtabilidade no triangulo.

Para determinar L, he neceſſario achar S. Tomando a reſpeito de huma particula dM ſituada em qualquer ponto T, as coordenadas $GE = x$, $ET = y$, teremos $S = \int GT^2 . dM = \int y^2 dM + \int x^2 dM$. Se pelo ponto T ſe imaginar huma recta parallela a KD ſerá o ſeu valor $\frac{g(f-2y)}{f}$, e teremos $\int y^2 dM = \int \frac{g(f-2y)}{f} y^2 dy$.

Integrando, tomando o valor do integral quando $y = \frac{1}{2} f$, e dobrando o reſultado, ſerá $\int y^2 dM = \frac{1}{48} g f^3$. Do meſmo modo conduzindo por T parallelamente a AB a recta

recta VE, ſerá eſta $= \frac{f(2g-3x)}{6g}$, e teremos $\int x^2\, dM$ $= \int \frac{f(2g-3x)}{6g} x^2\, dx$. Integrando, tomando o valor do integral entre os limites $x = \frac{2}{3} g$, $x = -\frac{1}{3} g$, e dobrando o reſultado, ſerá $\int x^2\, dM = \frac{fg^3}{36}$. Logo $S = \frac{gf^3}{48} + \frac{fg^3}{36} = \frac{fg}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$. Porém $\frac{fg}{2}$ repreſenta o pezo do triangulo ABK, que ſendo igual ao do fluido deslocado pelo triangulo MNK terá por valor $\frac{1}{2} pac$. Logo $S = \frac{pac}{2}\left(\frac{3ff+4gg}{72}\right)$, e ſubſtituindo eſte valor na ſegunda formula, teremos

$$L = \frac{c(3ff+4gg)}{12(a^2-4c(g-c))}.$$

185 Probl. II. *Determinar a eſtabilidade de hum corpo ſolido ſuſtentado em equilibrio ſobre hum fluido* (Fig. 58.).

Póde ſucceder, como abaixo ſe verá, que o ſolido oſcille ao meſmo tempo ao redor de differentes eixos, que paſſem todos pelo centro de gravidade. Mas aqui naõ conſideramos mais que as oſcillações ſimples, que ſe fazem ao redor de hum ſó eixo horizontal e immovel, que paſſa pelo centro de gravidade.

Seja ABK a ſecçaõ vertical do corpo perpendicular ao eixo de rotaçaõ, que he repreſentado pelo ponto G ou G', e ſeja repreſentado por F o eixo horizontal perpendicular á meſma ſecçaõ, que paſſa pelo centro de gravidade da parte do corpo merguihada no fluido. Acabando o reſto da conſtrucçaõ, como no Problema antecedente, tudo ſerá do meſmo modo, com a differença ſómente de que MN repreſenta aqui o perfil da ſuperficie de fluctuaçaõ do corpo, e que NVn, MVm repreſentaõ duas unhas formadas pela rotaçaõ das ſuperficies NV, MV ao redor do eixo horizontal deſignado por V no perfil ABK. Eſtas duas unhas ſeraõ iguais, porque ſuppomos que o centro de gravidade do corpo, naõ ſobe, nem deſce. Donde ſe ſegue, que o ponto V he neceſſariamente te o centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ MN, porque a igualdade das unhas faz que as distancias dos centros de gravidade das duas superficies NV, MV ao ponto V sejaõ reciprocamente proporcionais ás mesmas superficies.

De tudo isto se segue, que fazendo o raio constante $GQ = 1$, o arco QZ que mede a inclinaçaõ primitiva do solido, que suppomos muito pequena $= z$, a parte mergulhada representada por $MNK = N$, a distancia do ponto G ou G' ao ponto $F = b$, a unha NVn ou MVm $= b^3 z$, o momento da unha NVn a respeito do eixo de rotaçaõ $= b^3 cz$, o momento da unha MVm a respeito do mesmo eixo $= b^3 fz$, o momento de inercia do corpo em ordem ao eixo de rotaçaõ $= S$, o momento da força que constitue a estabilidade $= A$, e o comprimento do pendulo simples isochrono $= L$; acharemos pelo mesmo methodo acima praticado

$$A = (b^3 c + b^3 f \pm bN)z$$

$$L = \frac{S}{b^3 c + b^3 f \pm bN};$$

formulas, sobre as quais se faraõ reflexões analogas ás que fizemos sobre as das figuras planas (n. 183.). As quantidades S, N, b, b, c, f saõ dadas pela figura do corpo, e o angulo z por hypothese.

He de notar, que em toda esta theorica se despreza a resistencia, que experimenta o corpo da parte do fluido na porçaõ mergulhada, e da parte do ar na porçaõ que tem fóra do liquido, como forças incomparavelmente menores que o pezo do corpo, e a pressaõ vertical do fluido. Mas essas pequenas forças repetidas por certo tempo, vem a aniquilar as oscillações; e o corpo se poem em equilibrio segundo as leis acima estabelecidas, se alguma nova causa o naõ embaraçar.

Theorica geral das oscillações dos corpos fluctuantes.

186 NO artigo precedente examinamos hum caso particular das oscillações dos corpos fluctuantes; agora darei huma soluçaõ geral desta questaõ por hum

hum methodo novo, e, se me naõ engano, muito simples; methodo, de que já me servi nas duas Memorias *sobre a arrumaçaõ da carga dos navios*, que ganháraõ parte dos premios da Academia em 1761 e 1765.

Para expor a minha soluçaõ com clareza, primeiro trarei á lembrança as proposições de Mechanica, em que ella se funda.

187 Quando quaisquer forças tendem a imprimir movimento em hum corpo, este lhes resiste por direcções contrarias em virtude da sua inercia; e em cada instante ha sempre equilibrio entre as forças sollicitantes, e as resistentes. Para determinarmos as leis deste equilibrio, imaginemos conduzidos por hum ponto fixo A (Fig. 60.) tres eixos AP, AC, AB perpendiculares entre si, e immoveis no espaço absoluto. Para ajudar a imaginaçaõ, podem conceber-se os dous eixos AP, AC situados no plano na figura, e AB perpendicular ao mesmo plano. Qualquer que seja o numero, e a direcçaõ das forças applicadas ao corpo, sempre poderáõ reduzir-se em cada instante a tres forças sómente, parallelas aos tres eixos AP, AC, AB. Supponhamos, que depois de assim reduzidas saõ representadas pelas rectas Ff, Ee, Dd. De qualquer ponto N do corpo abaixe-se MN perpendicular ao plano CAP, e pelo ponto M tire-se MP perpendicular a AP. Entaõ resolvendo a resistencia, que oppoem ao movimento huma molecula situada em N, em tres forças Np, Nm, Nn respectivamente parallelas aos tres eixos AP, AC, AB; está claro, que para estabelecer o equilibrio de que tratamos, he necessario 1°, que a resultante de cada huma destas forças elementares seja igual á força sollicitante que lhe corresponde; 2°, que o momento que provém das primeiras a respeito de cada hum dos nossos tres eixos seja igual ao momento correspondente que provém das segundas.

188 Assim, supponddo as forças $Ff = F$, $Ee = E$, $Dd = D$, e as rectas $AP = q$, $PM = r$, $NM = s$, o elemento do tempo $= dt$, e cada molecula do corpo $= dP$; teremos pela primeira condiçaõ estas tres equaçoens,

$$F = \int \frac{dP\,ddq}{dt^2},\ E = \int \frac{dP\,ddr}{dt^2},\ D = \int \frac{dP\,dds}{dt^2}.$$

189

189 E havendo ſuppoſto que as direcçoens das forças F, E, D encontraõ os planos BAC, BAP, CAP nos pontos F, E, D, ſe conduzirmos parallelamente a CA as rectas FO e DK para os eixos AB e AP, parallelamente a AB as rectas FQ e ER para os eixos AC e AP, e parallelamente a AP as rectas ES e DH para os eixos AB e AC; he evidente, que temos o momento da força F a reſpeito do eixo $AP = 0$, a reſpeito de $AC = F.FQ$, e a reſpeito de $AB = F.FO$; que o da força E a reſpeito de $AC = 0$, a reſpeito de $AB = E.ES$, e a reſpeito de $AP = E.ER$; e que o da força D a reſpeito de $AB = 0$, a reſpeito de $AC = D.DH$, e a reſpeito de $AP = D.DK$. Aſſim teremos relativamente a AC o momento unico repreſentado por $F.FQ - D.DH$, relativamente a AB outro repreſentado por $F.FO - E.ES$, e relativamente a AP outro repreſentado por $E.ER - D.DK$.

Analyzando do meſmo modo os momentos da reſiſtencia da molecula dP ſituada em N a reſpeito dos tres eixos AC, AB, AP, acharemos relativamente a AC hum momento unico repreſentado por $\int \frac{s\,dPddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dPdds}{dt^2}$, relativamente a AB outro repreſentado por $\int \frac{r\,dPddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dPddr}{dt^2}$, e relativamente a AP outro repreſentado por $\int \frac{s\,dPddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dPdds}{dt^2}$.

Igualando pois cada hum deſtes momentos a cada hum das forças ſollicitantes, que reſpectivamente lhes correſpondem, teremos pela ſegunda condiçaõ outras tres equaçoens, a ſaber

$$F.FQ - D.DH = \int \frac{s\,dPddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dPdds}{dt^2}$$

$$F.FO - E.ES = \int \frac{r\,dPddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dPddr}{dt^2}$$

$$E.ER - D.DK = \int \frac{s\,dPddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dPdds}{dt^2}.$$

190

190 Pelo centro de gravidade do corpo G imaginemos agora outros tres eixos GV, GT, GY parallelos cada hum a cada hum dos eixos fixos AP, AC, AB. Eſtes novos eixos ſaõ moveis com o centro de gravidade, mas cada hum delles fica ſempre parallelo a ſi meſmo. Sejaõ a reſpeito do ponto G as tres coordenadas GV, VL, LN, que correſpondem ao ponto N; e produzindo o eixo VG até encontrar o plano BAC no ponto Z, conduzaõ-ſe as rectas ZI, ZX parallelas reſpectivamente aos eixos AC, AB. Conſervando as denominaçoens precedentes, e fazendo mais $ZG = Q$, $AX = R$, $AI = S$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$; a diſtancia da linha Ff ao plano $TGV = \alpha$, e ao plano $YGV = \beta$; a diſtancia da recta Ee ao plano $TGV = \gamma$, e ao plano $YGT = \delta$; e a diſtancia da recta Dd ao plano $YGT = \varphi$, e ao plano $YGV = \xi$; teremos evidentemente $q = Q + q'$, $r = R + r'$, $s = S + s'$, $ddq = ddQ + ddq'$, $ddr = ddR + ddr'$, $dds = ddS + dds'$, $FQ = S + \alpha$, $FO = R + \beta$, $ES = Q + \delta$, $ER = S + \gamma$, $DH = Q + \varphi$, $DK = R + \xi$.

Subſtituindo todos eſtes valores nas ſeis equaçoens fundamentais, em primeiro lugar teremos as tres equaçoens,

$$F = \int \frac{dP\,ddQ}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddq'}{dt^2},\ E = \int \frac{dP\,ddR}{dt^2} + \int \frac{dP\,ddr'}{dt^2},\ D = \int \frac{dP\,ddS}{dt^2} + \int \frac{dP\,dds'}{dt^2}.$$

Porém, pela propriedade do centro de gravidade, $\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,ddr'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dP\,dds'}{dt^2} = 0$; e além diſſo ddQ, ddR, ddS ſaõ conſtantes para todos os pontos do corpo. Logo as tres primeiras equaçoens ſeraõ reduzidas ás ſeguintes

$$F = \frac{P\,ddQ}{dt^2},\ E = \frac{P\,ddR}{dt^2},\ D = \frac{P\,ddS}{dt^2}.$$

Em ſegundo lugar, conſideremos ſómente as partes correſpondentes $F.FQ$ e $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ da primeira das outras tres equaçoens; e teremos $F.FQ = FS + F\alpha$,

e

$$e\int\frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}=\int\frac{(dP(S+s')(ddQ+ddq'))}{dt^2}$$

$$=\int\frac{S\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{s'\,dP\,ddQ}{dt^2}+\int\frac{S\,dP\,ddq'}{dt^2}+$$

$$\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}=\frac{PSddQ}{dt^2}+\frac{ddQ}{dt^2}\int s'dP+S\int\frac{dP\,ddq'}{dt^2}$$

$$+\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}=FS+\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$$, pondo em lugar de $\frac{PSddQ}{dt^2}$ o seu valor FS, e observando que pela propriedade do centro de gravidade he $\int s'dP=0$, e $\int\frac{dP\,ddq'}{dt^2}=0$. Feitas as mesmas operaçoens sobre as outras partes correspondentes das sobreditas equaçoens, e omittindo os termos que se destroem, acharemos que ellas se reduzem finalmente ás tres seguintes,

$$F\alpha-D\varphi=\int\frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,dds'}{dt^2}$$

$$F\beta-E\delta=\int\frac{r'\,dP\,ddq'}{dt^2}-\int\frac{q'\,dP\,ddr'}{dt^2}$$

$$E\gamma-D\xi=\int\frac{s'\,dP\,ddr'}{dt^2}-\int\frac{r'\,dP\,dds'}{dt^2}.$$

191 Isto posto, reflectiremos que qualquer que seja o movimento de cada ponto N do corpo, relativamente ao centro de gravidade, sempre podemos concebello como produzido pela rotaçaõ do corpo ao redor dos tres eixos GY, GV, GT. Supponhamos (Fig. 61.), que o ponto N está no primeiro instante em H; e sejaõ GE, EF, FH as coordenadas correspondentes. Imaginemos, que em virtude da rotaçaõ do corpo ao redor do eixo GY, a recta FH girando parallelamente a si mesma, toma a posiçaõ SK; que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GV, o ponto K chega a R; e que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo GT, o ponto R chega a N. As coordenadas NL, LV, GV saõ aqui as mesmas que na figura precedente. Tirem-se as rectas GF, GS, DK; do ponto R abaixe-se RO perpendicular ao plano TGV; e pelo ponto O tire-se perpendi-

pendicularmente a GT a recta XO, que paſſa neceſſariamente pelo ponto L. Tirem-ſe tambem as rectas XR, XN; e dos pontos D, X levantem-ſe perpendicularmente ao plano TGV, ou parallelamente o eixo GY, as rectas DZ, XP.

192 Suppondo pois $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$; e os angulos de rotaçaõ, ao redor do eixo $GY = x$, ao redor de $GV = y$, e ao redor de $GT = z$; teremos $DGS = EGF + x$, e conſeguintemente $DS = GF \,.\, \text{sen}\, DGS = \lambda \cos x + \psi\, \text{sen}\, x$, e $GD = GF \,.\, \cos DGS = \psi \cos x - \lambda\, \text{sen}\, x$. Do meſmo modo ſerá $DO = DK \,.\, \text{sen}\, RDZ = DS \,.\, \cos y + SK\, \text{sen}\, y = \lambda \cos x \cos y + \psi\, \text{sen}\, x \cos y + \mu\, \text{sen}\, y$; $RO = DK \,.\, \cos RDZ = SK \cos y - DS\, \text{sen}\, y = \mu \cos y - \lambda \cos x\, \text{sen}\, y - \psi\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$; $XL = XR \,.\, \text{sen}\, NXP = XO \cos z - RO\, \text{sen}\, z = \psi \cos x \cos z - \lambda\, \text{sen}\, x \cos z - \mu \cos y\, \text{sen}\, z + \lambda \cos x\, \text{sen}\, y\, \text{sen}\, z + \psi\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\, \text{sen}\, z$; $LN = XR \,.\, \cos NXP = RO \cos z + XO\, \text{sen}\, z = \mu \cos y \cos z - \lambda \cos x\, \text{sen}\, y \cos z - \psi\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y \cos z + \psi \cos x\, \text{sen}\, z - \lambda\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, z$. E porque $XL = GV = q'$, $DO = VL = r'$, $LN = s'$, teremos $q' = \psi \cos x \cos z - \lambda\, \text{sen}\, x \cos z - \mu \cos y\, \text{sen}\, z + \lambda \cos x\, \text{sen}\, y\, \text{sen}\, z + \psi\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\, \text{sen}\, z$; $r' = \lambda \cos x \cos y + \psi\, \text{sen}\, x \cos y + \mu\, \text{sen}\, y$; $s' = \mu \cos y \cos z - \lambda \cos x\, \text{sen}\, y \cos z - \psi\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y \cos z + \psi \cos x\, \text{sen}\, z - \lambda\, \text{sen}\, x\, \text{sen}\, z$.

193 Aſſim, por meio deſtes valores, podemos eliminar q', r', s', ddq', ddr', dds' das equaçoens precedentes. Mas a reſpeito das tres quantidades $\int s' dP ddq' - \int q' dP dds'$, $\int r' dP ddq' - \int q' dP ddr$, $\int s' dP ddr' - \int r' dP dds'$, que vem a ſer o meſmo reſpectivamente que $\int dP d(s'dq' - q'ds')$, $\int dP d(r'dq' - q'dr')$, $\int dP d(s'dr' - r'ds')$, deve notar-ſe que nas duas differenciaçoens que primeiro he neceſſario fazer para achar $d(s'dq' - q'ds')$, $d(r'dq' - q'dr')$, $d(s'dr' - r'ds')$, os angulos x, y, z ſaõ variaveis, e as quantidades ψ, λ, μ conſtantes; mas na integraçaõ que ſe ſegue ſó as quantidades dP, ψ, λ, μ devem ſer conſideradas como variaveis, e as outras devem eſcrever-ſe antes do final de integraçaõ, porque os integrais experimem entaõ os movimentos das partes do corpo.

Eſtas formulas geraes ſervem para determinar os movimentos de qualquer corpo; ſollicitado por quaiſquer forças. Agora moſtraremos a applicaçaõ dellas ao noſſo Problema

blema das oscillaçoens de hum corpo fluctuante, supponddo que ellas saõ muito pequenas, para maior simplicidade dos resultados.

194 Seja *ABK* (Fig. 62) huma secçaõ vertical do corpo no primeiro instante do movimento, feita por hum plano que passe pelo centro de gravidade do mesmo corpo G, e que contenha o eixo vertical *GY*, e o horizontal *GV*; *HPK* (Fig. 63.) outra secçaõ vertical, perpendicular á primeira, que passe tambem por *G*, e contenha o eixo vertical *GY* e o horizontal *GT*; *MENI* (Fig. 64.) a secçaõ horizontal do corpo, feita á superficie da agua, na qual *MN* he a secçaõ commua dos planos *MENI*, *ABK*; e *EI* a dos planos *MENI*, *HPK*. Os eixos *GY*, *GV*, *GT* saõ aqui os mesmos que na figura 60, ou 61. Para maior simplicidade do calculo, façamos passar, como he sempre permittido, o plano *ABK* (Fig. 62.) pelo centro de gravidade *L* do plano de fluctuaçaõ *MENI* (Fig. 64.). Suppondo, que o centro de gravidade *F* (Fig. 65.) da parte mergulhada no primeiro instante está posto a certa distancia muito pequena da vertical *GY*, por elle e pela dita vertical se conduza o plano *CDK*, que cortará o plano *MENI* segundo *RS*; e do mesmo ponto *F* tirem-se as rectas *FQ*, *FF'* respectivamente perpendiculares a *GY* e *RS*; e *Ff* (Fig. 64.), perpendicular a *MN*. Aqui, e daqui por diante devem sempre combinar-se juntamente as quatro figuras 62, 63, 64, 65. Havendo-se concebido bem a sua posiçaõ respectiva, he necessario buscar em cada huma dellas as linhas, as superficies, e os solidos que havemos de designar.

195 Isto posto, he facil de ver que sendo o corpo sollicitado unicamente pela acçaõ do proprio pezo, e pela pressaõ vertical do fluido, teremos $F = 0$, $E = 0$, e $D =$ á differença entre a pressaõ vertical do fluido e o pezo do corpo; e por conseguinte, que o corpo naõ póde ter movimento progressivo horizontal, ou que $Q = 0$, e $R = 0$; mas que em virtude da força *D* póde o seu centro de gravidade subir, ou descer, em quanto elle róda a respeito dos tres eixos *GY*, *GV*, *GT*.

Imaginemos pois, que em virtude da rotaçaõ ao redor do eixo *GT* se tem o corpo inclinado da parte de *A*, e descrito o angulo z em hum tempo t, tomando o plano de fluctuaçaõ *MN* a posiçaõ *mn*; e que em virtude da

rotaçaõ

rotação ao redor do eixo GV, ſe tem inclinado da parte de P, e deſcrito o angulo y no meſmo tempo, tomando o plano de fluctuação EI a poſição ei. Pelos pontos q, q' onde mn, ie cortaõ a vertical GY, tirem-ſe dc, tr parallelas a MN, EI. He evidente, que no tempo propoſto ſahio da agua hum priſma, que tem $MENI$ por baſe e Oq ou Oq' por altura, e mais as duas unhas $nqc, eq'r$; e que entráraõ nella as duas unhas $mqd; tq'i$. Eſtas ſaõ as mudanças que ſuccedem á parte mergulhada, para as quais ſe vê que naõ contribue nada o movimento ao redor do eixo vertical GY.

Supponhamos, que as verticais que paſſaõ pelos centros de gravidade das quatro unhas repreſentadas pelos perfiis $nqc, mqd, eq'r, tq'i$, encontraõ o plano $MENI$ nos pontos g, z, l, s reſpectivamente; e conduzaõ-ſe as rectas gb, zk, lp, su perpendiculares a MN. Alem das denominações precedentes, ſeja o volume do corpo $= M$, o da parte mergulhada no primeiro inſtante $= N$, a area $MENI = aa$, a diſtancia OL do ſeu centro de gravidade ao ponto $O = b$; a unha nqc que ſe póde conceber produzida pela rotação da area EIN ao redor de EI $= c^3 z, Ob = e, gb = e'$; a unha mqd que ſe póde conceber produzida pela rotação da area EIM ao redor de $EI = f^3 z, Ok = g, zk = g'$; a unha $eq'r$ que ſe póde conſiderar produzida pela rotação da area MNE ao redor de $MN = i^3 y, Op = k, lp = k'$; a unha $iq'r$ que ſe póde conſiderar produzida pela rotação da area MNI ao redor de $MN = i^3 y, Ou = u, su = u'$; a altura GQ do centro de gravidade da parte mergulhada acima do centro de gravidade do corpo $= b, Of = \delta$, $F'f = \delta'$, o pezo eſpecifico do corpo $= p$, e o do fluido $= p'$.

Aſſim teremos primeiramente $D = p'(N - MENI.Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - pM = p'(N - MENI.Oq - nqc + mqd) - pM = p'N - p'a^2 s - p'c^3 z + p'f^3 z - pM$. E conſiderando, que em virtude da inclinação do corpo para A, o centro de gravidade F ſe chega para o plano HPK a quantidade bz, ou que Of ſe faz $= \delta - bz$; e que em virtude da inclinação para I, o meſmo ponto F ſe chega para o plano ABK a quantidade by, ou que $F'f$ ſe faz $= \delta' - by$; he facil de ver que depois do tempo t o momento da preſſaõ vertical

tical do fluido a reſpeito do eixo GT ſerá $D\Phi = p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - c^3 ez - f^3 gz - i^3 ky - i^3 ny]$, e a reſpeito do eixo GV ſerá $D\xi = -p'[N(\delta' - by) + c^3 e'z + f^3 g'z - i^3 k'y - i^3 n'y]$.

196 Falta achar os valores de $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr - r'ds')$ em funções dos angulos x, y, z. Para iſſo, como as oſcillações ſaõ muito pequenas, nos valores de q', r', s' acima achados faremos os coſenos iguais ao raio, tomaremos os angulos em lugar dos ſenos, e deſprezaremos os termos que tiverem mais de hum ſeno. Aſſim teremos

$$s'dq' - q'ds' = -\lambda\mu dx - (\mu^2 + \psi^2)dz + \psi\lambda dy$$
$$r'dq' - q'dr' = -(\psi^2 + \lambda^2)dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy$$
$$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2)dy - \psi\lambda dz;$$

e conſeguintemente

$$\int dPd(s'dq' - q'ds') = -pddx\int\lambda\mu dM - pddz\int(\mu^2 + \psi^2)dM + pddy\int\psi\lambda dM$$
$$\int dPd(r'dq' - q'dr') = -pddx\int(\psi^2 + \lambda^2)dM - pddz\int\lambda\mu dM - pddy\int\psi\mu dM$$
$$\int dPd(s'dr' - r'ds') = pddx\int\psi\mu dM + pddy\int(\lambda^2 + \mu^2)dM - pddz\int\psi\lambda dM;$$

quantidades, em que as partes comprehendidas debaixo dos ſinais de integraçaõ ſaõ dadas pela figura do corpo.

197 Para abbreviar pois façamos $\int\lambda\mu dM = A$, $\int(\mu^2 + \psi^2)dM = B$, $\int\psi\lambda dM = C$, $\int(\psi^2 + \lambda^2)dM = G$, $\int\psi\mu dM = H$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)dM = K$; e de tudo o que ha precedido reſultaráõ as quatro equações ſeguintes,

$$[p'N - p'a^2 S - (p'c^3 - p'f^3)z - pM]dt^2 = pMddS \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (A)$$
$$-p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - (c^3 e + f^3 g)z - (i^3 k + i^3 n)y]dt^2 = -pAddx - pBddz + pCddy \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad (B)$$
$$pGddx + pAddz + pHddy = 0 \quad \text{- - -} \quad (C)$$
$$p'[N(\delta' - by) + (c^3 e' + f^3 g')z - (i^3 k' + i^3 n')y]dt^2 = pHddx + pKddy - pCddz, \quad \text{-} \quad (D)$$

que repreſentaõ em geral todas as oſcillações, de que he ſuſceptivel hum corpo fluctuante na hypotheſe de que ellas ſejaõ muito pequenas.

198 Como as quatro variaveis S, x, y, z naõ paſſaõ do primeiro gráo, eſtas equações combinadas entre ſi ſe integraõ facilmente pelo methodo dado por *M.* d'Alembert nas Memorias de Berlim *A.* 1748, e 1750. Aqui

naõ

naõ faremos em geral este calculo, que naõ tem mais difficuldade que a extensaõ; mas limitarnos-hemos ao exame de alguns casos particulares.

199 Supponhamos, como succede nas oscillações dos navios, que o plano ABK corta o corpo fluctuante em duas partes exactamente iguais, e que os centros de gravidade das duas unhas $eq'r$, $iq't$ se achaõ, ao menos sensivelmente, no plano HPK. Assim teremos $e' = 0$, $g' = 0$, e na equaçaõ (B) poderemos desprezar os termos $i^3 ky$, $i^3 ny$, como incomparavelmente mais pequenos que os outros. Alem disso pela propriedade do centro de gravidade teremos $A = 0$, $C = 0$; e as nossas quatro equações se mudaráõ nas seguintes,

$$[p'N - p'a^2 S - (p'c^3 - p'f^3)z - pM]dt^2 = pMddS \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (E)$$

$$p'[N(\delta - bz) - a^2 bS - (c^3 e + f^3 g)z]dt^2 = pBddz \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (F)$$

$$Gddx + Hddy = 0 \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (G)$$

$$p'[N(\delta' - by) - 2i^3 k'y]dt^2 = pHddx + pKddy \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (H).$$

Nesta ultima equaçaõ póde desprezar-se o termo $pHddx$, porque tem por valor $-\frac{pH^2 ddy}{G}$, e H he huma quantidade cujo quadrado, ao menos, póde tratar-se como infinitamente pequeno da primeira ordem.

200 Para abbreviar o calculo, façamos $\frac{p'N - pM}{pM} = I$, $\frac{p'a^2}{pM} = L$, $\frac{p'c^3 - p'f^3}{pM} = P$, $\frac{p'N\delta}{pB} = I'$, $\frac{p'a^2 b}{pB} = L'$, $\frac{p'(Nb + c^3 e + f^3 g)}{pB} = P'$, $\frac{p'N\delta'}{pK} = Q$, $\frac{p'(Nb + 2i^3 k')}{pK} = R$; e as nossas equações se reduziráõ á forma seguinte,

$$ddS - Idt^2 + LSdt^2 + Pzdt^2 = 0$$

$$ddz - I'dt^2 + L'Sdt^2 + P'zdt^2 = 0$$

$$Gddx + Hddy = 0$$

$$ddy - Qdt^2 + Rydt^2 = 0.$$

201 As duas primeiras, combinadas entre si, integraõ-se

ſe pelo ingenhoſo methodo de M. d' Alembert com muita facilidade. Multiplique-ſe a primeira por hum coefficiente indeterminado β, e ſome-ſe com a ſegunda; o que dará $\beta ddS - \beta I dt^2 + \beta LS dt^2 + \beta Pz dt^2 + ddz - I' dt^2 + L'S dt^2 + P'z dt^2 = 0$. Depois ſupponha-ſe, que temos a equação $\beta LS + \beta Pz + L'S + P'z = \alpha(\beta S + z)$, ſendo α outro coefficiente indeterminado; e comparando entre ſi os termos da meſma eſpecie reſultaráõ eſtas duas equações $\beta L + L' = \alpha\beta$, e $\beta P + P' = \alpha$, das quais ſe tiraõ dous valores de β que deſignaremos por β, β', e outros dous de α, que repreſentaremos por α, α'. Fazendo pois $\beta S + z = s$, e $\beta' S + z = s'$, a equação $\beta ddS - \beta I dt^2$ &c dará as duas ſeguintes,

$$dds + \alpha s dt^2 - (\beta I + I') dt^2 = 0$$
$$dds' + \alpha' s' dt^2 - (\beta' I + I') dt^2 = 0.$$

Multiplicando a primeira por ds, a ſegunda por ds', e integrando duas vezes, facilmente ſe achará

$$s = \left(\frac{\beta I + I'}{\alpha}\right)(1 - \cos t \sqrt{\alpha})$$
$$s' = \left(\frac{\beta' I + I'}{\alpha'}\right)(1 - \cos t \sqrt{\alpha'});$$

e por conſeguinte

$$S = \frac{(\beta I + I')}{\alpha(\beta - \beta')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha}) - \frac{(\beta' I + I')}{\alpha'(\beta - \beta')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha'})$$
$$z = \frac{\beta(\beta' I + I')}{\alpha'(\beta - \beta')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha'}) - \frac{\beta'(\beta I + I')}{\alpha(\beta - \beta')}(1 - \cos t \sqrt{\alpha}).$$

Eſtes valores de S e z ſaõ completos, porque daõ $S = 0$, e $z = 0$, quando $t = 0$, como deve ſer.

Quanto ás duas ultimas equações $G ddx + H ddy = 0$, e $ddy - Q dt^2 + R y dt^2 = 0$, integraõ-ſe immediatamente, e daõ

$$y = \frac{Q}{R}(1 - \cos t \sqrt{R}$$

$x =$

$$x = -\frac{H.Q}{G.R}(1 - cos\, t\sqrt{R}).$$

202 Consta pois das expressões de S e de z, que se α e α' forem quantidades reais e positivas, o movimento S do centro de gravidade, e o de rotaçaõ z ao redor do eixo GT seraõ muito pequenos, como havemos supposto; e por conseguinte, que o corpo fará oscillações, pelas quais naõ será exposto a virar-se. Mas se α e α' fossem quantidades reais negativas, achar-se-hia que os valores de S e z dependiaõ de logarithmos, e por consequencia que cresceriaõ sempre á medida que crescesse t. Donde se segue, que nesse caso as oscillações naõ seriaõ infinitamente pequenas, como havemos supposto, e que o corpo naõ teria estabilidade, mas seria exposto a virar-se. Do mesmo modo se acha que os valores de S e z contém logarithmos, quando C e C', e conseguintemente tambem α e α' saõ quantidades imaginarias, ou quando C e C' saõ reais, mas iguais entre si. Estes dous ultimos casos saõ puramente geometricos, pois naõ tem lugar no nosso problema.

Pela mesma rasaõ consta, que os valores de y e x seraõ infinitamente pequenos, quando R for huma quantidade positiva; e que sendo R negativo, o corpo naõ terá estabilidade a respeito dos dous eixos GV, GY.

203 Bem se vê, que as condições de estabilidade, de que acabamos de fallar, dependem da posiçaõ do centro de gravidade do corpo inteiro a respeito do centro de gravidade da parte mergulhada, considerada como homogenea. Todas as vezes que o primeiro está mais abaixo que o segundo, o corpo fluctuante tem estabilidade em todos os sentidos; mas se o primeiro estiver mais alto que o segundo, póde faltar a estabilidade. As nossas formulas daõ a conhecer a maior distancia, que entaõ se póde dar entre os dous centros de gravidade; e este methodo de determinar os *metacentros* he geral, simples, e directo.

204 Supponhamos agora, que a vertical GY passa pelo centro de gravidade do plano de fluctuaçaõ, e que os dous planos ABK, HPK cortaõ o corpo, cada hum em duas partes iguais e semelhantes. Neste caso as unhas mqc, mqd saõ iguais, assim como as duas $sq'r$, $iq't$;

G e

e além disso teremos $A = 0, C = 0, H = 0$. Suppondo tambem, que o pezo do fluido deslocado no primeiro instante he igual ao pezo do corpo, ou que temos $p' N = p M$, o corpo naõ poderá subir, nem descer, e será conseguintemente $S = 0$. Igualmente será $x = 0$, prescindindo de todo o movimento de rotaçaõ horizontal primitivamente impresso. Deste modo as nossas quatro equações fundamentais (n. 200.) se reduziráõ ás duas seguintes

$$ddz - I' dt^2 + P' z dt^2 = 0$$
$$ddy - Q dt^2 + R y dt^2 = 0,$$

as quais daõ

$$z = \frac{I'}{P'}(1 - cos\, t \sqrt{P'})$$
$$y = \frac{Q}{R}(1 - cos\, t \sqrt{R}).$$

205 Terá pois entaõ o corpo simplesmente dous movimentos de rotaçaõ sobre os dous eixos horizontais GT, GV que passaõ pelo seu centro de gravidade, e saõ perpendiculares entre si. Estas oscillações ficaõ sendo sempre muito pequenas, e o corpo terá por conseguinte estabilidade, quando P' e R saõ quantidades positivas. Ellas saõ absolutamente da mesma especie das que faz hum pendulo, que vai e vem; e designando por Z, Y as suas amplitudes totais, teremos evidentemente $Z = \frac{2I'}{P'}$, e $Y = \frac{2Q}{R}$.

206 Os tempos empregados em correr os angulos Z, Y saõ muito faceis de achar. Para que z venha a ser Z, e y venha a ser Y, he necessario que tenhamos $1 - cos\, t \sqrt{P'} = 2$, $1 - cos\, t \sqrt{R} = 2$, ou $cos\, t \sqrt{P'} = -1$, $cos\, t \sqrt{R} = -1$; e por conseguinte, $t = \frac{180°}{\sqrt{P'}}$, $t = \frac{180°}{\sqrt{R}}$. Substituindo em lugar de P' e R os seus valores, acharemos que o tempo de cada oscillaçaõ Z he representado por $180° \sqrt{\left[\frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\, dM}{p'(Nb + 2c^i e)}\right]}$, e o de ca-

da oscillaçaõ Y por $180^\circ \sqrt{\left[\frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)dM}{p'(Nb+2i^3k')}\right]}$.

Como estes valores naõ contém as distancias iniciais δ, δ' do centro de gravidade da parte mergulhada aos planos HPK, ABK, está claro que as oscillações seraõ isochronas em cada especie, quaisquer que sejaõ as amplitudes totais, com tanto que sejaõ sempre muito pequenas.

207 Para determinarmos o comprimento dos pendulos synchronos ás oscillações deste corpo, notaremos, que se hum pendulo simples, que tem o comprimento l estiver no primeiro instante apartado da vertical a quantidade δ muito pequena, e no tempo t descrever o angulo u com o raio l; será a equaçaõ do seu movimento $ddu = \frac{(\delta-u)dt^2}{l}$, ou $u = \delta\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{l}}\right)$. Donde se tira o tempo de huma oscillaçaõ inteira $= 180^\circ \sqrt{l}$. Assim, sendo L o comprimento do pendulo synchrono ás oscillações Z, e L' ás oscillações Y, teremos

$$L = \frac{\int p(\psi^2+\mu^2)dM}{p'(Nb+2c^3e)},$$

$$L' = \frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)dM}{p'(Nb+2i^3k')}.$$

208 Exemplo. Seja o corpo fluctuante hum semi-spheroide elliptico homogeneo, produzido por meia revoluçaõ da ametade de huma ellipse AHB ao redor do seu eixo AB (Fig. 66.). O plano $AHBK$ que serve de base, e o plano de fluctuaçaõ $MENI$ saõ parallelos, e a sua distancia he a recta dada ZO. O ponto G he o centro de gravidade do solido, e os tres eixos GY, GV, GT saõ os mesmos que acima; ABK he a secçaõ longitudinal, e HPK a latitudinal. He necessario achar os valores de N, b, c^3e, i^3k', $\int(\psi^2+\mu^2)dM$, $\int(\lambda^2+\mu^2)dM$. Busquemo-los por ordem.

1°, Para evitar a multiplicidade, e confusaõ das linhas, consideremos $MENI$ como huma secçaõ indeterminada do meio-ellipsoide. Tendo conduzido ao eixo MN da curva $MENI$ qualquer ordenada CD, faça-se passar por ella o plano vertical $SCXC'L$ que corta o plano vertical

ABK por XR. Bem ſe vê, que CD ſerá tambem a ordenada de hum circulo deſcrito com o raio RX. Aſſim $CD^2 = XR^2 - DR^2$: mas pela propriedade da ellipſe $XR^2 = (BZ^2 - RZ^2)\frac{ZP^2}{BZ^2} = (BZ^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$, e $DR^2 = (BZ^2 - NO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$; logo $CD^2 = (NO^2 - DO^2)\frac{ZP^2}{BZ^2}$. Donde ſe vê que a curva $MENI$ he huma ellipſe ſemelhante á ellipſe $AHBP$.

Seja $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, a raſaõ da circumferencia ao diametro $= n$; e teremos $AHBP = nab$, $MENI = nab\frac{NO^2}{BZ^2} = \frac{na(bb - xx)}{b}$. Logo $dN = -\frac{nadx(bb - xx)}{b}$, e $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$. Completando eſte integral de maneira que deſvaneça quando $x = b$, tomemos o ſeu valor fazendo $x = ZO = f$, linha conhecida; e teremos $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right)$. Suppondo $f = 0$, N ſe tornará em M e conſeguintemente ſerá $M = \frac{2nab^2}{3}$.

2°, O momento elementar do ſolido $MKNIME$ a reſpeito do ponto Z he $-\frac{naxdx(bb - xx)}{b}$, cujo integral completo he $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$. Façamos primeiramente $x = 0$, e dividamos por M ou $\frac{2nab^2}{3}$, e teremos a diſtancia do centro de gravidade do ſolido $AKBPAH$ ao ponto $Z = \frac{3}{8}b$. Depois façamos $x = f$, e dividamos por N ou $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - bf^2 + \frac{f^3}{3}\right)$; e teremos

remos a diſtancia do centro de gravidade da parte mergulhada ao ponto $Z = \frac{3(b^4 - 2b^2 f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2 f + f^3)}$. Por conſeguinte ſerá $h = \frac{3}{8}b - \frac{3(b^4 - 2b^2 f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2 f + f^3)}$.

3°, Imaginemos que a unha formada pela rotação da area EIN ao redor de EI, he compoſta de huma infinidade de triangulos prs perpendiculares ao eixo EI. Suppondo $OI = l$, $ON = m$, $Op = u$, eſtá claro que $pr = \frac{m}{l}\sqrt{(ll - uu)}$, e que o momento elementar da ametade da unha he $= \frac{m^2}{l^2}(ll - uu) \cdot \frac{m\sqrt{(ll-uu)}}{3l} \cdot du \cdot z$ $= \frac{m^3 z}{3l^3} du\,(ll - uu)^{\frac{3}{2}}$, cujo integral ſe achará $\frac{m^3 z}{3l^3}\left(\frac{u(ll-uu)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4}l^2 \int du\sqrt{(ll-uu)}\right)$.
Fazendo $u = l$, reflectindo que então $\int du\sqrt{(ll-uu)}$ repreſenta a area de hum quarto de circulo deſcrito com o raio l, e dobrando o integral, acharemos que a quantidade repreſentada por $c^3 e$ he $= \frac{n m^3 l}{8}$. Ponha-ſe em lugar de m o ſeu valor $\frac{a}{b}\sqrt{(bb-ff)}$, e em lugar de l o ſeu valor $\sqrt{(bb-ff)}$, e teremos $c^3 e = \frac{n a^3 (bb-ff)^2}{8b^3}$.

4°, Do meſmo modo ſe achará, que a quantidade que havemos repreſentado por $i^3 k^1$ tem por expreſſaõ $\frac{n b^3 (aa-ff)^2}{8a^3}$.

5°, Para determinar $\int(\psi^2 + \mu^2)\,dM$, ou a ſoma dos productos das particulas do meio ellipſoide pelos quadrados das ſuas diſtancias ao eixo latitudinal GT, conſideremos huma ſecçaõ indeterminada $MENI$, e ſobre a orde-

ordenada CD ao eixo MN tomemos dous pontos quaisquer infinitamente vezinhos f, u. Havendo supposto $ZO = x$, OM ou $ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, e lembrando-nos que $ZG = \frac{3}{8}b$, veremos que o producto do elemento fu pelo quadrado da sua distancia ao eixo GT he representado por $ds\left(qq + (\frac{3}{8}b - x)^2\right)$; quantidade, na qual sómente s he variavel. Integrando pois, e fazendo $s = DC = \frac{b}{a}\sqrt{(m^2 - q^2)}$, teremos $\left(qq + (\frac{3}{8}b - x)^2\right)$. $\frac{b}{a}\sqrt{(mm - qq)}$ pór soma dos productos de todos os pontos de DC pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Multiplicando esta soma por dq, e integrando na supposiçaõ de sómente q ser variavel, acharemos tambem que $\frac{b}{a}\left(\frac{m^2}{4} + (\frac{3}{8}b - x)^2\right)\int dq\sqrt{(mm - qq)} - \frac{q(mm - qq)^{\frac{3}{2}}}{4}$ he a soma de todos os productos dos pontos da area elliptica $CDOE$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Fazendo $q = m = \frac{a}{b}\sqrt{(bb - xx)}$; considerando que entaõ $\int dq\sqrt{(mm - qq)} = \frac{n.m^2}{4} = \frac{na(bb - xx)}{4b}$; e quadruplicando o integral; teremos $\frac{nb}{a}\left(\frac{a^4(bb - xx)^2}{4b^4} + \frac{a^2(bb - xx)}{b^2}(\frac{3}{8}b - x)^2\right)$ por soma dos productos de todos os pontos da ellipse inteira $MENI$ pelos quadrados das suas distancias ao eixo GT. Em fim multiplicando esta soma por dx; integrando na intelligencia de sómente ser x variavel; e fazendo depois $x = b$; teremos $\int(\psi^2 + \mu^2)dM = \frac{n(64a^3b^2 + 19ab^4)}{480}$.

6°, Pelo mesmo methodo se achará a soma dos productos

ctos das particulas do meio-ellipſoide pelos quadrados das ſuas diſtancias ao eixo longitudinal *GV*, ou $\int (\lambda^2 + \mu^2)\, dM$

$$= \frac{83\, n a b^4}{480}.$$

209 De todos eſtes calculos ſe ſegue, que ſendo Z, Y as amplitudes das oſcillaçoens relativas aos eixos *GT*, *GV*, e L, L' os comprimentos dos pendulos ſynchronos; teremos

$$Z = \frac{16 b^2 (2 b^3 - 3 b^2 f + f^3)\, \delta}{3 (b^3 (2b^3 - 3b^2 f + f^3) + 2 (aa - bb)(bb - ff)^2)},$$

$$Y = \frac{16 a^4 (2 b^3 - 3 b^2 f + f^3)\, \delta'}{3 (a^4 b (2b^3 - 3b^2 f + f^3) - 2a^4 (bb - ff)^2 + 2b^4 (aa - ff)^2)},$$

$$L = \frac{64 p (a^2 b^5 + 19 b^7)}{60 p' (b^3 (2b^3 - 3b^2 f + f^3) + 2 (aa - bb)(bb - ff)^2)},$$

$$L' = \frac{83 p a^4 b^5}{60 p' (a^4 b (2b^3 - 3b^2 f + f^3) - 2a^4 (bb - ff)^2 + 2b^4 (aa - ff)^2)}.$$

Deixamos ao leitor o cuidado de evolver eſtas formulas por meudo, e de concluir as dimenſoens do ellipſoide mais proprias para que as oſcillaçoens ſejaõ ſuaves, pela combinaçaõ mais ventajoſa das amplitudes com as duraçoens; materia curioſa por ſi meſma, e que póde ter applicaçoens muito uteis na carregaçaõ dos navios. Eſtas diſcuſſoens naõ cabem nos limites, que nos havemos propoſto neſte Tratado.

SE-

SEGUNDA PARTE
OU
ELEMENTOS
DE
HYDRAULICA.

210 ORdinariamente se entende por *Hydraulica* a Sciencia do movimento das aguas; mas aqui tomamos este nome em sentido mais amplo, entendendo por elle a Sciencia geral que trata do movimento dos fluidos, tanto incompressiveis como elasticos. Como porém o movimento das aguas he neste genero o objecto mais interessante ás necessidades dos homens, delle trataremos com mais particularidade. Mas tudo o que dissermos se applicará igualmente aos outros fluidos incompressiveis; e no fim desta parte fallaremos brevemente do movimento dos fluidos elasticos.

211 Se nós soubessemos a massa, a figura, e o numero das particulas de hum fluido em movimento, esta materia seria reduzida a hum problema de Dynamica, pois se trataria de achar o movimento de hum systema de pequenos corpos livres, que actuaõ huns contra os outros, e que podem além disso estar sujeitos á acçaõ de algumas forças exteriores, como por exemplo á da gravidade. Mas estamos muito longe de ter os dados necessarios para resolver este problema; e posto que os tivessemos, acharse-hia taõ complicado, que por meio da analyse actual seria absolutamente intratavel.

212 Vista a impossibilidade de estabelecer huma theorica directa do movimento dos fluidos, era necessario buscar outro meio de resolver a questaõ. O mais simples, e o mais rigoroso consistiria em tirar as leis do movimen-

to

to dos fluidos, assim como as do equilibrio, de hum principio primordial, fundado sobre a natureza dos mesmos fluidos, ou demonstrado pela experiencia. Temos visto, que a *igualdade de pressaõ* he o principio fundamental da Hydrostatica; e esse mesmo podia servir de base á Hydraulica. Porque o movimento das particulas de hum fluido póde considerar-se a cada instante, como composto do movimento que ellas tinhaõ no instante precedente, e de outro que tem sido destruido, e em virtude do qual ellas ficariaõ em equilibrio. Donde se vê, que conhecendo este estado de equilibrio pelo principio da igualdade de pressaõ, tambem se conheceria o estado de movimento, porque o movimento ao primeiro instante suppoem-se dado. Grandes Geometras tem por esta idêa reduzido o movimento dos fluidos a formulas gerais; mas estas saõ taõ compostas e complicadas pela natureza da cousa, que dellas se naõ póde tirar fructo algum para as necessidades da pratica.

213 Sem embargo, para darmos aqui huma idêa geral da applicaçaõ deste principio, he necessario trazer á lembrança, que se em huma massa fluida sollicitada por quaisquer forças, e posta em equilibrio, imaginarmos hum canal fechado de qualquer figura, o fluido nelle incluido deve estar em equilibrio, independentemente do resto da massa; porque supponde que todo este resto se torna solido, sem mudar de lugar, nem de vólume, he manifesto que o fluido do canal fica no mesmo estado de compressaõ que dantes, e conseguintemente no mesmo estado de equilibrio.

214 Em consequencia deste principio, consideremos em hum fluido em equilibrio (Fig. 67.) quatro pontos quaisquer M, N, K, H situados em hum mesmo plano, formando entre si hum canal rectangular $MNKH$, que estará em equilibrio. Tomando qualquer ponto fixo B, tiremos as coordenadas ao ponto M, $EP = x$, $PM = y$, huma parallela a MH, e a outra a MN; e supponhamos que todas as forças das particulas obraõ no plano EPM, e saõ conseguintemente reductiveis a duas, parallelas a EP, PM. Sejaõ P, P' as forças que sollicitaõ os pontos M, N parallelamente a EP; e Q, Q' as que sollicitaõ os pontos M, H parallelamente a PM; todas funçoens de x, y e constantes. Façamos tambem $MH = \delta x$, $MN = \delta y$; advertindo, que estas differenciais δx, δy saõ relati-

relativas á mudança que ſuccede quando ſe paſſa da conſideraçaõ do ponto M á de outro ponto H, ou N infinitamente vizinho, ficando as differenciais dx, dy para indicar a mudança que ſuccede quando huma meſma particula paſſa do lugar que occupa para o lugar contiguo. Humas e outras differenciais ſe achaõ do meſmo modo; e na differenciaçaõ de huma funçaõ relativa ás meſmas coordenadas x e y, δx e dx tem ſempre o meſmo coefficiente, aſſim como tambem δy e dy.

Iſto poſto, eſtá claro que em virtude da força Q a preſſaõ da columna MN ſobre o ponto N he $Q\delta y$, e que a preſſaõ da columna NK ſobre o ponto K em virtude da força P' he $P'\delta x$. A primeira preſſaõ ſe tranſmete, como a ſegunda, ao ponto K; e ajuntando-as ambas, ſerá a preſſaõ total que padece o ponto K da parte do fluido $MNK = Q\delta y + P'\delta x$. Do meſmo modo acharemos, que a preſſaõ total do meſmo ponto K da parte do fluido MHK he $P\delta x + Q'\delta y$. Logo, para haver equilibrio, ſerá $Q\delta y + P'\delta x = P\delta x + Q'\delta y$, e conſeguintemente $(P' - P)\delta x = (Q' - Q)\delta y$. Mas $P' - P$ he a differencial de P naõ fazendo variar ſenaõ y, e $Q' - Q$ a differencial de Q naõ fazendo variar ſenaõ x. Logo, ſuppondo $P' - P = A\delta y$, $Q' - Q = A'\delta x$, teremos $A\delta y . \delta x = A'\delta x . \delta y$, ou $A = A'$. Donde ſe ſegue, que *no eſtado de equilibrio a differencial de* P *tomada na ſuppoſiçaõ de ſer ſómente variavel* y, *e dividida por* δy, *deve dar o meſmo que a differencial de* Q *tomada na ſuppoſiçaõ de ſómente ſer* x *variavel, e dividida por* δx.

Ordinariamente ſe enuncia eſta propoſiçaõ de hum modo commodo, e abbreviado, a ſaber $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, ou (que vem a ſer o meſmo) $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$.

215 Quando as forças naõ eſtaõ no meſmo plano, ſempre podem reduzir-ſe a tres, duas das quais eſtejaõ no plano EPM, e a terceira ſeja perpendicular ao meſmo plano. Supponhamos pois, que o ponto M experimenta a acçaõ de tres forças P, Q, R parallelas ás tres coordenadas rectangulares x, y, z, das quais ellas ſaõ funçoens quaiſquer; e imaginemos oito pontos fluidos M, N, K, H, Q, O, S, R formando hum parallelepipedo rectangulo, que ſe póde

póde considerar como composto de seis canais rectangulares, e cada hum por si em equilibrio. Assim vemos, que o equilibrio no canal $MNKH$ dá $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; no canal $MOQH$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; e no canal $MNSO$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Os outros tres canais dariaõ as mesmas equaçoens; e deste modo temos as condiçoens gerais do equilibrio de hum fluido sujeito á acçaõ de quaisquer forças.

216 Supponhamos agora, que o fluido $ABCD$ (Fig. 68.) sujeito á acçaõ da gravidade se move dentro do vaso que o contém, segundo qualquer lei, de maneira porém que cada ponto M naõ tenha mais que dous movimentos hum vertical ou parallelo a EP, e outro horizontal parallelo a PM. Se tivesse dous movimentos horizontais perpendiculares entre si, que he o caso mais composto do Problema; por meio do que acabamos de mostrar (n. 215.) se faria a applicaçaõ do que himos a mostrar na supposiçaõ de ser hum só, para maior simplicidade. Sejaõ quatro pontos fluidos M, N, K, H dispostos em fórma rectangular, e supponhamos que passado hum instante chegaõ respectivamente a m, n, k, h. Conduzaõ-se mp, nf, hg, kq perpendiculares ao eixo EP; e supponhamos $EP = x$, $PM = y$, $PO = z$, o tempo $= t$, a velocidade do ponto M parallela a $EP = u$, a parallela a $PM = v$, e a gravidade $= g$. Assim teremos $u = T.M$, $v = T.N$, sendo T huma funçaõ do tempo corrido desde o principio do movimento, e M, N funçoens sómente de x e de y. Porque como o fluido contiguo á parede BOD corre ao longo della, temos $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$ quando $y = z$; e $\frac{dx}{dz}$ he sempre huma funçaõ de x e z sómente, qualquer que seja o tempo t. Assim desapparecendo neste caso a funçaõ do tempo pela divisaõ de u por v, deveremos ter em geral $u = MT$; $v = NT$, ao menos quando o fluido corre por dentro de hum vaso, como suppomos aqui.

A! 217 Seja pois $du = d(TM) = TA\,dx + TB\,dy + MT'dt$, e $dv = d(TN) = TA'dx + TB'dy + NT'dt$, sendo A, B, A', B' funções de x e y, T' huma funçaõ do tempo, dx e dy os espaços corridos vertical

tical e horizontalmente pelo ponto M no instante dt. Metendo por dx o seu valor udt ou $TMdt$, e por dy o seu vdt ou $VNdt$, teremos a força vertical $\frac{du}{dt} = T^2 AM + T^2 BN + MT'$, e a horizontal $\frac{dv}{dt} = T^2 A'M + T^2 B'N + NT'$. Porem, se as particulas naõ actuassem humas contra as outras, a velocidade vertical u no fim do instante dt seria $u + gdt$. Logo considerando, pelo principio de M. d'Alembert, a velocidade $u + gdt$ como composta das duas $u + du$ e $gdt - du$, e suppondo que a primeira destas he a que subsiste, deve a segunda $gdt - du$ ser tal que naõ altere a primeira, e que seja destruida. Do mesmo modo se verá, a respeito da velocidade horizontal v, que o ponto M em virtude da velocidade $-dv$ deveria ficar em equilibrio. Por conseguinte, se o ponto M fosse a cada instante sollicitado pela acçaõ das duas forças $g - \frac{du}{dt}$ e $-\frac{dv}{dt}$ deveria ficar em equilibrio; e assim teremos (n.214.) a equaçaõ fundamental

$$\frac{d[g-(T^2 AM + T^2 BN + MT')]}{dy} = \frac{d(-T^2 A'M - T^2 B'N - NT')}{dx}.$$

218 Huma condiçaõ essencial, a que esta equaçaõ deve satisfazer, he que o fluido $MNKH$ passando para $mnkh$ naõ mude de volume, porque o suppomos incompressivel. Ora o ponto M no instante dt corre parallelamente a EP e PM os espaços udt e vdt; o ponto N, mudando-se a respeito delle as velocidades u e v em $u + TB\delta y$ e $v + TB'\delta y$, corre parallelamente a EP e PM os espaços $(u + TB\delta y)dt$, e $(v + TB'\delta y)dt$; o ponto H, pela mesma rasaõ, os espaços $(u + TA\delta x)dt$, e $(v + TA'\delta x)dt$; e em fim o ponto K os espaços $(u + TA\delta x + TB\delta y)dt$, e $(v + TA'\delta x + TB'\delta y)dt$. Logo teremos $Ep = x + udt$, $pm = y + vdt$, $Ef = x + (u + TB\delta y)dt$, $fn = y + \delta y + (v + TB'\delta y)dt$, $Eg = x + \delta x + (u + TA\delta x)dt$, $gh = y + (v + TA'\delta x)dt$, $Eq = x + \delta x + (u + TA\delta x + TB\delta y)dt$,

qk

$qk = y + \delta y + (v + TA'\delta x) + TB'\delta y)dt$; e consequintemente

$$Ef - Ep = TB\,\delta y\,dt$$
$$fn - pm = \delta y + TB'\,\delta y\,dt$$
$$Eq - Eg = TB\,\delta y\,dt$$
$$qk - gb = \delta y + TB'\,\delta y\,dt$$
$$Eg - Ep = \delta x + TA\,\delta x\,dt.$$

Donde se vê, que mn póde tomar-se como parallela a MN, e que $mnkb$ póde considerar-se como hum rectangulo, cuja area he $= (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\delta x\,dt)$. Logo teremos $\delta x\,\delta y = (\delta y + TB'\delta y\,dt)(\delta x + TA\,\delta x\,dt)$; e por conseguinte $TA\,\delta y\,\delta x\,dt + TB'\,\delta y\,\delta x\,dt = 0$, ou $A = -B'$, ou (que vem a ser o mesmo) $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$; primeira equaçaõ de condiçaõ entre M e N, pela qual se vê que $N\,dx - M\,dy$ deve sempre ser huma differencial completa.

219 Alem disto, como a equaçaõ fundamental (n.217.) deve ser identica (n.214.), está claro que a parte $\frac{d(MT')}{dy}$ do primeiro membro deve ser igual á parte $\frac{d(NT')}{dx}$ do segundo; e porque T' he constante nestas expressões, teremos $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$; segunda equaçaõ de condiçaõ, pela qual se vê que $M\,dx + N\,dy$ deve ser tambem huma differencial completa.

220 As duas equações $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dx}$, e $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ satisfazem inteiramente á equaçaõ fundamental. Porque tendo já $\frac{d(MT')}{dy} = \frac{d(NT')}{dx}$, do resto da equaçaõ (sendo aqui T constante) feita a differenciaçaõ resultará

$$A\frac{dM}{dy} + M\frac{dA}{dy} + B\frac{dN}{dy} + N\frac{dB}{dy} = A'\frac{dM}{dx} + M\frac{dA'}{dx} + B'\frac{dN}{dx} + N\frac{dB'}{dx}.$$

E porque $A = \frac{dM}{dx}$, $B = \frac{dM}{dy}$, $A' =$

dN

$\frac{dN}{dx}$, $B' = \frac{dN}{dy}$, teremos $A \frac{dM}{dy} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{dM}{dy}$, $B \frac{dN}{dy} = \frac{dM}{dy} \cdot$
$\frac{dN}{dy} = -\frac{dM}{dy} \cdot \frac{dM}{dx}$, $A' \frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot \frac{dM}{dx}$, $B' \frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dy} \cdot$
$\frac{dN}{dx} = -\frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dx}$, $M \frac{dA}{dy} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $M \frac{dA'}{dx} =$
$M \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx} = M \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}$, expreſſaõ que pela natureza do calculo differencial he o meſmo que $M \frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}$, $N \frac{dB}{dy}$
$= N \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$, $N \frac{dB'}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx} = N \frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy} =$
$N \frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}$. E ſubſtituindo todos eſtes valores na equaçaõ precedente, acharemos que todos os ſeus termos ſe deſtroem, e que he conſeguintemente identica.

221 Ha hum caſo, em que a equaçaõ $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ naõ tem lugar neceſſariamente; e he, quando for $\frac{T'}{T^2} = b$, ſendo b huma conſtante, ou $T = \frac{1}{a - bt}$, ſendo a outra conſtante. Entaõ riſcando na equaçaõ fundamental (n.217.) os termos que ſe deſtroem em virtude da condiçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$, que ſempre tem lugar, ao reſto da equaçaõ ſe ſa-

tisfaria

tisfaria sendo $M\frac{dA}{dy} + N\frac{dB}{dy} + b\frac{dM}{dy} = M\frac{dA'}{dx} + N\frac{dB'}{dx} + b\frac{dN}{dx}$.

Esta condiçaõ póde exprimir-se de outro modo mais commodo. Porque dando a equaçaõ fundamental nesta supposiçaõ $\frac{d(AM + BN + bM)}{dy} = \frac{d(A'M + B'N + bN)}{dx}$, está claro que $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dM}{dy} + bM\right) + dy\left(M\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} + bN\right)$ será huma differencial completa. Tirando della a quantidade $dx\left(M\frac{dM}{dx} + N\frac{dN}{dx}\right) + dy\left(M\frac{dM}{dy} + N\frac{dN}{dy}\right)$, que tambem he differencial completa, o resto $(N\,dx - M\,dy)\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + b(M\,dx + N\,dy)$ será tambem huma differencial completa, assim como a differencial $N\,dx - M\,dy$, que sempre he completa em virtude da equaçaõ $\frac{dM}{dx} = -\frac{dN}{dy}$.

222 As funções M, N, T devem ser naõ somente compativeis com a equaçaõ que exprime a figura das paredes do vaso, e representar o estado primitivo do fluido; mas tambem he necessario que sejaõ tais, que as superficies superior e inferior do fluido cortem perpendicularmente as direcções das forças em cada hum dos instantes do movimento, e que as forças em fim obrem de baixo para cima na superficie inferior, e de cima para baixo na superior. Quando todas estas condições naõ tem lugar juntamente, o problema naõ he soluvel rigorosamente. Sobre o que póde ver-se M. d' Alembert, a quem se deve esta Theorica, no seu *Ensayo sobre a resistencia dos fluidos*, e nos Volumes I e V dos seus *Opusculos Mathematicos*. Igualmente se pódem consultar as Memorias de M. Euler sobre esta materia entre as da Academia de Berlin A. 1755.

Por

Por aqui se póde fazer huma idea geral do methodo rigoroso, que o principio da *igualdade de pressaõ* nos offerece para determinar o movimento dos fluidos. Mas, como temos dito, este methodo requer a coexistencia de muitas condições, e essas podem ser incompativeis entre si, ao menos em todo o rigor. Donde resulta, que saõ muito poucos os casos, em que o problema se póde resolver assim; e nesses mesmos, saõ os calculos quasi impraticaveis, por muito prolixos e complicados. Por esta rasaõ tomaremos esta materia em outro ponto de vista, donde venhaõ resultados mais faceis, que sendo confrontados com os da experiencia possaõ ser uteis na pratica.

CAPITULO I.

Do movimento das aguas, que sahem por quaesquer orificios de vasos constantemente cheios.

223 COnsta pela experiencia 1°, que sahindo a agua de qualquer vaso *A C D B* (Fig. 69. 70.) por hum orificio *P Q*, todas as particulas comprimindo-se humas ás outras tem huma tendencia para o orificio; 2°, que descem com velocidades sensivelmente verticais e iguais até huma certa distancia do plano horizontal que passa pela borda superior do orificio, distancia que mal se póde determinar, mas que na maior parte das experiencias se acha ser de tres até quatro pollegadas; 4°, que passado este termo todas as particulas que naõ correspondem verticalmente ao orificio, caminhaõ para elle de todas as partes por direcções mais ou menos obliquas; 4o. que procurando cada huma das particulas conservar a sua velocidade pela direcçaõ obliqua com que entra no orificio, a veia da agua se contrahe até huma certa distancia *P p*, formando huma especie de pyramide truncada, que tem a base menor *p q* no lugar onde a veia acaba de se contrahir. He essencialmente necessario na pratica attender a esta contracçaõ, como adiante mostraremos.

224 Sejaõ *A B*, *T V*, *R L* &c as secções planas, ou curvas, perpendiculares ás direcções das particulas, de maneira que as mesmas particulas individuais que se achaõ

em $A B$ desçaõ consecutivamente para $T V$, $R L$ &c; he evidente, que conservando-se o vaso constantemente cheio por meio de nova agua que nelle entra a substituir a que sahe pelo orificio, e havendo o fluxo tomado huma velocidade permanente, as secções $A B$, $T V$ &c devem ser sempre as mesmas, porque as particulas nos mesmos lugares necessariamente haõ de ter as mesmas velocidades tanto em direcçaõ, como em quantidade. O modo de conservar os vasos constantemente cheios he indifferente, com tanto que a agua que entra naõ communique abalo nenhum sensivel á que está no interior delles.

225 Isto posto, considere-se o fluido dividido em huma infinidade de camadas iguais $A B b a$, $T V u t$ &c, comprehendidas entre secções infinitamente vezinhas, e perpendiculares ás direcções das particulas; e seja $p q g f$ o pequeno prisma de licor, que sahe pelo orificio no instante em que a superficie $A B$ desce até $a b$, e $T V$ até $t u$ &c. Está claro, que este prisma deve ser igual a qualquer das camadas; e assim, sendo B a area da base de huma das camadas $T V$, e x a altura de hum prisma que tendo a base B he igual á dita camada $T V u t$, C a area $p q$, e y a altura do prisma $p q g f$, teremos $Bx = Cy$, e conseguintemente $x : y :: C : B$. E porque a superficie $T V$ se abaixa até $t u$ em quanto $p q$ se abaixa até $f g$, he evidente que x, y representaõ as velocidades medias das duas camadas $T V u t$, $p q g f$. Logo *a velocidade de qualquer secçaõ do fluido tomada no interior do vaso he para a velocidade do licor ao sahir do orificio como a area do orificio para a area da secçaõ.*

226 Daqui se segue, que sendo o orificio infinitamente pequeno em comparaçaõ da amplitude do vaso, a velocidade do licor na sahida do orificio será infinita em comparaçaõ da velocidade das secções interiores; e porque na natureza naõ existe velocidade infinita, será a velocidade no orificio finita, e no interior infinitamente pequena em comparaçaõ della.

227 Se compararmos entre si as quantidades dos licores, da mesma ou differente especie, que sahem com velocidades uniformes pelos orificios de dous quaisquer vasos (Fig. 71. 72.), he manifesto que seráõ entre si na rasaõ composta dos tempos, das areas dos orificios, e das velocidades; e se os tempos forem iguais, seraõ na rasaõ com-

composta das velocidades, e das areas dos orificios.

228 Para determinarmos agora a velocidade, com que sahe qualquer licor de hum vaso *ACDB* por hum orificio infinitamente pequeno *pq* (Fig. 71.), reflectiremos que sendo infinitamente pequena a velocidade das particulas no interior do vaso (n. 226.), póde suppor-se que todas as camadas superiores ao orificio perdem a velocidade, que teriaõ naturalmente em virtude da gravidade; e conseguintemente, que o pequeno prisma de licor *pqgf*, que sahe a cada instante, he impellido pelo fluido superior da mesma maneira, que o seria huma tampa applicada ao orificio para impedir a sahida. Assim, sendo p' a densidade ou pezo especifico do fluido, a força motriz que expelle o prisma *pqgf* será representada por $p'.bq.pq$ (n. 39.).

Supponhamos que no instante em que a pressaõ $p'.bq.pq$ faz sahir o prisma *pqgf*, a gravidade absoluta de hum prisma *pqxy* (a qual se póde representar por $p'.pq.qx$) por si só o faria correr a pequena altura *qx*, começando desde o estado de quietaçaõ. Está claro, que sendo as forças motrizes $p'.bq.pq$, $p'.qx.pq$ proporcionais ás quantidades de movimento que produzem, se chamarmos V e u as velocidades que ellas imprimem nas massas *pqgf*, *pqgx*, teremos $p'.bq.pq : p'.qx.pq :: pqgf.V : pqxy.u$, ou $p'.bq.pq : p'.qx.pq :: pq.V.V : pq.u.u$ (n. 227.), e conseguintemente $bq : qx :: V^2 : u^2$. Mas *qx* he o espaço, pelo qual descendo hum grave adquirio a velocidade u, e pela theorica do movimento dos graves consta que os espaços saõ na rasaõ duplicada das velocidades adquiridas; logo *bq* he a altura donde deveria cahir hum grave para adquirir a velocidade V. Logo *a velocidade de hum fluido ao sahir de qualquer orificio infinitamente pequeno he igual á que teria adquirido hum grave cahindo da altura do fluido bq acima do orificio pq*; ou mais brevemente, *a velocidade do fluido he devida á sua altura.*

229 O raciocinio precedente suppoem necessariamente, que o orificio he infinitamente pequeno, para que o licor possa ser expellido pelo pezo da columna superior. Sem embargo, a maior parte dos autores elementares, que nisto tem quasi todos copiado a M. Varignon, affirmaõ que o licor ao sahir de hum orificio horizontal he

expellido pelo pezo da columna ſuperior, ſem limitar a grandeza do orificio. Mas para ver, que a propoſiçaõ naõ he verdadeira em geral, baſta reflectir que ſe imaginarmos hum cylindro vertical cheio de agua, e de repente ſe tirar ou aniquilar o fundo, a camada inferior do fluido naõ ſentirá preſſaõ alguma das ſuperiores, mas todas deſceráõ com a meſma velocidade, conforme a aceleraçaõ dos graves, como ſe tudo foſſe hum corpo ſolido. A camada do fundo naõ he carregada do pezo da columna ſuperior, ſenaõ quando as camadas ſuperiores perdem as ſuas velocidades naturais da gravidade, e conſeguintemente quando o orificio he infinitamente pequeno.

Ainda que em rigor a propoſiçaõ he ſomente verdadeira a reſpeito dos orificios infinitamente pequenos, na pratica com tudo, quando os orificios ainda que finitos ſaõ pequenos em comparaçaõ das amplitudes dos vaſos, de maneira que naõ excedaõ por exemplo a raſaõ de 1 para 20, obſerva-ſe que as velocidades ſaõ ſenſivelmente as meſmas que nos orificios infinitamente pequenos. Neſte caſo a preſſaõ da columna ſuperior he menor, mas iſſo he ſenſivelmente compenſado com o movimento que trazem as particulas, que immediatamente impellem o pequeno priſma que actualmente ſahe pelo orificio. Somente ſe obſerva, que a velocidade naõ adquire a ſua plenitude uniforme e permanente, ſenaõ paſſados alguns ſegundos de tempo; e quanto o orificio he mais conſideravel, tanto ſe manifeſta mais eſta deſigualdade.

230 He manifeſto, que a propoſiçaõ precedente ſe extende aos orificios laterais ſendo infinitamente pequenos, de maneira que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido; porque a preſſaõ he igual para todas as partes, quando as alturas do fluido ſaõ as meſmas.

231 E porque a velocidade he igual á que teria adquirido o fluido cahindo da altura bq, pela theorica dos graves concluiremos que o licor ao ſahir do orificio tem huma velocidade capaz de o fazer ſubir á meſma altura bq; e que com eſſa velocidade uniforme correria hum eſpaço igual a $2bq$ no meſmo tempo que gaſtaria hum grave em cahir da altura bq.

232 Sejaõ bq, lk as alturas dos licores *ACDB*, *OGHP* (Fig. 71. 72.), acima dos pequenos orificios pq, ik; e

V, v

V, v as velocidades reſpectivas com que ſahem por elles. Como cada huma deſtas velocidades, ſeja qual for a natureza do fluido, he repreſentada pela raiz quadrada da altura da columna que lhe correſponde, teremos ſempre em geral $V : v :: \sqrt{bq} : \sqrt{lk}$, iſto he, *ſeraõ as velocidades na raſaõ ſubduplicada das alturas dos fluidos, quer ſejaõ da meſma eſpecie, quer naõ.*

Daqui ſe vê, quanto ſe engana o autor da Architectura Hydraulica (tom. 1. p. 187.), quando diz que as velocidades de dous licores differentes, de agua e mercurio por exemplo, ſaõ entre ſi como as raizes quadradas dos productos das alturas multiplicadas pelas gravidades eſpecificas. Devia reflectir no meſmo exemplo que dá (n. 490.), que ſe a columna que expelle o mercurio pelo orificio de hum vaſo he quatorze vezes mais pezada do que a columna que expelle a agua pelo orificio do outro, tambem a maſſa expellida no primeiro caſo he quatorze vezes mais pezada do que no ſegundo; e aſſim acharia que a velocidade deve ſer a meſma em ambos os caſos. Em geral he evidente, que todas as vezes que as forças motrizes ſaõ proporcionais ás maſſas que ellas poem em movimento, as velocidades ſaõ iguais.

233 Com os principios, que havemos expoſto, facilmente ſe determinará a relaçaõ entre a area do orificio, a altura do fluido acima delle, o tempo da fluxaõ, e a quantidade de licor que nelle deve ſahir, ou o orificio ſeja horizontal, ou lateral, com tanto que neſte ſegundo caſo ſeja taõ pequeno, ou de tal ſorte poſto, que todos os ſeus pontos ſe poſſaõ julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido.

Seja K a area do orificio pq (Fig. 71.), b a altura conſtante bq da agua no vaſo, Q a quantidade della que ſahe no tempo t, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo. Pela theorica do movimento dos graves acharemos, que o tempo que deveria gaſtar hum grave em cahir da altura b he $= \sqrt{\frac{b}{a}}$. Porém neſte tempo deve ſahir huma columna de fluido, que tem por baſe K, e por altura $2b$ (n. 231.), porque a altura b he conſtante, e conſeguintemente uniforme a velocidade ao ſahir do orificio. Logo no tempo repreſentado do por $\sqrt{\frac{b}{a}}$ fahirá a quantidade de fluido reprefentada por $2bK$; e confeguintemente teremos $\sqrt{\frac{b}{a}} : t :: 2bK : Q$, e $Q = 2tK\sqrt{ab}$.

Daqui fe moftra, que *as quantidades de fluido, que no mefmo tempo fahem por orificios differentes, faõ entre fi na rafaõ compofta da rafaõ dos orificios, e da rafaõ fubduplicada das alturas do fluido.*

A quantidade a he fempre conftante e igual a 15 pés e 1 pollegada, quando o tempo fe conta por fegundos. As outras quantidades K, t, b, Q pódem variar; e bem fe vê que fendo dadas tres quaifquer dellas, a quarta fe determinará pela equaçaõ precedente.

234 Efta mefma equaçaõ ferve para refolver o problema feguinte: *Supponhamos, que no interior de hum canhaõ fe faz fubitamente hum vazio, pela explofaõ da polvora; e que fe pergunta o tempo, que gaftará o ar em entrar nelle, e correr todo o feu comprimento.* Sendo a preffaõ da atmosfera, que faz entrar o ar no canhaõ, equivalente a huma colunna de agua de 32 pés (n. 85.), ou a huma colunna de ar uniforme de 32.850 pés (n.90.), naõ he neceffario mais que fazer na equaçaõ precedente $b = 27200$ pés, e $Q = Kl$, fendo l o comprimento do canhaõ; e teremos $t = \frac{l}{2\sqrt{ba}}$. Se, por exemplo, for $l = 16$ pés, achar-fe-ha $t = \frac{3}{4}$ de hum minuto terceiro proximamente. Defprezamos aqui a pequena quantidade de ar que entra pelo *ouvido*, e a pequena variaçaõ que experimenta a elafticidade do fluido, em quanto corre o efpaço l.

235 Para determinar a fluxaõ dos licores por orificios horizontais de qualquer grandeza, a maior parte dos Autores de Hydraulica fazem duas hypothefes gerais: huma he, que imaginando o fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais, eftas defcem fempre parallelamente a fi mefmas; e a outra, que todos os pontos de huma mefma camada tem a mefma velocidade vertical. A primeira parece fer huma confequencia neceffaria da experiencia; porque evacuando-fe qualquer vafo por

por hum orificio, a superficie do licor sempre se conserva horizontal, e parallela a si mesma, ao menos até chegar muito perto do fundo, e as mesmas causas que conservaõ o parallelismo da primeira camada devem produzir o mesmo effeito nas camadas inferiores, ao menos proximamente. A segunda naõ he rigorosamente exacta, quando o vaso naõ he prismatico e vertical; porque as particulas contiguas ás paredes devem seguir a direcçaõ dellas, e perturbar nesse caso o movimento vertical das particulas vezinhas. Mas como o numero das particulas de huma camada que tocaõ as paredes he infinitamente pequeno em comparaçaõ do numero das outras, podem estas alterações suppor-se nullas, sem erro sensivel.

Assim vemos, que estas duas supposições saõ muito admissiveis na parte superior do vaso. Porém na parte vezinha ao orificio estaõ muito longe da verdade; porque, como assima dissemos, todos os pontos fluidos se dirigem entaõ obliquamente para o orificio, e por conseguinte naõ póde suppor-se que as mesmas particulas individuais formem huma mesma camada, cujos pontos se abaixem verticalmente. Assim naõ he possivel, que as circunstancias do effluxo da agua calculadas por estas duas hypotheses sejaõ exactamente conformes á experiencia. Sem embargo, he facil de ver que os erros procedidos destas supposições devem seguir a mesma lei em todos os casos, ao menos proximamente; e deste modo, conhecendo pela experiencia as correcções que se devem fazer aos resultados theoricos, podem servir estes de muita utilidade na pratica. Debaixo desta restricçaõ admittiremos aqui esta theorica, porque tudo bem ponderado, parece que naõ se tem imaginado até agora cousa melhor para representar o movimento dos fluidos por formulas analyticas, que naõ involvaõ calculos extremamente complicados.

236. Seja pois *AÇDE* hum fluido sujeito á acçaõ da gravidade em hum vaso, do qual sahe por hum orificio horizontal *pq* de qualquer grandeza aberto no fundo *CD* (Fig. 73.). Imaginemos este fluido dividido em huma infinidade de camadas horizontais, e iguais *ABba*, *TVut* &c, que se abaixaõ parallelamente a si mesmas, tendo cada huma a mesma velocidade vertical em toda a sua extensaõ. Todas estas camadas obraõ humas contra as outras,

tras,

tras, ou comprimindo-ſe reciprocamente, ou arraſtando-ſe em virtude da adherencia que tem entre ſi; de maneira, que ſe a velocidade de humas he retardada de hum inſtante para outro, a velocidade das outras he accelerada. Succede neſte caſo ao movimento das particulas fluidas o meſmo que ao ſyſtema de muitos corpos ſolidos, dos quais nenhum póde mover-ſe ſem actuar ſobre os outros, e ſem experimentar a reacçaõ delles.

Iſto poſto, levante-ſe a vertical pE; e ſeja a altura conſtante do fluido $Ep = h$, a area do orificio $pq = K$, a area repreſentada pela linha AB, que he huma funçaõ de Ep, dada pela figura do vaſo $= M$, a altura indeterminada $EH = x$, a area repreſentada por TV, funçaõ dada de $x = y$, a velocidade da ſecçaõ do fluido que ſahe pelo orificio $= u$, a velocidade da ſecçaõ $TVut = v$, o tempo $= t$, e a gravidade $= g$. Aſſim, ſuppondo que no inſtante dt a velocidade v ſe faz $v + dv$ (dv póde ſer poſitivo, ou negativo), e reflectindo que ſe faria $v + gdt$ ſe as camadas naõ actuaſſem entre ſi, eſtá claro que ſendo $v + gdt = v + gdt + dv - dv$, todo o fluido ficaria em equilibrio, ſe cada huma das camadas naõ foſſe animada ſenaõ pela velocidade $gdt - dv$. Eſtas velocidades variaõ de huma camada para a outra, e por toda a extenſaõ da altura Ep deveremos ter $\int dx(gdt - dv) = 0$; e porque $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, e $dt = \frac{dx}{v} = \frac{ydx}{Ku}$, teremos $\int \frac{gydx^2}{Ku} - \int \frac{Kdx(ydu - udy)}{yy} = 0$.

237 Como o integral precedente deve tomar-ſe relativamente á altura Ep, e conſeguintemente u e du devem conſiderar-ſe para o caſo como conſtantes, e ſendo por outra parte ydx huma quantidade conſtante, podemos reduzir a noſſa equaçaõ a eſta fórma $\frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int \frac{dx}{y} + Kuydx\int \frac{dy}{y^3} = 0$. Porém $\int dx$ vem a ſer h, $\int \frac{dx}{y}$ (ſupprindo convenientemente a homogeneidade) póde repreſentar a area, que chamaremos N, de huma curva conſtruida ſobre o eixo Ep, que tenha por ordenadas as differentes ſecçoens do vaſo, que correſpondem aos differentes

tes pontos de Ep, $\int \frac{dy}{y^3}$ reprefenta a area de huma curva que deve defvanecer quando $y = AB = M$, e ter o feu valor completo quando $y = K$, que ferá confeguintemente $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$, e em fim $ydx = ABba = M.Ee$. Logo $2gbM^2.Ee - 2K^2MNudu + uu.Ee(K^2 - M^2) = 0$. Sendo pois s a altura devida á velocidade u, ferá $uu = 2gs$, e fubftituindo efte valor teremos finalmente

$$bM^2.Ee - K^2MNds + s.Ee.(K^2 - M^2) = 0.$$

238 Supponhamos agora, que o vafo fe conferva conftantemente cheio na altura pE; e para iffo imaginemos que á medida que a fuperficie AB fe abaixa em hum inftante até ab, e que fahe confeguintemente huma pequena quantidade de licor igual a $AB.Ee$, a camada $ABba$ he fubftituida por outra, creada (para o dizer affim) no feu lugar, e com a mefma velocidade della. Além difto feja Kz o licor que fahe pelo orificio K no tempo t, e teremos evidentemente $Kdz = M.Ee$; donde fe mudará a equaçaõ precedente nefta fórma

$$bM^2dz - KM^2Nds + (K^2 - M^2)sdz = 0,$$

na qual fómente z e s faõ variaveis.

Se K for infinitamente pequeno, efta equaçaõ fe reduz a $bM^2dz = M^2sdz$, ou $b = s$, como tinhamos achado (n. 228.).

A equaçaõ precedente he facil de integrar. Porque fazendo $\frac{b}{KN} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{KM^2N} = f$, teremos $ds + fsdz = bdz$. Donde fe tira, pelo methodo de que já nos havemos fervido (n. 105.)

$$s = \frac{b}{f}\left(1 - e^{-fz}\right),$$

fendo e o numero que tem por logarithmo a unidade, e completando-fe o integral de maneira, que z e s defvaneçaõ ao mefmo tempo.

239 Para conhecer a relaçaõ entre o tempo t e a velocidade u, ou a altura s que lhe he devida, obfervaremos

mos que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b-fs)\sqrt{2gs}}$. Fazendo $\frac{b}{f} = m^2$, e $s = y^2$; teremos $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{m^2-y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}$ $\left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right)$, e por conseguinte $t = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}$. $l\frac{m+y}{m-y} = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}}.l\frac{\sqrt{b}+f\sqrt{s}}{\sqrt{b}-f\sqrt{s}}$; integral, que naõ carece de constante, porque $t = 0$ dá $s = 0$.

240 Do mesmo modo para conhecer a relaçaõ entre o tempo e o espaço corrido z, poremos na equaçaõ $dt = \frac{dz}{u}$ em lugar de u o seu valor $\sqrt{2gs}$, e em lugar de s o seu valor acima achado (n. 238.), e teremos

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}} \cdot \sqrt{(1-e^{-fz})}}.$$

Suppondo $1-e^{-fz} = xx$, será $dt = \frac{2}{\sqrt{2bgf}} \cdot \frac{dx}{1-xx}$ $= \frac{1}{\sqrt{2bgf}}\left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right)$, e conseguintemente

$$t = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot l\frac{1+\sqrt{(1-e^{-fz})}}{1-\sqrt{(1-e^{-fz})}};$$

integral completo, porque $z = 0$ dá $t = 0$, como deve ser.

Por meio desta equaçaõ se conhecerá a quantidade de agua, que sahe pelo orificio em hum tempo dado, porque essa quantidade he $= Kz$, que agora se póde exprimir por huma funçaõ do tempo, e de constantes.

241 O modo de entreter o vaso *ACDB* constantemente cheio, que acima imaginamos (n. 238.), raras vezes póde ter lugar na pratica. Ha outro mais usado, que consiste em imaginar que a nova camada *ABba* ajuntada a cada instante, para reparar a despeza que se faz pelo orificio, he fornecida por huma affusaõ lateral, e que ella recebe a sua velocidade primitiva da camada immediata que

que a arrasta comsigo em virtude da tenacidade reciproca das partes do fluido. Entaõ he necessario fazer algumas mudanças no methodo precedente.

Conservando todas as outras denominaçoens, supponhamos que a velocidade da camada $ABba$ he $= V$. Como ella, se fosse deixada á acçaõ livre da gravidade, teria adquirido em hum instante dt a velocidade gdt, podemos considerar esta velocidade gdt como composta da velocidade V e de outra velocidade $gdt - V$ que deve ser destruida. Por conseguinte, se houvesse sómente na camada $ABba$ a velocidade $gdt - V$, e nas outras a velocidade $gdt - dv$, todo o systema deveria ficar em equilibrio. Logo teremos $Ee.(gdt - V) + \int dx(gdt - dv)$ $= 0$. Donde resulta, desprezando gdt em comparaçaõ de V, a equaçaõ $2gbM^2.Ee - 2KMVu.Ee - 2K^2MNudu + Ee.u^2(K^2 - M^2) = 0$. Em fim pondo em lugar de V o seu valor $\frac{Ku}{M}$, e praticando tudo o mais como no methodo antecedente, teremos

$$bM^2dz - (K^2 + M^2)sdz - KM^2Nds = 0;$$

equaçaõ da mesma fórma que a outra (n. 238.), e conseguintemente susceptivel de calculos analogos aos que della deduzimos. Bem se vê, que basta tomar $f = \frac{K^2 + M^2}{KM^2N}$ em lugar de $f = \frac{M^2 - K^2}{KM^2N}$ para applicar as formulas que havemos deduzido ao caso presente.

242. A equaçaõ final do n. 237. póde tambem servir para achar o movimento de huma quantidade determinada de fluido dentro de hum vaso, em virtude da gravidade, ou de hum impulso primitivo, ou de ambas estas causas juntamente. Havendo imaginado que o fundo CD se aniquila, ou que $K = CD$, supponhamos que a porçaõ dada do fluido occupa no primeiro instante o espaço $SZKX$, e que no fim do tempo t tem chegado á posiçaõ indeterminada $ACDB$. Está claro, que chamando z o espaço OE corrido verticalmente pela superficie do fluido, as quantidades M, K, N, b seraõ funçoens dadas de z e de constantes, porque he dada a figura do vaso, e os espaços $SZKX$, $ACDB$ saõ iguais entre si. Donde se segue que a equa-

a equaçaõ que repreſenta o movimento do fluido ſerá ſempre deſta fórma

$$Zdz + AZ'ds + BsZ''dz = 0,$$

ſendo Z, Z', Z'' funçoens de z, e A, B quantidades conſtantes. Eſta equaçaõ ſe integrará, de maneira, que ſatisfaça á condiçaõ da velocidade inicial de qualquer ſecçaõ dada do fluido; e ſendo achada a relaçaõ entre s e z, facilmente ſe achará t em s, ou em z.

Quando o fluido naõ for pezado, o primeiro termo da equaçaõ, que he relativo a eſta força, ſe deſvanece; e a equaçaõ fica muito mais ſimples.

243 O methodo, que até agora havemos expoſto, applica-ſe muito bem aos orificios horizontais; mas naõ ſuccede o meſmo nos laterais. Eſtes contribuem muito a perturbar o parallelismo das camadas; e além diſſo, as particulas fluidas que ſahem por elles naõ tem todas a meſma velocidade, porque as mais diſtantes da ſuperficie do fluido ſe movem neceſſariamente com mais velocidade. Entaõ o methodo mais ſimples, e que dá reſultados ſufficientemente conformes á experiencia, he o ſeguinte.

244 Como temos viſto, que o fluido ſahe por hum orificio lateral infinitamente pequeno do meſmo modo que por hum horizontal ſituado em igual diſtancia da ſuperficie do fluido (n.230.); quando o orificio lateral for de grandeza conſideravel podemos ſuppollo dividido em huma infinidade de rectangulos, ou trapezios horizontais, e conſiderar cada hum delles como hum orificio infinitamente pequeno. Deſignando pois cada hum deſtes elementos por dS, e a quantidade total de fluido que dá o orificio no tempo t por Q, a altura do fluido reſpectiva ao elemento dS por z, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo por a; teremos (n. 233) $Q = 2t\sqrt{a}.\int dS\sqrt{z}$.

245 Exemplo I. *Determinar a quantidade de fluido que em hum tempo dado ſahe pelo orificio rectangular vertical LNOM praticado em huma das paredes de qualquer vaſo* (Fig.74.).

Seja a altura do fluido acima da parte ſuperior $VK = b$, $VR = H$, $LM = f$, $LX = x$, e conſeguintemente $VI = z = b + x$, $XZzx = dS = fdx$. Logo teremos $Q = 2t\sqrt{a}.\int f dx \sqrt{(b + x)}$; e tomando eſte integral entre os limites $x = 0$, e $x = H - b$, teremos finalmente

$Q =$

$$Q = \frac{4}{3} ft \left(H\sqrt{H} - b\sqrt{b}\right)\sqrt{a}.$$

Donde ſe vê, que das ſinco quantidades H, b, f, t, Q, ſendo dadas quatro, a quinta ſe póde ſempre determinar por eſta equaçaõ.

246 Supponhamos, que y he a *altura media* da agua acima de hum ponto I do orificio, iſto he, huma altura tal, que ſe todos os pontos do fluido que ſahem pelo orificio tiveſſem a meſma velocidade que tem os pontos que ſahem pela horizontal XIx, em igual tempo ſahiſſe huma quantidade de agua igual á que dá o meſmo orificio com as velocidades naturais, ſegundo a hypotheſe deſte problema. Aſſim teremos $Q = 2tf(H-b)\sqrt{ay}$ (n.233.); e igualando entre ſi os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{4(H\sqrt{H} - b\sqrt{b})^2}{9(H-b)^2}.$$

Eſta altura differe pouco da diſtancia do centro de gravidade do orificio á ſuperficie do fluido, a qual he $= \frac{H+b}{2}$; de maneira que ſendo $b=0$, temos $y = \frac{4}{9}H$, ſendo a differença $\frac{1}{18}$ da altura do orificio KR. Quanto mais eſtiver levantada a ſuperficie da agua acima da baſe ſuperior do orificio, tanto menor ſe fará eſta differença; e conſeguintemente na pratica póde tomar-ſe por altura media a diſtancia do centro de gravidade do orificio á ſuperficie do fluido. 91.a

247 Exemplo II. *Determinar a quantidade de fluido, que em hum tempo dado ſahe pelo orificio vertical LNM, aberto em fórma de triangulo iſoſceles, com a baſe LM horizontal* (Fig. 75.).

Seja a baſe do triangulo $LM = f$, a altura do fluido acima della $VR = H$, e acima do vertice $VN = b$. Tomando na recta NR huma abſciſſa x, e tirando huma ordenada parallela á baſe LM, ſerá a ſua expreſſaõ $\frac{fx}{H-b}$, e conſeguintemente $dS = \frac{fxdx}{H-b}$, e $z = b + x$. Logo $Q = \frac{2tf\sqrt{a}}{H-b}\int x\,dx\sqrt{(b+x)}$; e tomando eſte integral

tegral entre os limites de $x = 0$, e $x = H - b$, teremos a equaçaõ

$$Q = \frac{4ft(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

248 Sendo y a altura media da agua, acharemos $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando entre si os dous valores de Q, resultará

$$y = \frac{16(3H^2\sqrt{H} + 2b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{H})^2}{225(H-b)^4}.$$

Este valor differe muito pouco da distancia do centro de gravidade do triangulo á superficie do fluido; porque no caso da maior differença quando $b = 0$, he de $\frac{2}{25}$ de NR, e quando o fluido está elevado consideravelmente acima de N, esta differença vem a ser insensivel.

249 Exemplo III. *Determinar a quantidade de fluido que sabe pelo orificio triangular, e isosceles L M N, que tem a base L M horisontal, e o vertice N para a parte de baixo* (Fig. 76.).

Seja $VN = H$, $VR = b$, $LM = f$; e tomando na recta NR huma abscissa x, teremos $dS = \frac{fxdx}{H-b}$, e $z = H - x$. Logo $Q = \frac{2ft\sqrt{a}}{H-b}\int xdx\sqrt{(H-x)}$; e tomando este integral entre os limites de $x = 0$, e $x = H - b$, teremos

$$Q = \frac{4ft(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})\sqrt{a}}{15(H-b)}.$$

250 Suppondo a altura media da agua acima do orificio $= y$, será $Q = ft(H-b)\sqrt{ay}$; e igualando os dous valores de Q, acharemos

$$y = \frac{16(2H^2\sqrt{H} + 3b^2\sqrt{b} - 5Hb\sqrt{b})^2}{225(H-b)^4};$$

valor, que differe muito pouco da distancia do centro de gravidade do triangulo á superficie da agua. A sua maior

maior differença, quando $h = 0$, he $\frac{11}{225}$ de NR.

251 EXEMPLO IV. *Determinar a quantidade de licor que sahe por hum orificio vertical circular LMNP em hum tempo dado* (Fig. 77.).

Seja o raio $OL = r$, a rasaõ entre a altura do fluido acima do centro OV e o raio $= n$, isto he, $OV = nr$, e o angulo $LOQ = x$. Assim teremos $QR = r\, sen\, x$, $LR = r - r\cos x$, $Rr = r\, dx\, sen\, x$, e $VR = nr - r\cos x$. Logo $dS = 2r^2 dx\, sen\, x^2$, $z = nr - r\cos x$; e conseguintemente

$$Q = 4tr^2 \sqrt{ar}.\int dx\, sen\, x^2 \sqrt{(n - \cos x)}.$$

Para integrarmos actualmente o segundo membro, reflectiremos que $dx\, sen\, x \sqrt{(n - \cos x)} = dx(1 - \cos x^2)(n - \cos x)^{\frac{1}{2}} = dx(1 - \cos x^2)\left(n^{\frac{1}{2}} - \frac{\cos x}{2n^{\frac{1}{2}}} - \frac{\cos x^2}{8n^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos x^3}{16n^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\cos x^4}{128n^{\frac{7}{2}}} - \frac{7\cos x^5}{256n^{\frac{9}{2}}} \&c\right) = n^{\frac{1}{2}} dx\Big(1 - \cos x^2 + \frac{\cos x^3 - \cos x}{2n} + \frac{\cos x^4 - \cos x^2}{8n^2} + \frac{\cos x^5 - \cos x^3}{16n^3} + \frac{5\cos x^6 - 5\cos x^4}{128n^4} \&c\Big)$. Porém temos em geral $\cos x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, $\cos x^3 = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$, $\cos x^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$, &c; valores que devem ser substituidos na equaçaõ precedente, para se proceder á integraçaõ em geral. Mas reflectindo, que para o orificio inteiro havemos de tomar o integral entre os limites $x = 0°$, e $x = 180°$, podemos desprezar na substituiçaõ todos os termos que contém $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ &c, porque estes na integraçaõ deveráõ dar $sen\, x$, $sen\, 2x$, $sen\, 3x$ &c, que nos ditos limites saõ $= 0$. Assim podedemos fazer $\cos x^2 = \frac{1}{2}$, $\cos x^3 = 0$, $\cos x^4 = \frac{3}{8}$, $\cos x^5 = 0$,

$= 0$, $cos\,u^6 = \frac{5}{16}$ &c; e teremos $dx\,sen\,x^2 \sqrt{(n - cos\,x)}$

$= \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} dx \left(1 - \frac{1}{32\,n^2} - \frac{5}{1024\,n^4} \&c\right)$. E porque o integral se ha de tomar entre os limites $x = 0$, e $x = c$, sendo c a semicircumferencia do circulo que tem por semidiametro a unidade, teremos finalmente

$$Q = 2ctr^2 \left(1 - \frac{1}{32\,n^2} - \frac{5}{1024\,n^4} \&c\right) \sqrt{anr}.$$

Esta serie he taõ convergente, que por pouco que n exceda a unidade, os tres primeiros termos seraõ mais que sufficientes na pratica.

252 Sendo y a altura media da agua, teremos $Q = 2ctr^2 \sqrt{ay}$; e igualando entre si os dous valores de Q, acharemos

$$y = nr \left(1 - \frac{1}{16\,n^2} - \frac{9}{1024\,n^4} \&c\right);$$

e este valor coincide sensivelmente com VO, quando n excede sensivelmente a unidade.

253 Quando a superficie da agua está ao livel da extremidade superior do diametro LN (Fig. 78.), isto he, quando $n = 1$, a formula que achamos dará tambem o valor de Q. Mas entaõ póde integrar-se a expressaõ $dx\,sen\,x^2 \sqrt{(1 - cos\,x)}$ em termos finitos, e algebricos. Porque fazendo $1 - cos\,x = u$, teremos $\int dx\,sen\,x^2 \sqrt{(1 - cos\,x)} = \int u du \sqrt{(2-u)} = u\int du \sqrt{(2-u)} -$

$$\int du \int du \sqrt{(2-u)} = -\frac{2u(2-u)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-u)^{\frac{5}{2}}}{15} =$$

$$-\frac{2\,sen\,x^2 (1 + cos\,x)^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{4(1 + cos\,x)^{\frac{5}{2}}}{15}.$$ Tomando pois o valor desta expressaõ entre os limites de $x = 0°$, e $x = 180°$, e multiplicando o resultado pelo coefficiente $4tr^2 \sqrt{ar}$, teremos neste caso

$$Q = \frac{64tr^2 \sqrt{2ar}}{15}.$$

Faltava ainda dar huma formula para quando a superficie

ficie da agua está debaixo do ponto *L*. Mas nesse caso, naõ sendo a superficie da agua sustentada pela parede do vaso no lugar do orificio , abaixa-se sensivelmente para a parte do méio , altéra a rasaõ natural das velocidades , e serve de embaraçó á theorica , pela qual se naõ póde dar a soluçaõ deste caso , senaõ de hum modo muito imperfeito.

254 Estes exemplos bastaõ para se entender o modo de determinar o desaguamento dos fluidos por hum só orificio. Quando o fluido sahir por muitos ao mesmo tempo , sendo todos pequenos , naõ ha difficuldade nenhuma de novo. Cada hum se calcula separadamente , como se fosse só. Mas sempre deve observar-se que hum orificio pequeno na vezinhança de outro maior , dá hum pouco menos á proporçaõ do que elle , como adiante mostraremos pela experiencia.

Passemos á soluçaõ de differentes problemas relativos ao desaguamento de vasos atravessados vertical , ou horizontalmente por muitos diaphragmas , problemas curiosos em si mesmos , e que tem applicaçóes frequentes na pratica.

255 Probl. I. *Suppondo que os vasos A B C D , FCEG , H E L K* (Fig. 79.) , *communicaõ entre si pelas pequenas aberturas C , E , e que o fluido sabe pelo orificio L ; achar as velocidades em C , E , L , e a quantidade de licor que sabe por L , quando o movimento tem chegado á uniformidade , e conseguintemente deitando-se tanta agua no primeiro vaso quanta sabe do ultimo , as alturas AB , CF , EH ficaõ constantemente as mesmas.*

Por quanto as aberturas *C* , *E* , *L* saõ muito pequenas em comparaçaõ das amplitudes dos vasos , he evidente que a pequena massa de fluido que por ellas passa a cada instante naõ produzirá abalo sensivel no fluido dos ditos vasos , e que hum tal abalo naõ póde alterar sensivelmente as velocidades em *C* , *E* , *L* , sobre tudo quando estas aberturas naõ estaõ em linha recta. E porque o fluido *CFOB* faz equilibrio com *CFGE* , e *EHQC* com *EHKL* (n.35.) , seraõ as velocidades em *C* , *E* , *L* devidas respectivamente ás alturas *DF* , *GH* , *KL*. Pelo que suppondo $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, $AB = b$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, e a quantidade de licor que passa no tempo t por cada hum dos

dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tC\sqrt{ax} = 2tE\sqrt{ay}$ $= 2tL\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde se tira

$$x = \frac{L^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$y = \frac{C^2 L^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$z = \frac{C^2 E^2 . b}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2}$$

$$Q = \frac{2tL . CE . \sqrt{ab}}{\sqrt{(C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2)}}.$$

Do mesmo modo se procederia no caso de haver maior numero de vasos. Se os orificios fossem de grandeza consideravel seria necessario recorrer ao methodo geral (n. 235, e seg.); mas neste problema e outros semelhantes chegariamos a calculos quasi intrataveis da parte da Analyse.

256 Probl. II. *Determinar a lei, pela qual sobe o fluido nos vasos FE, HL do problema precedente, em quanto o desaguamento naõ tem chegado a hum estado regular, e permanente.*

Sejaõ primeiramente dous vasos prismaticos *BD*, *CG* (Fig. 80.) communicantes pelo pequeno orificio *C*, e o primeiro seja entretido sempre cheio constantemente até *AD*, em quanto o segundo lança o licor pelo pequeno orificio *E*. Supponhamos, que passado certo tempo t a superficie do fluido no vaso *CG* se acha em *NO*, e que no instante seguinte sobe até *no*. Fazendo $CD = b$, $DN = x$, a area da secçaõ $NO = A$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$; he evidente, que no instante dt as alturas devidas ás velocidades em *C*, *E* saõ x, e $b - x$ (n. 228.). Donde se segue (n. 233.), que no instante dt sahirá pelo orificio *C* a quantidade de agua $2C\,dt\sqrt{ax}$, e pelo orificio *E* a quantidade $2E\,dt\sqrt{[a(b-x)]}$: porém a differença destas quantidades he evidentemente igual a *NOon*; logo $2C dt \sqrt{ax} - 2E dt \sqrt{[a(b-x)]} = A dx$; e conseguintemente

$$dt = \frac{A}{2\sqrt{a}} . \frac{dx}{E\sqrt{(b-x)} - C\sqrt{x}}.$$

Suppon-

Supponding primeiramente $x = \frac{yy}{b}$, e depois $E\sqrt{(bb - yy)} - Cy = Ez$, reduziremos a equaçaõ precedente a esta fórma

$$dt = Hdz + \frac{Mdz}{z} + \frac{Nzdz}{\sqrt{(P^2 - z^2)}} + \frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2 - z^2)}},$$

na qual H, M, N, P, Q saõ constantes faceis de determinar. O ultimo termo, no qual sómente póde haver embaraço, integra-se fazendo $z = \frac{P^2}{u}$. Deste modo acharemos $\int \frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2 - z^2)}} = \int \frac{-Qdu}{P\sqrt{(u^2 - P^2)}} = -\frac{Q}{P} l(u + \sqrt{(u^2 - P^2)})$.

Assim podemos sempre achar o valor de t em x. Mas he de advertir, que o fluido deve ter na origem do movimento huma certa altura no vaso CG, para que a agua que entra pelo orificio C naõ produza abalo sensivel no fluido que elle contêm. A esta condiçaõ se satisfará, determinando a constante, que deve completar o integral, de maneira que quando $t = 0$ tenha DN hum valor dado, menor do que b.

257 Seja agora qualquer numero de vasos BD, CG, EK, LR (Fig. 81.), e com as mesmas condiçoens. Supponding $DC = b$, $DN = x$, $OP = y$, $SQ = z$, $RM = u$; a area da secçaõ $NO = A$, de $PS = B$, de $LR = R$; pelo que acabamos de mostrar, teremos as equaçoens seguintes

$$2Cdt\sqrt{ax} - 2Edt\sqrt{ay} = -Adx,$$
$$2Edt\sqrt{ay} - 2Ldt\sqrt{az} = -Bdy,$$
$$2Ldt\sqrt{az} - 2Mdt\sqrt{au} = -Rdz$$
$$x + y + z + u = b.$$

Todas estas equaçoens combinadas entre si daraõ o valor de t em x, ou y, ou z, ou u, e conseguintemente determinaráõ as alturas do fluido nos vasos CG, EK, LR para qualquer tempo dado; mas os calculos seraõ muito complicados.

258 O problema elegante resolvido por *M.* de Montucla he muito analogo ao presente: *Supponding que o vaso BD he hum regato, ou manancial, que em tempos iguais introduz*

troduz pela abertura C quantidades iguais de agua no vaso CG, o qual deixa sahir parte della pela abertura E; determinar o movimento da superficie do fluido NO no mesmo vaso (Fig. 80.).

Como neste caso a velocidade em C he devida a huma altura constante b, supposdo $CN = x$, e conservando as outras denominaçoens acima estabelecidas (n.256.), teremos $2C\,dt\sqrt{ab} - 2E\,dt\sqrt{ax} = A\,dx$, ou $dt = \frac{A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$. Seja $x = yy$; e acharemos $t =$

$$\int \frac{A}{E\sqrt{a}} \left(-dy + \frac{C\sqrt{b}.dy}{C\sqrt{b} - Ey} \right) = M - \frac{Ay}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}}.$$

$$l(C\sqrt{b} - Ey) = M - \frac{A\sqrt{x}}{E\sqrt{a}} - \frac{AC\sqrt{b}}{E^2\sqrt{a}} l(C\sqrt{b} - E\sqrt{x}).$$

A constante M deve determinar-se de maneira, que quando $t = 0$, tenha x hum valor dado.

A quantidade de agua que no tempo t sahe pela abertura E será representada por $\int 2E\,dt\sqrt{ax} = EA\int \frac{dx\sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$

$$= N + A\left[-x - \frac{2C\sqrt{bx}}{E} - \frac{2C^2 b}{E^2} l(C\sqrt{b} - E\sqrt{x}) \right].$$

259 Probl. III. *Sendo o vaso AV* (Fig. 82.) *constantemente cheio de licor até a altura AI, e atravessado dos diaphragmas BC, ZT, IV furados com pequenas aberturas M, N, P; determinar as velocidades do fluido em cada huma dellas, e a quantidade de agua que por ellas passa em hum tempo dado.*

Está claro, que o fluxo natural da agua em M he embaraçado em parte pela resistencia da agua inferior, e que o fluido correrá por M do mesmo modo que passaria por hum orificio lateral $C = M$ para hum vaso CG, no qual a altura da agua CF exprimisse a resistencia que cada ponto da agua em M experimenta da parte da agua inferior. E porque a reacçaõ he igual e contraria á acçaõ, a agua BT será comprimida em todos os seus pontos pela agua superior com huma força proporcional a CF; e por conseguinte, se naõ encontrasse resistencia na agua inferior, correria em N com huma velocidade devida á altura TF, ou do mesmo modo que correria no vaso lateral TG por huma abertura

tura $E = N$. Assim, sendo TQ a altura proporcional á resistencia, que cada ponto da agua em N encontra na agua inferior, o fluxo em N se fará do mesmo modo que no vaso QG por huma abertura $H = N$. Do mesmo modo se vê, que em P correrá da mesma maneira que no vaso SK por hum orificio $L = P$, sendo a altura $SH = VQ$.

Isto posto, fazendo $AI = b$, $DF = x$, $GH = y$, $KL = z$, a quantidade de agua que no tempo t passa por cada hum dos orificios $= Q$, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax} = 2tN\sqrt{ay} = 2tP\sqrt{az}$, e $x + y + z = b$. Donde se tira, como no Problema I,

$$x = \frac{N^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$y = \frac{M^2 P^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2}$$

$$Q = \frac{2tP . MN . \sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 P^2 + M^2 N^2 + N^2 P^2)}};$$

e do mesmo modo se procederia, havendo mais diaphragmas.

260 Quando a ultima abertura P he muito pequena em comparaçaõ das outras, teremos sensivelmente $x = \frac{P^2 . b}{M^2}$, $y = \frac{P^2 . b}{N^2}$, $z = b$, $Q = 2tP\sqrt{ab}$. Donde se vé, que o desaguamento em P he como se naõ houvesse diaphragmas; e assim deve ser, porque a figura do vaso he indifferente, quando a abertura por onde sahe o fluido he infinitamente pequena a respeito de todas as amplitudes horizontais do mesmo vaso.

261 Pelo contrario, se as aberturas M, N forem muito pequenas em comparaçaõ de P, teremos sensivelmente $z = \frac{M^2 N^2 . b}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tMN\sqrt{ab}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e conseguintemente a velocidade, e producto do orificio seraõ muito menores. Donde se vê, quanto saõ prejudiciais á altura, e pro-

producto das fontes de repuxo os obstaculos, que frequentemente se formaõ nos canos; e quanto he necessario na construcçaõ das bombas aumentar os diametros das valvulas, quanto for possivel, a respeito dos orificios por onde ellas devem desaguar.

262 Se os tres orificios forem iguais, teremos $x = y = z = \frac{1}{3} b$, e $Q = \frac{2tP\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$. Donde se vê, que o producto do orificio P será para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para $\sqrt{3}$. Em geral, sendo dados os orificios M, N póde o terceiro P fazer-se tal, que o producto delle seja para o que daria naõ havendo diaphragmas como 1 para qualquer numero n. Para satisfazer a esta condiçaõ, teremos $\frac{n \cdot MN}{\sqrt{(M^2 N^2 + M^2 P^2 + N^2 P^2)}} = 1$; donde se tira $P = \frac{MN\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{(M^2 + N^2)}}$; e quando as aberturas M, N saõ iguais, $P = M\sqrt{\frac{nn-1}{2}}$.

Estas, e muitas outras applicaçoens, que facilmente se podem fazer, igualmente convem ás formulas do Prroblema I.

263 He de advertir, que a soluçaõ naõ terá lugar, quando o fluido naõ formar huma massa continua no interior do vaso. E posto que a pressaõ do ar que obra de baixo para cima em P, e de cima para baixo na superficie AD, se oppoem á cessaçaõ de continuidade; póde com tudo succeder que esta se effeitue em certos casos. Por exemplo: Se a abertura P, ainda que pequena, for muito maior que as outras duas, póde succeder que sendo consideravel a altura ZI do repartimento inferior, a pressaõ que delle resulta sobre o orificio P seja maior do que convinha, para que a agua que passa por N em virtude da pressaõ da agua superior, e da adherencia com a inferior que procura arrastalla comsigo, possa supprir a que sahe por P. Nesse caso formar-se-ha hum vazio $XYTZ$, que se irá enchendo do ar que traz comsigo a agua que cahe do orificio N; e o fluido sahirá por P, como se o vaso $IXYV$ fosse independente, e entretido constantemente cheio na altura IX. O mesmo póde succeder nos repartimentos superiores.

264 Probl. IV. *Passando o licor do vaso AC, cheio constantemente até AB, pelo orificio M para o vaso lateral CG, donde sómente póde sahir por duas pequenas aberturas N, P; achar as velocidades em M, N, P, e as quantidades de fluido que por estas aberturas passaõ em hum tempo dado* (Fig. 83.).

Supponhamos que o licor em M encontra da parte da agua do vaso CG huma reacçaõ representada por MH: e facilmente veremos, que conduzindo as horizontais NV, HK, seraõ as velocidades em M, N, P devidas ás alturas DH, HV, HC. Assim fazendo $DC = b$, $DV = b$, $DH = x$, e representando por Q, Q', Q'' as quantidades de agua que no tempo t passaõ por M, N, P, teremos $Q = 2tM\sqrt{ax}$, $Q' = 2tN\sqrt{[a(b-x)]}$, $Q'' = 2tP\sqrt{[a(b-x)]}$, e $Q' + Q'' = Q$. Estas equaçoens daõ

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)},$$

que se reduz a huma equaçaõ do segundo gráo, da qual se tirará o valor de x; e conhecendo x, acharemos os valores de HV, HC, Q, Q', Q''.

265 As alturas HV, HC devidas ás velocidades em N, P saõ evidentemente as das colunnas, que comprimiriaõ perpendicularmente as paredes do vaso CG nos mesmos lugares, se os orificios N, P subitamente se tapassem. Assim, quando sahe o licor por N, P, será a pressaõ de huma parte X tomada em hum lugar dado representada por $X.HC$. Por exemplo: Supponhamos P infinitamente pequeno, ou $P = 0$; e a equaçaõ geral $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)}$ se reduzirá a $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)}$, e dará $x = \dfrac{N^2 b}{M^2 + N^2}$. Por conseguinte teremos $CH = b - x = \dfrac{M^2 b + N^2 (b - b)}{M^2 + N^2}$, e a pressaõ de $X = \dfrac{X[M^2 b + N^2 (b - b)]}{M^2 + N^2}$.

Do mesmo modo se determinará a pressaõ em qualquer outro lugar do mesmo vaso CG, e do outro BD: bem entendido, que esta determinaçaõ suppoem que as aberturas M, N, P saõ muito pequenas, e que as aguas estaõ como estagnantes em ambos os vasos. Quando as aberturas

ras forem consideraveis, usaremos do Problema seguinte.

266 PROBL. V. *Determinar a pressaõ, que hum licor exercita contra as paredes de hum vaso, quando corre pelo interior delle* (Fig. 73.).

Supponde a hypothese, a construcçaõ, e as denominações do nº 236, a velocidade com que cada camada deveria tender a mover-se, para haver equilibrio, he $g\,dt - dv$, e conseguintemente a força correspondente $g - \frac{dv}{dt}$. Donde se vê, que as camadas se comprimem com as forças $g - \frac{dv}{dt}$ do mesmo modo que as camadas de hum fluido em quietaçaõ se comprimem em virtude da gravidade. Logo na profundidade $EH = x$, a pressaõ de cada hum dos pontos da camada $TVut$ he representada por $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; e esta força he a que se communica perpendicularmente aos elementos das paredes Tt, Vu. Porém $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$; e substituindo por dv o seu valor $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, temos $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt}\int \frac{dx}{y} - \frac{K\,u\,y\,dx}{dt}\int \frac{dy}{y^3}$; expressaõ, na qual a area representada por $\int \frac{dx}{y}$ que chamaremos Q, deve ser a que corresponde a EH, e $\int \frac{dy}{y^3}$ deve desvanecer quando $y = AB$, e tomar o seu valor completo quando $y = TV = H$. Logo, metendo por $y\,dx$ o seu valor $M.Ee$, acharemos para a profundidade EH o valor da pressaõ $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \cdot EH - \frac{KQ\,du}{dt} - \frac{Ku.Ee.(H^2 - M^2)}{2\,dt.H^2 M^2}$, no qual se substituiráõ os valores de u e dt em cada caso.

267 Se

267 Se o valor da pressaõ em qualquer lugar do vaso sahir negativo, he final de que o fluido cessará de ser continuo, e se dividirá em partes. Eisaqui huma experiencia de M. Daniel Bernoulli, que o mostra aos olhos (Fig. 84.).

No fundo de hum vaso cylindrico *A F* está applicado hum tubo conico *D H*, guarnecido de hum pequeno tubo lateral *l*, no qual encaixa a extremidade de hum canudo curvo *l m n*, que tem a outra extremidade mergulhada no vaso de agua *M*. He *C A* de 46 linhas, *E l* de 4, *l H* de 33 e meia, *l m n* de 66, e a secçaõ do tubo conico em *l* he para o orificio *G H* como 10 para 16. Tapando o orificio *G H*, e enchendo constantemente de agua o vaso *A F*, esta corre pelo canudo *l m n* para o vaso *M*. Entaõ destapando *G H*, a agua do vaso *M* sobe pelo canudo *n m l*, e vem desaguar por *G H*, até elle se esgotar; e se abrirmos somente huma parte do orificio *G H*, poderemos fazer que a agua suba ou desça por *n m l* a nosso arbitrio. Quando ella sobe, he porque a pressaõ no tubo conico em *l* se faz negativa, e conseguintemente a pressaõ da atmosfera sobre a superficie do vaso obriga a agua delle a subir. A mesma pressaõ embaraça neste caso a separaçaõ das partes do fluido.

268. Pelos mesmos principios se póde determinar a força necessaria para sustentar hum vaso, que lança agua por qualquer orificio *p q* (Fig. 73.). Porque esta força he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela força, em virtude da qual estaria em equilibrio, pela mesma rasaõ que a força necessaria para sustentar hum fluido grave em quietaçaõ he igual á soma dos productos de cada camada multiplicada pela gravidade. Logo a força procurada será representada por $\int y\,dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) =$ $\int g y\,dx - \int \frac{y\,dx\,dv}{dt}$. A primeira parte he o pezo do mesmo fluido, e a segunda se acha sem difficuldade pelo que temos dito.

269 Probl. VI. *Sendo o vaso A D constantemente cheio de agua até A B, e movido verticalmente por meio do pezo R applicado a huma corda naõ pezada, que passa pelas roldanas fixas M, N; determinar a pressaõ que o fluido exercita*

ta sobre fundo , e conseguintemente a quantidade que desaguará pelo pequeno orificio p q (Fig. 85.).

Seja P a massa total do vaso e do fluido , e G o seu centro de gravidade ; e supponhamos , que havendo de correr os corpos R, P em hum instante os espaços iguais Rt,Gx em virtude da gravidade , pela acçaõ reciproca que tem entre si descrevem os espaços tambem iguais Rr, Gy. Assim consta da Mechanica , que fazendo a gravidade natural $Rt = g$, e $Gy = p$, teremos $R(g-p) = P(g+p)$; donde se tira $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$, e os dous corpos se moveráõ com movimento uniformemente accelerado. E porque a força , que obra sobre cada particula da massa P de baixo para cima , he $g+p = \frac{2gR}{R+P}$; está claro , que imprimindo-se hum movimento igual e contrario no systema de todas as particulas , deveria ficar em equilibrio. Neste caso pois , em virtude da força $\frac{2gR}{R+P}$ que obra verticalmente de cima para baixo sobre cada particula do fluído , deve resultar em cada ponto do fundo CD huma pressaõ que he para a pressaõ que experimentaria , se o fluido fosse unicamente sujeito á acçaõ da gravidade , como $\frac{2gR}{R+P}$ para g, ou como $2R$ para $R+P$. Mas a pressaõ sobre a area pq em virtude da gravidade he $p'.pq.bq$, sendo p' o pezo especifico do fluido. Logo na hypothese do nosso problema será a pressaõ da mesma area $= p'.pq.bq.\frac{2R}{R+P}$; e sahindo o fluido por pq, a sua velocidade será devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$. Assim , para determinar a quantidade de fluido que deve sahir no tempo t, naõ he necessario mais que usar da formula do nº 233 , na qual substituiremos $\frac{2R'.b}{R+P}$ em lugar de de b, conſervando as mais denominações; e teremos $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

270 Pela equaçaõ $p = \frac{g(R-P)}{R+P}$ ſe vê 1°, que ſendo $R = P$, teremos $p = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. Entaõ o vaſo eſtará em quietaçaõ, e deſaguará como no nº 233. O meſmo ſuccederia, ſe o vaſo ſe moveſſe verticalmente com movimento uniforme.

2°, Sendo $R = 0$, teremos $\frac{2R}{R+P} = 0$. Neſte caſo deſvanece a preſſaõ, e o fluido naõ ſahirá por pq, como he por outra parte evidente; porque entaõ todos os pontos do fluido deſceráõ em virtude da gravidade natural com a meſma velocidade.

3°, Sendo P infinitamente pequeno em comparaçaõ de R, teremos $\frac{2R}{P+R} = 2$, e $Q = 2tK\sqrt{2ab}$, ſendo neſte caſo o producto do orificio para o que daria, ſe eſtiveſſe em quietaçaõ, como $\sqrt{2}$ para 1.

4°, Sendo $P > R$, o pezo P deſcerá, e R ſubirá. Neſte caſo, para determinar o movimento deve tomar-ſe p negativo. Mas a velocidade em pq ſerá, como no primeiro, devida á altura $\frac{2R.bq}{R+P}$, e a quantidade de agua que ſahe pelo orificio ſerá ſempre determinada pela equaçaõ $Q = 2tK\sqrt{\frac{2abR}{R+P}}$.

271 Probl. VII. *Suppondo que o vaſo AC* (Fig. 86.) *ſe move pelo plano horizontal DQ em virtude da acçaõ do pezo R: achar a preſſaõ que o fluido nelle incluido exercita em qualquer elemento da parede T t, e a velocidade com que ſahiria por elle.*

Seja P a ſoma das maſſas do vaſo e do fluido, $Rt = g$ o eſpaço que R andaria livremente em hum inſtante, $Rr = Cc = p$ o eſpaço que andaõ effectivamente os dous corpos P, R; e teremos $R(g-p) = Pp$, ou $p =$

$= \frac{gR}{R+P}$. Logo cada particula do fluido he sollicitada na direcçaõ DQ por huma força $\frac{gR}{R+P}$; e por consequinte, se huma força igual e contraria se imprimisse no systema, ficaria este em quietaçaõ. Neste ultimo caso, cada particula he sujeita á acçaõ de duas forças, huma vertical g, e a outra horizontal $\frac{gR}{R+P}$, cuja resultante he $g . \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$. Assim, para haver equilibrio, he necessario que a superficie do fluido seja perpendicular a esta resultante (n. 32.); e porque ella he sempre constante em quantidade e direcçaõ, a superficie do fluido será hum plano inclinado OM tal, que conduzindo a horizontal OE para avertical ME, tenhamos $\frac{OM}{OE} = \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$.

Isto posto, se de qualquer ponto T das paredes do vaso se tirar TZ perpendicular a OM, está claro que a pressaõ do elemento Tt será para a que elle experimentaria na profundidade TZ em hum vaso posto em quietaçaõ, como $\frac{g\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$ he para g, ou como $\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}$ para $R+P$. Logo será a pressaõ no nosso caso $= Tt . TZ . \frac{\sqrt{[R^2 + (R+P)^2]}}{R+P}$; e conhecida esta, facil he determinar a altura devida a velocidade com que o fluido sahiria pelo orificio Tt, e a quantidade que deitaria em hum tempo dado, supposndo que por huma affusaõ lateral se conservava sempre com huma quantidade constante de fluido.

Se o movimento do pezo R cessar, ou se vier a ser uniforme, a superficie do fluido naõ continuará na posiçaõ inclinada, mas por-se-ha horizontal. Porque entaõ temos $p = 0$, e as particulas naõ seraõ sollicitadas, senaõ pela força unica da propria gravidade.

272 Probl. VIII. *Determinar o effeito da fricçaõ no producto da agua, que daõ quaisquer vasos constantemente cheios por quaisquer orificios pequenos.*

Seja o orificio circular e horizontal $ABDE$ (Fig. 87.); e este supponha-se dividido em huma infinidade de circumferencias concentricas $abde$, $mnop$ &c. He evidente, que pela adherencia que tem as particulas humas com as outras, a fricçaõ em $ABDE$ se deve fazer sentir em todas as particulas que sahem ao mesmo tempo. Assim, construindo sobre AC como eixo huma curva $NgqK$, cujas ordenadas AN, ag, mq, CK representem as velocidades em A, a, m, C, a area della representará a soma das velocidades, e será proporcional ao producto effectivo do orificio.

Fazendo pois $CA = r$, $Cm = x$, a altura devida á velocidade $mq = X$, a quantidade de licor que no tempo t dá o orificio $= Q$, a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, a rasaõ da circumferencia ao diametro $= c$; teremos evidentemente (n. 233.) a equaçaõ $Q = 2t\sqrt{a}.\int 2cx\,dx\sqrt{X}$, integral que deve tomar-se entre os limites $x = 0$, $x = r$.

273 Supponhamos, por exemplo, que $NgqK$ he huma linha recta (o que naõ póde estar longe da verdade, sendo o orificio muito pequeno); e seja H a altura devida á velocidade central CK, e b devida á lateral AN. Conduzindo NR parallela a AC, os dous triangulos semelhantes NRK, e Nfq daraõ $fq = \frac{Nf.RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r}$, e $mq = \sqrt{X} = \sqrt{b} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{r} = \frac{x\sqrt{b}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Logo

$$\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2\,dx\sqrt{b}+(r\,x\,dx - x^2\,dx)\sqrt{H}}{r}\right)$$

$= \frac{x^3(\sqrt{b}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$; e fazendo $x = r$, teremos finalmente

$$Q = \frac{2tcr^2(\sqrt{aH}+2\sqrt{ab})}{3}.$$

274 Para

274 Para determinar H e b, supponhamos outro orificio circular e horizontal situado em igual profundidade; e designando as quantidades analogas a H, Q, r pelas mesmas letras accentuadas, teremos pela mesma rasaõ $Q' = \frac{2tcr'^2(\sqrt{aH'} + 2\sqrt{ab})}{3}$; e porque a lei da fricçaõ deve ser a mesma em ambos os casos, podemos suppor que HA he o raio do segundo orificio, e assim teremos $\sqrt{H} - \sqrt{b} : \sqrt{H'} - \sqrt{b} :: r : r'$, ou $r(\sqrt{H'} - \sqrt{b}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{b})$. Em fim tirando das tres equações precedentes os valores de H, H', b, acharemos

$$H = \left(\frac{Qr'^2(3r - r') - 2Q'r^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

$$H' = \left(\frac{Q'r^2(r - 3r') + 2Qr'^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

$$b = \left(\frac{Q'r^3 - Qr'^3}{2ct\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right)^2$$

275 A mesma theorica se applica aos orificios, que naõ forem circulares. Supponhamos, que hum vaso constantemente cheio se faz desaguar pelo orificio rectangular $ABCD$ (Fig. 88.). Tirando as diagonais AC, DB, do ponto O conduza-se OK perpendicular a AB, e as rectas quaisquer OP, Op infinitamente vezinhas. Do mesmo ponto O com o intervallo OP descreva-se o pequeno arco PV, e com quaisquer intervallos Om e On infinitamente pouco differentes os pequenos arcos mq, nr. Isto posto, seja $OK = b$, $KB = c$, $KP = x$, $Om = y$; e assim nos triangulos semelhantes OKP, PVp teremos $PV = \frac{bdx}{\sqrt{(bb + xx)}}$; e os arcos semelhantes PV, mq daraõ $mq = \frac{bydx}{bb + xx}$, e conseguintemente o espaço $mqrn = \frac{bydydx}{bb + xx}$.

Suppondo pois a mesma lei de fricçaõ (n. 273.), e designando por H a altura devida á velocidade em O, e por b a altura devida á velocidade em K, será a quantidade

dade de agua que ſahe pelo orificio $mqrn$ repreſentada por

$$2t\sqrt{a}\,.\,\frac{by\,dy\,dx}{bb+xx}\left(\frac{(\sqrt{(bb+xx)}-y)\sqrt{H}+y\sqrt{b}}{\sqrt{(bb+xx)}}\right),$$

cujo integral (conſiderando ſomente y como variavel) ſerá

$$\frac{t\sqrt{a}\,.\,bdx}{(bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(3yy\sqrt{(bb+xx)}\,.\sqrt{H}-2y^3(\sqrt{H}-\sqrt{b})}{3};$$

e fazendo $y=\sqrt{(bb+xx)}$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo orificio $POp=\frac{t\sqrt{a}\,.\,bdx(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}$.

Integrando eſta expreſſaõ , e depois tomando o ſeu valor quando $x=c$, teremos a quantidade de licor que ſahe pelo triangulo $OKB=\frac{t\sqrt{a}\,.\,bc(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}$. Logo deſignando por Q a quantidade total de fluido que ſahe pelo orificio inteiro $ABCD$, teremos

$$Q=\frac{8t\sqrt{a}\,.\,bc(\sqrt{H}+2\sqrt{b})}{3}.$$

As quantidades H , b ſe determinaráõ por hum meio analogo ao que acima praticamos (n. 274.) ; e comparando os reſultados que ſe acharem para differentes alturas do licor , conheceremos a lei com que a fricçaõ diminue o producto dos orificios. Quando eſtes forem verticais , ſe todos os ſeus pontos ſe puderem julgar igualmente diſtantes da ſuperficie do fluido , uſaremos da meſma ſoluçaõ ; e ſe naõ puderem , facilmente a applicaremos , ſuppondo os ditos orificios divididos em huma infinidade de elementos horizontais. O meio , que propomos de determinar as quantidades H , b , carece de grande ſagacidade na pratica ; porque as quantidades Q , Q', ſaõ tambem alteradas pela contracçaõ da veia. Para melhor averiguar o effeito da fricçaõ , ſerá conveniente uſar de hum tubo addicional izento de contracçaõ , qual abaixo ſe moſtrará. Naõ indagamos aqui a fricçaõ , que padece hum licor , deſaguando por tubos muito compridos ; porque eſte objecto ſerá tratado adiante por meio da experiencia.

Inda-

Indagações Experimentais ſobre as materias precedentes.

276 PAra confrontarmos a theorica com as experiencias, começaremos pelo exame da direcçaõ das particulas no interior dos vaſos, e da contracçaõ da veia ao ſahir dos orificios. Eſtes dous objectos ſaõ entre ſi connexos eſſencialmente; porque a forma da veia depende, como ja diſſemos, da direcçaõ que tem as particulas ao ſahir dos orificios.

Para ver o que paſſa no interior de huma maſſa fluida em movimento, mandei fazer hum vaſo cylindrico de vidro (Fig. 89. 90.) de 17 pollegadas de altura, e 5 e meia de diametro, com duas aberturas *M*, *N* no fundo, e em hum dos lados, nas quais ſe pudeſſem applicar exactamente duas chapas de cobre de meia linha de eſpeſſura, e cada huma dellas furada bem perpendicularmente com orificios de differentes diametros.

277 Conſervando pois o vaſo conſtantemente cheio, e deixando correr a agua por differentes orificios tanto horizontais, como verticais; obſervei, que os corpuſculos eſtranhos miſturados com a agua, como de limadura, de ardoſia pilada &c, ſe dirigiaõ ſempre para o orificio; que no principio deſciaõ ſenſivelmente por direcções verticais; mas que em chegando a *H O* em diſtancia de 3 ou 4 pollegadas do plano horizontal que paſſa pelo orificio, ſe apartavaõ rapidamente da direcçaõ vertical, e ſe encaminhavaõ de todas as partes a buſcar o orificio, como ſe repreſenta nas figuras 89 e 90.

278 Para obſervar a contracçaõ da veia fluida, ſervime de hum vaſo parallelepipedo rectangular de 12 pés de altura, cuja baſe era hum quadrado de 3 pés por cada lado, com ſuas aberturas no fundo e em hum dos lados, nas quais ajuſtavaõ duas chapas de cobre de meia linha de groſſura, e neſtas eſtavaõ praticados differentes orificios. O vaſo ſe entretinha ſempre cheio até huma altura dada, procurando com toda a cautela que a agua proviſional naõ cauſaſſe abalo na outra.

279 Aſſim obſervámos 1º, que a contracçaõ tanto nos orificios horizontais, como nos laterais, ſe faz do meſmo modo ſendo todos elles pequenos. 2º, que nos orificios circu-

circulares a veia se contrahe até huma distancia sensivelmente igual ao semidiametro do orificio. 3°, que a area da secçaõ da veia contrahida he para a do orificio como 2 para 3 sensivelmente. Esta ultima determinaçaõ he muito difficil de se fazer com exactidaõ, porque huma decima parte de huma linha de erro em diametros taõ pequenos daria huma rasaõ sensivelmente differente entre as duas areas. Mais abaixo veremos, como pelo desaguamento dos orificios se póde conhecer melhor a quantidade da contracçaõ.

280 He evidente, que em virtude da contracçaõ devem os orificios dar menos agua em hum tempo determinado, do que dariaõ se todas as particulas sahissem perpendicularmente aos planos dos mesmos orificios; porque o movimento obliquo das particulas lateraes se resolve em dous, hum parallelo ao plano do orificio, que contrahe a veia, e o outro perpendicular ao mesmo plano, o qual he o unico que produz o desaguamento.

281 E porque no lugar da maior contracçaõ, a veia fluida toma e conserva por hum pequeno espaço a fórma prismatica, se neste lugar se conhecesse bem a velocidade do fluido, e a area da secçaõ da veia contrahida; está claro, que considerando a dita secçaõ como o verdadeiro orificio, se acharia exactamente a quantidade de fluido, que sahe em qualquer tempo dado.

Por falta de attender ao effeito desta contracçaõ, determinou M. Newton na primeira ediçaõ dos seus Principios de hum modo erroneo a altura devida á velocidade de hum fluido ao sahir de hum orificio. Porque governando-se pelas quantidades de agua, que sahiaõ por differentes orificios, fez a dita altura igual sómente á ametade da altura do fluido, quando pela verdadeira theorica, e pela experiencia das fontes de repuxo, como elle mesmo conheceu depois attendendo á contracçaõ, a devia pôr igual á altura do mesmo fluido.

282 Alguns autores tem julgado, que a contracçaõ he hum effeito puramente accidental, e que se póde evitar fazendo sahir a agua por canudos applicados aos orificios. He verdade, que a agua sahe entaõ em fórma cylindrica; mas a contracçaõ subsiste sempre ao entrar do fluido nos ditos canudos, e abaixo veremos pela experiencia que elles sempre diminuem muito sensivelmente as quantida-

des de agua, que naturalmente deveriaõ ſahir, ſe naõ houveſſe contracçaõ.

283 Examinando primeiro as quantidades de fluido, que ſahem por differentes orificios horizontais praticados em chapas de cobre de meia linha de groſſura, por meio de experiencias repetidas com todo o cuidado e attençaõ que nos era poſſivel, eſtando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima dos ditos orificios, achamos

I. Que hum orificio circular de 6 linhas de diametro dava por minuto a quantidade de 2311 pollegadas cubicas de agua.

II. Que por hum orificio circular de huma pollegada de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 9281 pollegadas cubicas de agua.

III. Que por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſaguavaõ no meſmo tempo 37203 pollegadas cubicas.

IV. Que hum orificio rectangular, que tinha hum lado de huma pollegada, e o outro de 3 linhas, dava em hum minuto 2933 pollegadas cubicas de agua.

V. Que por hum orificio quadrado de huma pollegada por cada lado, ſahiaõ no meſmo tempo 11817 pollegadas cubicas.

VI. Que por outro orificio quadrado de duas pollegadas por cada lado deſaguavaõ no meſmo tempo 47361 pollegadas cubicas.

284 Paſſando a examinar os orificios verticais, e conſervando o vaſo conſtantemente cheio até a altura de 9 pés acima do centro dos meſmos orificios em cada huma das experiencias, achamos

VII. Que por hum orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ em hum minuto 2018 pollegadas cubicas de agua.

VIII. Que por outro orificio circular de huma pollegada de diametro deſaguavaõ no meſmo tempo 8135 pollegadas cubicas.

285 Conſervando porém o vaſo conſtantemente cheio na altura de quatro pés acima do centro dos meſmos orificios, achamos

IX. Que pelo orificio circular de 6 linhas de diametro ſahiaõ 1353 pollegadas cubicas por minuto

X. E

X. E que pelo outro orificio circular de huma pollegada de diametro sahiaõ 5436 pollegadas cubicas de agua no mesmo tempo

286 Em fim conservando o vaso constantemente cheio na altura de 7 linhas acima do centro de hum orificio vertical circular de huma pollegada de diametro, achamos

XI. Que o orificio dava no tempo de hum minuto a quantidade de 628 pollegadas cubicas de agua.

287 Por estas experiencias se vê 1°, que as *quantidades de licor, que em tempos iguais sahem por orificios differentes, debaixo de iguais alturas do fluido, saõ entre si proximamente como as areas dos mesmos orificios*; e seriaõ exactamente proporcionais aos orificios, se a fricçaõ naõ fosse menor á proporçaõ nos orificios grandes do que nos pequenos.

2°, Que *as quantidades de licor produzidas por orificios iguais em tempos iguais, debaixo de alturas differentes, saõ proximamente como as raizes quadradas das mesmas alturas.*

3°. E em geral, que *as quantidades que sahem no mesmo tempo por orificios differentes, e debaixo de alturas differentes, saõ proximamente na rasaõ composta da rasaõ dos orificios e da subduplicada das alturas*; e nisto concorda muito bem a experiencia com a theorica (n. 233.).

288 Mas daqui naõ se segue, que os valores absolutos das ditas quantidades effectivas sejaõ proximamente iguais aos que dá a theorica Calculando por exemplo a experiencia VII pela formula $Q = 2tK\sqrt{ab}$ (n. 233.), teremos $t = 60''$, $K = \frac{22}{7.16}$, $a = 180$, $b = 108$, e conseguintemente $Q = 3286$ pollegadas cubicas; valor, que differe muito de 2018 que se achou pela experiencia. Porém estes dous resultados estaõ sensivelmente na rasaõ de 13 para 8, ou proximamente de 8 para 5, e o mesmo se acha pelas outras experiencias, tanto nos orificios horizontais, como nos verticais, que tem todos os seus pontos sensivelmente equidistantes da superficie do fluido. Logo para usar da formula referida de hum modo sufficientemente exacto na pratica, naõ he necessario mais do que diminuir a verdadeira area do orificio na rasaõ de 8 para 5, ou tomar $Q = \frac{5}{4} tK\sqrt{ab}$.

289 Pelo que respeita aos orificios verticais, cujos pontos naõ podem suppor-se equidistantes da superficie do fluido, suppuzemos que as velocidades eraõ em cada ponto devidas ás alturas do fluido acima delle. Agora calculando a experiencia XI pela formula que achamos (n. 251.), deveriaõ sahir em hum minuto 966 pollegadas cubicas, quando effectivamente saõ 628. Porém calculando o producto do mesmo orificio supposto horizontal, e na distancia media da superficie do fluido que determinámos (n.252.), e applicando-lhe a correcçaõ do nº precedente, acharemos proximamente 628 pollegadas cubicas. Donde se segue, que a theorica dos orificios lateraes corresponde ás experiencias taõ bem como a dos horizontais.

290 A grande diminuiçaõ, que se acha nos resultados effectivos a respeito dos theoricos procede da fricçaõ, que padece o fluido no perimetro do orificio, e da contracçaõ da veia. Os effeitos destas duas causas vem a ser misturados de maneira, que he muito difficil assinar a cada hum a sua parte; mas a fricçaõ nos orificios abertos em paredes delgadas, e ainda em tubos de pouco comprimento he pouco consideravel em comparaçaõ do effeito, que procede da contracçaõ. Isto se mostra pela mesma experiencia; porque sahindo a agua por hum tubo applicado ao orificio, e seguindo as paredes delle, no que certamente experimenta maior fricçaõ, o producto se chega mais para o resultado theorico, por naõ ser nesse caso taõ grande o effeito da contracçaõ.

291 Mas para darmos tambem hum extracto das nossas experiencias sobre o fluxo da agua por tubos addicionais, primeiramente applicámos ao fundo do vaso hum tubo cylindrico vertical de huma pollegada de diametro interior; e conservando o vaso constantemente cheio na altura de 11 pés, 8 pollegadas, e 10 linhas acima da base superior do tubo, achamos

I. Que tendo o tubo quatro pollegadas de comprido dava em hum minuto 12274 pollegadas cubicas de agua.

II. Que tendo duas pollegadas de comprido dava no mesmo tempo 12188 pollegadas cubicas

III. E que tendo huma pollegada e seis linhas dava 12168 pollegadas cubicas no mesmo tempo.

292 Applicando ao fundo de hum vaso dous tubos cylindri-

cylindricos de duas pollegadas de comprido cada hum, cujos diametros interiores eraõ de 6 e 10 linhas, e conservando a agua na altura conſtante de 2 pés acima do orificio exterior da ſahida, achamos

IV. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro ſahiaõ em hum minuto 1222 pollegadas cubicas de agua.

V. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 3402 pollegadas cubicas.

293 E conſervando o vaſo conſtantemente cheio na altura de 3 pés e 10 pollegadas acima dos orificios exteriores dos meſmos tubos, achamos

VI. Que pelo tubo de 6 linhas de diametro deſaguavaõ em hum minuto 1689 pollegadas cubicas.

VII. E que pelo tubo de 10 linhas de diametro ſahiaõ no meſmo tempo 4703 pollegadas cubicas.

294 Pelas tres primeiras experiencias ſe vê, que ſahindo a agua encanada por hum tubo vertical, a quantidade que corre no meſmo tempo he tanto maior, quanto mais comprido he o tubo; e que eſtas quantidades ſeguem proximamente a raſaõ das raizes quadradas das alturas do fluido acima da baſe inferior do tubo, que he o orificio da ſahida. E reflectindo nas outras experiencias, ſe verá igualmente, que *as quantidades de fluido que ſahem no meſmo tempo por differentes tubos addicionais, debaixo de alturas differentes, ſaõ na raſaõ duplicada dos diametros dos orificios e ſubduplicada das alturas*; que he a meſma proporçaõ, que achamos para os orificios abertos em paredes delgadas.

295 Calculando pela theorica a experiencia VI, acharemos que hum orificio de 6 linhas de diametro na profundidade de 3 pés, e 10 pollegadas devia dar em hum minuto 2145 pollegadas cubicas de agua (n. 233.), quando pela experiencia ſe achâraõ 1689 pollegadas cubicas. Eſtes dous reſultados eſtaõ proximamente na raſaõ de 16 para 13, e o meſmo ſe acha ſenſivelmente pelas outras experiencias. Logo para calcular o deſaguamento por tubos addicionais pela formula $Q = 2tK\sqrt{ab}$, com exactidaõ ſufficiente na pratica, ſerá neceſſario diminuir o orificio K na raſaõ de 16 para 13, ou de outra ſorte tomar

$$Q = \frac{13}{8} t K \sqrt{ab}.$$

Daqui ſe moſtra, que ſuppondo iguais as alturas do fluido, e as areas dos orificios, ſerá a quantidade theorica, a que dá hum tubo addicional, e a que dá o orificio aberto em huma parede delgada no meſmo tempo, como os numeros 16, 13, 10 proximamente.

296 A meſma propriedade de aumentar o producto dos orificios ſe acha tambem, e mais ventajoſamente, nos tubos conicos, ou ſe façaõ deſaguar pela baſe maior, ou pela menor. Mas he neceſſario que tenhaõ certo comprimento, e que as baſes eſtejaõ entre ſi em certa raſaõ. Porque ſendo o tubo curto, e as baſes muito deſiguais, ſe deſaguar pela menor, a grande convergencia das particulas lateraìs produzirá huma contracçaõ exterior; e ſe deſaguar pela baſe maior, formar-ſe-ha contracçaõ no interior do tubo, e a agua naõ ſeguirá a direcçaõ das paredes delle.

297 De todos os tubos addicionais, que ſe podem applicar com o fim de procurar o maior deſaguamento poſſivel em hum tempo dado, o mais ventajoſo he o que tem a forma, que a veia fluida toma naturalmente ao ſahir de hum orificio aberto em huma parede delgada. Seja $MSON$ (Fig. 91.) a figura da veia deſde o orificio MN até o limite da contracçaõ SO; e imagine-ſe que MS, NO ſe tornaõ em paredes de hum tubo $MNSO$, as quais naõ façaõ mais que tocar a ſuperficie da agua, ſem conſtranger de modo algum o ſeu movimento. Entaõ, ſendo SO o verdadeiro orificio, por onde ſe faz o deſaguamento, e ſendo a velocidade das particulas ao ſahir delle devida á altura rb; eſtá claro que, naõ tendo neſte caſo lugar a contracçaõ, o deſaguamento pelo orificio SO terá toda a plenitude poſſivel, e ſerá igual ao que reſulta da theorica.

Eſta reflexaõ pode ter uſo na pratica, e para iſſo deve ter-ſe preſente que a area MN he para a area SO como 8 para 5 proximamente, e que a diſtancia rp entre eſtas duas areas he ſenſivelmente igual ao ſemidiametro pM ou pN. Os lados MS, NO ſaõ ſenſivelmente rectilineos.

298 Mas tornando aos tubos cylindricos, vejamos a raſaõ porque elles daõ mais agua que os orificios abertos em paredes delgadas. Seja $MOPN$ hum tubo cylindrico horizontal applicado ao vaſo AC (Fig. 92.); e imagine-

imaginemos, que estando primeiro tapado em MN com huma tampa, esta se aniquila subitamente, e deixa correr o fluido. Entrando a veia por MN tende a contrahir-se, e as particulas M, N descreveriaõ sem cessar as parabolas Mmx, Nny, se para isso tivessem liberdade. Logo se o ponto P, extremidade do tubo, cahir entre os pontos N e y, a contracçaõ se formará, e o tubo desaguará como se o orificio fosse aberto em huma parede delgada. Mas se o ponto P estiver adiante de x, como se representa na figura, a percussaõ da agua sobre yx deverá fazella encher o espaço $MuxN$; e o mesmo succederá, ainda que com mais difficuldade, quando o ponto P cahir entre y e x. Em ambos os casos a agua se determina a seguir as paredes do tubo, e a encher na sahida o orificio inteiro OP. Huma vez, que o licor toma a direcçaõ das paredes do tubo, está claro que os movimentos naturais das particulas M, N saõ alterados, e se fazem menos obliquos ao plano da abertura MN. Logo em virtude desta diminuiçaõ de obliquidade, passará em hum tempo dado mais agua por MN do que havia de passar, se ella naõ fosse encanada pelo tubo. A mesma explicaçaõ se applica aos tubos conicos. 2/

299 Naõ podem com tudo os tubos addicionais, exceptuando o que descrevemos no nº. 297, dar productos iguais aos theoricos, porque a força que expelle a agua em MN perde huma parte da sua acçaõ em forçar a agua encanada pelo tubo a encher a capacidade delle. Assim sahe mais agua por hum tubo addicional, porque sahe por elle cheio, sem padecer contracçaõ exterior; mas naõ sahe com tanta velocidade, como por hum orificio aberto em huma parede delgada. E daqui vem, que os repuxos que sahem por tubos addicionais naõ sobem a taõ grande altura, como os que sahem por orificios abertos em paredes delgadas.

300 Eisaqui huma Taboa de comparaçaõ entre o desaguamento natural de hum orificio circular de huma pollegada de diametro em hum minuto, e o desaguamento effectivo do mesmo orificio sendo aberto em huma parede delgada, ou estando na extremidade de hum tubo cylindrico de duas pollegadas de comprido, para differentes alturas de agua acima do centro do mesmo orificio.

Altu-

Alturas conſtantes da agua	Producto natural em hum minuto	Producto effectivo pelo orificio aberto em huma parede delgada	Producto effectivo pelo tubo addicional
Pés	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*	*Pollegadas cubicas*
1	4381	2722	3539
2	6196	3846	5002
3	7589	4710	6126
4	8763	5436	7070
5	9797	6075	7900
6	10732	6654	8654
7	11592	7183	9340
8	12392	7672	9975
9	13144	8135	10579
10	13855	8574	11151
11	14530	8990	11693
12	15180	9384	12205
13	15797	9764	12699
14	16393	10130	13177
15	16968	10472	13620

301 Por meio das experiencias deſta Taboa, ſem tomar nada da Theorica, ſe podem reſolver as queſtoens principais do deſaguamento dos orificios, como moſtraremos nos exemplos ſeguintes, nos quais ſuppomos que os orificios ſaõ abertos em paredes delgadas, e analogamente ſe praticará com os tubos addicionais.

302 Questaõ I. *Sendo hum vaſo conſtantemente cheio na altura de 11 pés e 6 pollegadas acima do centro de hum orificio de 16 linhas de diametro; pergunta-ſe a quantidade de agua que dará em 8 minutos?*

Por quanto o orificio de 12 linhas debaixo da altura de 11 pés dá em hum minuto 8990 pollegadas cubicas de agua (n. 300.); eſtá claro, que fazendo eſta proporçaõ

$144 \times \sqrt{11} : 256 \times \sqrt{11,5} :: 8990$? o quarto termo 16341 será o producto do orificio proposto em hum minuto (n. 287.); e multiplicando-o por 8, acharemos que em 8 minutos dará 130728 pollegadas cubicas de agua.

303 QUESTAÕ II. *Suppondo que hum vaso está constantemente cheio na altura de 11 pés e 6 pollegadas acima de hum orificio, que dá 245544 pollegadas cubicas de agua em 6 minutos; pergunta-se o diametro do orificio?*

O orificio proposto dará em hum minuto 40924 pollegadas cubicas. Assim designando por D o seu diametro, teremos $144 \times \sqrt{11} : D^2 \sqrt{11,5} :: 8990 : 40924$; e conseguintemente $D^2 = 144 \times \frac{40924}{8990} \times \sqrt{\frac{110}{115}} = 641,1$ linhas quadradas. Logo $D = 25,32$ linhas $= 2$ poll. 1 linh. e $\frac{1}{3}$.

304 QUESTAÕ III. *Hum vaso constantemente cheio na altura de 16 pés tem desaguado 45678 pollegadas cubicas por hum orificio de 16 linhas de diametro; pergunta-se o tempo?*

Buscando pela questaõ primeira o producto do orificio proposto em hum minuto, acharemos 19276 pollegadas cubicas. Depois fazendo $19276 : 45678 :: 1$ minuto ? o quarto termo será o tempo procurado, que se achará $= 2' 22'',2$.

305 QUESTAÕ IV. *Suppondo que hum vaso dá 40000 pollegadas cubicas de agua em 4 minutos por hum orificio de 10 linhas de diametro; pergunta-se a altura da agua acima do orificio?*

Por quanto o orificio proposto dá 10000 pollegadas cubicas por minuto, designando por H a altura procurada, pela mesma regra da proporçaõ (n.287.), teremos $144 \times \sqrt{11} : 100 \times \sqrt{H} :: 8990 : 10000$. Logo $H = 11 \times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pés.

306 Antes de acabarmos este Capitulo, será conveniente que expliquemos o modo, que se deve ter na distribuiçaõ das aguas; objecto, que tem applicaçoens muito frequentes, e importantes na pratica.

Seja $MNOP$ (Fig.93.) a elevaçaõ de huma mãi d'agua, na qual entra constantemente huma quantidade dada de agua Q em cada minuto, deve abrir-se na parede $MNOP$ hum

hum numero dado de orificios, de maneira que os productos particulares delles estejaõ na rasaõ de quaisquer numeros m, n, p &c, e o producto total seja igual á agua que entra na mãi. Partiremos pois primeiramente a quantidade Q em partes proporcionais a m, n, p &c, que seraõ $\frac{mQ}{m+n+p\ \&c.}$, $\frac{nQ}{m+n+p\ \&c.}$, $\frac{pQ}{m+n+p\ \&c.}$ &c. Depois acharemos a grandeza que se deve dar a cada orificio, para desaguar por elle a sua quantidade respectiva, conforme a profundidade em que se houver de abrir, pela Questaõ II (n. 303.).

Exemplo. Supponhamos que o producto total Q he de 3600 pollegadas cubicas por minuto, e que esta se deve distribuir por tres orificios circulares A, B, C, de maneira que os productos respectivos delles sejaõ como 6, 3, 1. Neste caso teremos o producto de $A = 2160$, de $B = 1080$, de $C = 360$ pollegadas cubicas por minuto; e suppondo, que os orificios se haõ de abrir em huma parede delgada, e que haõ de ter os centros na mesma horizontal DE distante da superficie da agua a quantidade $CH = 6$ pollegadas, designando os diametros respectivos por D, d, δ, e servindo-nos da experiencia primeira da Taboa (n. 300.), teremos estas proporçoens (n. 287.)

$$2722 : 2160 :: 1 \times 144 : DD\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2722 : 1080 :: 1 \times 144 : dd\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2722 : 360 :: 1 \times 144 : \delta\delta\sqrt{\frac{1}{2}},$$

das quais se tira $D = 12{,}71$, $d = 9$, $\delta = 5{,}9$ linhas.

Com igual facilidade se determinariaõ os diametros, se os centros naõ estivessem na mesma horizontal. Todas as situaçoens saõ igualmente admissiveis, quando o livel da agua permanece na mesma altura; mas como isto naõ succede assim, sempre haverá tempo em que os orificios distribuaõ a agua fóra da rasaõ conveniente, se forem muito desiguais, ou se naõ estiverem na mesma horizontal. O melhor partido, he dispollos na mesma horizontal, e quando algum devesse ser muito desigual dos outros partillo em partes pouco desiguais, cujos productos se venhaõ depois a reunir no cano do seu destino. 307

307 M. Mariotte deu o nome de *pollegada d'agua* ao producto de hum orificio circular vertical de huma pollegada de diametro, que tem o centro distante 7 linhas da superficie da agua; producto, que em hum minuto achou ser de 672 pollegadas cubicas de agua, e que pelas nossas experiencias he de 628. Mas muitos praticos ignorantes tem abusado desta expressaõ, entendendo por *pollegada d'agua* o producto que dá por minuto hum orificio de huma pollegada de diametro, sem attenderem á altura do livel acima do orificio, que he hum elemento essencial.

Em Portugal daõ o nome de *manilha d'agua* á que sahe por hum orificio, que tem hum palmo craveiro por circumferencia, ou 2,546 pollegadas de diametro. Dividem a manilha em 16 *aneis*, e cada anel em 8 *penas*; e conseguintemente será o diametro do anel de 0,636, e o da pena de 0,225 pollegadas. Esta divisaõ, naõ se attendendo á altura do livel da agua acima do orificio, incorre no mesmo absurdo dos praticos Francezes; porque o mesmo orificio em differentes alturas dá no mesmo tempo diversas quantidades de agua, e o valor desta naõ se póde julgar senaõ pelas quantidades que os orificios daõ no mesmo tempo.

CAPITULO II.

Do movimento das aguas, que sahem pelos orificios de quaisquer vasos, até elles se esgotarem.

308 NOs vasos constantemente cheios naõ depende a quantidade de agua que sahe por hum orificio, senaõ da area do orificio, da altura do fluido, e do tempo. Mas quando naõ recebem agua nenhuma provisional, e conseguintemente desaguaõ pelos orificios até se despejarem, he necessario além disso attender á figura dos mesmos vasos, a qual influe essencialmente nas circunstancias do desaguamento.

309 Para determinarmos em geral o methodo de resolver esta nova questaõ, reflectiremos que em hum instante dt póde a altura do fluido acima do orificio suppor-se

por-se constante, e que póde conseguintemente calcular-se a pequena quantidade que sahe pelo orificio pelo methodo do Capitulo precedente. Assim, supondo a altura primitiva do fluido $Kp = b$ (Fig. 94.), o espaço KL que a superficie delle tem descido no tempo $t = x$, a area da secçaõ $EFGH = X$, funçaõ de x dada pela figura do vaso, a area do orificio $= K$, e a altura donde cahe hum grave em huma unidade de tempo $= a$, acharemos que sendo o orificio infinitamente pequeno dará no instante dt a quantidade elementar $dQ = 2K\,dt\,\sqrt{[a(b-x)]}$. Porém esta he igual á camada elementar $EFGHbefg = X\,dx$.

/x

Logo $X\,dx = 2K\,dt\,\sqrt{[a(b-x)]}$, e $t = \int \frac{X\,dx}{2K\sqrt{[a(b-x)]}}$.

310 Sendo pois dada a figura do vaso, e a altura KR que tem descido a superficie do fluido, determinaremos o tempo. E como igualmente podemos com os mesmos dados determinar o solido $ABCDZOQP$, que he o fluido desaguado no dito tempo, acharemos o producto do orificio em hum tempo determinavel pela figura do vaso, e pela altura que tem descido a superficie do fluido.

Reciprocamente: Se for dado o tempo por huma funçaõ das alturas verticais, que desce a superficie do fluido, poderemos determinar a figura do vaso. Porque nesse caso teremos $dt = X'dx$, sendo X' huma funçaõ de x; e por conseguinte $X = 2KX'\sqrt{[a(b-x)]}$.

311 Exemplo I. *Supondo que o vaso $ApqC$ (Fig. 94.) he produzido pela revoluçaõ de huma parabola, cujas ordenadas AK, EL sejaõ na rasaõ subquadruplicada das abscissas pK, pL &c; determinar o tempo do desaguamento correspondente a qualquer altura KR.*

Seja a equaçaõ da parabola genitora $y^4 = p^3(b-x)$; sendo $EL = y$, $pK = b$, $LK = x$, e o parametro $= p$. Representando a rasaõ da circumferencia ao diametro por c, teremos pois $X = cy^2 = cp^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b-x)}$. Logo $t =$

$$\int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx\,\sqrt{(b-x)}}{2K\sqrt{[a(b-x)]}} = \int \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,dx}{2K\sqrt{a}} = \frac{cp^{\frac{3}{2}}\,x}{2K\sqrt{a}}.$$

Donde se vê, que os tempos saõ proporcionais aos espaços verticais, que anda a superficie do fluido. Conseguintemenɪemente he eſte o vaſo mais accommodado para ſe formar huma *clepſydra*, ou ampulheta de agua; porque dividindo a altúra primitiva pK em partes iguais, eſtas ſeraõ andadas pela dita ſuperficie em tempos iguais.

Fazendo $x = b$, teremos o tempo que o vaſo carece para ſe eſgotar $= \frac{cp^{\frac{3}{2}}b}{2K\sqrt{a}}$; e querendo, que eſte ſeja igual a hum tempo dado, das tres quantidades p, b, K podem tomar-ſe duas arbitrariamente, e a terceira ſe determinará ſem difficuldade.

Subſtituindo o valor de $dt = \frac{cp^{\frac{3}{2}}dx}{2K\sqrt{a}}$ na equaçaõ $dQ = 2Kdt\sqrt{[a(b-x)]}$, teremos $Q = \int cp^{\frac{3}{2}}dx\sqrt{(b-x)} = -\frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}\left(b^{\frac{3}{2}} - (b-x)^{\frac{3}{2}}\right)$, porque deve ſer $Q = 0$ quando $x = 0$; e pondo em lugar de x o ſeu valor $\frac{2Kt\sqrt{a}}{cp\sqrt{p}}$, teremos

$$Q = \frac{2}{3}cp^{\frac{3}{2}}\left[b^{\frac{3}{2}} - \left(b - \frac{2Kt}{cp}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

312 Reciprocamente: Se quizeſſemos achar a figura de hum vaſo, em que a agua deſceſſe proporcionalmente ao tempo, teriamos $t = \frac{x}{q}$, e $dt = \frac{dx}{q}$. Subſtituindo eſte valor de dt na equaçaõ $Xdx = 2Kdt\sqrt{[a(b-x)]}$, reſultaria $X = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{q}$. Porém, havendo a figura de ſer hum ſolido de revoluçaõ, he $X = cy^2$; logo $y^2 = \frac{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}{cq}$, equaçaõ á meſma parabola;

bola, que pelo methodo directo achámos ser a que tem esta propriedade.

313 Exemplo II. *Suppondo, que o vaso $AMNC$ he prismatico; determinar o tempo que gastará a superficie do fluido em descer de K até R* (Fig. 95.).

Neste caso a area X he constante, e a formula $t = \int \frac{X\,dx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{(b-x)}}$ dará $t = \frac{X}{2K\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(b-x)}} = -\frac{X}{K\sqrt{a}} \sqrt{(b-x)} + C$; e determinando a constante pela condiçaõ que $x = 0$ dê $t = 0$, será $t = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$. Pondo $x = b$, sera o tempo que gasta o vaso em se esgotar $= \frac{X}{K} \sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde se segue que *os tempos que gastaõ em esgotar-se dous vasos prismaticos, saõ na rasaõ composta da rasaõ das bases, da subduplicada das alturas, e da inversa dos orificios.*

314 A formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)}\right)$ dá o meio de construir huma clepsydra cylindrica. Por exemplo: se quizermos dividir a altura CN em 12 partes tais, que sejaõ corridas pela superficie do licor em tempos iguais, dividiremos CN em 144 partes iguais, que he o quadrado de 12: de 144 tiraremos 121 quadrado de 11, e o resto 23 dará na mesma linha CN o intervallo CG da primeira divisaõ; de 121 tiraremos 100 quadrado de 10, e o resto 21 será o segundo intervallo &c. Donde se vê que as partes successivas de cima para baixo seráõ 23, 21, 19, 17, 15 &c.

E se quizermos, que cada intervallo seja corrido em hum tempo dado, em huma hora por exemplo, será necessario proporcionar de tal modo a base do cylindro X, e a altura delle b com a area do orificio K, que tenhamos $1 \text{ hora} = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{\frac{121}{144}b}\right) = \frac{X}{12K} \sqrt{\frac{b}{a}}$. Donde se vê, que das quantidades $X, b,$ K sendo tomadas duas

duas a arbitrio, a terceira se determinará immediatamente por esta equaçaõ.

315 Se o vaso prismatico *AMNC* se conservasse constantemente cheio, lançaria pelo orificio *pq* huma quantidade dupla de agua em hum tempo igual ao que gasta em se evacuar pelo mesmo orificio. Porque sendo o dito — Ja

tempo $= \frac{X}{K} \sqrt{\frac{b}{a}}$, a quantidade de agua seria nesse caso $= \frac{X}{K} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot 2K\sqrt{ab} = 2Xb$, quantidade dupla do prisma *AMNC* que sahe no mesmo tempo, quando o vaso se despeja pelo orificio.

316 Exemplo III. *Determinar o tempo do desaguamento de hum vaso prismatico AMNC* (Fig. 96.), *cheio de licores differentes MNLF, FLGE, EGCA, os quaes suppomos que se naõ misturaõ, sendo postos os mais leves sobre os mais pezados.*

Sendo p, p', p'' as gravidades especificas dos fluidos *ML, FG, EC* respectivamente, reflectiremos que a pressaõ produzida no orificio *pq* pelo fluido *FG* he igual á que produziria huma columna da mesma especie que *ML*, cuja altura fosse $= GL\frac{p'}{p}$ (n. 46.), e que a pressaõ produzida pelo fluido *EC* he igual á que produziria huma columna da mesma especie que *ML*, cuja altura fosse $= GC\frac{p''}{p}$. Fazendo pois $NL = c$, $LG = f$, $GC = g$, e conservando todas as outras denominaçoens do Exemplo precedente, naõ teremos mais que substituir $c + \frac{fp'}{p} + \frac{gp''}{p}$ em lugar de b na equaçaõ $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\sqrt{b} - \sqrt{(b - x)}\right]$, que achámos para os vasos prismaticos; e resultará

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(pc + fp' + gp'')} - \sqrt{(pc + fp' + gp'' - px)}}{\sqrt{p}}\right].$$

Bem se vê, que havendo sahido inteiramente o fluido *ML*, teremos a expressaõ do tempo

t

$$t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left[\frac{\sqrt{(fp' + gp'')} - \sqrt{(fp' + gp'' - p'x)}}{\sqrt{p'}}\right];$$ e

que havendo ſahido o ſegundo, ſerá $t = \frac{X}{K\sqrt{a}}\left(\sqrt{g} - \sqrt{(g - x)}\right)$. Do meſmo modo ſe diſcorrerá, quando for maior o numero dos fluidos.

317 Exemplo IV. *Determinar o tempo, que deve gaſtar hum vaſo compoſto de dous vaſos priſmaticos AV, OH em ſe eſgotar por hum orificio muito pequeno pq* (Fig. 97.).

Produzindo AS, CV até encontrarem o plano horizontal DH, he manifeſto que a velocidade do fluido em pq he como ſe elle ſahiſſe do vaſo ſimples $AMNC$. Logo, deſignando por A a baſe do vaſo ſuperior, e por B a do inferior, acharemos (n. 313.) que o tempo da deſcida da ſuperficie de AC até SV he repreſentado por $\frac{A}{K\sqrt{a}}(\sqrt{AM} - \sqrt{SM})$, e que o tempo da deſcida de OP até DH he repreſentado por $\frac{B\sqrt{OD}}{K\sqrt{a}}$; e ajuntando eſtes dous tempos ſerá o tempo total da evacuação repreſentado por $\frac{A\sqrt{AM} - (A - B)\sqrt{SM}}{K\sqrt{a}}$.

318 Até agora havemos ſuppoſto que os orificios ſaõ infinitamente pequenos. Se forem de grandeza conſideravel, ſituados porém horizontalmente, podemos ſervirnos do methodo geral do Capitulo I, que ſe applica ſem difficuldade ao caſo preſente.

Suppondo, que a ſuperficie da agua ſe acha no primeiro inſtante em SX (Fig. 73.), e que no tempo t chega á poſição indeterminada AB; eſtá claro, que conſervando todas as denominações do nº 236, e deſignando ſómente a altura Ep, que neſte caſo he variavel, por z, teremos $Ee = -dz$. E ſubſtituindo eſte valor na equação final do nº 237, teremos

$$M^2 z dz + K^2 MN ds + s dz(K^2 - M^2) = 0.$$

Se K for infinitamente pequeno, reſultará deſta equação $s = z$, iſto he, ſerá a velocidade a cada inſtante devida á altura do fluido, como acima tinhamos ſuppoſto.

319 Como

319 Como M, N saõ aqui funções de z dadas pela figura do vaso, a equaçaõ precedente se reduzirá sempre a esta fórma

$$ds + A.Zsdz + B.Z'dz = 0,$$

sendo Z, Z' funções de z, e A, B constantes. Assim póde integrar-se em geral pelo methodo, de que já nos havemos servido (n. 105.). Aqui mostraremos o seu uso em hum caso particular.

320 Supponhamos, que o vaso proposto he hum cylindro vertical. Conforme as nossas denominações M representará neste caso a secçaõ horizontal constante do cylindro, e teremos $N = \frac{z}{M}$; e a equaçaõ do nº 318, fazendo $\frac{M^2}{K^2} = m$, e $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$, se reduzirá á fórma seguinte

$$zds - nsdz + mzdz = 0.$$

Multiplicando-a por huma funçaõ φ de z, teremos $\varphi zds - \varphi nsdz + \varphi mzdz = 0$; e supponde que $\varphi zs + \int \varphi mzdz = C$, teremos $\varphi zds + s(\varphi dz + zd\varphi) + \varphi mzdz = 0$. Comparando estas duas equações differenciais, resultará $\varphi dz + zd\varphi = -\varphi ndz$, e consequintemente $\frac{d\varphi}{\varphi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$, ou $\varphi = z^{-(n+1)}$;

e em fim substituindo este valor na equaçaõ $\varphi zs + \int \varphi mzdz = C$, designando a altura primitiva do fluido Op por H, e determinando a constante C pela condiçaõ que $z = H$ dê $s = 0$, teremos

$$(1-n)sz^{-n} + mz^{1-n} = mH^{1-n}.$$

Se o fluido no primeiro instante tivesse, por qualquer causa exterior, huma velocidade devida á altura b, seria necessario determinar a constante pela condiçaõ que $z = H$ desse $s = b.\frac{M^2}{K^2}$; e assim teriamos sempre s em funçaõ de z e de constantes. Do mesmo modo se póde achar a relaçaõ entre o tempo e a velocidade, ou entre o tempo e a altura z.

321 Quando $n = 1$, ou $M^2 = 2K^2$, o integral precedente dá para s hum valor indeterminado. Entaõ he necessario recorrer á formula differencial, que dará $2zdz$ +

$+ z\,ds - s\,dz = 0$, ou $\frac{z\,ds - s\,dz}{zz} = -\frac{2\,dz}{z}$, cujo integral he $\frac{s}{z} = l H^2 - l z^2$, completando-ſe de maneira que $z = H$ dê $s = 0$. Logo neſte caſo $s = 2z\,(l H - l z)$, ou $s = 2z . l \frac{H}{z}$.

322 Sobre o meſmo exemplo faremos huma obſervaçaõ, que com as mudanças competentes ſe applica a toda a ſorte de vaſos. Supponhamos, que a ſuperficie da agua no primeiro inſtante ſe abaixa no cylindro a quantidade infinitamente pequena q. Entaõ teremos $z = H - q$; e ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ $(1 - n)\, s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, e deſprezando os termos que involvem q^2, q^3 &c, acharemos $s = mq = q . \frac{M^2}{K^2}$. Donde ſe ſegue, que a altura devida á velocidade da ſuperficie no cylindro he repreſentada por q; e por conſeguinte, que a ſuperficie deſce nos primeiros inſtantes á maneira dos graves, ou como ſe o cylindro naõ tiveſſe fundo, e o fluido cahiſſe junto á maneira de huma colunna ſolida.

323 Daqui ſe tem formado huma objecçaõ contra a hypotheſe do parallelíſmo das camadas, em que eſtes calculos ſe fundaõ; porque parece, que ſahindo o fluido por hum orificio, naõ póde a ſuperficie delle deſcer do meſmo modo que deſceria, ſe o fundo lhe naõ puzeſſe obſtaculo. Mas como eſte obſtaculo faz que a preſſaõ do fluido communique maior velocidade á parte que ſahe pelo orificio, do que ella haveria adquirido pela propria gravidade; póde ſer que a ſahida mais promta deſſa porçaõ de licor dê lugar a que a ſuperficie do fluido nos primeiros inſtantes deſça como ſe eſtiveſſe livre. Por outra parte, ainda que eſta hypotheſe repreſentaſſe a fluxaõ de hum modo erroneo para hum tempo infinitamente pequeno, naõ ſe ſegue que naõ ſeja propria para a repreſentar em hum tempo finito de hum modo approximado, debaixo da reſtricçaõ que acima declarámos (n. 235.).

324 Pelo que reſpeita aos orificios laterais, quando ſaõ pequenos, e além diſſo ſituados de maneira que todos

dos os seus pontos se possaõ a cada instante julgar equidistantes da superficie do fluido, he o calculo absolutamente o mesmo que nos horizontais. Quando porém naõ podem julgar-se todos os pontos equidistantes da superficie, seguiremos hum methodo analogo ao que praticámos no Capitulo precedente (n. 244.).

Suppondo pois a altura primitiva do fluido $H \cancel{=}$, o espaço que no tempo t tem descido a superficie delle $= x$, a area actual da mesma superficie $= X$, he manifesto que a altura do fluido em hum instante dt se póde tomar como constante. Logo designando por z a distancia da dita superficie aos differentes elementos horizontais do orificio, e conservando as mais denominações do nº. 244, teremos $dQ = X dx = 2 dt \sqrt{a} . \int dS \sqrt{z}$; e conseguintemente

$$t = \int \frac{X dx}{2\sqrt{a} . \int dS \sqrt{z}}.$$

Na expressaõ $\int dS \sqrt{z}$ deve tomar-se x como constante.

325 Por exemplo: Seja hum vaso prismatico AG (Fig. 74.), que se evacua por hum orificio rectangular MN, e supponhamos a altura primitiva do fluido acima da base do orificio $= H$, o espaço que tem descido a superficie $= x$, a dimensaõ horizontal do rectangulo $= f$, a vertical $= b$. Tomando $KL = u$, teremos $dS = f du$, e $z = H - b - x + u$; e por conseguinte $\int dS \sqrt{z} = \int f du \sqrt{(H - b - x + u)} = \frac{2}{3} f \left[(H - x)^{\frac{3}{2}} - (H - b - x)^{\frac{3}{2}} \right]$, tomando o integral entre os limites de $u = 0$, e $u = b$. E substituindo este valor na formula geral, teremos

$$t = \int \frac{3 X dx}{4 f \sqrt{a} . \left[(H - x)^{\frac{3}{2}} - (H - b - x)^{\frac{3}{2}} \right]}.$$

Esta expressaõ, sem embargo de X ser constante neste caso, naõ póde integrar-se senaõ por meio de quadraturas, ou de series, e o mesmo succede nos outros casos.

326 Mas como por inducçaõ temos visto no Capitulo I, que os orificios laterais desaguaõ sensivelmente como os horizontais, contando-se as alturas do fluido desde os centros de gravidade dos mesmos orificios, podemos

demos com esta unica mudança servirnos na pratica do methodo, que havemos exposto para os orificios horizontais. Passemos á soluçaõ de alguns Problemas, que serviráõ de exercicio nesta materia.

327 Probl. I. *Suppondo, que o vaso IT (Fig. 98.) constantemente cheio até a altura TL transmete a agua para o vaso prismatico AN por hum pequeno tubo horizontal TM; pergunta-se o tempo, em que a superficie da agua no vaso AN chegará a huma posiçaõ dada EG.*

Seja a area do orificio representada por M, e a base do vaso AN por A; e suppondo que já tem entrado nelle huma quantidade RN de agua tal, que a pequena quantidade que entra por M lhe naõ cause abalo sensivel, estará o fluido RN em equilibrio com ZT, e a velocidade em N será devida á altura LX, ou RA, igual ao excesso da altura do vaso AM sobre a altura actual da superficie do fluido RS. Assim considerando a altura AR como dada, e como a do vaso prismatico $ARSC$, he facil de ver que a superficie RS deverá subir do mesmo modo, como a de hum fluido $ARSC$ que fosse sollicitado de baixo para cima por huma força igual á da gravidade, e que desaguasse por hum orificio igual a M aberto na base superior AC. Logo será o tempo empregado em subir de RS até EG representado pela equaçaõ (n.313.).

$$t = \frac{A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}.$$

Donde se segue, que o tempo necessario para se encher o vaso RC na hypothese do problema he duplo do tempo, em que hum vaso constantemente cheio na altura AR daria pelo orificio M a quantidade de agua $ARSC$ (n. 315.).

328 A altura AR, que suppomos conhecida, naõ póde differir muito de AM. Será facil de determinar em cada caso, havendo respeito á amplitude do fundo MN. Quando se quizer saber o tempo total, que gasta o vaso em se encher de M até E, buscar-se-ha o tempo que gasta em sahir pelo orificio M a quantidade de fluido MS, supponde que a altura do fluido acima do orificio he constantemente LT (n. 233.), e o tempo que gasta a superficie RS em chegar a EG pela equaçaõ pre-

precedente; e a soma destes dous tempos dará proximamente o tempo procurado.

329 PROBL. II. *Hum vaso IT* (Fig. 99.) *cheio até IL, sem receber nova agua se despeja por hum pequeno tubo TM para hum vaso lateral MC, que no primeiro instante contém huma quantidade de agua até DE, e desagua parte della pelo orificio N. Suppondo, que em certo tempo as superficies do fluido nos dous vasos se achaõ respectivamente em QP, KV; pergunta-se a relaçaõ das alturas verticais QR, KX, e a expressaõ do tempo.*

Seja $KX = x$, $KV = X$ funçaõ de x dada pela figura do vaso AN; $QR = y$, $QP = Y$ funçaõ de y dada pela figura do vaso IT; a area do orificio $M = M$, e a do orificio $N = N$. Sendo $QF = y - x$ a altura devida á velocidade em M, teremos $2M\,dt\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}$ por expressaõ da agua que passa por M no instante dt (n. 233.): porém esta tem por outro valor $-Y\,dy$; logo acharemos

$$dt = \frac{-Y\,dy}{2M\sqrt{a}.\sqrt{(y-x)}}.$$

Se da quantidade de agua $2M\,dt\sqrt{a}\cdot\sqrt{(y-x)}$, que o vaso IT fornece a cada instante ao vaso AN, tirarmos a que este lança pelo orificio N, o resto $2dt\sqrt{a}\,[M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}]$ será o incremento de agua no vaso AN, que deve ser igual a $X\,dx$; donde tiraremos

$$dt = \frac{X\,dx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x})}.$$

Igualando pois entre si os dous valores de dt, teremos

$$\frac{Y\,dy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{X\,dx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0;$$

equaçaõ fundamental, que seria necessario integrar, para conhecer a relaçaõ entre x e y, e depois disso a expressaõ do tempo; mas esta integraçaõ naõ se póde fazer em geral.

330 Quando os vasos saõ, ou podem julgar-se prismaticos, a equaçaõ será homogenea, e conseguintemente separavel, porque entaõ Y, X saõ constantes. Supponhamos pois $Y = A$, $X = B$, e fazendo primeiro $y = xz$, e depois $z - 1 = uu$, acharemos

dx

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A(Nudu - Mu^2 du)}{MAu^3 - NAu^2 + (MA + BM)u - NA};$$

equaçaõ racional, e conſeguintemente integravel pelos methodos conhecidos.

Daqui ſe vê em geral, que ſendo ambos os vaſos priſmaticos, x e y podem ſempre repreſentar-ſe por funções de huma meſma variavel; e que por conſeguinte póde tambem determinar-ſe t por huma funçaõ da meſma variavel.

331 Ha hum caſo muito ſimples, e que ſuccede muitas vezes na pratica. Supponhamos que o vaſo AN naõ deſpeja agua por N, ou ao menos que naõ deſpeja quantidade attendivel a reſpeito da que entra por M. Entaõ, ſendo os vaſos priſmaticos, a equaçaõ geral ſe reduz a $Ady + Bdx = 0$; e integrando de maneira que deſvaneça quando $y = RO = b$, e $x = XZ = b$, acharemos $Ay + Bx = Ab + Bb$. Tirando daqui o valor de x, e ſubſtituindo-o na primeira expreſſaõ de dt; depois integrando, e completando o integral de maneira que $t = 0$ dê $y = b$, teremos

$$t = \frac{A\sqrt{B}}{M(A+B)\sqrt{a}}\left[\sqrt{(Bb - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ab - Bb]}\right].$$

Para determinar o momento, em que a agua chega a por-ſe de livel nos dous vaſos, he neceſſario fazer $x =$ $y = \frac{Ab + Bb}{A + B}$; e entaõ acharemos

$$t = \frac{AB}{M(A+B)} \sqrt{\frac{b - b}{a}}.$$

332 Probl. III. *Tendo o vaſo cylindrico* VN (Fig. 100.) *hum pequeno orificio no fundo* K, *e merguhando-ſe verticalmente em hum fluido indefinido, cuja ſuperficie por conſeguinte naõ ſobe nem deſce; achar o tempo que gaſta a ſuperficie da agua em chegar a huma altura dada* EG.

Eſte problema he exactamente da meſma eſpecie que o primeiro. Porque ſuppondo que a agua tem já chegado a RS para naõ haver abalo ſenſivel no fluido $RMNS$ da parte do que entra por K, acharemos pela meſma raſaõ

$$t = \frac{A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{K\sqrt{a}};$$

ſendo

ſendo A a area da baſe do cylindro, K a do orificio, t o tempo que gaſta a ſuperficie em ſubir de R até E, e a a altura donde hum grave cahe em huma unidade de tempo.

333 Se o cylindro eſtiveſſe cheio até VT, e ſe deſpejaſſe por K dentro do fluido, he igualmente manifeſto que o exceſſo da altura do fluido interior ſobre a do exterior produziria o movimento deſcenſional. Aſſim achariamos o tempo, que gaſta a ſuperficie em deſcer de VT até OL, pela equaçaõ

$$t = \frac{A(\sqrt{VA}-\sqrt{OA})}{K\sqrt{a}}.$$

Quando o orificio K he infinitamente pequeno, a ſuperficie naõ paſſa do livel AC em ambos os caſos; mas tendo K huma raſaõ ſenſivel com a amplitude do cylindro, a ſuperficie chegará a AC com huma velocidade finita, a qual naõ póde ſer deſtruida ſenaõ pela gravidade no primeiro caſo, e pela preſſaõ do fluido exterior no ſegundo. Aſſim fará a ſuperficie pequenas oſcillações acima e abaixo de AC até ſe pôr de livel. Entaõ ſerá neceſſario recorrer á ſoluçaõ geral do problema ſeguinte. — 41.

334 Probl. IV. *Tendo o vaſo VN (Fig. 101.) qualquer abertura no fundo pq, e ſendo mergulhado verticalmente no fluido $BKDF$ de qualquer outro vaſo; determinar as circunſtancias do movimento.*

No inſtante em que ſe abre o orificio pq, as duas porções de fluido $ABPM$, $CFQN$ comprimem o fluido inferior $PQDK$, como ſe foſſem dous embolos applicados verticalmente ás baſes PM, QN. Em conſequencia deſtas preſſões ſobe o fluido pelo vaſo MT, ſem perder a continuidade com o reſto da maſſa; e a cada inſtante deve haver igualdade entre as forças perdidas pelas colunnas $ABPM$, $CFQN$, e as forças ganhadas pelo fluido $MGIN$ que ſobe pelo vaſo MT.

Imaginemos pois o fluido exterior $ABPM + NCFQ$ e o interior $GMNI$ divididos em huma infinidade de camadas horizontais e iguais entre ſi, repreſentadas por $Hufb + Xzcx$, e por $OLlo$, e ſupponhamos $Sp = p$, $Rp = z$, $Ep = q$, $Yp = x$, a area do orificio $pq =$ K, a velocidade em $pq = u$, e a altura que lhe he devida $= r$, a area repreſentada por $OL = y$, e a velocidade

dade della $= v$, a area reprefentada por $Hu + zX = s$; e a velocidade della $= V$, as areas $GI = M$, $BA + CF = P$, $PM + NQ = Q$, a gravidade $= g$, o elemento do tempo $= dt$.

Ifto pofto, eftá claro que o fluido defcendente animado em cada huma das fuas camadas da velocidade $gdt - dV$ deve fazer equilibrio a cada inftante com o fluido afcendente animado em cada huma das fuas camadas da velocidade $gdt + dv$. Logo teremos a equaçaõ $\int dz(gdt - dV) = \int dx(gdt + dv)$, ou

$$\int dz(gdt - dV) - \int dx(gdt + dv) = 0.$$

Porém $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy}$, $V = \frac{Ku}{s}$, $dV = \frac{K(sdu - uds)}{ss}$, $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dz}{V} = \frac{ydx}{Ku} = \frac{sdz}{Ku}$.

Logo a equaçaõ precedente ferá reduzida á forma feguinte

$$\frac{gsdz}{Ku}\int dz - Kdu\int\frac{dz}{s} + Kusdz\int\frac{ds}{s^2} - \frac{gydx}{Ku}\int dx$$
$$- Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^2} = 0.$$

As integrações indicadas devem effeituar-fe para as alturas inteiras p, q. Affim teremos $\int dz = p$, $\int dx = q$; e fupponhamos, que para as mefmas alturas he $\int\frac{dx}{y} = N$, $\int\frac{dz}{s} = N'$. Além diffo $\int\frac{dy}{y^2}$ deve defvanecer quando $y = M$, e receber o valor completo quando $y = K$; e do mefmo modo $\int\frac{ds}{s^2}$ deve defvanecer quando $s = P$, e receber o feu valor completo quando $s = Q$. Em fim, fendo Ee a altura da camada $GIig$ temos $ydx = sdz = M.Ee$. Logo a equaçaõ precedente fe mudará para efta forma

M.

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - Kdr(N+N') + M.Ee.Kr\left(\frac{1}{M^2}-\frac{1}{K^2}+\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}\right)=0;$$

equaçaõ geral, que dá o movimento do fluido nos dous vaſos, e que ſe integra pelos methodos, que já havemos praticado.

335 Se o vaſo *MT* for hum cylindro vertical, e o vaſo *BD* tiver huma largura infinita, o fluido poderá nelle conſiderar-ſe eſtacionario, e os termos $N'Kdr$, $M.Ee.Kr\left(\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}\right)$ feraõ infinitamente pequenos em comparaçaõ dos outros, e as quantidades M, p conſtantes. Entaõ ſerá a equaçaõ

$$\frac{M.Ee.(p-q)}{K} - KNdr + M.Ee.Kr\left(\frac{1}{M^2}-\frac{1}{K^2}\right)=0.$$

E ſe neſta equaçaõ ſuppuzermos K infinitamente pequeno em comparaçaõ de M, reſultará $r = p - q$, iſto he, a altura devida á velocidade no orificio igual á differença entre a altura conſtante do fluido exterior e a altura actual do interior, como haviamos ſuppoſto no problema precedente.

336 Suppondo, que o vaſo *M T* contém licor acima do livel *B F*, e que ſe deſpeja no vaſo *B D* pelo orificio pq, a equaçaõ primitiva ſerá

$$\int dx(gdt - dv) - \int dz(gdt + dV) = 0,$$

ſobre a qual ſe faraõ operações analogas ás precedentes.

337 Quando ſe houver de applicar eſta theorica a exemplos particulares, he neceſſario lembrar que ſendo o orificio pq aberto em huma parede delgada deve diminuir-ſe por cauſa da contracçaõ na raſaõ de 16 para 10 quando elle he pequeno em comparaçaõ do fundo *M N*, e na raſaõ de 16 para 13 quando for igual ao meſmo fundo. E fazendo as correcções convenientes para os caſos intermedios, achar-ſe-ha que a theorica concorda muito bem com a experiencia, ao menos depois que o fluido tiver adquirido alguma altura no cylindro *M T*.

338 Probl.

338 Probl. V. *Sendo o vaſo priſmatico AK, que communica com o tubo* KL, *atraveſſado de muitos diaphragmas EF, OP, VH, nos quais ſe tem feito as pequenas aberturas G, M, N; pergunta-ſe a lei, pela qual ſe ha de deſpejar pelo pequeno orificio D* (Fig. 102.).

Seja *TB* a altura primitiva do fluido, e ſupponhamos que em certo tempo ſe acha a ſuperficie delle em *ab*. Pelo methodo do n.º 259 acharemos na primeira poſiçaõ, que a altura devida á velocidade em *D* he repreſentada por

$$TB \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2};$$

G

e na ſegunda por

$$Tb \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}.$$

Por eſtas expreſſoens ſe vê, que na extenſaõ do eſpaço *BF* corre o fluido em *D*, como ſe o vaſo *AT* naõ tiveſſe diaphragmas, e foſſe a altura variavel do fluido igual á que acabamos de determinar. Aſſim acharemos o tempo correſpondente a BF pelo methodo do n.º 313.

Quando a ſuperficie do fluido chega a *EF*, o movimento he como ſe naõ exiſtiſſe o diaphragma, ou como ſe o orificio *G* foſſe infinito em comparaçaõ dos outros. Fazendo pois $G = \infty$, acharemos que eſtando a ſuperficie em *EF* a altura devida a velocidade em *D* he repreſentada por

$$TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2};$$ e que chegando a qualquer outra poſiçaõ indeterminada *ef*, a dita altura ſerá

$$Tf \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}.$$

Do meſmo modo, quando a ſuperficie chegar a O P faremos $M = \infty$, e acharemos a expreſſaõ da altura devida á velocidade, e do tempo correſpondente; e aſſim por diante. Em fim ajuntando todos os tempos parciais conheceremos o tempo total, que a ſuperficie gaſta em deſcer huma altura dada.

339 Pelas expreſſoens das alturas devidas ás velocidades do fluido em *D*, eſtá claro que a velocidade diminue á medida

dida que a superficie desce de B até F; que chegando a superficie a F se aumenta a velocidade em D, e que de F até P torna a diminuir, e assim por diante. As distancias dos diaphragmas podem ser de tal sorte reguladas, que as velocidades em D variem de huma quantidade dada á medida que o fluido passa de hum repartimento para outro. Supponhamos, por exemplo, que as aberturas G, M, N, D, saõ iguais entre si, e que se pede que as velocidades em D, quando a superficie se acha em B, F, P, H sejaõ tambem iguais. Para isso igualaremos entre si as alturas devidas a estas velocidades, e teremos $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2} = TH \times 1$, e por conseguinte $TH = HP = PF = FB$. Donde se vê, que sendo as alturas TB, TF, TP, TH em progressaõ arithmetica decrescente cuja rasaõ he TH, a velocidade em D será constantemente devida á altura TH, quando a superficie estiver em B, F, P, H. Esta theorica he conforme a huma experiencia de M. Mariotte. Veja-se a Fig. 83 do seu *Tratado do Movimento das aguas* com o discurso que lhe diz respeito. A explicaçaõ que elle dá da experiencia he erronea.

340 Probl. VI. *Sendo o vaso prismatico AT (Fig. 103.) atravessado de dous diaphragmas EF, OP com duas aberturas M, N, e estando os tres repartimentos AF, EP, OK cheios de licores de differente especie; determinar o movimento com que se ha de despejar pelo pequeno orificio D.*

Supponhamos, que no primeiro instante estando a superficie do fluido superior em AB, a velocidade delle em M he devida á altura BS analoga a BF, a velocidade do fluido EP em N devida á altura SV analoga a FP, e a velocidade do fluido OK em D devida á altura TV analoga a TP. Seja $BS = x$, $SV = y$, $VT = z$; e havendo de passar em hum instante dt igual quantidade de fluido pelas tres aberturas M, N, D, teremos $2M\,dt\sqrt{ax} = 2N\,dt\sqrt{ay} = 2D\,dt\sqrt{az}$, e conseguintemente $y = \frac{M^2 x}{N^2}$, $z = \frac{M^2 x}{D^2}$.

Isto posto, seja a gravidade especifica do fluido $OK = p$, a do fluido $EP = p'$, e a do fluido $AF = p''$, $BF = b$,

$=b$, $FP=c$, $PT=f$; e obſervando que as alturas BS e BF, SV e FP, VT e PT, que correſpondem duas a duas aos tres fluidos, devem ſer multiplicadas pelas gravidades eſpecificas reſpectivas delles, para ſe reduzirem a huma meſma unidade de medida, teremos $pz+p'y+p''x$ $=pf+p'c+p''b$. E comparando eſta equaçaõ com as duas precedentes, acharemos

$$x=\frac{N^2D^2(pf+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}$$

$$y=\frac{M^2D^2(pf+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}$$

$$z=\frac{M^2N^2(pf+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}.$$

Determinadas aſſim as alturas devidas ás velocidades em M, N, D para o primeiro inſtante, ſupponhamos que depois de certo tempo as ſuperficies dos fluidos ſe achaõ em ab, ef, op. Eſtá claro, que teremos ſempre $bf=BF$, $fp=FP$, e que ſómente a altura Tp do ultimo fluido he variavel. Aſſim, deſignando Tp por k, acharemos pelo meſmo methodo para qualquer poſiçaõ indeterminada dos tres fluidos, as alturas devidas ás velocidades

$$\text{em } M=\frac{N^2D^2(pk+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}$$

$$\text{em } N=\frac{M^2D^2(pk+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}$$

$$\text{em } D=\frac{N^2N^2(pk+p'c+p''b)}{pM^2N^2+p'M^2D^2+p''N^2D^2}.$$

341 Para moſtrar huma applicaçaõ muito ſimples deſtas formulas, ſupponhamos que naõ ha mais que dous fluidos, ou que ſe aniquila o ſuperior AF com o diaphragma EF; que o repartimento OK eſtá cheio de agua, e EP de ar. Aſſim teremos $b=0$, $M=\infty$, $\frac{p'}{p}=\frac{1}{850}$; e porque as preſſoens do ar exterior em N e D fazem equilibrio entre ſi, ſerá tambem $c=0$. Logo a altura devida á velocida-

locidade do ar na paſſagem por N ſerá repreſentada por $\frac{850\,k\,D^2}{D^2 + 850\,N^2}$, e a altura devida á velocidade da agua em D por $\frac{850\,k\,N^2}{D^2 + 850\,N^2}$.

Quando a abertura D he infinitamente pequena em comparaçaõ de N, a primeira altura deſvanece, e a ſegunda ſe faz igual a k, como deve ſer. Se ambas as aberturas forem iguais, as velocidades do ar em N, e da agua em D ſeraõ iguais, e devidas á altura $\frac{850}{851}\,k$ &c. Por eſta theorica ſe fará a idêa juſta da velocidade, com que ſahe o vinho pela torneira de huma pipa, quando o buraco deſtinado a introduzir o ar pela parte ſuperior he muito pequeno.

Comparaçaõ da theorica precedente com a experiencia.

342 QUando hum vaſo cheio de agua ſe deixa eſgotar por hum orificio aberto no fundo, a ſuperficie do fluido em chegando a certa diſtancia delle começa a formar huma cavidade, á maneira de hum funil, com a ponta dirigida para o orificio. A fallar em rigor, eſta cavidade deve exiſtir deſde o principio; porque havendo de ſer ſubſtituido o fluido que ſahe, por outro conſecutivamente, e naõ podendo iſſo fazer-ſe em hum inſtante, he manifeſto que as particulas adjacentes devem ter huma tendencia continua para o lugar que ſe deſoccupa, ſemelhante á que tem os corpos ſituados em hum plano inclinado. Mas em quanto o fluido tem huma altura conſideravel, a maior preſſaõ faz que ſeja mais pronto o movimento das particulas, e que a cavidade naõ ſeja por conſeguinte ſenſivel, ſenaõ quando a ſuperficie chega perto do fundo. Tambem concorre para iſſo a columna vertical do ar que correſponde ao orificio, a qual naõ he perfeitamente equilibrada pela preſſaõ contraria da columna applicada da parte inferior ao meſmo orificio, porque eſta ſendo repellida pelo movimento da agua, que ſahe por elle, gaſta niſſo huma parte da ſua acçaõ.

343 Naõ

343 Naõ ſe póde dizer em geral a altura, em que a cavidade começa a apparecer, ſobre hum orificio horizontal. Iſſo depende de muitas circunſtancias phyſicas, que naõ ſaõ as meſmas em todos os caſos. Se a agua naõ eſtiver em quietaçaõ, mas tiver algum movimento de oſcillaçaõ, ou turbinaçaõ, logo deſde o principio começará a formar-ſe a cavidade; e ſe eſtiver em quietaçaõ, a ſuperficie ſerá ſenſivelmente plana até chegar perto do fundo. Nos orificios laterais deſce a ſuperficie ſem alteraçaõ ſenſivel até a borda ſuperior delles; e entaõ forma-ſe huma cavidade ao comprido na direcçaõ do orificio, e com huma pequena inclinaçaõ para a parte delle.

344 Como a formaçaõ da cavidade produz alguma irregularidade, e incerteza no fim do deſaguamento, para verificarmos a theorica deſte Capitulo obſervámos os tempos, que gaſtava a ſuperficie da agua em deſcer huma altura dada, antes de ſe effeituar a cavidade. Para iſſo nos ſervimos de hum vaſo parallelepipedo rectangular ſituado verticalmente de 12 pés de altura, ſendo a baſe hum quadrado de tres pés por cada lado interior; e os orificios eraõ horizontais, abertos em huma chapa de cobre de meia linha de groſſura.

Sendo pois ſempre a altura primitiva do fluido acima do orificio de 11 pés, e 8 pollegadas, achámos

I. Que ſahindo a agua por hum orificio circular de huma pollegada de diametro, a ſuperficie della ſe abaixava 4 pés em $7' 25'', 5$.

II. E que ſahindo pelo meſmo orificio ſe abaixava a ſuperficie da agua 9 pés em $20' 24'', 5$.

III. Que ſahindo a agua por outro orificio circular de 2 pollegadas de diametro, deſcia a ſuperficie 4 pés em $1' 52''$.

IV. E que ſahindo pelo meſmo orificio, a ſuperficie da agua deſcia 9 pés em $5' 6''$.

345 Calculando eſtas experiencias pela formula $t = \frac{X}{K\sqrt{a}} \left(\sqrt{b} - \sqrt{(b-x)} \right)$, que compete a eſte caſo (n. 313,), e havendo reſpeito á contracçaõ da veia, acharemos na primeira experiencia $t = 7' 22'', 4$, na ſegunda $t = 20' 16''$, na terceira $t = 1' 50'', 6$, e na quarta $t = 5' 4''$. Eſtes tempos ſaõ ſenſivelmente iguais aos obſerva-