

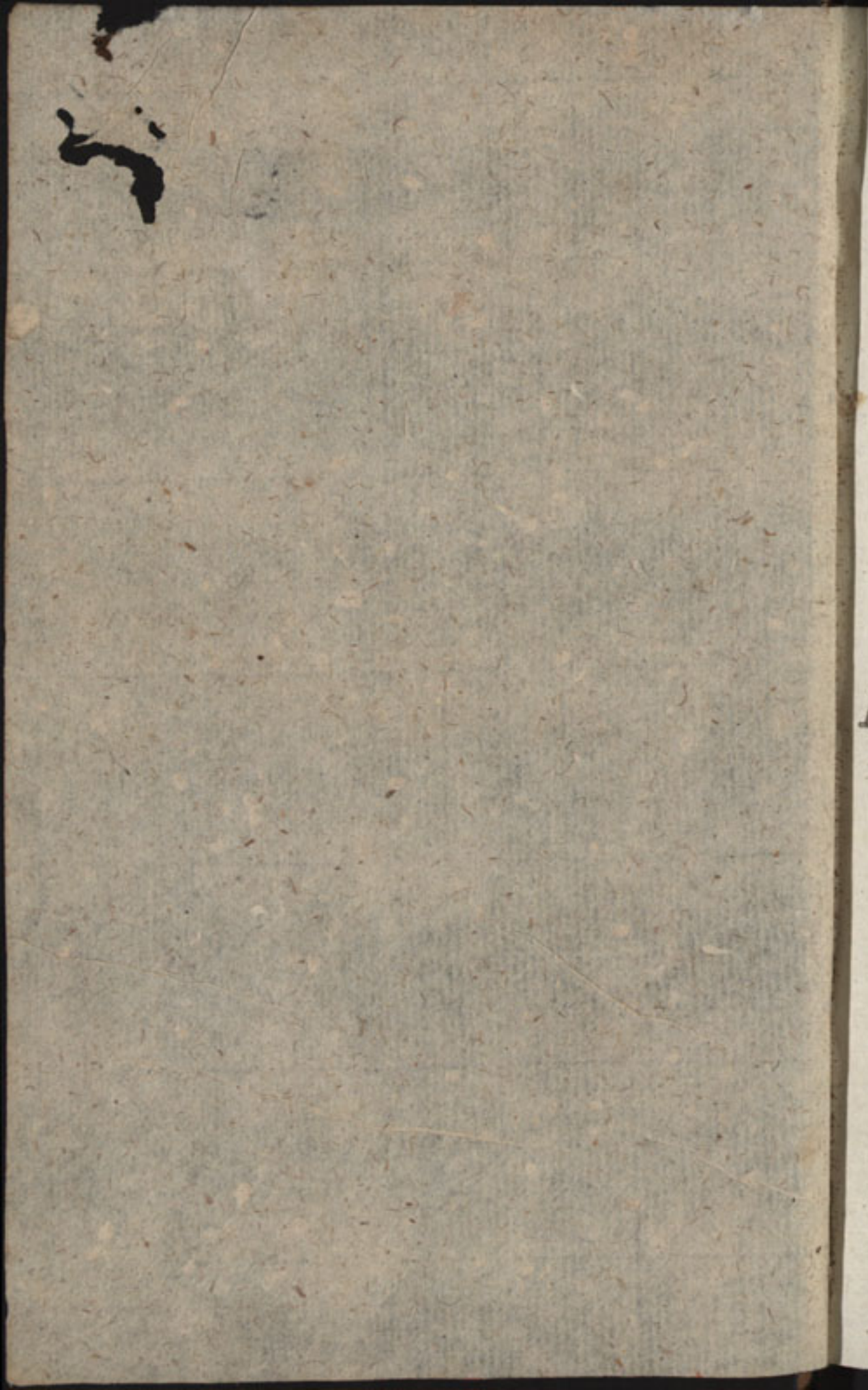
4
2
4
11

4
2
4
11

701:4-22-2

ELEMENTS

ARITHMETICAL



4

2

4

11

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

ELEMENTOS

ARITHMETICA

DE

M. BEXOUT

DE L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES ET DES ARTS

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

COMBRAS

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c &c.

Traduzidos do Francez..



COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXIII.

Por Ordem de Sua Magestade.

I N D I C E

Das materias que se contém nestes Elementos.

N	<i>OC, OENS</i> preliminares sobre a natureza dos Numeros, e suas diferentes especies - - - - -	pag. 1.
	<i>Da</i> Numeração ordinaria, e da Dizima - - - - -	2
	<i>Das OPERAÇÕES</i> da <i>Arithmetica</i> - - - - -	12
	<i>Da</i> Especie de Somar, tanto em numeros inteiros, como em <i>Decimais</i> - - - - -	ibid.
	<i>Da</i> Especie de Diminuir, tanto em numeros inteiros, como em <i>decimais</i> - - - - -	16
	<i>Prova</i> do Somar, e Diminuir - - - - -	20
	<i>Da</i> Especie de Multiplicar - - - - -	24
	<i>Taboada</i> de Pythagoras - - - - -	27
	<i>Multiplicação</i> de hum numero composto por hum numero simples	28
	<i>Multiplicação</i> de hum numero composto por outro composto - -	29
	<i>Multiplicação</i> das partes decimais - - - - -	33
	<i>Methodo</i> de multiplicar por meio do somar - - - - -	37
	<i>Uso</i> da <i>Multiplicação</i> - - - - -	39
	<i>Da</i> Especie de Repartir - - - - -	41
	<i>Divisão</i> de hum numero composto por hum numero simples - -	43
	<i>Divisão</i> de hum numero composto por outro composto - - -	48
	<i>Modo</i> de abbreviar a <i>Divisão</i> - - - - -	53
	<i>Divisão</i> das partes decimais - - - - -	56
	<i>Methodo</i> de Repartir por meio do Somar, e Diminuir - - -	63
	<i>Prova</i> da <i>Multiplicação</i> , e <i>Divisão</i> - - - - -	66
	<i>Prova</i> pela regra dos nove - - - - -	67
	<i>Uso</i> da <i>Divisão</i> - - - - -	70
	DOS QUEBRADOS - - - - -	72
	<i>Dos</i> numeros inteiros considerados em forma de quebrados - -	74
	<i>Das</i> mudanças, que se podem fazer nos termos de hum que- <i>brado</i> , sem lhe alterar o valor - - - - -	76
	<i>Redução</i> dos quebrados ao mesmo denominador - - - - -	77
	<i>Redução</i> dos quebrados à expressão mais simples que he possível	83
	<i>Outro</i> modo de considerar os quebrados, e consequencias que <i>delle</i> resultão - - - - -	88
	<i>Das</i> Operações <i>Arithmeticas</i> sobre os quebrados - - - - -	91
	<i>De</i> Somar quebrados - - - - -	92
	<i>De</i> Diminuir quebrados - - - - -	ibid.
	<i>De</i> Multiplicar quebrados - - - - -	91

VI

De Repartir quebrados - - - - -	95
Uso dos quebrados - - - - -	99
Methodo de abbreviar quebrados por approximação - - - - -	102
DOS NUMEROS COMPLEXOS - - - - -	105
De Somar os numeros complexos - - - - -	109
De Diminuir os numeros complexos - - - - -	112
Multiplificação dos numeros complexos - - - - -	114
Divisão de hum numero complexo por hum numero incompleto - - - - -	123
Divisão de hum numero complexo por outro complexo - - - - -	125
Da formação dos numeros QUADRADOS , e extracção das suas raizes - - - - -	127
Da formação dos numeros CUBICOS , e extracção das suas raizes - - - - -	142
Methodo geral para extrahir as raizes de qualquer grão que sejam - - - - -	150
Outro methodo particular para extrahir com mais facilidade a raiz cubica - - - - -	152
DAS RASOENS, e PROPORÇOENS - - - - -	157
Propriedades das Proporçoens Arithmeticas - - - - -	165
Propriedades das Proporçoens Geometricas - - - - -	168
Uso das Proporçoens antecedentes - - - - -	174
Da Regra de tres directa, e simples - - - - -	ibid.
Da Regra de tres inversa, e simples - - - - -	177
Da Regra de tres composta - - - - -	179
Da Regra de Companhia - - - - -	181
Da Regra de falsa posição - - - - -	184
Da Regra de liga - - - - -	188
Outras Regras relativas ás Proporçoens - - - - -	191
Das Progressoens Arithmeticas - - - - -	193
Das Progressoens Geometricas - - - - -	196
DOS LOGARITHMOS - - - - -	198
Taboa dos Logarithmos dos numeros naturais de 1 até 200 - - - - -	201
Propriedades dos Logarithmos - - - - -	203
Uso dos Logarithmos - - - - -	205
Dos numeros, cujos Logarithmos se não achão nas Taboas - - - - -	208
Dos Logarithmos, cujos numeros se não achão nas Taboas - - - - -	213
Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso - - - - -	218

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆNOTIONES

*De natura, & diversis Numerorum
generibus.*

I



QUANTITAS generatim dicitur omne id, quod augeri, vel minui potest: ut *extensio, duratio, pondus, &c.* Quantitatis in univ^{er}sum pertractatio ad Mathesim refertur. Arithmetica vero, quæ inter Mathematicas Disciplinas prima, & cæterarum veluti janua censetur, circa quantitatem numeris contentam (quam *discretam* vocant) occupatur.

2 Est igitur *Arithmetica* numerandi scientia: Hæc numerorum naturam, proprietatesque considerat; idque sibi propositum habet, ut viam, atque rationem præscribat non modò numeros repræsentandi, sed eos componendi, ac resolvendi: quod qui certa, expeditaque methodo peragit, is rationes subducere, aut supputare dicitur.

3 Ut vero accuratam numerorum notionem habeamus, primùm quid sit *unitas* scire oportet.

4 *Unitas* est quantitas (pro lubitu plerunque sumpta) ad quam omnes quantitates ejusdem generis referuntur. Sic, quum dicimus corporis pondus esse *quinque libras*, *libra* est unitas, quantitas scilicet, qua in comparationem adhibita corporis pondus innotescit. Eodem modo *unciam* pro unitate assumere licebat: quod si fieret, corporis ejusdem pondus esset *ocloginta*.

5 Numerus exprimit quot unitates, aut unitatis partes in quantitate qualibet data contineantur.

Si quantitas absoluta unitatum multitudine constat, numerus eam exprimens, *integer* appellatur: si autem ex unitatibus & simul unitatis partibus, aut si tantum ex unitatis partibus coalescit, numerus dicitur *fractus*, aut *fractio*: sic *tres* & *semi* fractum numerum, *tres quadrantes* fractionem conficiunt.

6 Si species unitatum numerando non designatur, ut quum dicimus *tres*, aut *ter*, *quatuor*, aut *quater*, numerus *abstractus* nominatur: si vero unitatum species definitur, ut *quatuor librae*, *bis centum mille pondo* (*cent tonneaux*), numerus *concretus* appellatur.

Plura sunt alia numerorum genera, quæ postea, quum de iis sermo erit, commodius definienda relinquimus.

De Numeratione cõmuni, & Decimali.

7 Numeratio est ars propositum quemlibet numerum exprimendi, idque paucis vel nominibus, vel characteribus. Characteres hujusmodi *Cifras* appellant. (*Cifra* genuino sensu nobis erit *nibili* signum, quod alii *zerum* vocant). Numerorum nomina hic tradere opus non est, quippe quæ sunt omnibus notissima. Quod vero ad methodum attinet, qua numeri ope notarum exhibentur, *Numerationis* principia accurate explananda suscipimus.

8 Jam characteres, quibus hodie numerando utimur, & numerorum illis respondentium nomina, sunt hujusmodi:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Cifra unum</i>	<i>duo</i>	<i>tres</i>	<i>quatuor</i>	<i>quinque</i>	<i>sex</i>	<i>septem</i>	<i>octo</i>	<i>novem</i>	

Ut autem numeri quancunque essent, his characteribus exhiberi possent, illud institutum est, ut

ut ex decem unitatibus una conflaretur, quæ *decas* appellaretur, & per decadas pariter ac per unitates numeratio fieret: ut decadas *due*, decadas *tres* &c. usque ad *novem*. Ad repræsentandas verò novas hæc unitates, placuit easdem notas adhibere, quibus in simplicibus unitatibus exprimendis utimur, hoc tantum discrimine, ut ad sinistram unitatum simplicium collocarentur.

Sic ad exprimenda *quingenta quatuor*, quæ decadas *quinque*, & *quatuor* unitates continent, scribendum est 54. Ad *sexaginta* exprimenda, quæ perfectum decadum numerum continent, nullam verò unitatem, scribere debemus 60, cifram adhibendo, quæ & nullas ibi reperiri unitates ostendat, & notam 6 ad *decadum* numerum significandum determinet. Et eodem modo numerare licet usque ad *nonginta novem*.

9 Quare, antequam ulterius progrediamur, hanc *Numerationis* hodiernæ proprietatem animadvertamus oportet: *Notam scilicet quamlibet ad sinistram alterius positam, aut quam cifra subsequatur, numerum exhibere decies maiorem, quam ipsa sola indicaret.*

10 Eadem lege à 99 usque ad *nongenta & nonaginta novem* numeratio instituitur. Nam ex decem decadibus unitatem conficimus, quam *centenam* appellamus, quia decies decem centum efficiunt: tum *centenas* hujusmodi ab *una* usque ad *novem* numeramus, & notis iisdem exhibemus, hoc tantum discrimine, ut ad decadum sinistram rejiciantur.

Si itaque *octingenta & quingenta novem* exprimere velimus, quibus *octo* centenæ, *quinque* decadas, & *novem* unitates continentur, scribere debemus 859. Si *octingenta & novem*, quibus *octo* insunt centenæ, *nullæ* decadas, & *novem* unitates, hoc modo scribendum est 809; cifra nimirum

vacuam decadam sedem indicante. Quod si unitates pariter deficerent, cifras duas adhiberemus; ut ad enuntianda *oſtingenta*, scribere necesse sit 800.

11 Quare & illud pariter ex hujusmodi institutione animadvertendum: *Notam quamlibet, quam due quæcumque aliæ sequantur, numerum exhibere centies maiorem, quàm sola indicaret.*

12 Pari artificio à 999 usque ad *novem millia nongenta & nonaginta novem* numerabimus, si primùm ex decem centenis unitatem conficiamus, quam *mille* appellabimus, quia decies centum mille conficiunt: deinde has unitates modo jam tradito numeremus, & iisdem notis repræsentemus ad centenarum sinistram positis.

Sic *septem millia, oſtingenta, & quinquaginta novem* exprimuntur per 7859; *septem millia, & novem* per 7009; *septem millia*, per 7000. Unde intelligitur, *notam tribus aliis, aut tribus cifris præpositam numerum denotare millies maiorem, quam ipsa seorsum exprimeret.*

13 Si ad hunc modum progrediamur, decemque unitates cujusque ordinis in unam colligamus, & novas inde emergentes unitates sedibus ad sinistram gradatim vergentibus assignemus, id consequemur, ut iisdem decem notis numeros omnes, qui excogitari possunt, uniformi ratione exprimamus.

14 Ut autem numerus quotcunque notis expressus facili negotio enuntietur, distribuendus erit in classes, quarum singulæ tribus notis constant, si postremam versus sinistram excipias, quæ pro notarum numero una vel duabus constare potest. Primæ classi, tertiæ, & reliquis imparibus à dextra ad sinistram sequentia nomina tribuemus, *unitates, milliones, billiones, trilliones, &c.* Secundæ verò, & reliquis paribus cômune nomen *mille*. His positis, prima cujusque classis nota (initio

fito semper à dextra factò) ejus classis unitates indicabit , altera earum decadas , tertia centenas.

Tum , initio jam à sinistra factò , singulas classes ita enuntiabimus , quasi seorsum acciperentur , suarum cuique unitatum nomen adhibendo. Sic ex. gr. ut numerum sequentem verbis exprimamus,

23, 456' 789, 234' 565, 456
Mille billiones mille milliones mille unitates.

Dicendum : Viginti tres *mille* , quadringenti & quinquaginta sex *billiones* ; septingenti & octoginta novem *mille* , ducenti triginta quatuor *milliones* ; quingentæ & sexaginta quinque *mille* , quadringentæ & quinquaginta sex *unitates*.

15 Ex modò tradita Numerationis lege , quæ ab hominum instituto omninò profluxit , illud consequitur , quò plus à dextrâ ad sinistram progredimur , eò unitates , quæ per notas singulas exhibentur , decies fieri perpetuò maiores. Quare si numerum decies , centies , millies &c maiorem reddere velimus , nihil aliud opus est , quàm post notam unitatibus consignatam *cifram* unam , duas , tres &c. subjungere. Et vicissim : eadem ratione constat , quò plus à sinistra ad dextram gradatim revertimur , eò unitates evadere decies perpetuò minores.

16 Et hujusmodi quidem est *Numeratio* usu recepta. Quæ naturæ magis consentanea cæteris omnibus numerandi generibus fundamentum est , licet in plerisque artibus ea semper non servetur numerationis ratio , quæ per decadas , decadas decadum &c. progrediatur.

17 At vero ut quantitates assumpta unirate minores numeris exprimantur , non ab simili ratione unitas ipsa in unitates minores dividitur. Earum numerus pro lubitu assumitur , dummodo iis quantitatibus,

tatibus, quæ proponuntur, exprimendis convenient. Sed illud imprimis curandum circa ejusmodi divisiones, ut calculis peragendis fiant, quam maximè poterint, commodissimæ. Ea de causa unitas non est in plurimas illico particulas distribuenda, quæ minimis quantitibus exprimendis sufficiant; sed potius ea ineunda divisionis ratio, ut primum in pauciores quasdam partes fiat, quæ iterum in alias minores distribuantur, & ita deinceps. Hujus rei exemplum præbent nummi, in quibus *Libra* in 20 partes dividitur, quæ *solidi* appellantur; *solidi* vero in 12 partes, quas *denarios* nominamus. Idem in ponderibus observatur: nam *Libra* in duos *bes* distribuitur, *bes* in 8 *uncias*, *uncia* in 8 *drachmas* &c: unde numeratio fit in primo casu per *vigesimas*, & *duodecimas*, in secundo vero per *semisses*, *octavas* &c.

18 *Complexus* (*Denominatum* alii, alii *Heterogeneum* vocant) est numerus, qui ex hujusmodi partibus constituitur, quæ ad diversi generis unitates referuntur: *Incomplexus* verò, qui unam tantum unitatum speciem complectitur. Sic 8 *lb.*, aut 8 *Libræ* numerus est *incomplexus*; 8 *lb.* 17 *s.* 8 *d.*, vel 8 *Libræ*, 17 *solidi*, 8 *denarii*, *complexus*.

19 Jam artis cujusque peculiaris quædam est ratio primam sibi propositam unitatem dividendi. Neque enim eodem modo *hexapedam*, ac *libram* dividimus; *libram*, ac *diem*, vel *horam*: *diem* præterea, & *horam* aliter dividimus, atque *bessem*, & ita de reliquis. Omnes autem hujusmodi divisiones indicabimus, quum de numeris complexis sermo erit.

20 Porrò ex omnibus unitatis divisionibus, ac subdivisionibus ea calculis aptissima proculdubio est, quæ fit per partes *decimales*, unitatem scilicet dividendo in partes decies, ac decies perpetuò minores. Illius usus in Mathematicis calculis fre-

frequentissimus est. Decimalium verò genesis & calculus idem omninò est, ac vulgarium, vel integrorum numerorum, quemadmodum deinceps ostendemus.

21 Ut decimalibus exprimantur partes unitate minores, unitatem ipsam, veluti *libram*, *hexapedam*. &c concipimus ex decem partibus compositam, ad eum modum quo *decadem* ponimus ex decem unitatibus simplicibus conflatam, aut *libram* ex 20 *solidis*. Hujusmodi unitates, ut à decadibus discriminentur, *decime* appellantur; notis iisdem, quibus simplices unitates, exprimuntur; & quoniam decies minores sunt, ad earum dextram collocantur.

Sed ne ambiguitati locus relinquatur, & *decime* per imprudentiam pro unitatibus principalibus sumantur, harum sedem placuit semel stabilire, ac peculiari nota designare, quæ plerumque virgula est (vel punctum, vel lineola) ad dextram notæ unitates exhibentis posita, seu, quod idem est, inter *unitates*, & *decimas*: sic ad exprimendas *viginti quatuor unitates*, & *tres decimas*, scribendum est 24,3.

22 Nunc similiter *decimas* considerare possumus, tanquam unitates ex decem aliis compositas, quarum singulæ decies minores sint *decimis*, & eas eadem ratione ad harum dextram adponemus. Unitates hujusmodi decies minores *decimis* erunt centies minores primis illis unitatibus, proinde que *centesime* dicentur. Quare si designare velimus, *viginti quatuor unitates*, *tres decimas*, & *quinque centesimas*, scribemus in hunc modum 24,35.

23 Rursus, si eadem ratione *centesimas* fingamus decem partibus constare, partes hujusmodi erunt millies minores prima unitate, ac idcirco *millesime* appellabuntur: & quia sunt decies minores *centesimis*, ad earum dextram constitueatur. Et ita
deip

deinceps, in ratione decupla subdividendo, novæ efficiuntur unitates, quas gradatim nominabimus *decimas-millesimas*, *centesimas-millesimas*, *millionesimas*, *decimas-millionesimas*, *centesimas-millionesimas*, &c. easque sedibus magis ac magis a virgula dextrorsum recedentibus adscribemus.

24 Id genus partes, in quas unitas dividitur perpetuò in ratione decupla, *fractiones decimales*, aut *decimales* sine addito nominantur.

25 Quod verò ad earum enuntiationem attinet, res ferme ut in numeris vulgaribus conficitur. Post enuntiatas notas ad sinistram virgulæ fitas, decimales similiter enuntiantur, addito tamen ad finem nomine unitatum decimalium postremæ sedi congruentium: sic ad enuntiandum hunc numerum 34, 572 dicendum est, triginta quatuor unitates, & quingentæ septuaginta duæ millesimæ: si ex. gr. de *hexapedis* sermo esset, haberentur triginta quatuor *hexapedæ*, & quingentæ septuaginta duæ millesimæ ipsius *hexapedæ* partes.

Hujusce rei perspicua ratio erit, si animadvertamus in numero 34, 572 notam 5 æque sumi posse pro quinque *decimis*, aut pro quingentis *millesimis*: cum enim *decima* valeat 10 *centesimas* (n. 22.) & *centesima* 10 *millesimas* (n. 23.), consequens est ut *decima* contineat decies decem sive 100 *millesimas*: proinde 5 *decimæ* nihil aliud exhibent, quam 500 *millesimas*. Eodem modo nota 7 efferi potest per septuaginta *millesimas*, quia *centesima* quæque (n. 23) valet 10 *millesimas*.

26 Quantum autem ad nomen unitatum postremæ notæ respondentium, id facili negotio inveniemus, si notis singulis a virgula versus dextram singula nomina sequentia gradatim tribuamus, *decimæ*, *centesimæ*, *millesimæ*, *decimæ-millesimæ*, *centesimæ-millesimæ*, *millionesimæ* &c.

27 Si nullæ habeantur integræ unitates, sed tan-

tantum partes unitatis, cifra unitatum sedem ante virgulam occupare debet: sic ad denotandas 125 *millesimas*, scribendum est 0, 125. Si 25 *millesimas* significare libuisset, scribere deberentus 0, 025, cifra inter virgulam & cæteras notas interjecta, non modo ut nullas ibi esse *decimas* constaret, sed etiam ut notis sequentibus suis cuique genuinus valor, ac sedes attribueretur. Eodem modo si significare velimus 6 *decimas-millesimas*, scribere debemus 0, 006 &c.

28 His rite perspectis, considerare oportet, quænam in dato numero mutatio contingat, si virgula suo loco moveatur.

Quoniam virgulæ id officium est, ut unitatum sedem determinet, cumque cæterarum notarum valor ex earum ab ipsa virgula distantis æstimeretur, illud consequitur, si virgula uno loco, duobus, tribus &c. versus sinistram retrahatur, numerum fieri decies, centies, millies &c. minorem; & ab opposito, decies, centies, millies &c. maiorem, si uno, duobus, tribus locis &c. versus dextram moveatur.

Quamobrem, si fuerit numerus 4327, 5264, & virgula uno loco versus sinistram recedat, ut scribatur 432, 75264; facile apparet, ea quæ *millia* sunt in primo numero, *centenas* evadere in secundo; *centenas* etiam in *decadas* mutari, *decadas* in *unitates*, *unitates* in *decimas*, *decimas* in *centesimas*, & sic deinceps. Igitur prioris numeri partes singulæ (adeoque totus numerus) hac mutatione decies minores redditæ sunt. Contrà vero, si virgula uno loco dextrorsum concedat, ut scribatur 43275, 264; quæ *millia* in primo numero fuerant in *decadas* millium convertuntur, *centene* in *millia*, *decades* in *centenas*, *unitates* in *decadas*, *decime* in *unitates*, & ita deinceps. Numerus igitur emergit proposito decies maior.

29 Simili plane ratiocinio perspicuum est, quod, si virgula duabus vel tribus sedibus sinistrorsum retrahatur, numerus redditur centies vel millies minor; & ab opposito centies vel millies maior, si virgula duabus aut tribus sedibus dextrorsum progrediatur; & sic deinceps.

30 Illud postremo observandum nobis est, quod licet plurimæ cifræ ad postremam decimalium notam adjungantur, numeri valorem nullo modo possunt immutare, si virgula loco non moveatur. Sic 43, 25 idem omnino est atque 43, 250, vel 43, 2500, vel 43, 25000 &c.

Etenim, cum *centesima* quæque valeat 10 *millesimas*, vel 100 *decimas-millesimas* &c. 25 *centesime* idem omnino exhibent atque 250 *millesimæ*, vel 2500 *decimæ-millesimæ* &c. Uno verbo: Res ita se habet, quasi pro 25 *aureis* (25 *pistoles*) dicamus 250 *francos*; aut pro 25 *centumpondiis* (25 *quintaux*), 2500 *libras*.

De Arithmeticæ Operationibus.

31 *Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio* quatuor præcipuæ sunt Arithmeticæ operationes, quibus reliquæ omnes innituntur. Omnis enim, quæ circa numeros quæstio versatur, ad illarum aliquam, vel plures exequendas tandem revocatur. Quapropter plurimum interest, his facili negotio exequendis assuescere, earumque rationem perspectam, ac penitus familiarem habere.

32 Arithmetica, ut paulò superius diximus, id sibi propositum habet, ut viam tradat numeros facili explorataque ratione ad calculum revocandi. Quod quidem in eo potissimum consistit, ut in calculis tractandis numeri maximè compositi ad simpliciores, aut paucissimis, quoad fieri potest, notis expressos redigantur. Id autem deinceps explanandum est.

A D-

ADDITIO

Numerorum integrorum, & Decimalium.

33 *A*ddere nihil aliud est, quàm plures numeros per unum illis simul sumptis æqualem exprimere. Quoties numeri, qui addendi proponuntur, *digiti* sunt, id est, una tantum nota constant, nulla regula opus est: at si plures habeant notas, tum ad collectum eorum valorem, qui *summa* dicitur, inveniendum, en regulam in *Additione* tenendam: scribe numeros omnes datos supra se invicem, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenæ centenis &c. in eadem columna verticali sibi mutuo respondeant. Et infra numeros ita scriptos duc lineam transversam, quæ summam ab addendis partibus dirimat.

Tum primò: adde notas omnes, quæ sunt in columna unitatum. Si summa 9 non excedat, eam scribe infra lineam sub eadem columna unitatum; si excedat, quia tum decadas continebit, id tantum scribe, quod decadum numerum excedit, & decadas quasi totidem unitates adde notis columnæ proximè sequentis. Idem observa in additione secundæ columnæ, & ita deinceps usque ad postremam, infra quam summa tandem inventa scribenda erit integra, sive una, sive pluribus notis constet. Res exemplis fiet illustrior.

Exemplum I.

*A*ddendus esto numerus 54925 numero 2023; eos scribo in hunc modum 54925

$$\begin{array}{r} 54925 \\ 2023 \\ \hline 56948 \end{array} \text{ Summa.}$$

Tum

Tum ducta linea transversa, ab unitatum additione incipio, hoc modo: 5 & 3 conficiunt 8, & scribo 8 sub eadem columna; deinde in columna decadum, 2 & 2 conficiunt 4, quæ pariter subscribo; tum in columna sequenti, 9 & 0 sunt 9, quæ similiter scribo; deinde in proxima columna, 4 & 2 efficiunt 6, quæ subjicio; postremò in ultima columna, 5 & 0 sunt 5, quæ supposita vides.

Perस्पicium est, numerum 56948 hac operatione inventum, summam esse datorum numerorum, quos addendos sumpsimus, quia complectitur omnes eorum unitates, decadas, centenae, millia, & decadas millium, quæ quidem omnia gradatim operando collegimus.

Exemplum II.

Quæritur summa horum quatuor numerorum: 6903 . . . 7854 953 7327: eos ita scribo, ut in subiecto schemate apparet.

$$\begin{array}{r}
 6903 \\
 7854 \\
 953 \\
 7327 \\
 \hline
 23037 \quad \text{Summa.}
 \end{array}$$

Et initium ducens à dextra, ut in priori exemplo, rem ita conficio: 3 & 4 sunt 7, & 3 fiunt 10, & 7 sunt 17; scribo 7 unitates sub prima columna; & decadem 1 seruo, ut instar unitatis, addatur notis alterius columnæ, quæ pariter decadas significant.

Ad secundam columnam venio, & notas colligo ad hunc modum: 1, quod retinui, & 5 (nam cifram appellare nihil attinet) conficiunt 6, & 5 con-

conferunt 11, & 2 conferunt 13; scribo dexterio-
rem notam 3 sub eadem columna, & alteram 1 ser-
vo ad proximam columnam, ubi instituto similiter
calculo progredior, 1 & 9 fiunt 10, & 8 fiunt 18,
& 9 fiunt 27, & 3 fiunt 30: sub hac columna scri-
bo dexteriolem notam 0, & alteram 3 retineo se-
quenti columnæ adnumerandam, ad hunc modum;
3 & 6 fiunt 9, & 7 valent 16, & 7 fiunt 23. Hujus
numeri scribo priorem notam 3 ad columnam per-
tinentem, & quoniam altera 2 columnam ulterius
non habet, cui addatur, ipsa sedem proximè fini-
stram occupabit; absolutaque operatione numerus
inventus 23037 summam quatuor datorum exhibe-
bit.

34 Siquæ præterea sint partes decimales, cum
ipsæ pariter ac cæteri numeri per decadas nume-
rentur, prout à dextra versus sinistram progredi-
mur, eadem omnino regula in earum additione ob-
tinet, ea semper lege servata, ut unitates ejusdem
ordinis sub eadem columna sibi mutuo respondeant.

Exemplum III.

Sint addendi tres numeri 72,957 12,8
& 124,03; eos ita scribemus, ut hîc videre
licet.

$$\begin{array}{r}
 72,957 \\
 12,8 \\
 124,03 \\
 \hline
 209,787 \text{ Summa.}
 \end{array}$$

Et instituta, ut in superioribus exemplis, ope-
ratione inveniemus eorum summam esse 209,787.

SUBTRACTIO

Numerorum integrorum, & Decimalium.

35 *S*ubtractio est operatio, cujus ope numerus à numero aufertur. Quod, facta hujusmodi operatione, reliquum est, *residuum*, *excessus*, aut *differentia* nominatur.

Ut hæc operatio fiat, numerus subtrahendus alteri subscribatur, ea lege servata, quam in *additione* tradidimus; deinde, ducta linea transversa, singulæ notæ inferiores (à dextra versus sinistram) à superioribus illis respondentibus auferantur, hoc est, unitates ab unitatibus, decades à decadibus &c; & quæ supersunt infra scribantur eodem ordine; cifra verò, ubi nihil reliquum est.

Si nota inferior maior sit, quàm superior illi respondens, huic adjungantur decem unitates, quas quidem habebimus, si mente unitatem unam mutuabimur a nota vicina ad sinistram, quæ idcirco in operatione sequenti unitate multata censeretur debet.

Exemplum I.

*S*ubtrahendus sit numerus 5432 à numero 8954. Eos scribes in hunc modum:

8954

5432

3522

Residuum.

Deinde ab unitatum sede exorsus ita ratiocinaberis: Si 2 a 4 auferantur, supersunt 2, & subscribes 2; tum in decadam sede, si 3 a 5 subducantur, relinquuntur 2, quæ similiter sub decadibus scribes; inde in tertia columna, si 4 a 9 subtrahantur, remanent 5, quæ infra notabis; postremo,

mò, si 5 ab 8 auferantur, supersunt 3, quæ eodem modo subscribes; & erit residuum, siue differentia inter numeros datos 3522.

Exemplum II.

S Ubtrahendus fit numerus 7987 à 27646. Scribantur ad hunc modum 27646

7987

19659 Residuum.

Et quia à 6 auferri 7 non possunt, unitas a nota vicina 4 petenda est ut fiant 16, & tunc dicendum est, si 7 a 16 auferantur, supersunt 9 infra scribenda. Jam in decadam sede dicendum non est, si 8 a 4 auferantur, sed, si 8 à 3, quia unitas in priori operatione ablata fuit a nota 4. Quoniam vero 8 a 3 auferri similiter nequeunt, unitas quoque a nota vicina 6 petenda est, ut fiant 13, & tunc ablatis 8 a 13 supersunt 5, quæ infra scribentur. Hinc in tertia columna dicendum similiter est, ablatis 9 a 5, seu potius a 15 (unitatem scilicet proximæ sedis usurpando) relinquuntur 6 infra notanda. Ob eandem rationem in quarta sede dicendum, ablatis 7 a 16 supersunt 9, quæ subscribentur; & quia in postrema sede nihil habemus subtrahendum, scribenda erit nota superior 2, habita tamen ratione unitatis jam ablatæ, ut maneat tantum 1; proindeque integrum residuum habetur 19659.

36 Si nota, unde unitas petenda est, fuerit cifra, ab illa quidem non accipitur, sed a nota significativa proximè sequenti. Licet vero tunc nihil aliud re ipsa fiat, quàm 100, 1000, aut 10000 petere, prout una, duæ, vel tres cifræ consequuntur, nihilominus operatio instituetur, ut in exemplis superioribus, hoc est, 10 tantummodo

notæ

notæ indigenti adjicientur, five unitas proximæ sedis. Et quia 10 illa sumpta censentur ex 100, vel 1000 &c. ablatis a proxima nota significativa, ut habeatur ratio residuorum 90, vel 990 &c; cifrae omnes consequentes pro totidem 9 habendæ sunt. Id exemplo subsequenti fiet perspicuum.

Exemplum III.

	99
S I à numero - - - - -	20064
auferre velimus - - - - -	17489
	2575
	Residuum.

Primùm dicendum erit, ablatis 9 a 4, seu potius a 14 (unitate scilicet a nota sequenti accepta) supersunt 5. Deinde, cum 8 a 5 in proxima sede auferri nequeant, neque etiam possit unitas a nota sequenti utpote cifra postulari, ea accipietur a nota 2, & habita ratione ad sedem ubi operamur 1000 valebit. Ex his 1000 capientur tantummodo 10 notæ indigenti adjungenda, ut fiant 15, a quibus si 8 auferantur, supersunt 7.

Quia vero ex 1000 tantummodo 10, aut ex 100 tantummodo unitatem adhibuimus, residuum 99 adhibebimus, ut ab eo duæ notæ sequentes auferantur, id quod perinde est, ac cifras sequentes pro totidem 9 habere. Sic proinde dicendum est, ablatis 4 a 9, manent 5, ablatis 7 a 9 habentur 2, & tandem 1 ab 1 ablato nihil superest.

37 Si numeri ad operationem propositi partibus etiam decimalibus consent, eadem omnino regula tenenda erit. Ut tamen praxis planior evadat & expeditior, curandum prius erit, ut æque multæ sint notæ decimales in utroque numero, tot nimirum,

rum, quot opus fuerint, cifris additis eorum alteri, qui pauciores habeat notas decimales: quod ejus valori nihil officit (n. 30.)

Exemplum IV.

S I a numero - - - - - 5403,25
Subtrahendus fit - - - - - 385,6532

Primum duas cifras addo decimalibus numeri superioris; deinde operationem instituo circa numeros ita præparatos juxta regulam pro numeris integris traditam,

5403,2500	
385,6532	
5017,5968	Residuum;

Qua absoluta, residuum invenio 5017, 5968.

Additionis, & subtractionis Examen.

38 **E** Xamen operationis Arithmeticæ est operatio alia ad id instituta, ut primam re-
cte processisse certiores simus.

Ut examen *Additionis* fiat, singulæ rursus columnæ adduntur, sed ordine inverso a sinistra versus dextram. Primæ columnæ aggregatum aufertur a membro summæ probandæ illi respondente, & residuum, si quod fuerit, in eadem sede subscribitur, quod decedum loco notæ sequenti ejusdem summæ adplicatur, ut novum fiat membrum, unde rursus columnæ sequentis aggregatum subtrahatur, & ita porrò usque ad postremam sedem, ubi subtractione facta nihil superesse debet.

B

Sic;

Sic , cum paulo superius inventum fit, quatuor hocce numeros	6903 7854 953 7327
Summam conficere . . .	<u>23037</u> 03110 000

Ad illam probandam , eosdem rursus numeros colligo , initium ducens à sinistra , hoc modo : 6 & 7 efficiunt 13 , & 7 efficiunt 20 , quibus subductis à 23 , relinquunt 3 , aut tres decadas , quæ cum cifra posteriori conjunctæ efficiunt 30. Deinde in secunda columna : 9 & 8 sunt 17 , & 9 sunt 26 , & 3 sunt 29 , quibus ablatis à 30 reliquum est 1 , aut decas , quæ cum sequenti nota 3 conficit 13. Tum in tertia columna : 5 & 5 fiunt 10 , & 2 fiunt 12 , quibus detractis à 13 , relinquitur 1 , & cum sequenti nota 7 fiunt 17. Denique in postrema sede : 3 & 4 conficiunt 7 , & 3 efficiunt 10 , & 7 efficiunt 17 , quæ si à membro inferiori 17 subtrahantur , nihil superest : unde colligo priorem *Additionis* operationem accurate fuisse confectam. Id autem liquet esse colligendum , quum facto examine nihil relinquitur , quia singulatim ablatis millibus , centenis , decadibus , unitatibus , ex quibus summa tota constari debet , si error operationi non irrepfit , nihil denique superesse necesse est.

39 *Subtractionis* examen per *Additionem* fit , residuum scilicet per operationem inventum , & ablatum jungendo ; si enim operatio recta , hujusmodi aggregatum numerum restituet , unde alter fuit ablatum. Sic in tertio exemplo superius tradito

dito, video operationem fuisse recte confectam, quia aggregatum ex ablato 17489 & residuo 2565 totum 20054 restituit, unde illorum prior fuit subductus.

20054

17489

2565

20054

§§ Utriusque Operationis Examen vulgò fit per *abjectionem novenarii*, quæ methodus praxi valde commoda est.

Ex numero autem quocumque *novenarius*, quoties potest, facile aufertur, si notæ ejus omnes continuò addantur, & ubi summa fuerit 9 abjiciatur, ubi excesserit 9, ejus similiter notæ mente addantur, & quod inde fit retineatur ad operationem prosequendam. Sic, ut abjiciantur novenarii à numero 86097546, dicendum est: 8 & 6 sunt 14, & abjectis novenariis, id est, additis etiam notis 1 & 4, fiunt 5; 5 & 7 (nam 0 & 9 appellare supervacuum est) sunt 12, & abjectis novenariis, fiunt 3; 3 & 5 sunt 8, & 4 sunt 12, & abjectis novenariis, fiunt 3; 3 & 6 sunt 9, & abjectis novenariis, relinquitur 0.

Hujus vero operationis ratio facile constabit, si ad *Numerationis* principia attendamus. Nam ex gr. in numero 6745 nota 6 idem valet ac *millies 6*, hoc est, *nongenties nonagies novies & semel 6*; sed *nongenties nonagies & novies 6* novenarios exactè conficiunt; iis igitur abjectis, manet *semel 6*. Similiter nota 7 exprimit *centies 7*, seu *nonagies novies & semel 7*; adeoque abjectis *nonagies & novies 7*, superest *semel 7*. Eodem modo, cum nota 4 exprimat *novies & semel 4*, abjectis *novies 4*, residuum erit *semel 4*. Igitur, si addantur notæ

B 2

omne
s

omnes, quasi singulæ unitatis sedem occuparent, summa 22 erit residuum ex abjectione novenariorum, qui in *decadibus*, *centenis*, & *millenariis* propositi numeri continentur. Quoniam vero summa residuorum partialium 22, & ipsa novenarios continet, ejus notæ similiter adduntur, ut fiat residuum 4 ex abjectione omnium novenariorum ejusdem numeri 6745.

Jam in *Additione* probanda, abjiciantur *novenarii* à numeris additis, & residuum seorsum notetur; idemque fiat in summa. Si æquale residuum utrobique non fuerit, certum erit indicium, *Additionem* (si modò Examen probè factum est) errore aliquo laborare, cum fieri nequeat ut summa partibus addendis æqualis sit, si abjectis utrinque novenarii multiplis æquale residuum non emergit. Si autem idem maneat residuum, certum omnino non est, *Additionem* fuisse rectè confectam, sed maximè probabile, si nimirum per novenarii multipla erratum non fuerit; siquidem in examine novenarii abjiciuntur, nulla habita ratione an æquè multi utrobique abjiciantur. Cum tamen illud erroris genus, quod per multipla novenarii progreditur, vix, aut ne vix unquam contingat, nisi de dita opera erratum sit; ubi æquale prodit residuum, operatio recta censebitur. Sic in exemplo superiori, abjectis novenariis à numeris 6903 . . . 7854 . . . 953 . . . 7327, residuum habetur 6; quod, eum similiter in summa 23037 deprehendatur, argumento est operationem fuisse rectè confectam.

In *Subtractionis* examine, abjiciuntur novenarii primùm à numero minuendo; deinde à numeris ablato & residuo simul. Et prout idem utrobique, vel diversum fuerit residuum, idem erit iudicium, quod modò pro *Additione* indicavimus. Sic in exemplo superiori, ablatis novenariis à minuendo 20054, residuum habetur 2, quod idem
su-

supereſt, ablatis ſimiliter novenariis à reſiduo 2565 & ablato 17489 ſimul; ac proinde *Subtractio* non improbabitur. ¶

De Multiplicatione.

40 *Multiplicare* numerum per numerum, nihil aliud eſt, quàm eorum alterum toties accipere, quot ſunt unitates in altero. Sic multiplicare 4 per 3 idem eſt, ac 4 ter ſumere.

41 Numerus, per quem multiplicatur alter, *multiplicator*; qui multiplicatur, *multiplicandus*; & qui ex multiplicatione gignitur, *productum*, ſive *factum* appellatur.

42 Vocabulum hoc *productum* latiori ſenſu vulgò ſumitur. Sed nobis in præſentia illud tantum ſignificabit, quod ex multiplicatione conficitur.

Tam multiplicator quàm multiplicandus, communi vocabulo, *factores* producti nominantur. Sic 3 & 4 factores ſunt numeri 12, quia 4 ter ſumpta conficiunt 12.

43 Ex modò tradita multiplicationis notione factis intelligitur, eam peragi poſſe, multiplicandum toties ſcribendo, quot ſunt in multiplicatore unitates, & additionem deinde inſtituendo. Sic ad multiplicandum 7 per 3, ita ſcribere poſſemus.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 7 \\
 7 \\
 \hline
 21 \quad \text{Summa.}
 \end{array}$$

Et ſumma 21 ex operatione confecta eſſet *productum*.

Sed iſthæc multiplicandi ratio eò longior moleſtiorque evaderet, quo maior numerus foret *multiplicandi*.

tiplicator. Quapropter ea, quæ propriè multiplicatio dicitur, methodo compendiarum idem exequitur.

44 Quoad numerum in *abstracto* considerantur, nulla habita ratione rerum per illos significatarum, parum interest, quisnam ex duobus propositis, multiplicandi, aut multiplicatoris vices gerat. Unde si sit multiplicandus 4 per 3, nihil interest, multiplicetur 4 per 3, an 3 per 4; productum enim semper erit 12. Et sane ter 4 nihil aliud est, quàm triplum numeri 4 semel sumpti, & quater 3 nihil aliud, quàm triplum numeri 1 quater sumpti; est autem manifestum, idem esse quater 1, & semel 4. Et eadem datis quibusque numeris invicem multiplicandis ratiocinatio accommodari potest.

45 Ubi autem circa numeros *concretos* operatio versatur, *multiplicandum à multiplicatore* distinguere oportet: quod diligentius erit attendendum in multiplicatione numerorum *complexorum*, de quibus postea.

Cæterum ea distinctio nullo fere negotio habetur. Nam ex proposita quæstione semper intelligitur, utra sit quantitas, quæ aliquoties repetenda sumitur, id est, uter sit numerus *multiplicandus*; & utra numerum indicet, quoties multiplicandus repetendus proponitur, quæ idcirco *multiplicatoris* vices gerit.

46 Quia verò multiplicatoris officium est signare, quoties repetendus est multiplicandus, *abstractus* sit numerus necesse est. Sic, quum quæritur quanti constare debeant 52 *hexapedæ* tignarii operis, pretio 36 *librarum* in singulas *hexapedas* constituto, facile discernitur, *multiplicandum* numerum esse 36 *libr.*; toties nimirum accipiendum, quot sunt unitates in numero 52, nulla habita ratione denominationis earum, siue *hexapedas*, siue quid aliud exhibeant.

47 Inde consequitur, *productum*, quod ex *multiplicandi* additione repetita coalescit, ad illius etiam *unitates* esse referendum. (*)

Hæc præfati de genere, & denominatione unitatum, quæ tum à *factoribus*, tum à *producto* exhibentur, ad ipsius *producti* inveniendi methodum veniamus.

48 Regulæ pro multiplicandis numeris compositis reducuntur ad multiplicationem numerorum simplicium, unica nota constantium. Quapropter, adhibita prius exercitatione, horum utcumque inter se multiplicatorum *facta* novisse debemus, quæ facile quis inveniet, si numerum quemque ab 1 ad 9 sibi ipsi addat usque ad novies. Uti etiam quisque poterit Tabula sequenti, quæ *Pythagoræ* adscribitur.

[*] Multiplicationem Geometricam ab hac lege nequitiam excipimus, in qua pariter *multiplicatoris* unitates *abstractæ* necessario sunt, & *multiplicandi* ac *producti* unitates *eiusdem nominis* esse debent, uti in Geometria declarabimus.

Tabula Pythagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Prima hujus tabulæ columna, five verticalis, five transversa, gignitur ex iterata unitatis 1 ad se ipsam additione; altera ex simili additione numeri 2; tertia ex additione numeri 3, & ita deinceps.

49 Ut hujus Tabulæ auxilio *productum* inveniamus duorum numerorum simplicium, quærat^rur eorum alter, *multiplicandus* ex. gr. in superiori columna transversa, unde rectâ descendatur usque ad cellulam positam è regione *multiplicatoris*, qui quidem in prima columna verticali reperietur: numerus autem in ea cellula inventus erit *productum* quæsitum.

fitum. Ut inveniatur ex. gr. productum numeri 9 per 6, seu quot sint sexies 9, descendo à 9 in superiori columna transversa usque ad cellulam è regione positam ipsius 6 primæ columnæ: numerus ibi inventus est 54; proindeque sexies 9 faciunt 54.

Habes, quantum prærequiritur ad *Multiplicationis* regulam exequendam in numeris per quotcunque notas expressis.

MULTIPLICATIO

Numeri compositi per numerum simplicem.

50 **S**cribe *multiplicatorem*, quem hîc ponimus unica nota constare, sub numero *multiplicando*. Parum quidem refert, qua sede scribatur; sed commode tamen sub unitatum sede locari consuevit.

Ducta linea transversa, quæ *productum* inveniendum à *factoribus* dirimat, multiplica notam unitatum multiplicandi per multiplicatorem; & si productum unitates tantum contineat, illud unitatum sedi subscribe; sin unitates & decadas, unitates tantum scribe, & decadas quasi totidem unitates mente retine.

Multiplica similiter decadas multiplicandi per eundem multiplicatorem; producto adde unitates à proxima operatione retentas, si quas habes; & summam subscribe decadam sedi, si una quidem nota fieri possit, sin minus, solas unitates scribe, decadas vero, quæ totidem sunt centenæ, retine addendas producto sequenti, quod ex centenis pariter coalescet.

Juxta eandem regulam, singulatim multiplica
omnes

omnes multiplicandi notas; & notarum series ex productis singulis orta productum quæsitum exhibebit.

Exemplum.

QUæritur quot pedes habeant 2864 *hexapedæ*. (*Hexapedæ* singulæ pedes habent sex). Quæstio eò redit, ut sex pedes toties accipiamus, quot sunt unitates in numero 2864, quod idem est (n. 44), ac 2864 pedes sumere sexies.

Scribatur igitur	- - - -	2864	Multiplicandus
		6	Multiplicator.
		17184	Productum.

Et ab unitatibus exorsus, dic: sexies 4 efficiunt 24; scribe 4, & 2 unitates pro duabus decadibus reserva. 2^o Sexies 6 efficiunt 36, quæ cum 2 retentis efficiunt 38; scribe 8, & 3 similiter reserva. 3^o Sexies 8 efficiunt 48, quæ cum 3 modo retentis faciunt 51, scribe 1, & reserva 5. 4^o Sexies 2 conficiunt 12, & 5 retenta conficiunt 17, quæ, quoniam nihil superest multiplicandum, integra denique scribe.

Numerus 17184 ita inventus est *productum* quæsitum, seu pedum numerus in 2864 *hexapedis* contentus. Continet enim sexies 4 unitates, sexies 6 decadas, sexies 8 centenas, sexies 2 millia, proindeque sexies totum numerum propositum 2864.

MULTIPLICATIO

Numeri compositi per compositum.

51 **Q**Uum multiplicator pluribus notis constat, pro earum unaquaque idem servandum est, quod paulo ante pro multiplicatore simplici præ-

præcepimus, initio factò a nota dexteriore. Ita multiplicentur primùm notæ omnes multiplicandi per unitates multiplicatoris, deinde per ejsdem decadas, & secundum hoc productum primo subscribatur. Cum verò secundum productum decadas exponat, quippe per decadas multiplicatio facta est, illius dexterior nota decadum sedi assignetur, reliquæ verò sedibus ad sinistram progredientibus.

Simili plane ratione, tertium quod fiet productum ex multiplicatione ejsdem numeri multiplicandi per centenas multiplicatoris, secundo subscribatur, initio factò ab ipsa centenarum sede versus sinistram; & ita deinceps.

Absolutis singulatim multiplicationibus per notas omnes multiplicatoris, producta inde orta addantur, & summa erit productum quæsitum.

Exemplum I.

$$\begin{array}{r}
 \text{S It multiplicandus numerus} - 65487 \\
 \text{per} - - - - - 6958 \\
 \hline
 523896 \\
 327435 \\
 589383 \\
 392922 \\
 \hline
 455658546 \text{ Productum.}
 \end{array}$$

Primùm multiplico 65487 per notam multiplicatoris 8, quæ unitatum sedem occupat, & producti notas gradatim inventas 523896 infra lineam scribo, operatione instituta juxta regulam pro casu primo supra traditam (n. 50.)

Deinde multiplico eundem numerum 65487 per alteram multiplicatoris notam 5, & productum 327435 superiori producto ita subscribo, ut prior

nota

nota 5, quæ ad decadas pertinet, sub illius decadibus maneat.

Tum facta similiter multiplicatione ejusdem numeri 65487 per tertiam notam 9, illius productum 589383 sub præcedenti scribo, sed primam notam 3 in centenarum ordine colloco, quia nota multiplicans ad centenarum classem pertinet.

Postremò multiplico eundem numerum 65487 per ultimam notam 6, & productum infra tertium scribo à sede versus sinistram proxima, ut nempe dexterior nota 2 in sede millium ponatur, quia nota multiplicans millia significat.

Tandem singula producta in summam colligo, & invenio 455658546 esse productum numeri 65487 multiplicati per 6958, valorem scilicet numeri 65487 toties accepti, quot sunt unitates in numero 6958. Et quidem numerus 65487 acceptus est octies in prima operatione, quinquagies in altera, nongenties in tertia, sexies millies denique in quarta; proindeque toties, quoties unitas continetur in numero 6958.

52 Quum multiplicandus, aut multiplicator, aut ambo in cifras desinunt, compendiarie fiet operatio, si multiplicentur perinde quasi nullæ ibi cifrae invenirentur, quæ omnes postea invento producto dextrorsum adjiciuntur.

Exemplum II.

S	It	multiplicandus	numerus	6500	
	per	-----		350	
				325	
				195	
				2275000.	Productum.

Cifris omissis, multiplico 65 per 35, & invenio

nio productum 2275, cui dextrorsum adjungo tres cifras, quot omnino in multiplicando, & multiplicatore simul inveniuntur.

Et quidem multiplicandus 6500 exhibet 65 centenas; & idcirco quum 65 multiplicatur, ejus productum centenas designare intelligitur. Similiter multiplicator 350 decadas 35 repræsentat, proindeque quum multiplicatio fit per 35, productum decadas exhibebit. Exprimet igitur utriusque productum decadas centenarum, id est, millia; proindeque tres cifrae adjiciendæ sunt.

53 Quum inter multiplicatoris notas cifrae reperiuntur, quæ in superiores multiplicandi notas ductæ nihil efficiunt, id cifrarum productum scribere supervacaneum est. Statim ad primam notam significativam, quæ post cifras occurrit, gradum facimus, productumque ita scribimus, ut dexterius ejus nota eandem notæ multiplicantis sedem occupet.

Exemplum III.

M	Multiplicandus fit	---	42052	
	per	-----	3006	
			252312	
			126156	
			126408312.	Productum.

Facta multiplicatione per 6, & scripto producto 252312, statim fiet per 3; sed productum 126156 eo modo scribetur, ut dexterius nota 6 millia significet; igitur quartam sedem occupabit, hoc est, in eadem notæ multiplicantis sede collocabitur.

Mul-

Multiplicatio Decimalium.

54 **I**N multiplicatione decimalium eadem numerorū integrorum regula tenenda est, nulla virgulæ habita ratione: sed ab invento producto, ad dexteram, virgula sejungemus tot notas, quot fuerint multiplicandi, & multiplicatoris simul notæ decimales.

Exemplum I.

$$\begin{array}{r}
 \text{S It multiplicandus numerus} \quad - - \quad 54,23 \\
 \text{per numerum} \quad - - - - \quad \quad \quad 8,3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16269 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 43384 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 450,109
 \end{array}$$

Multiplicabimus 5423 per 83, productum erit 450109, & quia duæ in multiplicando reperiuntur notæ decimales, & una in multiplicatore, sejungentur a producto ad dextram tres notæ, quod idcirco fiet 450,109; ut esse debet.

Ratio hujus regulæ facile concipietur, si animadvertamus, quod, multiplicatore existente 83, producti notæ decimales *centesimas* referrent, cum utique *ter* & *octogies* sumeretur numerus 54,23, qui *centesimas* designat. Quoniam vero multiplicator est 8,3; id est, (n. 28.) decies minor quàm 83, productum unitates referre debet decies minores, quàm *centesimas*; igitur nota postrema decimalium (n. 23.) *millesimas* debet exponere; proindeque productum tres notas decimales habebit, tot nimirum, quot in multiplicando & multiplicatore simul inveniuntur.

Et eadem in alio quocumque exemplo ratiocinatio locum habet.

Exemplum

respondeat, quæ sit duplici gradu dexterior quàm sedes, ad quam usque productum exactum requiritur. Tum multiplicationem instituo, nulla habita ratione notarum, quæ in multiplicando sunt ad dextram notæ multiplicantis. Producta singula ita scribo, ut prior omnium nota ad dextram in eadem columna maneat; iisque additis, postremas duas summæ notas expungo, ea tamen lege, ut earum quæ supersunt postrema unitate augeatur, si illæ expunctæ excedant 50. Quibus peractis, virgulam ea sede noto, quam decimales exigunt, quas habere constitui.

Exemplum III.

Detur multiplicandus numerus - 45,625957
per - - - - - 28,635

Et satis habeatur productum invenire ad millesimas usque accuratum: Numeri

ita scribantur. - - - - - 45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

130649913

Et productum erit - - - - 1306,499

Si solita ratione multiplicatio fieret, haberetur productum 1306,499278695, quod cum præcedenti usque ad tertiam decimalium sedem convenit, quemadmodum exigebatur.

Si decimales in multiplicando non sufficiant, ut
notæ

nota unitatum multiplicatoris inverſi illi respondeat, cui ex regula debet, cifrae adduntur, quæ locum ſup-
peditent.

Exemplum IV.

S It multiplicandus numerus - - 54,236
per numerum - - - - - 532,27

Et productum requiratur ad centesimas usque
exactum; eos ſcribemus ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 54,236000 \\
 72235 \\
 \hline
 271180000 \\
 16270800 \\
 1084720 \\
 108472 \\
 37961 \\
 \hline
 288681953
 \end{array}$$

Et productum erit - - - - 28868,20.... postre-
mæ ſcilicet notæ addita unitate, quia binæ ex-
punctæ 53 excedunt 50.

Exemplum V.

S It multiplicandus numerus - - 0,227538917
per numerum - - - - - 0,5664178

Et productum requiratur ad ſeptimam usque de-
cima

cimalium notam accuratum, eos scribemus ad hunc modum - - - - -

0, 227538917

87146650

.....0

113769455

13652334

1365228

91012

2275

1589

176

128882069

Productum - - - - -

0, 1288821

¶ Iis, qui Tabulam Pythagoricam memoriter non tenent, methodus traditur ad *Multiplicationem* perficiendam ope folius *Additionis*, quæ ita se habet.

Construatur seorsum tabella, in qua *multiplicandus* primùm scribatur e regione unitatis; deinde ipse sibi addatur, & summa infra scribatur e regione ipsius 2; rursus summa modo inventa addatur ipsi multiplicando, & nova quæ fiet summa respondeat ipsi 3, & ita porrò usque ad 10: si autem e regione ipsius 10 in summam obvenerit ipse multiplicandus cifra auctus, examen erit, additiones fuisse recte confectas.

Tabella proinde, ut ex constructione perspicuum fit, producta exhibet multiplicandi per numeros simplices usque ad 9. Quare, pro singulis *multiplicatoris* notis sumantur producta, quæ illis in tabella respondent, eaque ita scribantur, ut dexterior cujusque nota eidem sedi assignetur, quam multiplicatoris nota occupat. Denique ex his productis fiat summa, quæ productum quæsitum dabit. Res exemplo fiet manifesta.

Sit

Sit multiplicandus numerus 79856345 per numerum 9605843; scribantur ambo more solito, ut in exemplo apparet,

79856345	1 79856345
9605843	2 159712690
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	3 239569035
239569035	4 319425380
319425380	5 399281725
638850760	6 479138070
399281725	7 558994415
479138070	8 638850760
718707105	9 718707105
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>
767087512623835	10 798563450

Deinde translato multiplicando versus dextram e regione ipsius 1, sibi addatur, ut habeatur summa, quæ respondet ipsi 2; hæc similiter addatur ipsi multiplicando, & summa prodibit, quæ habetur e regione ipsius 3; hæc rursus eidem multiplicando addatur, fietque numerus respondens notæ 4, & ita deinceps.

Tabella confecta, ad multiplicationem venimus. Et quia multiplicatoris prior nota est 3, numerum in tabella respondentem ipsi 3 transferimus, suæque sedi accommodamus. Idem pro notis subsequenti- bus 4, 8, 5, 6, & 9 exequimur, & additione tandem facta productum invenimus 767087512623835.

Hæc profecto methodus indirecta est, & longior, quam ut commendari præ rugula superius tradita possit, aut debeat. Sed in numeris tamen paulo maioribus multiplicandis id habet commodi, quod minus attentionis requirit, & errandi periculum aut propemodum tollit, aut certe imminuit. Quum autem, ut sæpe fit, numerus idem per plurimos alios singulatim multiplicandus est, tunc, cum

tabella semel confecta plurimis operationibus inferviat, ipsa expediendi operis methodus est omnium non solum commodissima, sed etiam brevissima. §

Multiplicationis usus.

56. **N**on id nobis propositum est, ut Multiplicationis usus omnes prosequamur, qui latissimè patent; sed eos breviter indicabimus, qui ad reliquos facile intelligendos viam faciant.

Multiplicatio in universum adhibetur ad valorem investigandum plurium unitatum, quum de uniuscujusque valore constat. Quæritur ex. gr. 1^o *Quanti sunt 5842 hexapedæ lateritii operis, pretio 54 lb in singulas hexapedas constituto?* Multiplicentur 54 lb per 5842, seu 5842 lb (n. 44.) per 54, & pretium quæsitum erit 315468 lb. 2^o *Quot libras pendent 5954 pedes cubici aquæ (*), posito pondere 72 lb in singulos pedes?* Multiplicentur 72 lb per 5954, seu 5954 lb per 72, & pondus quæsitum erit 428688 lb.

57. Multiplicationis ope reducuntur unitates datæ cujuscumque speciei ad unitates minoris speciei; *Libræ*, ex. gr. ad *solidos*, *solidi* ad *denarios*; *hexapedæ* ad *pedes*, *pedes* ad *pollices*, *pollices* ad *lineas*; *dies* ad *horas*, *horæ* ad *minuta prima*, *prima* ad *secunda* &c. Hujusmodi autem reductionum, quarum frequentissimus est usus, exempla quædam hic subjiciemus.

Detur numerus 8 lb 17 s 7 d ad *denarios* reducendus. Quia *libra* valet 20 s, multiplicabuntur 8 lb per 20 (n. 50.), quæ conficiunt 160 s: his adjicientur 17 s, & fient 177 s, quibus multiplicatis

(*) Pes cubicus est mensura pedem longa, lata, & profunda, quæ æstimandæ corporum capacitati inservire solet, ut in Geometria demonstrabitur.

gatis per 12 (nam *solidi* singuli valent *denarios* 12) efficiuntur 2124 *denarii*; quibus præterea addendi sunt 7 *denarii*; & fiet valor numeri propositi in *denarios* conversi 2131^d.

Rursus quærat, quot minutis horariis constet annus communis, nimirum 365 dies, 5 horæ, & 48 minuta, sive 365^d 5^h 48^m. Cum dies singuli horas 24 contineant, multiplicentur 24^h per 365, & producto 8760^h addantur 5^h; summa 8765 multiplicetur (n. 52.) per 60, quia nimirum hora minuta 60 complectitur, & producto 525900^m addantur 48; fietque summa 525948^m, minuta scilicet, quæ in anno communi continentur.

58 Ea multiplicationis ratio compendiaria, quam supra (n. 52.) tradidimus, commode adhibetur ad eam ponderum mensuram, quam Gallicè *tonneaux*, Lusitanè *tonnellâdas* appellamus, ad libras reducendam. Cum enim quælibet id genus mensura ponatur esse pondus 2000 librarum, si earum ex. gr. 854 sint ad libras reducendæ, nihil aliud opus est quàm numerum 854 duplicare, & producto tres cifras adjungere, fietque earum valor 1708000 *lb*. Notent autem tirones, numerum *duplicare*, *triplicare*, *quadruplicare* &c. nihil aliud esse quàm multiplicare per 2, per 3, per 4 &c.

De Divisione.

59 **D**ividere numerum per numerum in univrsum est quætere quoties eorum alter in altero contineatur. Sic dividere 12 per 4 idem est, ac invenire quoties numerus 4 in numero 12 contineatur, nempe *ter*.

Numerus, qui dividitur, *Dividendus*; per quem dividitur, *Divisor*; qui vero per operationem invenitur, ut ostendat quoties Divisor in Dividendo continetur, *Quotiens*, sive *Quotus* appellatur.

Divi-

Divisionem quidem non eo semper fine institui-
mus, ut sciamus quoties numerus numerum conti-
neat; sed operatio nihilominus perinde instituitur,
quasi id tantum præ oculis semper haberemus. Qua-
propter *divisionem* generatim spectare possumus,
tanquam operationem, cujus ope invenimus, quo-
ties divisor in dividendo contineatur.

¶ Ex modò tradita *Divisionis* notione intelli-
gitur, eam posse per *subtractionem* perfici, si nimi-
rum divisor a dividendo iteratis vicibus auferatur;
est enim perspicuum divisorem toties in dividen-
do contineri, quoties inde auferri potest: Sic,
ut 21 dividerentur per 7, tres fierent subtrac-
tiones, ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 21 \\
 \underline{7} \\
 14 \text{ --- } 1^{\text{um}} \text{ residuum.} \\
 \underline{7} \\
 7 \text{ --- } 2^{\text{um}} \text{ residuum.} \\
 \underline{7} \\
 0 \text{ --- } 3^{\text{um}} \text{ residuum.}
 \end{array}$$

Et quia divisor 7 ter fuit ablatuſ a dividendo 21,
& nihil superfuit, ter in illo exacte continetur;
adeoque *Quotus* erit 3.

Cum tamen hæc dividendi methodus eo longior
ac molestior fieret, quò maior *Quotus* esset, pe-
culiaris *Divisionis* operatio, quasi *Subtractionis* com-
pendium, ad id exequendum adhibetur. ¶

Ex eadem notione consequitur, *Dividendum pro-*
duci, si *Divisor per Quotum multiplicetur*; quia
nimirum per id nihil aliud fit, quàm *Divisorem*
toties sumere, quoties in *Dividendo* continetur. Id
autem in univèrsum intelligi debet, siue *Quotus*
numerus integer sit, siue fractus.

Quod

Quod verò ad nomen unitatum, quæ per *Quotum* exhibentur, id neque per *Dividendum*, neque per *Divisorem*, neque per utrumque dignoscitur; *Dividendo* enim & *Divisore* iisdem manentibus quoad nomen unitatum, Quotus alia, atque alia unitatum genera designare potest, pro quæstionis ratione, quæ *Divisioni* locum dedit.

Ex. gr. Si quærat, quoties 4^{lb} contineantur in 8^{lb}, *Quotus* erit numerus abstractus 2, qui *bis* significabit. At, si quærat, quantum operis fiet pro 8^{lb}, pretio 4 librarum in singulas operis hexapedas constituto, *Quotus* erit 2 hexapedæ, numerus scilicet concretus, cujus species neque ad dividendum, neque ad divisorem refertur. Quare, cujusnam sint nominis unitates per *Quotum* exhibitæ, ex sola quæstione, quæ *divisioni* locum præbet, dignoscendum relinquitur.

DIVISIO

Numeri Compositi per numerum simplicem.

60 **E**A, quam modò tradituri sumus, operatio illud prærequirit, ut unusquisque usu exercitationeque sciat, quoties numerus quilibet simplex in numero simplici, aut ex duabus tantum notis composito contineatur: quæ quidem cognitio habetur, simulatque producta numerorum simplicium memoriter tenentur. Ubi hæc exercitatio deficit, auxilio erit Tabula paulo superius (n. 48.) a nobis descripta. Si ex. gr. inveniendum sit quoties sint 9 in 74, quærat *Divisor* 9 in superiori columna transversa, indeque rectâ descendatur quousque aut numerum ipsum 74, aut proxime minorem, ut hic 72, inveniamus; & numero invento respondebit in prima columna verticali ad
 finis-

sinistram quotus quæsitus, ut in hoc exemplo 8.

His positis, Divisio numeri compositi per numerum simplicem hoc modo peragitur:

Scribatur divisor ad latus dexterum ipsius dividendi, lineola interjecta, quæ utrumque dirimat. Sub eodem divisore ducatur linea transversa, infra quam notæ ipsius *Quoti* scribendæ erunt, prout fuerint per operationem inventæ.

Tum sumatur prior dividendi nota ad sinistram, aut duæ priores, si prior fuerit divisore minor, ut fiat membrum parziale dividendum; & inquiretur, quoties divisor in eo membro contineatur, numerusque inventus in quoto scribatur.

Nota quoti inventa per divisorem multiplicetur, & productum scribatur sub membro dividendo, a quo subtrahatur; & residuo adjungatur nota proximè sequens numeri propositi, ut novum fiat membrum dividendum.

In altero membro eadem operatio instituat, & nota quotientis inventa ad dextram prioris reponatur, per divisorem multiplicetur, & productum a membro auferatur. Residuo addatur nota alia numeri propositi, eademque operatio instituat; & ita deinceps, quousque omnes dividendi notæ gradatim absolvantur.

Regulæ praxis, exemplis sequentibus apprime perspectis, nullo negotio comparabitur.

Exemplum I.

Sit dividendus numerus 8769 per 7; eos scribemus hoc modo:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Dividendus} & 7 \text{ Divisor} \\
 8769 & \hline
 7 & 1252 \frac{5}{7} \text{ Quotus} \\
 \hline
 17 & \\
 14 & \\
 \hline
 36 & \\
 35 & \\
 \hline
 19 & \\
 14 & \\
 \hline
 & 5
 \end{array}$$

Et initio factò à priori dividendi nota ad finistram, inquirendum mihi esset quoties 7 in 8 *milibus* contineantur; sed satis est, ut videam, quoties 7 in 8 continentur, nimirum *semel*; proindeque nota 1 in quoto scribenda est, quæ quidem *mille* repræsentare debet, sed de locali ejus valore nullam rationem habeo, qui à reliquis notis postea inveniendis determinabitur. Tum notam quoti inventam 1 multiplico per divisorem 7, & productum 7 scribo sub parte dividenda 8, factaque subtractione manet residuum 1, pars scilicet ipse 8, quæ divisa non fuit. Hæc *decadis* loco habetur respectu ejus notæ 7, quæ in dividendo proxime sequitur, & proinde ad ejus latus dextrum adducitur, ut fiat novum membrum dividendum 17.

Rursus, eadem operatione instituta, invenio divisorem 7 in 17 contineri 2 vicibus, & notam 2 ipsi quoto adscribo ad dextram prioris modò inventæ, eamque similiter multiplico per divisorem 7, &

& productum 14 membro dividendo 17 subscribo, factaque subtractione, residuum est 3, pars nimirum ipsius membri, quæ divisa non fuit, cui notam dividendi proxime sequentem 6 adjungo, ut fiat membrum rursus dividendum 36.

Quare, instaurata operatione, quæro quoties 7 in 36 contineantur, & invenio contineri *quinquies*; ac proinde notam 5 quotienti adscribo, quam deinde per divisorem multiplico, & productum 35 à membro dividendo 36 subduco, residuoque 1 ulteriorem dividendi notam 9 adjungo, ut fiat membrum de integro dividendum 19. Eodem modo, in membro 19 contineri divisorem 7 comperio 2 vicibus; adeoque notam 2 quotienti adscribo, quam similiter per divisorem multiplico, & productum 14 à membro 19 subduco, residuumque postremum erit 5.

Inventum itaque est 7 toties contineri in proposito numero 8769, quoties per quotum designatur, hoc est, 1252 vicibus, & superesse præterea 5.

De hujusmodi autem residuo observare interim sufficiat, illud ad dextram ipsius quoti ita adscribi, ut in exemplo ostenditur; divisore nimirum illi subscripto, lineolaque interposita, quæ utrumque dirimat; quod expressionis genus *quinque septimas* significat unitatis partes, quemadmodum postea explicabimus, quum de *Fractionibus* sermo erit.

61 Si in operationis contextu membrum occurrat divisore minus, quod proinde illum ne *semel* quidem contineat, cifra erit in quoto scribenda; & statim, omitta multiplicatione & subtractione, ulterior dividendi nota membro adjungi debet, ut novum fiat membrum dividendum, quo adhibito operatio procedat.

Exemplum II.

Proponatur dividendus numerus 14464 per 8.

$$\begin{array}{r|l}
 14464 & 8 \\
 \underline{8} & \underline{1808} \\
 64 & \\
 \underline{64} & \\
 064 & \\
 \underline{64} & \\
 0 &
 \end{array}$$

In exemplo proposito membrum dividendum efficiam ex prioribus duabus dividendi notis 14, quia prima 1 divisore 8 minor est, ac proinde illum non continet.

Tum invenio divisorem 8 in 14 non contineri plusquam *semel*, & proinde scribo 1 in quoto, factaque multiplicatione & subtractione, residuum est 6, cui proxime sequentem dividendi notam 4 adjungo, ut alterum fiat membrum dividendum 64.

Rursus in 64 quoties 8? invenio 8, quam notam quotienti adscribo, factaque multiplicatione & subtractione, relinquitur 0, cui sequentem dividendi notam adjungo, nempe 6. Quia verò membrum dividendum 6 minus est quàm divisor 8, quotienti cifram adscribam, & statim ulteriorem dividendi notam 4 membro adjungam, ut fiat 64. Tunc in 64 quoties 8? *octies*. Unde scribo 8 in quoto, & facta multiplicatione & subtractione nihil relinquitur: quod argumento est, numerum 8 in numero 14464 exactis 1808 vicibus contineri.

DIVISIO

Numeri compositi per compositum.

62 **Q**Uum divisor fuerit numerus ex pluribus notis compositus, Divisionis methodus erit hujusmodi.

Sumatur ex dividendo ad sinistram membrum tot notarum, quot opus fuerint, ut divisor in illo contineatur. Et quia difficile esset inquirere quoties totum membrum dividendum, ut in priori casu, totum divisorem contineat, satis erit inquirere, quoties prior divisoris nota ad sinistram in parte membri sibi respondente contineatur; quotus autem ita inventus suo loco notabitur.

Tum nota ipsius quoti per omnes divisoris notas multiplicetur, juxta regulam supra traditam (n. 50.), & producti notæ, prout singulatim fuerint inventæ, membro dividendo à dextra ad sinistram subscribantur. Productum deinde à membro subtrahatur, residuoque nota dividendi proxime sequens adjungatur, ut fiat membrum denuò, & eodem modo dividendum.

Rem exemplis illustrabimus, unaque iis casibus occurremus, qui aliquid difficultatis præ se ferunt.

Exem-

Exemplum I.

Sit dividendus numerus 75347 per 53.

$$\begin{array}{r|l}
 75347 & 53 \\
 \hline
 53 & \\
 \hline
 223 & 1421 \frac{34}{53} \\
 212 & \\
 \hline
 114 & \\
 106 & \\
 \hline
 87 & \\
 53 & \\
 \hline
 34 &
 \end{array}$$

In hoc exemplo primum membrum dividendum sumo ex prioribus duabus dividendi notis 75, quia totidem sufficiunt, ut fiat membrum divisore non minus. Tum non inquirō quoties 75 contineant 53, sed quoties 7 decades membri 75 contineant 5 decadas divisoris 53, id est, quoties 7 contineant 5; & invenio 1, quod quotienti adscribo.

Deinde multiplico quotum inventum 1 per divisorem 53, & productum membro dividendo 75 subscribo, factaque subtractione, residuum est 22, cui notam sequentem dividendi 3 adjungo, ut fiat membrum rursus dividendum 223. Tum similiter in 22 quoties 5? invenio *quater*. Proinde scribo 4 in quoto, & divisorem multiplico per 4, productumque 212 membro dividendo 223 subscribo, & facta subtractione, residuum est 11, cui notam dividendi sequentem 4 adjungo, ut fiat membrum denuò dividendum 114. Eodem modo 5 in 11 continentur 2 vicibus, adeoque 2 quotienti adscribo, & multiplico per divisorem, productumque 106 & mem-

membro 114 subduco, & residuum est 8, cui ul-
terioremem dividendi notam 7 adjungo, ut fiat mem-
brum postremò dividendum 87. Et instituta, ut an-
teà, operatione, notam 1 pro quoto invenio, &
residuum 34, quod juxta quotum ita scribo, ut
paulo superius indicatum fuit (n. 60.)

63 Praxis hujusce regulæ rigidiori methodo
fieret, si quoties divisor totus in membris singulis
dividendis continetur, statim inquireretur. Quia
tamen id plurimum attentionis laborisque exige-
ret, satis habemus inquirere, ut in superiori exem-
plo, quoties maior dividendi pars maiorem divi-
soris partem contineat. Quotus hoc pacto inven-
tus verus quidem semper non erit, non enim di-
rectè, sed quasi tentando invenitur. Sed præter-
quamquod istiusmodi tentamine verum plerunque
quotum assequimur, aut certè à vero parum aber-
rantem; facta illico multiplicatione probamus,
fuerit-ne exactum de nota in quoto scribenda ju-
diciam, eamque emendamus, si necesse est.

Et quidem si divisor in membro dividendo rea-
pse *ter* contineretur; & judiciam fieret *quater* con-
tineri, facile intelligitur quod facta multiplicatio-
ne per 4, productum dividendo maius conficeretur;
siquidem divisorem sæpius sumeremus, quàm in
membro dividendo contineretur; proindeque sub-
tractio fieri non posset. Tunc minuendus esset quo-
tus una, duabus &c unitatibus, donec produ-
ctum haberetur quod subtrahi posset. Contra ve-
rò, si in eo casu 2 in quoto scriberentur, produ-
ctum quidem subtrahi posset, sed residuum habe-
retur divisore maius, quod argumento esset, di-
visorem sæpius in membro dividendo contineri,
quàm judicatum fuerat, adeoque quotum esse jus-
to minorem. Quantum vero augeri minui de-
beat quotus primum inventus, si verus facta mul-
tiplicatione non deprehenditur, id usu exercita-
tioneque facile comparatur. *Exem-*

Exemplum II.

S It dividendus numerus 189492 per 375

$$\begin{array}{r|l}
 189492 & 375 \\
 \underline{1875} & \\
 1992 & 505 \frac{117}{375} \\
 \underline{1875} & \\
 117 &
 \end{array}$$

In hoc exemplo membrum prius dividendum assumo ex quatuor prioribus dividendi notis, quia tres efficerent membrum ipso divisore minus.

Deinde, in 18 quoties 3? re quidem ipsa, nulla habita ratione notarum sequentium, *sexies*: quia tamen divisore 375 multiplicato per 6, productum emergit membro dividendo maius, 5 tantum quotienti adscribo, factaque multiplicatione & subtractione, residuum est 19, cui notam sequentem Dividendi 9 adjungo, ut novum fiat membrum dividendum 199.

Rursus, quia in 1 non continetur 3, cifram scribo in quoto, & adducta sequente dividendi nota 2, membrum habeo denuò dividendum 1992. Ubi similiter operatione instituta, reperio 3 in 19 re ipsa *sexies* contineri; sed ob rationem jam indicatam, quotienti adscribo tantum 5, & absoluta operatione, residuum habetur 117.

64 Hic illud monitum habeatur, quod sæpe a pluribus in quoto investigando experimentis inutiliter factis liberabit. Cum dubia plerunque tentamina fiant, ubi altera divisoris nota fuerit valde maior, quàm 5; tunc prior unitate augenda mente erit, & inquirendum postea quoties in parte membri dividendi respondente contineatur. Sic enim iudicium fiet, quod ad verum quotum magis accedet.

Exemplum III.

Sit dividendus numerus 1832 per 288.

$$\begin{array}{r}
 1832 \quad | \quad 288 \\
 1728 \quad | \quad \hline
 \hline
 104
 \end{array}$$

6 $\frac{104}{288}$

In hoc exemplo non dicam in 18 quoties 2; sed in 18 quoties 3; siquidem divisor 288 multo propius accedit ad 300 quàm ad 200. Sic statim verum quotum invenio 6, cum alioquin tentando per 9, 8, & 7 primùm excurrerem.

Regulae superioris Compendium.

65 Ut Divisionis methodus hactenus tradita facilius intelligeretur, producta singula ex multiplicatione divisoris per notas quotientis inventa orta sub membris dividendis, a quibus subtrahenda erant, scribenda præcepimus. Quoniam tamen Arithmeticae propositum est, ut operationes quàm brevissimæ reddantur, illud observandum est, posse quemquam ab iis productis scribendis abstinere, si una eademque opera multiplicationem & subtractionem peragat. Id quomodo fiat, exemplo sequenti adhibito, satis intelligetur.

Exemplum.

SI dividendus proponatur numerus 756984 per numerum 932;

$$\begin{array}{r|l}
 756984 & 932 \\
 1138 & \hline
 2064 & 812 \begin{array}{l} 200 \\ 952 \end{array} \\
 200 &
 \end{array}$$

Sumptis pro membro dividendo quatuor prioribus notis, quia tres membrum efficerent divisore ipso minus, inquirendum est quoties prior divisoris nota 9 in parte 75 ipsius membri contineatur; cumque octies contineri compertum sit, nota 8 in quoti sede collocabitur. Tunc, cum juxta priorem regulam quotus inventus 8 per divisorem 932 seorsum multiplicandus, productumque sub membro 7569 scribendum, & deinde ab illo subtrahendum esset, id una eademque opera conficiemus, hoc modo: octies 2 sunt 16, quæ cum subtrahi non possint a 9, subtrahantur a 19, & residuum erit 3 ipsi 9 subscribendum.

Ut autem ratio habeatur unitatis acceptæ a nota vicina 6, cujus ope, pro 9 sumpsimus 19, ipsa quidem unitate multata non censeatur, quemadmodum in Subtractione præcepimus, sed unitas mente retineatur producto sequenti addenda. Tunc enim dicendum: octies 3 sunt 24, & 1, quod retinuimus, sunt 25, quæ cum auferri nequeant a 6, auferentur a 26, & residuum erit 1, quod ipsi 6 subscribetur. Hoc quidem pacto habita est ratio unitatis subtrahendæ a nota 6, quia unam amplius retentam modò subtraximus; & eadem ratione compensabimus in operatione sequenti ipsa 2, quæ modò accepimus a nota 5, ut pro 6 haberentur 26. Sic enim dicendum erit: octies 9 sunt 72, & 2 retenta (siquidem subtractio præcedens fa-

cta fuit a 26) sunt 74, quæ si a 75 subducantur, superest 1 ipsi 5 subscribendum.

Residuo 113 notam proximè sequentem ipsius dividendi 8 adjungamus, ut membrum rursus dividendum constet 1138. Ubi, priore divisoris nota 9 mente applicata parti respondententi 11, inquirendum est quoties 9 in 11 contineantur, *semel* nimirum, ac proinde 1 in quotiente scribendum. Deinde, multiplicatione subtractioneque instituta; *semel* 2 sunt 2, quæ si ab 8 subtrahantur, supersunt 6, quæ ipsi 8 subscribentur; *semel* 3 sunt 3, & iis ablatis a 3, relinquitur 0, quæ sub ipsa nota 3 collocabitur; *semel* 9 sunt 9, quibus ablatis ab 11, restant 2, quæ *infra* notabuntur. Residuo similiter 206 sequentem dividendi notam 4 adjungamus, ut fiat membrum eodem modo dividendum 2064. Cum autem 9 *bis* contineantur in 20, nota quotientis erit 2, & instaurata operatione, dicendum: *bis* 2 sunt 4, quæ si a 4 auferantur, manet 0 *infra* scribenda; *bis* 3 sunt 6, quibus ablatis a 6, relinquitur 0; *bis* 9 sunt 18, iisque ablatis a 20, supersunt 2.

66 In partialibus divisionibus conficiendis, ex quibus tota operatio componitur, illud accidere quandoque potest, ut membrum dividendum re ipsa divisorem contineat plusquam *novies*, cum tamen in quoto nota maior scribi non possit quam 9. Enim vero id argumento erit, notam justo minorem pro quoto sumptam fuisse in operatione præcedenti; ea siquidem *decas*, quæ quotienti postea invento adhæret, ad notam paulo ante inventam procul dubio pertinebit.

67 Quam dividendus ac divisor in cifras desinunt, antequam divisionis operationem inciamus, tot in utroque cifras delere licet, quot in eo sunt, qui pauciores habet. Si ex. gr. dividendus proponatur numerus 8000 per numerum 400, duabus

bus in utroque cifris deletis, dividendus erit numerus 80 per 4; est enim perspicuum, 4 centenas in 80 centenis toties contineri, quoties 4 unitates in 80 unitatibus continentur.

Divisio Decimalium.

68 **N**E supervacuis distinctionibus immo-
mur, divisionem numerorum, quibus
fractiones decimales adhærent, ad regulam unam
revocabimus, quæ ita se habet:

Fac ut numeri ad divisionem propositi æquæ
multas habeant notas decimales, additis quot opus
fuerint cifris eorum alteri, qui patuciores habue-
rit, quod quidem ejus valorem minimè lædit
(n. 30.); tum dele virgulam, numerosque per-
inde divide quasi integri essent; & quotus prodi-
bit quæsitus, in quo virgulæ rationem habere
opus non est; quippe a decimalium consideratione
immunis erit.

Exemplum I.

SI dividendus proponatur numerus 12, 52 per nu-
merum 4, 3;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ 392 & 2 \frac{392}{430} \end{array}$$

Eos primùm ad æque multas notas decimales
revocabimus, addita cifra divisoni, ut fiat 4, 30.
Deinde, virgula expuncta, dividendus erit nume-
rus 1252 per 430; & instituta operatione, inve-
niemus quotum 2, & residuum 392; adeoque
quotientem totum $2 \frac{392}{430}$.

At, cum decimalium calculus eo potissimum
sine adhibeatur, ut solitæ fractiones videntur;

loco fractionis ex residuo & divisore confectæ, quam in exemplo superiori quoto integro 2 adposuimus, notas decimales ipsius quoti invenire possumus, si residuo utamur ad operationem ulterius promovendam, quemadmodum in exemplo sequenti ostenditur:

Exemplum II.

$$\begin{array}{r|l}
 1252 & 430 \\
 3920 & \underline{2,9116} \text{ \&c} \\
 500 & \\
 700 & \\
 2700 & \\
 120 &
 \end{array}$$

UBi quotus integer 2 inventus fuerit, ut in priori Exemplo, residuo 392 cifra adjungatur, quæ illud re ipsa reddet decies maius, ut fiat membrum de integro dividendum 3920; & instituta operatione, notam 9 quotienti adscribendam inveniemus, signata tamen prius unitatum sede per virgulam appositam post quotum integrum 2. Hoc pacto nota inventa 9 *decimas* tantum exprimet, ac per id rescindetur quod in membro dividendo decies maiori positum fuerat; est enim perspicuum, quod, si ex divisione numeri 3920 per 430 quotus habetur 9, ex divisione numeri 392 per 430 quotus erit decies minor, nempe 0,9. Jam multiplicatione ac subtractione factis, residuo 50 alia cifra adjungatur, quod idem profecto erit, ac si duæ ab initio cifrae dividendo adjungerentur. Quia tamen nota pro quoto invenienda 1 ad dextram ipsius 9 collocabitur, ut *centesimas* exprimat, per id similiter compensabitur quod in dividendo centies maiori positum fuit.

Ad hunc modum operatio continuabitur quousque libuerit, habita tamen ratione quæstionis propositæ, quæ facile ostendet quot decimales notæ sufficiant. Et quidem, si duabus notis inventis operationem fistamus, quotus integram *centesimam* unitatis partem a vero aberrare non potest; si tribus, *millesimam*; & ita deinceps; quia nimirum notæ postremò inventæ unitas addi auferri nequit, quin fiat quotus justò maior, aut minor.

Et eodem modo residuum, si quod fuerit, ad partes decimales reducitur, ubi circa numerorum integrorum divisionem operatio versatur.

Reliquum est, ut ostendamus cur virgula tam in dividendo quam in divisore deleta, quotus neutiquam immutetur, ubi æquè multæ fuerint in utroque numero notæ decimales. Id autem nullo negotio intelligitur: Nam in exemplo superiori dividendus 12,52 re ipsa exprimit 1252 *centesimas*, & divisor 4,30 similiter reddit 430 *centesimas*, siquidem unitates integræ *centenas centesimarum* complectuntur (n. 22.); est autem perspicuum, 1252 *centesimas* toties continere 430 *centesimas*, quoties 1252 unitates continent 430 unitates: nullam igitur virgulæ rationem habere necesse est, quum uterque numerus ad eandem decimalium sedem protenditur.

69 Si quando, pro quæstionis ratione, quotus sufficiat ad datum limitem accuratus, divisionis compendium adhiberi potest, quod modò explanandum suscipimus.

Et illud primùm statuamus, quotum requiri ad unitates usque exactum (nam qua ratione eadem methodus cæteris casibus accomodari debeat, postea declarabimus). Regula erit hujusmodi.

Rejiciantur a dividendo ad dextram tot notæ, minus una, quot in divisore reperiuntur; deinde
divi-

divisio juxta regulam superius traditam instituat. Si nullum fuerit residuum, quoto invento adjungantur tot cifrae quot fuerunt notæ a dividendo rejectæ, & fiet quotus quæsitus. Si verò aliquod residuum fuerit, id rursus dividatur per divisorem postrema ad dextram nota multatum. Hac divisione confecta, residuum quod fuerit dividatur porro per eundem divisorem alia similiter nota multatum; & ita deinceps. Hujusce regulæ praxis iis, quæ sequuntur, exemplis perspectis facile constabit.

Exemplum I.

SI dividendus proponatur numerus 8789236487 per numerum 64423, & quotiens sufficiat ad unitatum sedem accuratus, rejiciantur postremæ quatuor dividendi notæ, quia videlicet divisor quinque notis constat, & dividatur 878923 per divisorem propositum 64423.

$$\begin{array}{r}
 878923 \quad | \quad 64423 \\
 \underline{234693} \quad | \quad 136430 \\
 41424 \quad - - 6442 \\
 \quad 2772 \quad - - 644 \\
 \quad \quad 196 \quad - - 64 \\
 \quad \quad \quad 4 \quad - - 6
 \end{array}$$

Et primum quidem, duplici operatione instituta, quotum inveniemus 13, & residuum 41424. Tum residuum hoc dividemus per 6442, rejecta scilicet dexteriore divisoris nota, & notam 6 reperiemus ipsi quoto adscribendam post notas 13 primum inventas, & residuum erit 2772. Hoc similiter dividemus per 644, nota itidem divisoris præcedentis dexteriore rejecta, & notam 4 inveniemus quoto jam habito 136 adjungendam, & residuum habebitur 196. Quod eodem modo partien-

tiendum est per 64, omiffa alia divisoris nota, & quotum inveniemus 3, residuum vero 4. Postremo, si residuum 4 per 6 dividatur, nota quoti adscribenda erit 0. Ac proinde habemus, quotum ex divisione numeri 8789236487 per numerum 64423 esse 136430 ad unitates usque exactum. Et quidem, si operatio solita fieret, quotus inveniretur $136430 \frac{6597}{64423}$.

Notandum est, divisores singulos e regione residuorum emergentium necessariò scribendos non esse, quemadmodum a nobis factum idcirco est, ut operationis ratio facilius intelligeretur. Satis erit, divisoris propositi notas a dextra versus sinistram puncto vel lineola notare, prout fuerint in operationis ductu gradatim rejiciendæ.

70 Si prioris divisionis residuum deprehendatur divifore sibi respondente minus, cifra quoti adscribatur, & residuo eodem manente, divisor alia nota multetur. Si adhuc residuum novo divifore minus reperiat, alia ad quotum cifra adjiciatur; & ita deinceps.

Exemplum II.

UT quotum ex divisione numeri 55106054 per numerum 643 ad unitatum sedem accuratum inveniamus, dividendus erit juxta consuetam rationem numerus 551060, qui rejectis duabus ad dextram notis superest, per numerum 643, ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 551060 \quad | \quad \begin{array}{r} 643 \\ \hline 25701 \end{array} \\
 3666 \\
 \hline
 4510 \\
 09-- 64 \\
 9-- 6 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

Et

Et instituta operatione inveniemus quotum 857, & residuum 9, quod juxta regulam dividendum foret per 64. At, cum residuum hujusmodi suo divisore minus deprehendatur, cifram in quotò adnotabimus, idemque residuum ad operationem sequentem retinebimus. Tum parato juxta regulam divisore 6, dividendum erit residuum 9 per 6, & 1 quotienti obveniet; ac proinde quotus ex divisione numeri 55106054 per 643 ad unitatum sedem accuratus erit 85701, quemadmodum exigebatur.

71 Si, quum in operationis limine notæ a dividendo rejiciuntur, quas regula præscribit, tot superstites non fuerint quot requiruntur, ut membrum dividendum efficiant divisore non minus; a divisore itidem ad dextram tot rejicientur notæ, quot opus fuerint, ut in membro dividendi contineatur.

Exemplum III.

Sit dividendus numerus 1611527 per numerum 64524, & quotus requiratur ad unitates usque exactus.

Primum rejicientur quatuor notæ 1527 ipsius dividendi. Deinde, cum reliquæ 161 numerum reddant divisore 64524 minorem, ab ipso similiter tres notæ posteriores 524 rejicientur, quot nimirum opus sunt, ut reliquæ 64 in dividendo 161 contineri valeant. Tum instituta, ut in exemplis superioribus, operatione dividendus erit numerus 161 per 64;

$$\begin{array}{r} 161 \overline{) 64} \\ \underline{33} \\ 3 \end{array}$$

& quotus habebitur 25 ex divisione numeri 1611527 per numerum 64524, in quo per unitatem integram

a vero neutiquam aberrabitur. Et quidem quotus exactus est $24 \frac{62951}{64524}$, qui multo propius accedit ad 25 , quàm ad 24 .

72. Quum in operatione peragenda notæ singulæ a divisore rejiciuntur, accuratius rem conficiemus, si earum quæ superfunt postremæ unitatem addamus, quotiescunque nota rejecta fuerit 5 , aut maior quàm 5 . Et eodem modo postremæ, quæ superest, dividendi notæ unitas addenda erit, ubi notæ expunctæ excefferint 5 , vel 50 , vel 500 &c, prout una, duæ, tres &c. abolendæ fuerint.

Exemplum IV.

Dividendus esto numerus 8657627 per 1987 , ita ut quotus ad unitatum sedem accuratus habeatur. Juxta id, quod modò adnotavimus, dividendus assumetur numerus 8658 per 1987 , ut hîc factum vides:

$$\begin{array}{r}
 8658 \quad | \quad \begin{array}{r} 1987 \\ \hline 4357 \end{array} \\
 710 \quad - - \quad 199 \\
 113 \quad - - \quad 20 \\
 13 \quad - - \quad 2
 \end{array}$$

Ubi, ad dividendum residuum 710 , loco divisoris 198 assumitur 199 , quia nota rejecta 7 excedit 5 . Eodem modo in operatione sequenti loco divisoris 19 assumitur 20 , quia rejicitur 9 . Et tandem in operatione sequenti, cum divisor 2 justo maior fit, & sexies contineatur in 13 , ac præterea $\frac{1}{2}$, scribenda potius in quoto erit nota 7 quàm 6 ; & quotus, divisione peracta, habebitur 4357 .

73. Jam verò facile erit intelligere, quid facto opus

opus sit, ubi quotus requiritur accuratior, quam hactenus fuit a nobis inventus.

Si ex. gr. quotus inveniendus proponatur ad *decimas-millesimas* omnino exactus, res eò redit, ut dividendo tot cifrae adjungantur, quot habendae in quoto sunt notae decimales, ut in adducto exemplo quatuor. Tunc divisio instituenda erit, juxta methodum hactenus expositam. Ac tandem, ubi quotus fuerit inventus ad unitates usque exactus, tot ab illo ad dextram notae decimales per virgulam discriminandae erunt, quot omnino habere propositum fuerat.

Exemplum V.

Sit dividendus numerus 6927 per numerum 4532, & quotus requiratur ad *decimas-millesimas* accuratus.

Cum *decime-millesime* quartam decimalium sedem occupent, quatuor dividendo cifras adjungemus; & quaestio eò adducetur, ut quotum ex divisione numeri 69270000 per 4532 ad unitates usque, ut in exemplis superioribus, exactum inveniamus. Ac proinde, juxta regulam traditam, instituenda erit divisio numeri 69270 per 4532, ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 69270 \quad | \quad \begin{array}{r} 4532 \\ \hline 15285 \end{array} \\
 23950 \\
 \hline
 1290 - - 453 \\
 384 - - 45 \\
 \hline
 24 - - 5
 \end{array}$$

Et, tot decimalibus per virgulam discriminatis, quot fuerunt cifrae dividendo additae, quotus habebitur 1,5285 ad quartam usque decimalium sedem accuratus, quemadmodum exigebatur.

Si

Si in dividendo, aut in divisore, aut in utroque fuerint notæ decimales, præparandi erunt prius, ut virgula deleri possit, juxta id quod paulo superius adnotavimus (n. 68.). Deinde operatio instituetur, quemadmodum in postremo exemplo paulo ante ostendimus.

Quum *fractio* vulgaris ad partes decimales reducenda proponitur, id perquam expeditè fiet, si methodum hæctenus traditam adhibeamus, & illud observemus, quod a nobis paulo superius notatum fuit (n. 71.).

Ex. gr. Si fractio $\frac{4253}{9678}$ partibus decimalibus exprimenda detur, ita ut ejus valor ad millesimas usque exactus requiratur; erit utique (n. 73.) dividendus numerus 4253000 per 9678, quod eò redit (n. 69.), ut dividatur numerus 4253 per 9678, seu (n. 71.) numerus 4253 per 968, juxta methodum suprâ expositam. Facta operatione, quotus prodibit 439; adeoque fractionis datæ valor erit 0,439 ad millesimas usque exactus.

¶ Ea, quam *Multiplicationis* tractationi methodum adjunximus, ut solius *Additionis* auxilio perageretur, *Divisioni* quoque ita accommodatur, ut nihil præterea quam *Subtractionem* exigat. Est autem hujusmodi.

Construatur seorsum tabella ex *divisoris* continua ad se ipsum additione, quemadmodum illic pro *multiplicando* præcepimus (pag. 34.).

Tum ex dividendo sumatur membrum tot notarum ad sinistram, quot opus fuerint, ut in tabella reperiat numerus illi aut æqualis, aut proximè minor. Nota huic e regione respondens ad quotum transferatur, numerus vero ipse membro dividendo subscribatur, & ab illo subtrahatur. Residuo nota dividendi proximè sequens adjungatur, ut aliud fiat membrum dividendum, cui similiter in tabella quæ-
ra-

ratur numerus aut æqualis, aut proximè minor, & ita deinceps. Si autem in tabella non reperiatur numerus membro dividendo minor, aut saltem æqualis, cifra quotienti adscribetur, & membrum nota sequenti a dividendo sumpta augetur, ut aliud habeatur membrum dividendum, quo similiter adhibito, operationem prosequamur.

Si ex. gr. dividendus proponatur numerus 220188745725 per 236743, eos primùm scribemus, ut in divisione vulgari fieri consuevit.

220188745725	236743	1 ... 236743
2130687	930075	2 ... 473486
712004		3 ... 710229
710229		4 ... 946972
1775572		5 ... 1183715
1657201		6 ... 1420458
1183715		7 ... 1657201
1183715		8 ... 1893944
0000000		9 ... 2130687
		10 ... 2367430

Deinde tabellam conficiemus ex continua divisoris additione ad se ipsum, ut in exemplo apparet, qua semel parata, Divisio nullo negotio absolvenda suscipietur.

Facto itaque membro dividendo ex septem prioribus dividendi notis 2201887, quia sex membrum efficerent ipso divisore minus, numerum in tabella proximè minorem inveniemus 2130687 e regione ipsius 9. Quare notam 9 ad quotum, numerum vero ad membrum transcribemus, factaque subtractione, notam sequentem dividendi 4 residuo applicabimus, ut fiat membrum rursus dividendum 712004. Huic in tabella respondet numerus proxi-

xime minor 710229 e regione notæ 3; quæ proinde ad quotum transfertur, numerus vero ipse a membro subducitur, & residuo nota subsequens dividendi 5 superadditur, ut habeatur membrum 17755.

Quoniam vero huic non reperitur in tabella numerus æqualis, nec minor, cifra quoto adscribetur, & membrum subsequenti dividendi nota 7 augebitur, ut fiat 177557. Quia autem neque huic numerum æqualem minoremve tabella suppeditat, cifra rursus in quoto notabitur, & alia dividendi nota 2 membro adjicietur, fietque 1775572. Cui tabella numerum offert proximè minorem 1657201 e regione notæ 7; quæ proinde quotienti adponenda, numerus ipse a membro subtrahendus, residuoque nota dividendi postrema 5 adjungenda est, ut membrum fiat 1183715. Huic æqualis in tabella deprehenditur numerus qui notæ 5 respondet, quæ tandem quotienti adscribitur; & quia facta subtractione numeri a membro nihil relinquitur, quotus erit 930075 omnino exactus.

De hujusce methodi usu idem erit iudicium, quod alias indicavimus, quum de Multiplicatione similiter peragenda sermo fuit (pag. 35.). ¶

Multiplicationis, ac Divisionis examen.

74 **Q**ua fit ratione probandum id, quod multiplicatione, aut divisione absoluta invenimus, ex ipsa, quam tradidimus, utriusque operationis definitione facile intelligitur.

Cum enim in Multiplicatione toties sumatur multiplicandus quoties unitas in multiplicatore continetur; si quæratür quoties multiplicandus in producto sit, id est (n. 59.), si productum per multiplicandum dividatur, multiplicatorem quotientis loco habendum esse, perspicuum est. Quoniam verò multiplicandum pro multiplicatore accipere licet,
&

& vicissim (n. 44.); illud in universum statuendum est; *Factorum alterum in quoto reperendum necessarium esse, si productum ex multiplicatione ortum per alterum dividatur.*

Sic ex. gr. cum paulo superius (n. 50.) inventum sit productum 17184 ex multiplicatione numeri 2864 per 6; si 17184 per 2864 dividamus, inveniendus erit quotus 6: & vicissim, si per 6 dividamus, quotus erit 2864.

Et similiter, cum ea sit quotientis natura, ut ostendat quoties divisor in dividendo contineatur; si divisor toties sumatur quoties unitas in quotiente continetur, id est (n. 40.), si divisor per quotum multiplicetur, producendum esse dividendum, modo nullum fuerit ex divisione residuum, nemo non videt. At si quod residuum fuerit, id producto ex divisore per quotum multiplicato addendum erit, ut dividendus restituatur.

Sic ex. gr. ex divisione numeri 189492 per numerum 375 quotum 505, & residuum 117 supra invenimus (n. 63.). Multiplicatione vero instituta ipsius quoti 505 per divisorem 375, productum emergit 189375, cui si residuum 117 addamus, dividendus habetur 189492.

Multiplicatio proinde ac Divisio ita sunt inter se comparatae, ut altera alterius ope probari possit.

Sed alia tamen, eaque multo faciliori ratione utramque operationem probare licet, quam deinceps ostendemus. Non tamen idcirco negligenda sunt ea, quae modo adnotavimus, quorumque usus alioquin est maximus.

EXAMEN

Per abjectionem novenarii.

75 **U**T hujusce Examinis rationem exemplo adducto ostendamus, fac multiplicetur numerus 65498 per numerum 454, unde oriatur productum 29736092, quod probandum sit, rectene se habeat, an secus. Operatio erit hujusmodi.

Addantur notæ ipsius multiplicandi 6, 5, 4, 9, 8, quasi omnes in sede unitatum consistenter, & *novenarius* abjiciatur, prout in summam venerit. Quod autem cunque fuerit residuum, ut in hoc exemplo 5, ad latus ejusdem multiplicandi dexterum notabitur.

Addantur itidem notæ multiplicatoris 4, 5, 4, & *novenarius* abjiciatur; residuum habebitur 4, quod similiter ad ipsius multiplicatoris dextram notandum est.

Tum ducantur in se invicem residua utriusque factoris inventa, & a producto, quod in exemplo proposito est 20, *novenarii* abjiciantur, si quos habuerit, ut residuum fiat, quod in eodem exemplo erit 2.

Jam, si productum quod probandum accepimus recte se habet, necesse est, ut collectis itidem in summam ejus notis 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, abjectisque similiter *novenariis*, nihil aliud superfit quàm illud ipsum residuum 2, quod a multiplicatione residuorum utriusque factoris habetur, ut periculo facto superesse inveniemus.

Regula hæc illud assumit, quod ex Numerationis lege facile demonstratur (n. 39 §§.), nihil aliud opus esse, ut habeatur residuum ex subtractione omnium *novenariorum*, qui in dato quolibet numero continentur, quàm ejus notas addere, nulla sedis quam obtinent ratione habita, &
nove-

novenarium abjicere quoties in summa deprehendatur. Quo posito, examinis ratio ita se habet:

Cum multiplicandus 65498 ex quodam novenariorum numero & residuo 5 componatur, & multiplicator similiter ex quodam novenariorum numero & residuo 4; perspicuum est, productum ex eorum multiplicatione genitum per id tantum abesse ut ex novenariis accuratè componatur, quod ex multiplicatione residuorum 5 & 4 conficitur, id est, per 20, seu (abjectis etiam ex hoc producto novenariis) per 2. Si igitur productum, quo de agitur, accuratum est, per abjectionem novenariorum idem relinquere debet residuum, quod per productum residuorum ex factoribus emergentium, abjectis etiam ab illo novenariis, si quos habeat, indicatur.

Quod de multiplicatione traditum est, Divisionis examini facile accommodatur. Cum enim productum ex multiplicatione divisoris per quotum, addito residuo si quod fuerit, dividendum restituat (n. 74.), nihil aliud opus est ad probandam divisionem, quàm novenarios subtrahere tam a divisore quam a quotiente, residua invicem multiplicare; a producto novenarios auferre, si quidem habeat; a residuo divisionis novenarios abjicere, residuumque illi addere quod ex proxima multiplicatione residuorum superfuit, & a summa novenarios itidem auferre, si quos habeat. Et tandem habebitur residuum, quod erit pariter in dividendo reperiendum, si operatio vitiosa non fuit.

Sic ex. gr. cum paulo superius quotum 812, & residuum 200 ex divisione numeri 756984 per 932 invenerimus; si operationem probare velimus, novenarios abjiciemus a divisore & quoto, & residua erunt 5 & 2, quibus invicem multiplicatis habetur 10, abjectoque novenario, 1; ex divisionis residuo similiter novenarios auferemus, & erit
resi-

residuum 2, quod cum residuo proximè invento conjunctum conficit 3; atque hoc ipsum abjectis novenariis a dividendo superesse debet, ut re ipsa superest.

Si accuratiùs rem ipsam perpendamus, examen modò propositum erroris expers omnino non est. Siquis enim in multiplicatione peragenda producti notam aliquam una, duabus, aut pluribus unitatibus maiorem quàm par est in producto constituat, deinde aliam quamlibet totidem unitatibus minorem; cum per id nihil mutaretur in residuo, quod abjectis novenariis relinquitur, manifestum est, errorem ita commissum per id genus examen deprehendi neutiquam posse. At cum duplex error, isque & æqualis, & oppositus ad id requiratur, quod idem est ac per novenarium, aut novenarii multipla aberrare, vix aut ne vix quidem in praxi unquam eveniet, ut hæc examinis ratio quemquam decipiat.

¶ Id, quod per *novenarii* subtractionem examen conficitur, per numeri cujusvis abjectionem fieri potuisset, nisi sua se novenaria probatio simplicitate præ cæteris commendaret. Verum, cum *undenariorum* subtractionem eadem prope facilitate, qua novenariorum perfici posse deprehendamus, idque Numerationis decadicæ proprietatem, alioquin & usui futuram præ se ferat, eam hîc adjungendam existimavimus. Est autem hujusmodi.

Si prima numeri cujuscumque, tertia, & reliquæ per sedes impares notæ a dextra versus sinistram addantur, undenario rejecto quotiescumque in summam venerit, & residuum notetur; deinde secunda, quarta, & reliquæ per sedes pares notæ eadem lege addantur, & residuum a priori illo, (cui si opus fuerit undenarius adjicietur) subtrahatur; residuum habebitur, quod abjectis omnibus propositi numeri *undenariis* superest.

E

Sic

Sic ex. gr. ut subtrahantur undenarii a numero 7543945, dicendum erit: 5 & 9 sunt 14, abjectoque undenario, sunt 3, & 4 sunt 7, & 7 sunt 14, sublatoque undenario, supersunt 3; deinde, 4 & 3 sunt 7, & 5 sunt 12, rejectoque undenario, superest 1, quod si a priori residuo 3 subtrahatur, residuum erit 2 ex subtractione undenariorum omnium, qui in numero 7543945 continentur. Rursus, ut a numero 527381 undenarii auferantur, dicendum erit: 1 & 3 sunt 4, & 2 sunt 6; deinde, 8 & 7 sunt 15, rejectoque undenario sunt 4, & 5 sunt 9; quia autem 9 a priori residuo 6 auferri nequeunt, huic undenarius adjicietur, ut fiat 17, & subtractione facta habebitur residuum 8 ex abjectione undenariorum numeri propositi 527381.

Hac profecto, eaque cum primis insigni Numerationis hodiernæ proprietate uti eodem jure possumus ad probandas quatuor Arithmetice operationes. Et examen quidem erit ejusmodi, ut errorem solum, qui per undenarium aut undenarii multipla steterit, omnino non detegat. Si autem novenaria simul undenariaque probatio conjungantur, multo probabilius fiet de operatione judicium, siquidem is tantum error, qui numerum 99, aut ejus multipla ferat, examen effugiet. ¶

Divisionis usus.

76 **D**ivisionis operatio in universum adhibetur, non modò ut quoties numerus numerum contineat inveniamus, sed etiam ut datum numerum in partes quotcunque æquales partiamur. Et quidem numeri cujusque dimidiam, tertiam, quartam, quintam, vigesimam, trigessimam &c partem sumere, nihil aliud est quàm ipsum dividere per 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c, sive in 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c, par-

partes æquales eundem dispertire, ut earum unam assumamus.

Divisionis ope unitates datæ cujusque speciei ad unitates maioris speciei revocantur; ut ex. gr. *denarii* ad *solidos*, *solidi* ad *libras*.

Sic ex. gr. ut 5864 *denarios* ad *solidos* reducamus, notandum erit, *solidum* confici ex 12 *denariis*, ac proinde tot *solidos* dato *denariorum* numero inesse, quoties 12 *denarii* in eo reperiuntur. Quapropter dividendus erit numerus 5864 per 12, & quotus prodibit 488*s*, residuum vero 8*d*. Ut autem 488 *solidi* ad *libras* revocentur, cum *libræ* singulæ ex 20 *solidis* constent, dividendus erit numerus 488 per 20, & quotus habebitur 24^{lb}, & residuum 8*s*. Datus proinde *denariorum* numerus revocatur ad 24 libr. 8. sol. & 8 den.

Data hujusce divisionis per 20 peragenda occasione, illud in universum adnotandum est, operationis compendium adhiberi posse, quoties divisor in cifras definit. Tunc enim tot in dividendo notæ ad dextram separandæ erunt, quot in divisore cifras reperiuntur; quæ autem supersunt, per notas ipsius divisoris significativas, cifras rejectis, dividuntur. Si verò quod fuerit residuum, illi ad dextram notæ adjungentur, quæ fuerunt a dividendo rejectæ, & residuum totum habebitur; sin autem nihil reliquum fuerit, ipsæ notæ a dividendo segregatæ residuum solæ præstabunt.

Sic ex. gr. si numerus 5834 per 20 dividendus proponatur, rejicienda erit postrema dividendi nota 4, & dividendæ reliquæ 583 per 2. Quotus invenietur 291, & residuum 1; ad cujus dextram nota a dividendo rejecta 4 adscribetur, ut residuum totum habeatur 14; ac proinde quotus absolutus invenietur $291\frac{14}{20}$.

Ea compendii ratio percommode adhiberi potest

ad onerariæ sarcinam reducendam ad maiores ponderum mensuras, quas Lusitanè *tonnelladas* appellamus.

Si ex. gr. navis onus ponatur esse 2584954 *libras*, ut id ad hujusmodi mensuras reducat, id est, ut per 2000 dividatur, nihil aliud opus est quàm tres postremas ad dextram notas a proposito numero segregare, & reliquarum dimidium sumere. Sic enim deprehendemus 1292 *tonnelladas* & 954 *libras*.

Idem divisionis compendium aliis quamplurimis mensuris reducendis, quæstionibusque solvendis accommodari potest, prout earum ratio postulaverit.

DE FRACTIONIBUS.

77 *F* *Ractiones*, si Arithmetice spectentur, nihil aliud sunt, quàm numeri, quibus quantitates unitate minores exprimuntur.

78 Ut accuratam ac dilucidam earum notionem animo concipiamus, illud imprimis observandum est, quantitatem unitatis loco acceptam posse & ipsam spectari, tamquam ex unitatibus minoribus compositam; quemadmodum ex. gr. *libra* concipitur ex 20 partibus, sive unitatibus constari, quæ *solidi* nominantur.

Una, aut plures earum partium, in quas unitas dividitur, aut ex quibus composita intelligitur, id constituunt, quod unitatis *fractionem* appellamus, quo etiam vocabulo numeri donantur, qui ad easdem partes exprimendas adhibentur.

79 Duplex autem fractionem per numeros exprimendi modus est, & quidem uterque usu receptus.

Primus in eo consistit, ut unitatis partes, ex quibus proposita quantitas componitur, ad numerorum integrorum instar numerentur, earum singulis

gulis pro totidem unitatibus alterius ordinis acceptis, quibus & nomen peculiare donatur.

Sic ad septem partes significandas, quarum viginti *libram* conficiunt, seposita interim *libra*, id est, unitatis præcipuæ consideratione, eas peculiari vocabulo *solidos* appellamus, ac deinde quasi unitates absolutas nota 7 denotamus, cui & litteram indicem unitatum, quas significat, superaddimus, hoc modo 7^s; quod expressionis genus in se quidem integrum & absolutum, si ad *libram* referatur, ejus fractionem exhibet.

Hæc fractionum ratio in numeris *complexis* locum habet, de quibus postea.

80 Cum tamen infinitum quiddam esset, si singulæ quæ fieri possunt unitatis divisiones peculiari nomine signove distinguerentur, alter fractiones exprimendi modus inventus est, duplici numero adhibito, quorum alter supra lineolam scribitur, ut unitatis partes exprimat, quæ in proposita quantitate continentur; alter vero infra lineolam, ut ostendat, quot earum partium unitatem conficiant. Sic ad septem, quas paulo ante memoravimus, *libra* partes exprimendas, scribendum erit $\frac{7}{20}$.

81 Ut autem fractionis valor enuntietur, numerus superior, qui *Numerator* dicitur, per *cardinales*; inferior verò, qui *Denominator* appellatur, per *ordinales* numeros reddendus erit. Sic $\frac{7}{20}$ septem vigesimas significat unitatis partes; $\frac{11}{100}$ un-

decim centesimas &c: per undecim autem centesimas undecim partes intelliguntur, quarum centum unitatem conficiant.

82 Numerator igitur designat quot unitatis partes habeantur in quantitate per fractionem expres-

sa; denominator verò earum partium magnitudinem definit, quippe qui ostendit earum numerum, qui ad unitatem constituendam omnino requiritur. Et quidem denominator idcirco appellatur, quia fractionis partibus nomen tribuit; idque efficit, ut positis ex. gr. fractionibus $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, prioris partes *quintæ*, posterioris autem *septimæ* nominentur.

83 Numerator & denominator, communi etiam vocabulo, fractionis *termini* appellantur. Positis autem duabus fractionibus, numeratores, aut denominatores simul *termini homologi*; numerator autem unius cum denominatore alterius, *termini heterogeni* nominantur.

De integris sub fractionum forma spectatis.

84 **Q**Uæ circa fractos numeros operationes fiunt, eò sæpe calculum ducunt, ut fractio emergat, cujus numerator sit denominatori æqualis, aut etiam maior, ut ex. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

Id autem genus expressiones fractionem propriè non exhibent, sed numeros aut plane integros, aut integros cum fractionibus involvunt.

85 Si igitur integros quis secernere velit, quos ejusmodi fractiones continent, numeratorem sciat per denominatorem esse dividendum. Quotus enim integros ostendet, & residuum divisionis, si quod fuerit, numerator erit fractionis propriæ quæ integris adhærebit, eodem manente denominatore.

Sic $\frac{27}{5}$ reducuntur ad $5\frac{2}{5}$, id est, quinque unitates, & duæ prætereà quintæ unitatis partes.

Et

Et quidem in numero hujus formæ $\frac{27}{5}$, denominator 5 ostendit unitatem esse ex 5 partibus compositam; tot igitur unitates integræ per fractionem $\frac{27}{5}$ exprimuntur, quoties 5 in 27 continentur.

86 Multiplicatio, ac divisio numerorum integrorum, quibus fractiones adhærent, facilius saltem calculi gratia, exigunt, ut integri ad fractionis formam reducantur. Id autem fiet, si numerus integer per denominatorem fractionis multiplicetur, ad quam revocandus proponitur, & productum numeratoris loco assumatur.

Si ex. gr. numerum 8 ad fractionem revocare velimus, cujus sit denominator 5, multiplicandus erit 8 per 5, & productum 40 numeratorem dabit, eritque fractio quæsitæ $\frac{40}{5}$. Et quidem, quum numerus 8 ad *quintas* reducendus est, singulæ unitates ex 5 partibus compositæ intelliguntur: igitur 8 unitates 40 earum partium necessario conficient. Eodem modo numerus mixtus $7\frac{4}{9}$ in nonas partes conversus fiet $\frac{67}{9}$, siquidem integer 7 conficiet $\frac{63}{9}$, quibus si $\frac{4}{9}$ addantur, fient $\frac{67}{9}$.

Quum numerus integer sub fractionis forma exhibendus est, nihil autem interest quonam sit denominatore affectus, simplicissimum est unitatem assumere, quæ ipsa numeris omnibus integris subscripta intelligitur. Nam ex. gr. numerus integer 8 octo unitatibus numerandis adhibetur, ac proinde est veluti numerator fractionis cujus denomina-

minator unitas sit. Ut enim per $\frac{8}{4}$ octo triētes, & per $\frac{8}{2}$ octo semisses, sic per $\frac{8}{1}$ octo unitates declarantur.

De variationibus, quas fractionis termini subire possunt, quin ejus valor mutetur.

87 **Q**Uò plures in partes unitas divisa concipitur, eò plures earum requiri, ut una eademque quantitas exprimat, manifestum est.

88 Denominatorem igitur fractionis cujusque duplum, triplum, quadruplum &c. reddere poussumus, idque manente fractionis valore, dummodo numeratorem unà duplum, triplum, quadruplum &c. constituamus.

Quare in universum tenendum est, *Fractionis valorem manere, quotiescunque ejus termini per eundem numerum ambo multiplicantur.*

Sic $\frac{3}{4}$ eandem quantitatem exprimit, quam $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c; $\frac{1}{2}$ idem exhibet, ac $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Haud absimili ratione intelligitur, quò minori fuerit partium numero unitas constituta, eò pauciores assumendas esse, ut una eademque quantitas exprimat.

Quapropter denominatorem duplo, triplo, quadruplo &c. minorem reddere licet, quin fractionis valor quidquam immutetur, si numerator similiter duplo, triplo, quadruplo &c. minor constituatur.

Unde in universum: *Fractionis valor idem manet, quoties ejus termini per eundem numerum dividuntur.*

Ut

Ut harum propositionum veritas innotescat nihil aliud opus est, quàm attentè perpendere quid per denominatorem, quid per fractionis numeratorem intelligamus.

Hinc vero notandum est, fractionis terminos per eundem numerum multiplicare ac dividere, longe aliud esse quàm fractionem ipsam multiplicare ac dividere; hujusmodi enim operationes fiunt, eodem manente fractionis valore, ut modò declaravimus.

Duo autem, quæ tradidimus, principia fundamento sunt iis, quæ sequuntur Reductionibus, quarum usus in peragendo fractionum calculo frequentissimus est.

Reductio Fractionum ad eundem denominatorem.

90 I^o. **S**I duæ fractiones ad eundem denominatorem reducendæ proponantur, singulos cujusque terminos per denominatorem alterius multiplicare oportet.

Sint ex. gr. fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ ad eundem denominatorem revocandæ.

Primùm multiplicandi erunt prioris termini 2 & 3 per denominatorem alterius 4, & fractio reducetur ad $\frac{8}{12}$, quæ (n. 88.) eundem valorem re-

tinet ac fractio proposita $\frac{2}{3}$. Deinde posterioris termini 3 & 4 in alterius denominatorem 3 ducuntur, & habebitur fractio $\frac{9}{12}$, quæ ejusdem valoris

est ac fractio $\frac{3}{4}$. Ac proinde fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$

re-

revocatæ sunt ad $\frac{3}{12}$ & $\frac{2}{12}$, quæ illis sunt respectivè æquales, & eodem denominatore communi 12. afficiuntur.

Est autem perspicuum, denominatorem eundem pro utraque fractione habitum semper iri, hac regula adhibita, quia singuli earum denominatores ex multiplicatione denominatorum earum, quæ propositæ sunt, fractionum oriuntur.

91 2°. Si plures quàm duæ fractiones reducendæ proponantur, singuli cujusque termini per factum ex aliarum denominatoribus multiplicentur, & totidem fractiones exurgent prioribus æquales, & eodem denominatore affectæ.

Sint ex. gr. ad eundem denominatorem reducendæ quatuor fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$.

Primùm singulos primæ terminos 2 & 3 multiplicabimus per factum ex denominatoribus aliarum 4, 5, & 7. Quod quidem factum inveniemus, si multiplicemus 4 per 5, & productum 20 per 7; habebitur enim factum ex tribus 140. Itaque si 2 & 3 per 140 sigillatim multiplicemus, erunt producta 280 & 420, ex quibus fiet fractio $\frac{230}{420}$, quæ fractioni $\frac{2}{3}$ æqualis est (n. 88.). Deinde alterius terminos 3 & 4 multiplicabimus per factum ex aliarum denominatoribus 3, 5, & 7, nempe per 105, & fractionem habebimus $\frac{315}{420}$ ipsi $\frac{3}{4}$ æqualem. Tum similiter tertiæ fractionis terminos 4 & 5 multiplicabimus per 84, productum scilicet ex tribus denominatoribus 3, 4, & 7; & loco fractionis $\frac{4}{5}$ aliam ejusdem valoris habebimus $\frac{336}{420}$. Postremò utrumque fractionis quartæ terminum 5, & 7 multiplicabimus per 60,

60, factum videlicet ex tribus aliarum denominatoribus 3, 4, & 5; fractioque prodibit $\frac{300}{420}$, propositæ fractioni $\frac{5}{7}$ omnino æqualis.

Ad hunc modum datæ quatuor fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, & $\frac{5}{7}$ in hæc quatuor $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, & $\frac{300}{420}$ transmutatæ sunt, quæ quidem minus simplicitatis præ se ferunt, sed eundem illarum valorem retinent, idque ob communem denominatorem habent commodi, ut Additionis, ac Subtractionis operationibus suscipiendis accommodatiores evadant.

Liquet autem vel ex ipsa reductionis operatione, fractiones haberi iis quæ propositæ sunt æquales, quia uterque cujusque terminus per eundem numerum multiplicatur (n. 88.). Denominator verò omnium idem semper necessario erit, quia singularum fractionum denominator fit ex producto omnium denominatorum earum fractionum, quæ reducendæ proponuntur.

¶ Cum superiori methodo plerumque fiat, ut fractiones orientur, denominatore quidem communi affectæ, sed non illo tamen simplicissimo quem habere possunt, quapropter & alia, eaque valde operosa reductione opus esset, cujus auxilio ad maiorem, quæ per eam nominis ejusdem conditionem licet, simplicitatem revocarentur; fatius utique erit, multoque compendiosius, operationem ita instituere, ut fractiones propositæ ad communem denominatorem minimum illico adducantur. Id autem fiet ad hunc modum.

Si fractionum reducendarum, quæ quidem minimis ponuntur terminis expressæ, denominatores fu-

fuerint, qui nullum inter se communem divisorem habeant, reductio prorsus instituetur, ut paulo superius traditum est; & denominator communis inventus minimus erit, quem ejusmodi fractiones habere possunt.

Quod si denominatores communi divisore gaudeant, per illum singuli dividuntur, & quidem per maximum, ubi plures fuerint; & fractiones in totidem alias mutabuntur, quæ quidem ejusdem valoris non erunt, sed eò postea restituentur. Hæ ad commune nomen adducentur, juxta regulam supra traditam; communis autem earum denominator per eundem divisorem multiplicabitur, per quem denominatores fuerunt paulo ante divisi. Et hoc pacto tandem fiet, ut fractiones reductæ, & datis æquales evadant, & communi denominatore minimo exprimantur.

Quum in fractionibus propositis denominatores tantum aliqui communem inter se divisorem habent, ipsi quidem per illum dividuntur, sed per eundem unà multiplicandi erunt numeratores fractionum, quarum denominatores dividi nequeunt. Ita emergent novæ fractiones, in quibus reductio instituenda erit. His autem denominatore communi donatis, denominator similiter per divisorem multiplicabitur, ut ad fractionum datarum valorem redeant. Eodem modo, quum denominatores propositi communem divisorem habent, factaque divisione fractiones oriuntur, in quibus denominatores aliqui communi adhuc inter se divisore gaudeant, ipsæ ut in priori casu præparandæ erunt; & ita deinceps. Fractionibus autem reductis, earum denominator multiplicandus erit per factum divisorum omnium, qui in reducendis denominatoribus adhibiti sunt. Regularum praxis ex iis quæ sequuntur exemplis fiet perspicua.

Exemplum I. Siat ad eundem denominatorem re-

vocandæ fractiones $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$. Cum denominatores 18, & 27, communem divisorem maximum habeant 9, utrumque per 9 dividemus, & fractiones fient $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; quibus ad eundem denominatorem adductis, fractiones emergent $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; & communi earum denominatore 6 per divisorem 9 multiplicato, evadent $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$, quæ & datis æquales sunt, & communi denominatore minimo exprimuntur. Si reductio solita fieret, earum loco haberemus $\frac{155}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplum II. Sint fractiones $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$ ad communem denominationem reducendæ. Quia denominatores 26, 13, 39; communem divisorem habent 13; divisione facta, eas transmütabimus in $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$; his autem ad eundem denominatorem revocatis, fractiones orientur $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; & denominatore tandem per divisorem 13 multiplicato, fractiones emergent $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$, quæ & datis æquales, & omnium quæ communi nomine gaudeant simplicissimæ habentur. Operatione autem vulgari instituta, pro iis invenirentur fractiones valde compositæ $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplum III. Si reducendæ proponantur fractiones $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; cum tres denominatores 7, 15, 30, communem divisorem non habeant, sed duo

duo tantū posteriores 15, & 30, hos per divisorē maximum 15 dividemus, per quem & numeratorēm 2 prioris fractionis multiplicabimus, cū denominator dividi non potuit. Ita emergent fractiones $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, quæ, reductione facta, evadent $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; & denominatore 14 per divisorem 15 multiplicato, fractiones primū propositæ reducuntur ad $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$, cū alioquin vulgari methodo adhibita reducerentur ad $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplum IV. Dentur communi nomine exprimendæ fractiones $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primū, quia denominatores communem divisorem habent 11, facta divisione fractiones mutabimus hoc modo: $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Deinde, quia duarum posteriorum denominatores 7, & 14, communem adhuc divisorem habent 7, illos per hunc dividemus, & per eundem multiplicabimus numeratores 3, & 7 duarum priorum, quarum denominatores per 7 dividi nequeunt; & hoc pacto novæ aliæ fractiones emergent $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, in quibus reductionis operatio instituenda erit. Qua absoluta, inveniēmus eas reduci ad $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; & denominatore communi 10 per factum divisorum 11 & 7, id est, per 77 multiplicato, fractiones primū propositas reduci inveniēmus ad $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, idque sub forma quā fieri potest simplicissima. Si usitata methodus hīc adhiberetur,

earum loco haberentur fractiones valde compositæ
 $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quæ utique
 molestissimum calculum exigent, ut ad simpliciorem illarum formam revocarentur, cum ad id communem divisorem maximum inter denominatorem & quatuor numeratores invenire oporteret, ut paulo inferius demonstrabitur. ¶

Reductio fractionum ad expressionem simplicissimam, sive ad minimos terminos.

92 Fractiones eò simpliciores habentur, quò minoribus terminis exprimuntur. Sæpe autem fieri potest, ut fractio proposita ad minores terminos reducatur, idque locum habet tunc, quum ejus numerator ac denominator per unum aliquem numerum simul dividi possunt. Cum enim hujusmodi operatio fractionis valorem non mutet (n. 89.), adhibenda procul dubio est, ut fractiones maxima qua possunt simplicitate donentur, quod quidem non tam ad expressionis elegantiam, quam ad ejus valorem facilius concipiendum pertinet.

Licet enim ex. gr. fractio $\frac{27}{63}$ idem valeat ac $\frac{3}{7}$, per hanc tamen, utpote simpliciolem, ejus, quæ per utramque significatur, quantitatis notionem longe facilius concipimus, animo nimirum præ multitudine partium minimè distracto.

Hæc autem id genus reductioni peragendæ ratio proponitur.

93 Dividatur primùm uterque fractionis terminus per 2, eaque operatio tandiu repetatur, quandiu absque residuo fieri poterit. Deinde divisio instituat per 3, quæ eodem modo iteranda erit, quæ-

quoties poterit. Eadem lege gradatim assumantur divisores 5, 7, 11, 13, 17 &c, numeri videlicet qui *primi* dicuntur, nullumque divisorem agnoscunt præter se ipsos, aut unitatem.

Una hujusce operationis difficultas est, ut videamus quisnam per 2, 3, 5 &c. dividi numerus exactè queat, ne divisio frustra instituatur. Eam ad rem quæ sequuntur principia plurimum faciunt.

94 Numerus omnis, cujus postrema ad dextram nota numerum parem exhibet, dividi exactè potest per 2.

Numerus omnis, cujus notæ in summam collectæ, nulla valoris localis ratione habita, efficiunt 3, aut multipulum ipsius 3, dividi absque residuo potest per 3. Sic ex. gr. numerus 54231 divisibilis est per 3, quia ejus notæ 5, 4, 2, 3, 1, efficiunt 15, multipulum nimirum ipsius 3, quia *quinquies* numerum 3 exactè continet.

Eodem modo si notarum summa conficiat 9, aut multipulum ipsius 9, numerus per 9 dividi exactè poterit.

Qui in cifram, aut in 5 numerus desinit, per 5 dividi sine residuo potest.

¶ Numerus omnis, cujus notæ in sedibus imparibus a dextra versus sinistram summam efficiunt æqualem illi, quam notæ in sedibus paribus exhibent; aut inæqualem etiam, dummodo differentia sit 11, aut multipulum ipsius 11, divisibilis est per 11. (n. 75. ¶). Sic numerus 89452 divisibilis erit per 11, quia notæ in sedibus imparibus 2, 4, 8, eandem summam conficiunt quam notæ in sedibus paribus 5, & 9. Eodem modo numerus 8452719 exactè dividetur per 11, quia notæ in sedibus imparibus 9, 7, 5, 8 summam 29 conficiunt, paribus autem in sedibus 1, 2, 4 conficiunt 7, & utriusque summæ differentia est 22, multipulum ipsius 11. ¶

Quod

Quod ad numerum 7, & reliquos *primos* attinet, licet regulæ similes inveniri possent, divisio potius tentanda erit, quæ ipsa minus negotii allatura videbitur.

Sit ex. gr. ad minimos terminos reducenda fractio $\frac{2016}{5796}$. Primùm ejus terminos dividemus per 2, quia postremæ utriusque notæ ad dextram numerum parem exhibent, & fractio prodibit $\frac{1008}{2898}$.

Rursus divisione instituta per 2, fiet $\frac{504}{1449}$. Cum autem divisio amplius fieri nequeat per 2, ex iis quæ supra diximus illico dignoscitur fieri posse per 3; & divisione instituta, habetur $\frac{168}{483}$. Rursus per 3 dividemus, & fiet $\frac{56}{161}$. Denique divisionem tentabimus per 7, quæ absque residuo succedit, ac proinde fractio tandem reducitur ad $\frac{8}{23}$.

In hac operatione divisionem tantum per numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c. ineundam idcirco præscribimus, quia facta ex. gr. divisione per 2, quoties potest, divisionem per 4 tentare supervacuum est. Si enim hæc locum haberet, & illa adhuc potiori jure institui posset.

95 Alia etiam via, eaque directa præ cæteris, fractio quælibet ad minimos terminos revocari potest, quæ eò redit ut illius termini per communem utriusque divisorem maximum statim dividantur. Ejusmodi autem divisor hac ratione invenitur.

Dividatur terminorum maior per minorem. Si nihil ex divisione reliquum fuerit, ipse terminus minor communis utriusque divisor maximus erit. Si autem aliquod residuum fuerit, per id termi-

nus minor dividatur: Tum si nihil relinquitur, id, quod divisoris loco fuit residuum, communem maximum divisorem ostendet; sin autem aliquid superest, per id dividatur operationis præcedentis divisor; & ita deinceps, quousque divisio habeatur absque residuo. Hujus postremæ divisionis qui divisor fuerit, is & divisor communis maximus erit utriusque termini fractionis propositæ. Si autem postremus divisor fuerit unitas, id argumento erit, fractionem ad minores terminos revocari non posse.

Proponatur ex. gr. reducenda fractio $\frac{3760}{9024}$. Primum quærendus erit maximus utriusque termini divisor; ac proinde dividemus terminum 9024 per 3760, unde quotum inveniemus 2, & residuum 1504. Rursus 3760 per 1504 dividemus, unde quotus erit 2, & residuum 752. Tum 1504 per 752 ulterius dividemus, cumque nihil superfit, erit postremus divisor 752 maximus divisor terminorum fractionis propositæ; quæ adeo divisione peracta reducetur ad $\frac{5}{12}$.

Et quidem per operationem inventum est, numerum 752 divisorem exactum esse ipsius 1504; igitur divisor quoque erit numeri 3760, qui ex numero 1504 bis sumpto & 752 componitur; adeoque & numerum 9024 exacte dividet, qui ex numero 3760 bis sumpto & 1504 coalescit.

Præterea facile est intelligere, numerum 752 maximum esse divisorem, quem termini 9024 & 3760 habere possunt. Nam communis divisor esse nequit inter 9024 & 3760, quin sit & ipse communis divisor inter 3760 & 1504; neque similiter inter hos, quin simul communis numerorum 1504 & 752 divisor habeatur. Est autem 752 maximus communis divisor inter 1504 & 752, ut patet: igitur &c.

¶ Si maximus communis divisor inter plures quam duos numeros inveniendus proponatur, methodus erit hujusmodi.

Quærat^rur maximus communis divisor inter primum & secundum, inter secundum & tertium, inter tertium & quartum &c, quocumque sint numeri ordine dispositi. Circa divisores inventos eadem instauretur operatio, & ita deinceps, donec ad unicum divisorem perveniamus, qui tandem erit communis divisor maximus numerorum propositorum. Si in qualibet operationis parte duo, aut plures divisores iidem emerferint, eorum tantum unus pro operatione sequenti adhibebitur; si autem omnes iidem prodierint, ulterius progredi supervacuum erit, cum eorum quilibet numerus sit in quem desitura esset operatio, si ad finem usque juxta regulam traditam promoveretur, adeoque & maximus communis divisor, quem invenire propositum fuerat. At si ad duos quoscunque numeros operatio deveniat, qui divisorem communem, præter unitatem, non habeant, neque propositi numeri habere poterunt.

Exemplum. Sit inveniendus communis divisor maximus numerorum 7174090 1956570 913066 465850 46585. Primum quærentur divisores inter primum & secundum, secundum & tertium &c, & numeros inveniemus 652190, 130438 18634 46585; deinde circa hos operationem eandem ordiemur, & divisores emergent 130438 18634 9317; tum super his similiter operabimur, & divisores orientur 18634 9317; denique, invento inter hos communi divisore maximo 9317, is tandem numerorum datorum communis divisor maximus habebitur. ¶

*Alia fractiones considerandi ratio,
& quæ inde derivantur.*

96 **Q**Uæ a nobis hæcenus fractionum notio tradita est, in eo consistit, ut denominator ostendat quot ex partibus unitas composita concipiatur; numerator autem, quot earum partium in ea quantitate sint, quæ per fractionem exprimitur.

Sed alia prætereà ratione fractionem concipere possumus, si numeratorem consideremus exhibere quantitatem quamlibet propositam, quæ sit in tot partes distribuenda, quot in denominatore unitates deprehenduntur, ut earum partium una assumatur.

Sic ex. gr. in fractione $\frac{4}{5}$ numerator 4 spectari potest, tanquam numerus quatuor res quascunque exhibens, ex. gr. quatuor *libras*, quæ in 5 partes distribuendæ ponuntur, ut earum una significetur. Est enim perspicuum, idem omnino esse 4 *libras* in 5 partes dividere, ut una assumatur, atque 1 *libram* in 5 partes fecernere, ut earum assumantur 4.

97 Fractionis igitur numerator tanquam *dividendus*, denominator vero tanquam *divisor* haberi possunt. Ac proinde liquet, quid significare velint divisionum residua ad eum modum expressa, quem supra præscripsimus (n. 60.).

98 Quare, ut numerus quicunque integer fractionis speciem induat, nihil aliud opus est, quam numerum ipsum numeratoris loco habere, & unitatem pro denominatore assumere. Sic 3 & $\frac{1}{1}$, 5 & $\frac{6}{1}$ idem omnino exhibent.

99 Inde etiam intelligitur ratio fractionem quamlibet in partes decimales transmutandi. Numerator enim spectari potest, tanquam residuum divisionis, in qua denominator divisoris vices egerit; ac proinde operatio instituetur, ut supra traditum est (pag. 52.), cifra prius quoto adscripta, quæ vacuum unitatum sedem occupet. Sic fractio $\frac{3}{5}$ reducitur ad 0,6; $\frac{5}{9}$ ad 0,5555 &c; $\frac{1}{25}$ ad 0,04; & sic de aliis.

Eadem plane ratione numeri *complexi* ad partes decimales revocari possunt.

Si ex. gr. numerus $3^{\text{hex}} 5^{\text{P}} 8^{\text{P}} 7^{\text{l}}$ ad decimales ipsius *hexapedæ* partes reducendus detur, ita ut ejus valor ad dimidias usque *lineas* accuratus retineatur; observandum erit, *hexapedam* 864 *lineas* continere, adeoque 1728 linearum dimidia. Quare, ne linearum medietates negligantur, notas decimales ad decimas usque millesimas invenire oportet.

Quo posito, $5^{\text{P}} 8^{\text{P}} 7^{\text{l}}$ ad *lineas* revocabimus (n. 57.), unde fient 823^{l} , sive $\frac{823}{864}$ ipsius *hexapedæ*; cujus fractionis valor decimalibus expressus, ut paulo ante traditum est, reducitur ad 0,9525; adeoque numerus propositus convertetur in $3^{\text{hex}} 9525$.

§§ Fractiones autem decimales dupliciter possunt ad fractiones vulgares revocari.

Primum enim, si earum formam decimalem, adeoque & virgulam retinere libeat, cum integrorum indolem usquequaque æmulentur, per regulas supra traditas reducuntur (n. 86. 98.) Si ex. gr. fractionem decimalem 0,23 sub fractionis vulgaris forma exhibere propositum fuerit, satis erit

erit ita scribere $\frac{0,23}{1}$; si eandem ad denominatorem datum 7 revocare oporteat, facta operatione ut in numeris integris, reducetur ad $\frac{1,61}{7}$ (n. 86.).

Quod si formam decimalem exuere, virgulamque delere velimus, notæ decimales numeratoris locum obtinebunt, denominator autem erit unitas cum tot cifris, quot decimalium sedes fuerint. Sic 0,23 nihil aliud est, quàm $\frac{23}{100}$; 0,0071 nihil aliud, quàm $\frac{71}{10000}$ &c.

Ad hæc, quæ in infinitum fractiones decimales excurrunt, ad fractiones vulgares finitis terminis expressas nullo negotio revocantur, modò ea lege progrediantur, ut eadem notæ in orbem redeant, cujusmodi fractiones *periodicas* appellare possumus. Hujus indolis est fractio decimalis 0,321321321 &c, quæ ex periodo notarum 321 perpetuò recurrente componi intelligitur.

Et quidem, si periodi a virgula statim incipiant, periodus una numeratoris loco assumetur, denominator autem erit numerus ex tot 9 constans, quot sunt periodi cujusque sedes. Sic fractionis hujus decimalis 0,321321321 &c valor accuratus est $\frac{321}{999}$; hujus itidem 0,013201320132 &c valor habetur $\frac{132}{999}$; hujus denique 0,777777 &c, quæ & ipsa periodica est, singulis videlicet periodis unica nota constantibus, valor reducitur ad $\frac{7}{9}$.

At si periodi a virgula statim non incipiant, denominator quidem erit numerus ex tot 9 compositus, quot periodus quæque sedes occupat, sed ipsi

ipsi tot cifrae addentur, quot ante primam periodum sedes decimales deprehenduntur. Ut autem numerator habeatur, multiplicandae sunt notae ante primam periodum constitutae per denominatorem, cifris quidem addendis multatum; & factum uni periodo addendum. Sic ex. gr. ut hanc expressionem 1,357121212 &c ad fractionem communem revocemus, cum periodi binis constent notis, & tres ante primam periodum sedes jaceant, denominator erit 99000. Multiplicatis autem notis 1357 primam periodum antecedentibus per denominatorem cifris multatum 99, productum erit 134343, cui si periodum unam 12 addamus, numerator habebitur 134355; adeoque valor quaesitus erit $\frac{134355}{99000}$. Eodem modo expressio

0,00473473473 &c revocatur ad $\frac{473}{99900}$; haec autem

0,633333 &c ad $\frac{57}{90}$; & sic de aliis. §§

De operationibus Arithmeticis circa fractiones.

100 **F**ractionum calculus iisdem quatuor operationibus tractatur, quae pro numeris integris traditae jam sunt. Quarum priores duae, *Additio* atque *Subtractio*, operationem praeparatoriam plerunque exigunt, reliquae duae non item.

Fractionum Additio.

101 **S**I fractiones ejusdem nominis fuerint, ut earum summa habeatur, nihil aliud opus est, quam numeratores addere, summæque eundem denominatorem subscribere,

Ex.

Ex. gr. si addendæ proponantur fractiones $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$, quæ eodem denominatore 7 afficiuntur, numeratores, 2, 3, 5, addendi erunt, & summa 10 numeratoris loco habenda, cui idem denominator 7 subjicietur; adeoque fractionum summa erit $\frac{10}{7}$, quæ tandem reducitur ad $1 \frac{3}{7}$ (n. 85.).

102 Si fractiones propositæ ejusdem nominis non fuerint, reducantur prius ad eundem denominatorem, quemadmodum paulo superius traditum est (n. 90. 91.), deinde operatio instituitur, ut modo ostendimus.

Ex. gr. Si fractiones $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ addere propositum sit, eas ad communem denominatorem revocabimus (n. 91.), fientque $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}, \frac{48}{60}$, quarum summa est $\frac{133}{60}$, seu $2 \frac{13}{60}$ (n. 85.).

Fractionum Subtractio.

103 **Q**um fractionis utriusque denominator idem est, numerator à numeratore subducitur, & residuum numeratoris loco assumitur, cui idem denominator tribuitur, ut fractionum differentia habeatur.

Sic ex. gr. ut $\frac{5}{9}$ ab $\frac{8}{9}$ subtrahamus, numeratorem 5 a numeratore 8 auferemus, & residuo 3 denominatorem ipsum 9 subscribemus; adeoque residuum quæsitum erit $\frac{3}{9}$, quod tandem revocabitur ad $\frac{1}{3}$ (n. 93.).

104 Si a $9 \frac{5}{8}$ auferendus proponatur numerus $4 \frac{7}{8}$, cum $\frac{7}{8}$ a $\frac{5}{8}$ subtrahi nequeant, accipienda erit unitas a numero integro 9, quæ ad denominatorem 8 revocata & fractioni $\frac{5}{8}$ addita efficiet $\frac{13}{8}$ (n. 86.). Tum ablatis $\frac{7}{8}$ a $\frac{13}{8}$ super sunt $\frac{6}{8}$; & tandem ablatis 4 ab 8 (habita scilicet ratione unitatis ablatae a numero 9) super sunt 4. Ac proinde residuum quæsitum erit $4 \frac{6}{8}$, seu $4 \frac{3}{4}$ (n. 93.).

105 Quum fractiones propositæ nomine differunt, antequam subtractio instituat, ad eundem denominatorem revocantur (n. 90.), qua præparatione adhibita, operatio ad regulam superiorem redit.

Sic ex. gr. ut $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$ auferamus, fractiones revocabimus ad $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, & subtractione facta residuum habebitur $\frac{1}{12}$.

Fractionum Multiplicatio.

106 **F** Ractionibus multiplicandis hæc regula præscribitur: *Numeratores, ac denominatores invicem multiplicentur, & illorum factum pro numeratore, horum autem pro denominatore ejus quod quæritur producti assumantur.*

Si fractio ex. gr. $\frac{4}{2}$ per $\frac{2}{2}$ multiplicanda habeatur,

beat, primùm multiplicandus erit numerator 4 per numeratorem 2, & factum 8 numerator erit producti quæſiti; deinde denominator 5 per denominatorem 3 multiplicabitur, & factum 15 denominator erit ejuſdem producti quæſiti, quod adeo erit $\frac{8}{15}$.

Ut huiusce regulæ ratio intelligatur, illud meminiffe oportet, numerum per numerum multiplicare nihil aliud eſſe, quàm eorum alterum toties accipere quot ſunt alterius unitates. Quare $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ multiplicare idem eſt, ac *duas tertias* partes fractionis $\frac{4}{5}$ accipere, ſeu, quod eodem redit, *tertiam* partem fractionis $\frac{4}{5}$ *bis* ſumere. Quum autem denominator 5 per 3 multiplicatur, partes *quinte* ipſius fractionis $\frac{4}{5}$ in *decimas quintas* tranſmutantur, partes utique *ter* minores; deinde, quum numerator 4 per numeratorem 2 multiplicatur, eæ partes *ter* minores redditæ *bis* ſumuntur; *tertia* igitur pars fractionis $\frac{4}{5}$ *bis* accipitur; ac proinde fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ reipſa multiplicatur.

107 Si numerus integer per fractionem, aut fractio per integrum multiplicanda habeatur, integer fractionis forma donabitur, denominatoris loco unitate ſubſcripta, & operatio inſtituetur, ut in exemplo ſuperiori.

Ex. gr. Si multiplicandus fuerit numerus 9 per $\frac{2}{7}$, res perinde tractabitur, quaſi fractus $\frac{2}{1}$ per

per fractum $\frac{4}{7}$ multiplicandus proponeretur ; adeoque productum , juxta regulam , erit $\frac{36}{7}$, quod deinde revocabitur ad $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Ex quo intelligitur , nihil aliud opus esse , ut integer per fractionem , aut fractio per integrum multiplicetur , quàm integrum illicò per fractionis numeratorem multiplicare.

108 Si integris multiplicandis fractiones adhæreant , unusquisque ad suæ fractionis nomen revocetur , illique addatur (n. 86.) , & operatio juxta regulam supra traditam instituat (n. 106.).

Si ex. gr. multiplicandus sit numerus $12\frac{3}{5}$ per $9\frac{3}{4}$, primus ad $\frac{63}{5}$, alter ad $\frac{39}{4}$ revocabitur ; deinde multiplicandus erit fractus $\frac{63}{5}$ per $\frac{39}{4}$, productumque habebitur $\frac{2457}{20}$, quod tandem reducitur ad $122\frac{17}{20}$ (n. 85.).

§§ In fractionibus multiplicandis illud statim curari potest , ut productum sub terminis quàm fieri potest simplicissimis habeatur.

Et primùm quidem fractiones ipsas , quæ multiplicandæ sunt , ad minimos terminos revocare oportet. Deinde videndum , an termini *heterogenei* , id est , numerator unius cum denominatore alterius , communem inter se aliquem divisorem habeant , per illumque dividantur , & quidem per maximum , si plures habuerint. Fractiones hoc modo paratæ invicem multiplicentur , & productum

Etiam fractionum datarum habebitur, idque ad minimos terminos revocatum.

Si ex. gr. multiplicandæ proponantur fractiones $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, cum denominator prioris, & numerator posterioris fit idem numerus 5, qui per se ipsum dividi potest, uterque reducetur ad 1; adeoque absque ullo calculo statim videbimus productum esse $\frac{3}{7}$.

Rursus, si multiplicandæ sumantur fractiones $\frac{18}{13}$, $\frac{26}{63}$, observandum erit, numeratorem prioris cum denominatore posterioris communem divisorem maximum habere 9, adeoque divisione facta reduci ad 2, & 7; denominatorem vero primæ ac numeratorem alterius communem habere divisorem 13, proindeque reduci ad 1, & 2. Ita fractiones evadent $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, quibus invicem ductis, productum quæsitum erit $\frac{4}{7}$, cum alioquin fractio prodiret $\frac{468}{819}$, molestiori calculo ad illius simplicitatem reducenda. ¶

Fractionum Divisio.

109 **F** Ractionibus dividendis regula erit hujusmodi: *Invertantur termini ejus fractionis que divisoris locum obtinet, ut numerator in denominatorem, & denominator in numeratorem transeat; multiplicetur dividendus per divisorem ita inversum; & factum quotientis loco habeatur.*

Sic ex. gr. ut fractio $\frac{4}{2}$ per $\frac{2}{2}$ dividatur, in-

ver-

vertendus erit situs terminorum ipsius divifori $\frac{2}{3}$, ut fiat $\frac{3}{2}$. Deinde multiplicatio instituetur ipsius dividendi $\frac{4}{5}$ per diviforem inverfum $\frac{3}{2}$, juxta regulam fupra traditam (n. 106.), & quotus habebitur $\frac{12}{10}$, five $1 \frac{1}{5}$ (n. 85. 93.).

Ut hujufce regulæ ratio intelligatur, obfervandum eft, nihil aliud effe $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ dividere, quàm inquirere quoties $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$ contineantur. Eft autem perfpicuum, diviforem qui duo *trientes* exhibet ter amplius contineri in $\frac{4}{5}$, quàm fi duas unitates referret. Liquet præterea unitatem in $\frac{4}{5}$ contineri per $\frac{4}{5}$ unius vicis, adeoque 2 unitates per dimidiam partem ipsius fractionis $\frac{4}{5}$ ibidem comprehendi. Primum igitur dividendum eft per 2, deinde multiplicandum per 3, quod nihil aliud eft quàm dividendi dimidium ter fumere, five multiplicare per $\frac{3}{2}$, quæ fractio diviforem $\frac{2}{3}$ inverfum exhibet.

110 Si fractus per integrum, aut integer per fractum dividendus fuerit, integer primum, unitate fubfcripta, ad fractum reducitur, & operatio per eandem regulam abfolvitur.

Ex. gr. Si numerus 12 per $\frac{5}{7}$ dividendus proponatur, quæftio eò adducetur, ut $\frac{12}{1}$ per $\frac{5}{7}$ dividatur.

vidantur, five (n. 109.) ut $\frac{12}{1}$ per $\frac{7}{5}$ multiplicentur. Unde quotus invenietur $\frac{84}{5}$, five $16\frac{4}{5}$. Eodem modo, si $\frac{3}{4}$ dividere oporteat per 5, dividenda erit fractio $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{1}$, five multiplicanda per $\frac{1}{5}$, & quotus habebitur $\frac{3}{20}$.

Unde intelligitur, divisionem fractionis per numerum integrum eò reduci, ut integer per denominatorem fractionis multiplicetur.

III Si integris ad divisionem propositis fractiones adhæreant, unusquisque ad suæ fractionis denominationem revocabitur (n. 86.), & operatio deinde instituetur, quemadmodum in exemplis superioribus traditum est.

Ex. gr. Si numerus 54 $\frac{3}{5}$ per 12 $\frac{2}{3}$ dividendus proponatur, primus reducetur ad $\frac{273}{5}$, alter ad $\frac{38}{3}$. Deinde dividenda erit fractio $\frac{273}{5}$ per $\frac{38}{3}$, five (n. 109.) multiplicanda per $\frac{3}{38}$, & quotus habebitur $\frac{819}{190}$, five $4\frac{59}{190}$ (n. 85.).

¶ In fractionibus etiam dividendis operæ pretium erit illico curare, ut quotus oriatur minimis terminis expressus.

Id autem fiet: primùm, si fractiones propositæ sint & ipsæ prius ad minimos terminos revocatæ; deinde, si termini *homologi*, numeratores scilicet, aut denominatores utriusque, per communem divisorem maximum dividantur, si quem habeant. Ita fractiones orientur, quarum ident erit

erit quotus, atque fractionum datarum, isque quàm fieri potest simplicissimus.

Si ex. gr. dividenda ponatur fractio $\frac{5}{7}$ per $\frac{5}{6}$, cum numerator uterque dividi possit per 5, adeoque reducatur ad 1, statim sine calculo videbimus quotum esse $\frac{6}{7}$. Eodem modo, si dividenda esset fractio $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{5}$, cum denominator uterque reducatur ad 1, illico agnosceremus quotum esse $\frac{3}{4}$.

Rursus, si fractio $\frac{22}{39}$ per $\frac{11}{13}$ dividenda sumatur, numeratores 22, 11, per communem divisorem 11 dividuntur, fiuntque 2, & 1; denominatores autem per 13, fiuntque 3, & 1. Ac proinde dividenda erit fractio $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{1}$, & quotus erit quæsitus $\frac{2}{3}$, cum alioquin inveniendus esset

$$\frac{286}{429} \cdot 55$$

Fractionum usus.

112 **I**s perspectis, quæ paulo superius tradita sunt (n. 96.), facile intelligitur, quo sit pacto eruendus fractionum valor, juxta receptas ejus unitatis divisiones, ad quam referuntur.

Quæritur ex. gr. quantum valeant $\frac{5}{7}$ unius *libre*. Quoniam $\frac{5}{7}$ unius *libre* idem exhibent quod $\frac{1}{2}$ quinque *librarum* (n. 96.), 5 *libras* ad *solidos*

lidos revocabimus (n. 57.), fientque 100 *solidi*, quibus per 7 divisus, quotus erit 14^s, residuum verò 2^s. Rursus hosce 2 *solidos* ad *denarios* reducemus, fientque 24^d, quibus per 7 similiter divisus, quotus erit 3^d $\frac{3}{7}$. Ac proinde $\frac{5}{7}$ unius *libræ* reducuntur ad 14 *solidos*, 3 *denarios*, & $\frac{3}{7}$ unius *denarii*.

Si quæreretur, quantum valeant $\frac{5}{7}$ viginti quatuor *librarum*, facile intelligitur, posse quemquam primùm investigare quantum valeant $\frac{5}{7}$ unius *libræ*, ut in exemplo superiori, idque deinde per 24 multiplicare. Sed calculus erit multò commodior, si 24 *libræ* per $\frac{5}{7}$ multiplicentur, & (n. 107.) productum habeatur $\frac{120}{7}$ *libr.* five 17 *libr.* & $\frac{1}{7}$ ipsius *libræ*, quæ fractio ad receptas *libræ* divisiones revocata, ut in exemplo superiori exhibet 2 *solidos*, 10 *denarios*, & $\frac{2}{7}$ ipsius *denarii*; adeoque per $\frac{5}{7}$ viginti quatuor *librarum* nihil aliud significatur, quàm 17 *lib.* 2 *sol.* 10 *den.* $\frac{2}{7}$.

113 Fractiones autem decimales, cum denominatore subscripto non indigeant, multò facilius ad receptas unitatis divisiones transferuntur.

Si ex. gr. quærat quantum valeant 0,532 unius *hexapedæ*, cum *hexapeda* in 6 *pedes* dividatur, multiplicanda erit fractio 0,532 per 6, & productum 3,192 ostendet 3 *pedes*, & 0,192 ipsius *pedis*. Cum autem *pes* in 12 *pollices* five *uncia*

cias dividatur, multiplicanda similiter erit per 12 fractio $0,192$, & productum $2,304$ exhibebit 2 *uncias*, & $0,304$ unius *uncie*. Denique, cum *uncia* in 12 *lineas* distribuatur, fractio $0,304$ per 12 multiplicabitur, & productum $3,648$ ostendet 3 *lineas*, & $0,648$ ipsius *linee*. Quare per $0,532$. unius *hexapede* significantur 3 *pedes*, 2 *uncie*, 3 *linee*, & $0,648$ unius *linee*; & ita de aliis.

114 Quæ de fractionum valore intelligendo diximus, sermonem ultro ducunt ad *fractiones fractionum* declarandas, quo nomine intelligitur fractionum series, quæ interjecta particula *ex* invicem separantur, ut, ex. gr. $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{5}{6}$ &c. Fractio enim quælibet non tantum ad unitatem, aut numerum integrum referri potest, ut $\frac{3}{4}$ unius *libre*, $\frac{3}{4}$ *viginti librarum*, sed etiam ad aliam quamcunque fractionem, cuius valor quasi totum quoddam concipi potest in quot libuerit partes distribuendum, ut earum aliquæ tantum innuantur. Sic ex $\frac{3}{4}$ sumere licet $\frac{2}{3}$, deinde si duo trientes ex tribus quadrantibus, quasi totum concipiantur in sex partes divisum, earum quinque innuere possumus, fietque fractio fractionum $\frac{5}{6}$ *ex* $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$.

Id genus fractiones ad unam revocari possunt; quæ tantum ad unitatem præcipuam referatur, si numeratores inter se invicem, & denominatores similiter inter se multiplicentur. Sic $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ idem est ac $\frac{6}{12}$, sive $\frac{1}{2}$; & $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{5}{6}$ idem, ac $\frac{70}{72}$, sive $\frac{5}{12}$. G Et

Et quidem facile intelligitur, fumere $\frac{2}{3}$ ex $\frac{3}{4}$ nihil aliud esse, quàm multiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$, five *tertiam* partem fractionis $\frac{3}{4}$ *bis* accipere. Eodem modo fumere $\frac{2}{3}$ ex $\frac{3}{4}$ ex $\frac{5}{6}$ eò redit, ut fumantur $\frac{6}{12}$ ex $\frac{5}{6}$, siquidem $\frac{2}{3}$ ex $\frac{3}{4}$ efficiunt $\frac{6}{12}$; per id autem quod modo demonstravimus $\frac{6}{12}$ ex $\frac{5}{6}$ reducuntur ad $\frac{30}{72}$, five $\frac{5}{12}$.

Si valor quærat fractionis $\frac{3}{4}$ ex $5 \frac{3}{8}$, integer 5 ad denominatorem 8 revocabitur, suæque fractioni addetur (n. 86.), & quæstio eò adducetur, ut fractio fractionis $\frac{3}{4}$ ex $\frac{43}{8}$ ad fractionem simplicem revocetur, fietque $\frac{129}{32}$, five $4 \frac{1}{32}$.

115 Quum fractio terminis aliquanto grandioribus expressa maiori simplicitate donari nequit per methodum supra traditam (n. 95.), si pro quæstionis ratione sufficiat eam in aliam convertere, quæ valoris quàm proxime ejusdem sit, sed terminis brevioribus exprimatur, id per methodum sequentem consequemur, cujus ope fractionis propositæ valores juxta maiores, minoresque alternatis vicibus inveniemus, ad verum perpetuò convergentes, donec tandem in ipsam fractionem reducendam incidamus.

Sit exempli loco fractio $\frac{10000000}{514159265}$, quæ, ut in Geometria demonstrabitur, *diametri ad peripheriam* circuli rationem vero quàm proximam exhibet, eam

eamque per alias aliasque fractiones minus quidem accuratas, sed brevioribus tamen terminis expressas efferre propositum habeatur. Rem hac ratione expediemus.

Primum, datæ fractionis tam numeratorem quam denominatorem per numeratorem ipsum dividemus, & fractio reducetur ad hanc formam

$$\frac{1}{3 \frac{14159265}{100000000}}. \text{ Quæ quidem, si fractio adhærens}$$

denominatori integro 3 negligatur; reducitur ad $\frac{1}{3}$, valor nimirum fractionis datæ tam vero proximus, quam sub terminis adeo simplicibus fieri potest, sed tamen iusto maior.

Deinde, ut ejusdem propositæ fractionis valorem alium vero propius appropinquantem inveniamus, in ea fractione, quæ denominatori 3 adhæret, utrumque terminum per numeratorem dividemus, & revocabitur ad hanc formam ---

$$\frac{1}{3 \frac{1}{7 \frac{885145}{14159265}}}. \text{ Hæc autem, si fractio denominato-}$$

ri integro 7 adhærens negligatur, reducitur ad $\frac{1}{3 \frac{1}{7}}$, five (n. 86.) ad $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, five

(n. 109.) ad $\frac{7}{22}$; valor scilicet fractionis datæ multo accuratior quam $\frac{1}{3}$, sed iusto minor.

Tum, si valorem alium propius adhuc ad verum accedentem invenire oporteat, fractionis denominatori 7 adhærentis utrumque terminum per

numeratorem dividemus, ipsaque revocabitur ad

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{15}}}}$$

Etiam denominatori 15 negligeremus, valorem exhiberet $\frac{106}{333}$, qui præcedenti quidem exactior est,

sed vero aliquantulum maior. At, si operationem hic finire lubeat, fractionem adjunctam denominatori 15 minime negligemus, sed cum ipsa unitatis valorem ferè adæquet, unitatem denominatori 15 addemus, fractioque erit hujus formæ

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{7} + \frac{1}{16}}}}$$

utique præcedentibus multo accuratior, sed adhuc justo minor, cujus à fractione proposita defectus

$$\text{est } \frac{611}{22603307815}, \text{ sive quàm proximè } \frac{1}{36306232}.$$

¶ Fractiones ad eam formam revocatæ, quam fractio supra proposita per iteratam fractionum denominatoribus adhærentium divisionem induit, *fractiones continuæ* appellantur.

Illud autem notandum, divisionem in hac operatione præscriptam illam ipsam esse, quam exequimur pro divisore communi inter fractionis terminos inveniendò, ut fractio exactè reducatur, si fieri possit. Quare, si facta operatione invenerimus nullum eos divisorem habere communem præter unitatem, divisionum quotientes suo ordine in fractionem continuâ illico revocabimus, unitate in numeratorem perpetuò assumpta, eosque in ea terminos deinde negligemus, quos res ipsa persuaserit.

Ex:

Ex. gr. Si ad fractionem $\frac{964}{5141}$ reducendam communem divisorem quæramus, nullum tandem invenimus, præter unitatem. Sed, cum per operationem quotientes inventi fuerint 5, 3, 321, eos ad fractionem continuam reducemus $\frac{1}{5 \frac{1}{3 \frac{1}{321}}}$, quæ

fractioni propositæ æqualis est. Si autem fractionem adjunctam denominatori 3 negligamus, quæ eo potiori jure contemnitur quò minor est, reducitur ad $\frac{1}{5 \frac{1}{3}}$, five ad $\frac{3}{16}$; fractio quidem

fatis simplex, cui tantum deest $\frac{1}{2256}$, ut fractionem propositam adæquet. ¶

De numeris complexis.

116 **Q**Uamquam regulæ hætenus traditæ eorum numerorum calculo, qui *complexi*, five *heterogenei* appellantur, accommodari & ipsæ possunt, non incongruum tamen erit, si peculiaris de iis tractatio instituat, quippe qui ab ea, quàm sibi propriam habent, unitatis divisione calculum sæpe faciliorem admittunt.

Sunt autem plurima ejusmodi numerorum genera, quæ peculiare unitatis divisiones obtinuerunt, unde potissimum calculi regulæ derivantur. Sed necesse non est singula percurrere, cum ex quibusdam ad reliqua supputanda aditus pateat, dummodo ejus divisionis ratio constet, quæ in singulari adhibetur. Frequentioris apud nos usus sunt hæc, quæ hîc subjicimus. ¶

¶ Rei nummarie rationes in Gallia ad *libra* unitatem plerumque referuntur. *Libra* autem, five *Francus*, dividitur in 20 *solidos*, & *solidus* in 12 *denarios*. Species autem singulæ litteris initialibus distinguuntur. Sic 32^{lb} 15^s 7^d idem est ac 32 *librae*, 15 *solidi*, & 7 *denarii*.

In ponderibus autem *libra* ubique propemodum dividitur in duo *beses* (*marcos*), *bes* in 8 *uncias*, *uncia* in 8 *octavas*, *octava* in 3 *scrupula*, & *scrupulum* in 24 *grana*. Maiora verò pondera ad alias unitates (*quintais*) referimus, quarum singulæ in 4 alias (*arrobas*) dividuntur, & harum quælibet ex 32 *libris* (*arrateis*) componitur.

Mensuræ aridorum in Lusitania ad maiores *modios* (*moyos*) sæpe referuntur. Horum singuli 15 alias *mensuras* (*fangas*) continent, quarum singulæ 4 alias (*alqueires*), & hæ similiter 4 alias, quas & *quartas* nominamus; quæ omnia pro ratione locorum aliquantulum inter se differunt, quavis nomine consentiant.

Mensuras autem liquidorum (*pipas*) habemus, quæ Romanorum *culeos* fere adæquant. Harum singulæ 25 alias *mensuras* (*almudes*) complectuntur, quarum quælibet in 12 alias (*canadas*) dividitur, harum verò singulæ quatuor alias (*quartilbos*) continent; quæ idem ubique locorum nomen referunt, magnitudinem verò non item.

Locorum distantis maioribus significandis *stadia*, *milliaria*, *leuce* adhibentur; minoribus autem *hexapede*. *Hexapeda* autem (*toesa*) 6 *pedes*, *pes* 12 *pollices* five *uncias*, *pollex* 12 *lineas*, *linea* 12 *puncta* continet. Numeri autem litteris specierum initialibus distinguuntur ad hunc modum 7^T 3^P 7^P 10^L 5^{PTS}. *Ulna* Lusitana (*braça*) ex 10 *palmis*, *palmus* ex 8 *pollicibus* constat.

Temporum mensura naturalis dies est. *Dies* autem ex 24 *horis*, *hora* ex 60 *minutis*, *minutum* ex

60 *secundis* constat &c. Numeri autem ita notantur $223^d 13^h 40' 53''$ &c.

Circulus quisque cœlestis in 12 *signa*, *signum* in 30 *gradus*, *gradus* in 60 *minuta* prima, *minutum* in 60 *secunda* &c. dividitur. *Signa* autem notantur littera s, *gradus* littera o, *minuta* prima, *secunda* &c. una, duabus &c. lineolis supra scriptis, ad hunc modum: $11^s 23^o 43' 52'' 23'''$. &c.

Ad hæc, peculiaris quoque divisio æstimandæ rerum qualitati sæpe accommodatur, cujus in auro & argento exemplum habemus.

Et aurum quidem excoctum, cui nulla alterius metalli pars admiscetur, 24 *gradus* (*quilates*) continere intelligitur, *gradus* 4 *grana*, & *granum* 8 *octavas*. Datum autem auri pondus, ex. gr. selibra (*bum marco*), si purum putum habeatur, eam valoris rationem obtinet, quæ per 24 *gradus* exprimitur; si alteram alterius metalli partem ferat, per 12 *gradus* æstimatur; si 5 partes auri, unam vero alterius metalli partem contineat, ad 20 *graduum* valorem refertur &c. Ea verò *grana*, in quæ *gradum* dividimus a *granis* ponderis distinguere oportet. Priora illa nostrates *grana legis* appellant, quia eorum pretium lege firmum sanctumque est; *grana* autem ponderis pretio sæpe differunt, prout diversi fuerint ipsius auri *gradus*.

Lege vero lata die 4 Augusti An. MDCLXXXVIII in Lusitana ditione constitutum est, selibræ auri ad 22 *gradus* exacti, cujusmodi aurum signatum apud nos est, immutabili pretio, habendam in posterum esse pro 96000 *reis*. Quare, si legitimum valorem per 22 dividamus, *gradus* quilibet in selibra erit $4U363 \frac{7}{11}$, *granum legis* 1U090 $\frac{10}{11}$ &c; adeoque selibræ 24 *graduum* pretium erit 104U727 $\frac{3}{11}$ *reis*. Eadem Lege cautum est, ne *Bractearii* au-

ro uterentur, nisi ad 23 gradus exacto; neve *Aurifices* cœlatum aurum distraherent, citra 20 gradus & 2 *grana*. Selibra adeo auri cœlati, posito valore legitimo auri 22 *graduum*, pretium ferre debuisset 89U454 $\frac{6}{11}$ *reis*, uncia 11U181 $\frac{2}{11}$, & octava 1U397 $\frac{8}{11}$. Sed, ut fractorum molestia tolleretur, Lex ipsa selibram revocavit ad 89U600, unciam ad 11U200, & octavam ad 1U400.

Argentum expurgatum, cui nihil extranei metalli adhæret, ex 12 *denariis* (*dinbeiros*) constare intelligitur, *denarius* ex 24 *granis legitimis*; *granum* ex 4 *quadrantibus*. Hujus divisionis ope datum quodcumque argenti pondus æstimatur. Si enim omnino purum fuerit, ejus pretium erit ut 12, si alteram vilioris metalli partem contineat, ut 6 &c.

Eadem vero Lege, quam supra laudavimus, constitutum est, ut selibra argenti ad 11 *denarios* probati, cujusmodi argento signato utimur, pretio staret, 6U000 *reis*. Hoc autem pretio constituto, consequitur, singulos *denarios* in selibra valere U545 $\frac{5}{11}$; adeoque & selibram 12 *denariorum*, qua Bracteatores uti tenentur, valere 6U545 $\frac{5}{11}$. Fabris autem argentariis indictum est, ne argentum cœlarent citra 10 *denarios* & 6 *grana*, cujus selibra constare debuisset 5U590 $\frac{10}{11}$; Sed, quo facilior calculus evaderet, ejusdem Legis auctoritate fuit ad 5U600 revocata.

Notandum autem est, aurum argentumque signatum ultra pretium Lege illa constitutum, valorem adjectitium habere, quatenus signum est auctoritate Regis excusum. Semuncia enim auri ad

22 gradus excocti pretium (quod vocamus intrinsecum) habet 6U000 reis; nummus vero aureus ejusdem ponderis valet 6U400. Eodem modo semuncia argenti 11 denariorum in rerum commercio valet U375 reis; nummus vero argenteus ejus ponderis U480. ¶

Numerorum complexorum Additio.

117 **U**T hæc operatio fiat, numeri addendi alii subter alios ita scribuntur, ut ejusdem generis unitates in eadem columna verticali maneant. Tum ducta linea transversa, additio inchoatur ab unitatibus minoris speciei a dextra versus sinistram. Si earum summa unitatem speciei proximè maioris non conficit, infra lineam scribitur; si autem unitatem unam aut plures continet, scribendum tantum est id, quod ablato earum unitatum numero superest, aut cifra, si nihil superest; ipsæ vero unitates retinentur proximæ columnæ addendæ, ubi operatio eodem modo peragitur, & ita deinceps.

Exemplum I.

A	ddendi sint numeri - - -	227 ^{lb}	14 ^s	8 ^d	
		2549	18	5	
		184	11	11	
		17	10	7	
		2979 ^{lb}	15 ^s	7 ^d	Sûma.

Iis dispositis, ut in exemplo videre licet, *denariorum* columnam addemus, & summam efficiet 31^d, in qua bis duodecim *denarii*, hoc est, 2 *solidi* continentur, & præterea supersunt 7 *denarii*. Quare in columna *denariorum* scribemus 7^d, & 2^s retinebimus unitatibus columnæ sequentis addendos.

dos. Sic inueniemus *solidorum* unitates efficere 15^s , cuius numeri dexteriore notam 5 sub iis unitatibus scribemus, decadem vero 1 retinebimus addendam decedibus eorundem *solidorum*, quæ conficiunt 5 . Quia vero binæ quæque *solidorum* decades *libram* conficiunt, numerum 5 mente dividemus per 2 , & residuum 1 sub decedibus *solidorum* scribemus, quotum autem 2 retinebimus *libris* addendum; qua operatione absoluta, summa erit $2979^{lb} 15^s 7^d$.

Exemplum II.

SI addendi proponantur quatuor numeri sequentes -----

54 ^T	2 ^P	3 ^P	9 ^I	
12	5	4	11	
9	4	11	11	
8	2	9	10	
85 ^T	3 ^P	6 ^P	5 ^I	Summa.

Ducto initio a columna *linearum*, eam inueniemus conficere 41^l , five $3^p 5^l$; ac proinde 5^l scribemus, & 3^p retinebimus columnæ sequenti adnumerandos. Hæc similiter summam conficit 30^p , five $2^p 6^p$; proindeque 6^p tantum scribemus, & 2^p columnæ sequenti addemus; quæ summam præbet 15^p , five $2^t 3^p$. Quare subscriptis 3^p , & 2^t columnæ sequenti additis, summa quæfita prodibit $85^t 3^p 6^p 5^l$.

Exemplum III.

SInt addendi numeri -

23 ^d	13 ^h	43 ^l	52 ^{ll}	
35	0	12	41	
0	23	0	24	
12	14	23	5	
72 ^d	3 ^h	20 ^l	2 ^{ll}	Sum.

In *secundorum* columna unitates conficiunt 12; ac proinde infra scribemus 2, & decadem decadibus adnumerabimus, quæ efficiunt 12, Cum autem sex decades *minutum* conficiant, 12 per 6 mente dividemus, & quotum 2 columnæ sequenti addendum retinebimus, & quia nihil superest, nihil sub decadibus *secundorum* scribemus. In columna sequenti unitates conficiunt 10, ac proinde scripta cifra, decadem 1 decadibus adjungemus, quæ efficiunt 8; quibus divisus per 6 quotus erit 1 columnæ sequenti addendus, residuum vero 2 infra notandum. Jam in columna horarum summa prodit 5^h, quæ 2^d continet & 3^h; adeoque subscriptis 3^h, & 2^d additis columnæ sequenti, summa quæsitæ erit 7^d 3^h 20^l 2^{ll}.

Exemplum IV.

Quæritur summa numerorum

11 ^s	23 ^o	43 ^l	53 ^{ll}
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
<hr/>			
10 ^s	27 ^o	34 ^l	46 ^{ll} Summa.

Additis *secundis*, & *minutis*, ut in exemplo præcedenti, unitatem inveniemus a *minutis* ad *graduum* columnam adnumerandam, ubi unitatum summa conficiet 7^o infra scribendos, decadem vero conficiet 5; sed quia 3 decades *signum* conficiunt, infra scribemus tantum 2, & unitatem *signis* addendam retinebimus. Horum summa invenitur 22^s; quia tamen circulos integros, five 12^s, abjicere consuevimus quoties in summam venerint, ablatis 12^s a 22^s, supersunt 10^s; adeoque summa quæsitæ erit 10^s 27^o 34^l 46^{ll}. ¶

Numerorum complexorum Subtractio.

118 **U**T numerus complexus à numero ejusdem generis subtrahatur, ambo scribuntur ut in Additione præcepimus, & operatio similiter ab infimæ speciei numeris inchoatur. Si numerus inferior auferri potest a superiori, subtractio instituitur, & residuum infra notatur. Si autem auferri nequit, numero superiori addendum erit quod fit ex unitate sedis proxime sequentis ad unitates revocata sedis ejus in qua operamur. Tum facta subtractione, residuum infra notatur, & numerus superior, a quo sumpta est unitas, unitate multatus in operatione sequenti adhibetur, quæ eodem modo perficitur, & ita deinceps.

Exemplum I.

$$\begin{array}{r}
 \text{S I a numero} \quad \text{---} \quad 143^{1b} \quad 17s \quad 6^d \\
 \text{auferendus fit} \quad \text{---} \quad 75 \quad 12 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 68^{1b} \quad 4s \quad 9^d \text{ Residuum.}
 \end{array}$$

Cum 9^d a 6^d auferri nequeant, a $17s$ mente auferemus $1s$, cujus valor est 12^d , hisque additis numero 6^d fiunt 18^d , a quibus si 9^d auferamus, supersunt 9^d , quos infra scribemus. Tum in sede sequenti, si $12s$ a $16s$ (habita scilicet ratione unitatis ablatae a numero $17s$) auferamus, residuum erit $4s$. Denique ablatis 75^{1b} a 143^{1b} residuum habetur 68^{1b} ; adeoque residuum quæsitum erit $68^{1b} 4s 9^d$.

Exemplum II.

$$\begin{array}{r}
 \text{S I a numero} \quad \text{---} \quad 163^{1b} \quad 0s \quad 5^d \\
 \text{subtrahendus detur} \quad \text{---} \quad 84 \quad 18 \quad 9 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 78^{1b} \quad 1s \quad 8^d \text{ Residuum.}
 \end{array}$$

Quia

Quia 5^d a 5^d auferri nequeunt, & in *solidorum* sede numerus non est, unde unitas petatur, a 163^{lb} mente auferemus 1^{lb} , quæ valet 20^s . Ex his mente relinuemus 19^s in vacua *solidorum* sede, & 1^s ad *denarios* revocabimus, ipsisque 5^d adde- mus; & instituta, ut in superiori exemplo, ope- ratione residuum inueniemus 78^{lb} 1^s 8^d .

Exemplum III.

$$\begin{array}{r}
 \text{S It a numero } 7^s \ 12^o \ 20^l \ 42^{ll} \\
 \text{auferendus } -4 \ 23 \ 36 \ 23 \\
 \hline
 2^s \ 18^o \ 44^l \ 19^{ll} \text{ Residuum.}
 \end{array}$$

Ubi ad *minutorum* decadas operatio pervenerit, se se offeret numerus 3 subtrahendus ab 1, & cum id fieri nequeat, petenda erit unitas a 12^o , quæ 6 decadas in sede *minutorum* valet, adeoque auferendus erit 3 a 7. Similiter in decadibus *graduum* reperiemus numerum 2 subtrahendum a 0, ac proinde unitatem mutuabimur a 7^s , quæ ad sedem *graduum* translata 3 decadas exhibet, absolutaque operatione residuum habebitur 2^s 18^o 44^l 19^{ll} .

In hujusmodi numeris sæpe fit, ut maior a minori auferendus proponatur, quia nimirum minori circulus integer addi potest, sive 12^s .

Exemplum IV.

$$\begin{array}{r}
 \text{S It a numero } - \ - \ - \ 3^s \ 0^o \ 12^l \ 27^{ll} \\
 \text{auferendus } - \ - \ - \ 9 \ 15 \ 27 \ 22 \\
 \hline
 5^s \ 14^o \ 45^l \ 5^{ll} \text{ Residuum}
 \end{array}$$

Primum, cum in *minutorum* decadibus petenda sit unitas a sede proxima, quæ nullam habet, eam

eam mutuabimur a 3^s, quæ reducitur ad 30° ?
 Ex his mente locabimus 29° in vacua *graduum*
 fede, & 1° pro 6 decadibus in minorum se-
 de utemur. Et operatione ulterius instituta, cum
 tandem 9^s a 2^s auferenda se offerant, ipsis 2^s
 addenda erunt 12^s, factaque subtractione resi-
 duum quæsitum erit 5^s 14° 45' 5". JJ

Numerorum complexorum Multi- plicatio.

119 H Ujusce operationis praxis in univer-
 sum revocari potest ad fractionum vul-
 garium multiplicationem, juxta regulam a nobis
 jam traditam (n. 106.).

Si enim ex. gr. manupretium quæratür sol-
 vendum pro 54^T 3^P operis, quum de 42^{lb} 17^s
 8^d in singulas *hexapedas* solvendis convenit; mul-
 tiplicandum 42^{lb} 17^s 8^d ad *denarios* revocare li-
 cet (n. 57.), quem 10292^d conficere inveniemus.
 Cum autem *denarius* sit $\frac{1}{240}$ ipsius *libræ*, multipli-
 candus reducetur ad $\frac{10292}{240}$ ejusdem *libræ*. Eodem
 modo multiplicator 54^T 3^P ad *pedes* revocatur,
 efficietque 327^P; & quia *pēs* est $\frac{1}{6}$ ipsius *hexa-*
pedæ, idem multiplicator erit $\frac{327}{6}$ *hexap.* Quæstio
 proinde eò redit, ut fractio $\frac{10292}{240}$ unius *libræ* per
 fractionem $\frac{327}{6}$ multiplicetur (n. 106.); unde pro-
 ductum $\frac{3365484}{1440}$ ipsius *libræ* habetur, quod tan-
 dem (n. 112.) ad 2337^{lb} 2^s 10^d reducitur.

Hæc

Hæc quidem methodus numeris omnibus complexis, cujuscunque sint generis, accomodari potest. Sed in ea tamen diutius non immorabimur, aliam deinceps tradituri, quæ faciliori calculo absolvitur.

120 Numerus, qui in alio numero aliquoties exactè continetur, pars ejus *aliquota* dicitur; qui autem exactè non continetur pars *aliquanta* nominatur. Sic 3 est pars *aliquota* numeri 12; *aliquanta* vero numeri 8.

Multiplicare autem, ut aliàs diximus, nihil aliud est quàm numerum datum aliquoties sumere. Si ex. gr. numerus fuerit quivis per $8\frac{3}{4}$ multiplicandus, erit utique octies accipiendus, & tres insuper ipsius quadrantes. Tres autem numeri quadrantes sumere possumus, si primùm quartam ejus partem inveniamus, eamque deinde ter accipiamus; seu potius, si primùm numeri dimidium, & deinde hujus quoque dimidium queramus. Sic ex. gr.

Si multiplicandus esset numerus - - 84

per - - - - - $8\frac{3}{4}$

672

42

21

735 Produc.

Primùm, multiplicatione instituta per integrum 8, productum haberemus 672. Tum, ut $\frac{3}{4}$ multiplicandi 84 facilius sumeremus, resolvenda esset fractio $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{4}$, sive $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{4}$. Proinde, sumpto dimidio numeri 84, nimirum 42, deinde hujus quoque

Exemplum II.

S It multiplicandus numerus 72^{lb}
 per ----- 54^T 5^P

 288^{lb} 0^s 0^d
 360
 36
 24

 3948^{lb} 0^s 0^d Productū.

Primum 72^{lb} multiplicabimus per 54 , ut in exemplo præcedenti. Deinde, cum 5^P sint $\frac{5}{6}$ ipsius hexapedæ, hanc fractionem resolvemus in $\frac{3}{6}$ sive $\frac{1}{2}$, & $\frac{2}{6}$ sive $\frac{1}{3}$. Quare dimidia 72^{lb} parte 36 primùm, deinde tertia 24 assumpta, productisque tandem partialibus additis, productum totum inveniemus 3948^{lb} .

Exemplum III.

M Multiplicandus proponatur numerus -----
 ----- 72^{lb}
 per ----- 5^T 4^P 8^P

 360^{lb} 0^s 0^d
 36
 12
 4
 4

 416^{lb} 0^s 0^d Productū

Facta prius multiplicatione per 5^T , per 4^P deinde multiplicabimus, quem numerum ad id facilius exequendum resolvemus in 3^P & 1^P . Pro 3^P

autem dimidiam multiplicandi partem 36^{lb} sub priori producto scribemus. Quod vero ad 1^P attinet, observandum est, ipsum esse tertiam partem numeri prioris 3^P , ac proinde cum pro 3^P inventum jam sit productum 36 , ejus tertiam partem 12 infra scribemus. Hinc, ut multiplicationem per 8^P instituamus, *pollices* non jam ad *hexapedam*, sed ad *pedem* commodius referemus, numerumque 8^P resolvemus in 4^P & 4^P , quorum uterque est tertia pars ipsius *psdis*, adeoque & productum feret 4 , quod est triens producti 12 pro 1^P paulo ante inventi. Additis tandem hisce productis partialibus, quæsitum erit productum 416^{lb} .

122 Si numerus multiplicandus fuerit & ipse complexus, operatio fiet, quemadmodum in exemplo sequenti demonstratur.

Exemplum IV.

Multiplicandus fit numerus -----

$$\begin{array}{r} \text{-----} 72^{lb} \ 6^s \ 6^d \\ \text{per} \text{-----} 27^T \ 4^P \ 8^P \end{array}$$

$$504^{lb} \ 0^s \ 0^d$$

144

$$6 \ 15 \ 0$$

$$1 \ 7 \ 0$$

$$0 \ 13 \ 6$$

$$36 \ 3 \ 3$$

$$12 \ 1 \ 1$$

$$4 \ 0 \ 4 \frac{1}{3}$$

$$4 \ 0 \ 4 \frac{1}{3}$$

$$2009^{lb} \ 0^s \ 6^d \ \frac{2}{3} \cdot \text{Product.}$$

Cum primùm multiplicatus fuerit numerus 72^{lb}
per

per 27, ut 6*s* per 27 similiter multiplicemus, resolvendus erit numerus ipse multiplicandus in 5*s* & 1*s*. Quia verò 5*s* quartam *libræ* partem conficiunt, idem erit multiplicare 5*s* per 27, ac 27 quartas *libræ* partes assumere, five quartam 27 *librarum* partem; quapropter $\frac{1}{4}$ ex 27^{lb}, five 6^{lb} 15*s*. infra notabimus; Tunc, ut 1*s* per 27 multiplicemus, cum fit quinta pars numeri 5*s*, quem proximè multiplicavimus, quintam ejus producti 6^{lb} 15*s* partem subscribemus, nempe 1^{lb} 7*s*. Ut autem 6^d per eundem numerum 27 multiplicemus, animadvertendum est, 6^d dimidiam *solidi* partem exhibere, ac proinde assumendam esse dimidiam partem illius producti 1^{lb} 7*s*, quod pro 1*s* paulo ante invenimus, videlicet 13^s 6^d.

Atque hæcenus totum numerum multiplicandum per priorem multiplicatoris partem 27^r multiplicavimus. Nunc, ut eundem quoque per 4^p multiplicemus, operatio ineunda erit ut in exemplo præcedenti. Et quidem 4^p mente resolvemus in 3^p & 1^p, ac pro 3^p dimidiam partem ipsius multiplicandi, nimirum 3^{lb} 3*s* 3^d assumemus, & pro 1^p tertiam ejus numeri partem, nempe 12^{lb} 1*s* 1^d. Tandem 8^p similiter resolvemus in 4^p & 4^p, adeoque bis accipiemus tertiam illius producti partem, quod pro 1^p invenimus, nimirum 4^{lb} 0*s* 4^d $\frac{1}{3}$. Et collectis in summam partibus inventis, productum quæsitum habebimus 2009^{lb} 0*s* 6^d $\frac{2}{3}$.

123 In superioribus exemplis, quæ multiplicandi numeri partes assumendæ erant, facili negotio ob earum simplicitatem repertæ sunt. Ubî autem magis compositæ fuerint, operatio instituetur, ut in exemplis sequentibus videre licet.

Exemplum V.

Queritur, quanti fiant 17^T operis, pacto pretio 34^{lb} 10^s 2^d pro singulis hexapedis?

Multiplicandus erit -- 34^{lb} 10^s 2^d
per ----- 17^T

238^{lb} 0^s 0^d

34

8 10

0 17

0 2 10

586^{lb} 12^s 10^d Productū.

Et primum quidem 34^{lb} per 17 multiplicabimus; deinde 10^s, qui numerus dimidiam *libram* refert, adeoque ejus productum dabit 17 dimidias *libras*, sive dimidium 17 *librarum*, nempe 8^{lb} 10^s. Tum, ut 2^d per 17 multiplicemus, observandum est, 2^d esse sextam *solidi* partem, ac proinde sextam ex decima, sive (n. 114) sexagesimam partem decem *solidorum*. Quapropter pro 2^d sumenda esset sexagesima pars producti 8^{lb} 10^s proxime inventi pro multiplicando 10^s. Attamen facilius calculi gratia, decimam prius ejus producti partem eliciemus, quæ ad 1^s pertineret, eamque punctis vel lineolis notabimus, ut producti subsidiarii loco habeatur, & postea in additione negligatur. Hujus vero subsidiarii producti 0^{lb} 17^s sextam partem assumemus 2^s 10^d, quæ ipsa est sexagesima pars producti superioris 8^{lb} 10^s, quam invenire oportebat; ac tandem additis productis partialibus, erit productum quæsitum 586^{lb} 12^s 10^d.

Exemplum VI.

Quæritur, quantum operis præstari debeat pro 34^{lb} 10^s 2^d , pretio 1^b pro singulis 17^T constituto?

Multiplicandus igitur erit - - - - -

$$\begin{array}{r}
 17^T \\
 \text{per } 34^{lb} \ 10^s \ 2^d \\
 \hline
 68^T \ 0^P \ 0^P \ 0^l \ 0^{pts} \\
 51 \\
 \begin{array}{r}
 3 \\
 0 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4 \ \frac{4}{5} \\
 0 \ 0 \ 10 \ 2 \ 4 \ \frac{4}{5} \\
 \hline
 \end{array} \\
 586^T \ 3^P \ 10^P \ 2^l \ 4^{pts} \ \frac{4}{5} \text{ Product.}
 \end{array}$$

Quare primùm multiplicabimus 17^T per 34 ; deinde per 10^s , pro quibus dimidium multiplicandi assumemus, nimirum 8^T 3^P , quia 10^s dimidiam unitatis principalis partem ostendunt. Ut autem 17^T per 2^d tandem multiplicentur, productum prius investigabimus quod pro 1^s habendum esset, decima scilicet producti præcedentis parte assumpta 0^T 5^P 1^P 2^l 4^{pts} $\frac{4}{5}$, quod productum subsidiarium punctis notabimus, ejusque sextam partem 0^T 0^P 10^P 2^l 4^{pts} $\frac{4}{5}$ infra scribemus, reliquis partibus inventis addendam; atque ita productum quæsitum habebitur 586^T 3^P 10^P 2^l 4^{pts} $\frac{4}{5}$.

Atque hoc potissimum exemplo usi sumus, ut illud confirmaretur quod alias jam diximus (n. 45.)

45.) , oportere nimirum *multiplicandum a multiplicatore* distinguere, quum uterque foret numerus *concretus*. Et quidem, tam in hoc exemplo quam in præcedenti *factores* iidem sunt 17^T , & 34^{lb} 10^s 2^d ; quæ tamen inde orta sunt producta inter se differre inveniuntur.

¶ Notandum autem est, utriusque producti discrepantiam penes solam expressionem esse; re verò ipsa quantum *librarum* per primum, tantundem *hexapedarum* per alterum omnino significari, numeris tamen diversis, quia eadem non est *libræ*, atque *hexapædæ* divisio. Id si quis probare velit, nihil aliud opus erit quàm partes *libræ* in priori ad fractionem *libræ*, partesque *hexapædæ* in posteriori ad fractionem *hexapædæ* revocare, & producta omnino consentient, eruntque 586^{lb} $\frac{77}{120}$

& 586^T $\frac{77}{120}$.

Neque illud prætermittendum, unitatem maioris speciei principalem haberi in exemplis superioribus, nihil vero impedire quominus & aliæ præcipuæ constituentur. Posset enim ex. gr. queri, quantum operis præstandum esset pro 34^{lb} 10^s 2^d , ubi de 17^T pro 1^s præstandis conventum est. Tunc pro 2^d productum haberemus 2^T 5^P pro 10^s autem 170^T , & pro 34^{lb} tandem 11560^T ; adeoque totum productum 11732^T 5^P . ¶

Divisio numeri complexi per incomplexum.

124 § I numerus, qui dividendus proponitur, complexus tantum fuerit, & dividendus ac divisor unitates speciei diversas referant, operatio erit huiusmodi.

Divi

Dividantur primùm quæ sunt præcipuæ in dividendo unitates, juxta regulam pro numeris integris traditam. Deinde residuum, si quod fuerit, ad unitates speciei proximè minoris reducat (n. 57.), quibus addentur ejusdem ordinis unitates quæ in dividendo fuerint; summaque similiter dividatur. Tum etiam residuum hujusce operationis ad unitates ordinis proximè minoris revocetur, quibus adjungantur quæ in dividendo habentur, summaque rursus dividatur; & ita deinceps, quousque ad infimam dividendi speciem veniamus.

Exemplum.

P Erfolutis 4783 libris, 3 solidis, & 9 denariis; pro 87 hexapedarum manupretio, quæritur quanti hexapeda steterit?

Dividendus igitur erit numerus 4783^{lb} 3^s 9^d per 87^T, ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 4783^{lb} \ 3^s \ 9^d \quad | \quad 87^T \\
 \underline{433} \\
 85 \\
 \hline
 1703^s \\
 833 \\
 50 \\
 \hline
 609^d \\
 000
 \end{array}$$

Et initio quidem a *libris* facto; dividemus 4783^{lb} per 87 (n. 65.), & quotum inveniemus 54^{lb}, residuum vero 85^{lb}. Hocce *librarum* residuum in *solidos* inde convertemus, iisque 3, qui in dividendo sunt, *solidos* adnumerabimus, ut fiat summa 1703^s; qua similiter divisa per 87, quo-

quotus prodibit $19s$, residuum verò $50s$. Eodem modo $50s$ ad *denarios* revocabimus, iisque addemus $9d$, qui in dividendo reperiuntur, fietque summa $609d$, qua tandem per 87 divisa, quotus erit $7d$; adeoque quotus totalis $54^{lb} 19s 7d$.

125 At si dividendus ac divisor ad ejusdem generis unitates referantur, antequam divisionem ineamus, animadvertere oportet, debeatne quotus ad easdem illorum unitates revocari, an fecus id quod ex proposita quæstionis ratione facile dignoscitur.

126 Et quidem, si dividendo ac divisore inter se unitatum specie consentientibus, quotus easdem quoque unitates significare debeat; divisio prorsus instituetur, ut in priori casu traditum est.

Sit ex. gr. proposita quæstio: Ex 1243^{lb} ortum est lucrum 7254^{lb} , scite autem oportet, quid lucri ad singulas sortis *libras* pertineat. Perस्पiciendum est, quotum ad dividendi ac divisoris unitates spectare, habendumque esse in *libris*, & *libre* partibus. Quare 7254^{lb} per 1243 primùm dividemus, residuumque ad *solidos* revocabimus, quos similiter per 1243 dividemus, & ita porro. Qua operatione absoluta, quotum inveniemus quæsitum esse $5^{lb} 16s 8d \frac{760}{1243}$.

127 Si autem, dividendo itidem ac divisore inter se circa unitatum speciem consentientibus, quotus unitates specie diversas referre debeat, priusquam divisionem aggrediamur, tam dividendus quam divisor reducendus erit ad unitates minoris speciei, quæ in dividendo reperiuntur (n. 57.). Tum divisio fiet, ut in exemplo superiori, & ipsius dividendi unitates perinde accipientur, quasi ad speciem unitatum pertinerent, quas in quotiente habendas esse dignoscimus.

Quæ-

Quæritur ex. gr. quot operis *hexapedæ* fieri debeant pretio 7954 *libr.* 11 *sol.* & 7 *den.*, conventionem facta 72 *librarum* in singulas *hexapedas*? Ipsa quæstio manifestè ostendit, quotum habendum esse in *hexapedis*, & *hexapedæ* partibus. Quapropter dividendum 7954^{lb} 11 7^d ad *denarios* primùm revocabimus, fietque 1909099^d, deinde etiam divisorem 72^{lb}, fietque 17280^d. Mutata autem dividendi denominatione a *denariis* ad *hexapedas*, dividendum habebimus numerum --- 1909099^T per 17280, factaque operatione quotus prodibit 110^T 2^P 10^P 6^l $\frac{19}{25}$.

Divisio numeri complexi per complexum.

128 **Q**UUM divisor fuerit & ipse complexus, revocandus primùm erit ad infimam unitatum speciem (n. 57.), dividendus verò multiplicabitur per eum numerum, qui exprimit quot in divisore unitates infimæ speciei requirantur ad ejus unitatem principalem constituendam. Numeris verò ita præparatis, operatio redit ad regulam supra traditam pro divisore incompleto.

Exemplum.

PERFOLUTIS 854^{lb} 17^s 11^d pro 57^T 5^P 5^P operis, quæritur pretium *hexapedæ*. Dividendus igitur erit numerus 854^{lb} 17^s 11^d per 57^T 5^P 5^P. Sed antequam operationem aggrediamur, divisorem ad infimæ speciei unitates, *pollices* videlicet, revocabimus, fietque 4169^P; quia verò 72^P requiruntur, ut *hexapeda* fiat, quæ principalis est divisoris unitas, dividendum multiplicabimus per 72 (n. 121.),

121.), fietque $61552^{lb} 10^s$. Quare dividendus erit numerus $61552^{lb} 10^s$ per 4169, ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 61552^{lb} 10^s \quad | \quad 4169 \\
 \underline{19862} \\
 3186 \\
 \underline{63730^s} \\
 22040 \\
 \underline{1195} \\
 14340^d \\
 \underline{1833}
 \end{array}$$

Et primùm quidem ex divisione 61552 *librarum* per 4169 quotus habebitur 14^{lb} , residuum vero 3186^{lb} . Hoc deinde in *solidos* conversum, cum 10 insuper *solidis* ex dividendo assumptis conficiet 63730^s , quibus similiter divisus per 4169, quotus prodibit 15^s , & residuum 1195^s . Hoc autem residuum ad *denarios* revocatum conficit 14340^d , quibus tandem divisus per 4169, quotus erit 3^d , & residuum 1833^d , adeoque is, qui inveniendus erat, quotus habebitur $14^{lb} 15^s 3^d \frac{1833}{4169}$.

Regulæ hujus ratio facile constat. Cum enim divisor $57^T 5^P 5^P$ idem sit atque 4169^P , cumque 1^P sit $\frac{1}{72}$ ipsius *hexapede*, idem divisor revocabitur ad hanc *hexapede* fractionem $\frac{4169}{72}$. Ut autem per fractionem divisio fiat, ipsius terminos invertere, & per divisorem ita inversum multiplicare oportet (n. 109.). Multiplicandum igitur erit in exemplo proposito per $\frac{72}{4169}$; quod

edò redit, ut primùm per 72 multiplicemus, deinde per 4169 dividamus, quemadmodum regula præscribit.

Cum divisio per numerum complexum reducatur ad divisionem per numerum incomplexum, ut liquet ex iis quæ modò ostendimus, eadem hîc notata intelligantur, quæ paulo superius circa quotientis unitates expendimus (n. 126. 127.).

Hujus loci esset de multiplicatione etiam divisioneque Geometrica differere, quibus *Geodeticæ*, *Stereometricæque* mensuræ ad numeros revocantur. Sed id genus operationes, quantum ad calculi rationem pertinet, nihil ab iis differunt, quas hætenus exposuimus. Unum modo reliquum esset, ut unitatum speciem factoribus & producto adtribuendam explicarem. Verum id ad Geometriæ Elementa, ubi multo facilius intelligetur, differendum judicavimus.

De numerorum quadratorum genesi, & eorum radicibus extrahendis.

129 **S**I numerus quicumque per se ipsum multiplicetur, quod inde oritur productum ejus numeri *quadratum* nominatur. Sic 25 est quadratum numeri 5, quia ex numero 5 in se ipsum ducto producitur numerus 25.

130 *Radix* verò *quadrata* numeri cujuscunque dati is dicitur numerus, ex cujus per se ipsum multiplicatione ille producitur. Sic numerus 5 radix est quadrata numeri 25, & numerus 7 radix quadrata numeri 49 &c.

131 Numerus adeo, qui ad quadratum evenitur, multiplicandi simul ac multiplicatoris vices gerit; ac proinde bis *factor* producti habetur (n. 42.). Qua etiam de causa factum, sive qua-

quadratum, *secunda* ejus numeri *potentia* nominatur.

Ut numeri cujusvis quadratum habeatur, nihil aliud opus est quam ut per se ipse multiplicetur, juxta vulgatas Multiplicationis regulas. Ut vero radix quadrata numeri cujuscunque propositi extrahatur, seu, ut a quadrato ad radicem revertamur, peculiari methodo opus est, idque tunc præsertim quum numerus propositus plures habuerit notas quam duas.

Quum datus numerus una duabusve notis constet, ejus radix integra erit unus aliquis numerorum digitorum

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
quorum quadrata sunt

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Sic ex. gr. radix quadrata numeri 72 quoad unitates integra erit 8; cum enim numerus 72 inter 64 & 81 deprehendatur, ejus quoque radix inter illorum radices continebitur, id est, inter 8 & 9; adeoque erit 8 cum fractione. Hæc verò fractio accuratè quidem definiri non potest, sed ad verum ejus valorem propius accedere perpetuò possumus, ut paulo inferius demonstrabitur.

132 Radix quadrata ejus numeri, qui quadratus perfectè non est, numerus *surdus*, *irrationalis*, sive *incommensurabilis* nominatur.

¶ Sunt autem quædam principia a Numerationis lege derivata, quibus sæpe dignoscere possumus, numerum propositum certò quadratum non esse, quæ ita se habent.

Numerus omnis, cujus postrema ad dextram nota fuerit 2, 3, 7, vel 8, quadratus esse nequit.

Qui numerus una, tribus, quinque cifris, aut generatim impare cifrarum numero ad dextram terminatur, quadratus esse non potest.

Si

Si novenarii a numero abjiciantur, & residuum fuerit 2, 3, 5, 6, vel 8, quadratus ipse perfectus certò non erit. Numerus autem, qui abjectis novenariis relinquit 3, vel 6, nullam cujusque gradus radicem rationalem habere potest.

Si undenarii similiter a numero abjiciantur, & residuum habeatur 2, 6, 7, 8, vel 10, ipse quadratus esse nequit.

Numeri autem, quicumque his non tenentur regulis, quadrati quidem esse poterunt, sed necessariò tamen idcirco non erunt. ¶

133 Jam verò, ut ad numeros ex pluribus quàm duabus notis compositos veniamus, observandum est quid in quadratorum genesi fiat, ut inde methodus constet, qua ad radicem eorum detegendam vicissim revertamur.

Si autem numerum quemvis ex. gr. 54 ad quadratum evehere propositum sit;

$$\begin{array}{r}
 54 \\
 54 \\
 \hline
 216 \\
 270 \\
 \hline
 2916
 \end{array}$$

Primùm, notam superiorem 4 per inferiorem 4 multiplicabimus, juxta consuetam Multiplicationis regulam; id quod *quadratum unitatum* ejusdem numeri evidenter producit.

Deinde, notam superiorem 5 per inferiorem 4 similiter multiplicabimus; quod autem inde fit, nihil aliud est quàm *productum decadam per unitates*.

Tum, notam superiorem 4 per inferiorem 5 multiplicabimus, unde orietur productum unitatum

tum per decadas, five (n. 44.) *productum decadum per unitates.*

Postremo, notam superiorem ζ per inferiorem ζ itidem multiplicabimus, quod *quadratum decadum* conficiet.

His vero productis partialibus additis, numeri propositi quadratum habetur 2916, quod adeo videmus esse compositum *ex quadrato decadum, ex duplo producto decadum per unitates, & ex quadrato unitatum* radicis ejus 54.

134 Cum autem id, quod modo observavimus, a Multiplicationis regulis omnino pendeat, manifestum est non tantum ad numerum 54 pertinere, sed ad alium quemvis qui ex decadibus unitatibusque similiter constet. Proinde in universum dicendum est, quadratum numeri ex decadibus unitatibusque compositi tres illas, quas memoravimus, partes continere, quadratum scilicet decadum, duplum productum decadum per unitates, & quadratum unitatum ejusdem numeri propositi.

135 Quo posito, cum decadum quadratum centenae conficiat (siquidem decies 10 sunt 100), perspicuum est, decadum quadratum in duabus postremis ad dextram notis totius quadrati non contineri. Similiter, cum productum decadum per unitates decadas necessario conficiat, facile liquet duplum ejus producti in postrema quadrati totius ad dextram nota minime contineri.

136 Ut igitur a quadrato 2916 ad ejus radicem detegendam regrediamur, ad hunc fere modum ratiocinari possumus.

Exemplum I.

$$\begin{array}{r|l}
 2916 & 54 \text{ Radix} \\
 416 & \\
 104 & \\
 \hline
 000 &
 \end{array}$$

QUæramus primùm radicis inveniendæ notam; quæ ad decadam sedem pertinet. Atqui genesis ipsius quadrati ostendit, decadam earum quadratum in toto quadrato 2916 contineri, & nihil ejus prætereà ad duas postremas notas 16 pertinere, adeoque & ipsum omnino contineri in 29. Cum autem radix quadrata numeri 29 maior esse nequeat quàm 5; manifestò consequitur radicis decadas nota 5 notandas esse, quam ad latus numeri propositi scribemus, uti in exemplo apparet.

Tum notæ inventæ 5 quadratum exactum conciemus 25, quod a 29 subducemus, & residuum erit 4, cujus ad latus adscribemus duas posteriores propositi numeri notas 16.

Nunc, ut notam radicis unitatibus consignandam inveniamus, considerandum est quid residuum 416 tandem contineat. Ex his vero, quæ supra ostendimus, liquet duas tantum continere partes, duplum videlicet decadam per unitates productum, & unitatum radicis ejusdem quadratum. Et harum quidem prior satis erit ad eam notam inveniendam, quam modo quærimus; cum enim constet ex duplo decadam per unitates multiplicato, si dividatur per duplum decadam, quas paulo ante invenimus, quotus unitates quæsitæ ostendet (n. 74.). Itaque id unum superest, ut videamus, quam in parte residui 416 duplum illud decadam per unitates productum contineatur.

tur. Paulo autem superius adnotavimus, nihil ejus in postrema nota contineri; igitur necessario continebitur in 41; adeoque dividemus 41 per duplum decadum 10, quem numerum infra partem dividendam scribemus, & quotus 4 unitates radicis ostendet, quæ proinde erit 54.

Licet verò quotus 4 is sit re ipsa inventus, quem invenire oportebat, notandum tamen est fieri quandoque posse, ut quotus hac ratione inventus justo maior deprehendatur; siquidem 41 (pars nimirum reliqua post separatam postremam notam) non solum continet duplum productum decadum per unitates, sed etiam decadas quæ a quadrato unitatum aliquando proficiscuntur. Quare, ne dubia relinquatur nota per hujusmodi divisionem inventa, eam hoc modo probabimus.

Postquam inventa est nota 4, & radici adscripta, eam quoque ad latus dextrum divisoris 10 adjungemus, ut fiat 104, quem numerum per eandem notam 4 multiplicabimus, productumque a membro superiori 416 eadem opera subtrahemus, ut in divisione peragenda præcepimus; cumque nihil superfit, colligemus radicem esse re ipsa 54.

Si autem aliquid superesset, radix nihilominus vera esset ad unitates usque, dummodo residuum non foret æquale, aut maius quam duplum radicis inventæ unitate auctum, id quod neutiquam eveniet, cum illud pro operationis indole proclive tantum sit erroris genus, ut quotus interdum prodeat justo maior.

Hæc notæ inventæ probatio eidem quadrati genesi innitur, quam supra ostendimus. Quum enim 104 per 4 multiplicatur, quadratum simul unitatum atque duplum decadum per unitates productum confit, quod nimirum deerat ad perfectum quadratum constituendum.

137 Ex his, quæ dicta sunt hætenus, con-

se-

sequitur in universum methodus radicem quadratam extrahendi a numero quocunque, qui nec plures notas quàm quatuor, nec pauciores habeat quàm tres.

Duabus enim postremis ad dextram notis puncto adscripto separatis, quærenda est radix quadrata ejus membri quod ad sinistram relinquitur. Quæ quidem decadas radicis inveniendæ ostendet, & ad latus numeri propositi, lineola interjecta, adnotabitur.

Quadratum deinde notæ inventæ ab eodem membro subtrahetur, & residuum infra notabitur, ad cujus dextram adducentur quæ primum fuerunt notæ a numero proposito separatæ.

Tum residuum habebitur, cujus postrema nota puncto segregabitur; quod autem ad sinistram reliquum fuerit membrum per duplum notæ inventæ dividetur, quod illi subscribendum est.

Quotus deinde inventus ad prioris notæ dextram in radice, & simul ad dextram divisoris adscribetur, sub ea nimirum sede, quam nota paulo ante segregata occupat.

Divisor tandem ita auctus per eundem quotum multiplicabitur, & singularum notarum producta a numero superiori subtrahentur. Rem alio exemplo illustremus.

Exemplum II.

Q Uæritur radix quadrata numeri 7569.

$$\begin{array}{r|l}
 75.69 & 87 \text{ Radix,} \\
 116.9 & \\
 \hline
 167 & \\
 \hline
 000 &
 \end{array}$$

Primum duas postremas notas 69 puncto separa-

parabimus, & radicem quadratam numeri 75 quaeremus, quam inueniemus esse 8, & hanc notam post lineolam adnotabimus; quadratum vero ejus, nempe 64, a membro 75 subtrahemus, residuumque 11 infra scribemus, ad cujus dextram adducendæ sunt notæ 69, quas antea separauimus a numero proposito.

Deinde in residuo toto 1169 postremam ad dextram notam 9 puncto segregabimus, ut pars dividenda relinquatur 116, infra quam divisorem 16, duplum scilicet radicis inventæ 8, adnotabimus; & divisione instituta quotum inueniemus 7, quem & in radice post priorem notam 8, & juxta divisorem 16 infra notam puncto discriminatam adscribemus.

Divisorem tandem ita auctum 167 per eundem quotum 7 multiplicabimus, productaque singula, prout fuerint gradatim inventa, a notis numeri superioris 1169 subducemus; cumque nihil superfit, id argumento erit, & numerum 7569 perfectè quadratum, & ejus radicem accuratam esse 87.

138 Id autem apprimè notandum est, per decadum duplum partem dividendam tantummodo esse, quæ post separatam postremam notam relinquatur. Quapropter si pars reliqua illo duplo minor sit, adeoque illud non contineat, assumenda idcirco non erit nota ad dextram separata, sed cifra quotientis loco scribetur. Contrà, si idem decadum duplum in parte dividenda plusquam novies contineretur, nota maior ad quotum transferri non posset, quàm 9, idque ob eandem rationem, quam in Divisione tradidimus (n. 66.).

139 Jam verò iis penitè intellectis, quæ circa radicem quadratam numerorum ex pluribus quàm quatuor notis non constantium extrahendam

præce-

præcepimus, facile est animadvertere quid facto opus sit, quum pluribus ex notis compositus numerus quivis obvenerit. Quantus enim cumque sit notarum numerus, ex quibus radix debeat esse composita, eam nihilominus concipere licet duabus constantem partibus, quarum altera decadas, unitates altera semper exhibeat; quemadmodum ex. gr. numerus 874 concipi potest ex 87 decadibus, & 4 unitatibus omnino compositus.

Quare, duabus prioribus radicis notis per methodum hactenus traditam inventis, tertiam invenire licebit per eandem omnino methodum, si duas illas notas inventas simul assumamus quasi unum decadum numerum exhibentes, cui eandem ratiocinationem accomodabimus, quæ circa priorem notam usi sumus, ut alteram inveniremus.

Eodem modo, ubi tres fuerint notæ inventæ, si quarta adhuc in radice desiderabitur, tres ipsas notas pro decadum numero accipiemus, iisque perinde utemur ad quartam, ut duabus prioribus ad tertiam detegendam usi paulo ante sumus; & ita deinceps.

Verum, ut operationem ordinatim aggrediamur, numerum propositum punctis interjectis in classes distinguere oportet, quarum singulæ binis a dextra versus sinistram notis constant, si postremam ad sinistram excipias, quæ una contenta erit nota, ubi impar earum numerus fuerit.

Hujus vero præparationis ratio est, quia radice ex decadibus & unitatibus composita, duæ ad dextram separandæ sunt notæ (n. 135. & seq.), ut in reliquis quadratum decadum inveniamus. Si autem radicis decades non unitates solum, sed etiam decadum decadas contineant, ob eandem rationem duas alias numeri propositi notas segregabimus, & ita deinceps.

Exemplum III.

Quæritur radix quadrata numeri 76807696.

$$\begin{array}{r|l}
 76.80.76.96 & 8764 \\
 \underline{128.0} & \\
 167 & \\
 \hline
 1117.6 & \\
 \underline{1746} & \\
 7009.6 & \\
 \underline{17524} & \\
 00000 &
 \end{array}$$

Numero in classes duarum notarum a dextra versus finistram distributo, classis finitimæ 76 radicem deprehendemus proximam esse 8, quam notam post lineolam scribemus; ejus vero quadratum exactum 64 a 76 subtrahemus, & residuum 12 infra notabimus, ad cujus latus dexterum classem proximè sequentem 80 demitemus, cujus & postremam notam 0 puncto separabimus. Sub parte reliqua 128 duplum radicis inventæ 8, nimirum 16, divisoris loco subjiciemus, & facta divisione reperiemus quotum esse 7, quam notam post priorem radicis 8, & ad divisoris 16 latus adscribemus. Tum numerum 167 per eundem quotum 7 multiplicabimus, productumque a 1280 auferemus, & residuum 111 infra lineolam notabimus, cui & classem sequentem 76 adjungemus, nota ejus dextima puncto segregata. Infra vero partem reliquam 1117 scribendus est numerus 174, duplum videlicet radicis hætenus inventæ 87; & divisione facta partis 1117 per 174, quotus erit 6, quem ad radicem, atque ad divisoris latus transferemus; multi-

multiplicatoque numero 1746 per eundem quotum 6, ac producto a parte 11176 subducto, residuum 700 infra lineolam notabimus, cui & classem numeri propositi reliquam 96 adjungemus, dextima ejus nota puncto discreta. Sub ea quæ relinquitur parte 7009 numerum scribemus 1752, duplum nempe radicis jam inventæ 876; & divisione facta quotum habebimus 4, quo ad radicem simul atque ad divisorem apponito, numerum 17524 per eundem quotum 4 multiplicabimus, productumque subducemus a numero 70096. Quia vero tandem nihil superest, numeri propositi radix exacta erit 8764.

140 Quum perfecte quadratus numerus non fuerit, residuum ad postremam operationis partem haberi necesse est; radix autem inventa erit radix quadrati maioris, qui in proposito numero continetur. Tunc enimvero fieri nequit, ut radix quadrata exacta deprehendatur, sed licebit tamen ad verum ejus valorem perpetuò accedere, ut error evadat data qualibet quantitate minor.

Id autem decimalium auxilio commodissime fit. Adduntur enim numero dato, bis totidem cifræ, quot in radice decimalium sedes exiguntur. Tum vero operatio instituitur, uti in exemplis superioribus traditum est. Et tandem in radice inventa tot ad dextram notæ virgula discernuntur, quot cifrarum paria numero proposito adjuncta sunt. Etenim, cum multiplicationis productum tot notas decimales ferre debeat, quot in factoribus simul deprehenduntur (n. 54.), quadratum (cujus factores æquales habentur) duplo plures notas decimales habeat necesse est, quàm in factorum quolibet, id est, in ejus radice continentur.

Exemplum IV.

Q Uæritur radix quadrata numeri 87567 ad millesimas usque accurata.

Ut millesimæ habeantur, tribus opus est decimalium sedibus; sex igitur cifrae numero proposito addendæ sunt; adeoque radix quadrata extrahetur à numero 87567000000.

$$\begin{array}{r}
 8.7567.00.00.00 \quad | \quad 295917 \\
 47.5 \\
 49 \\
 \hline
 346.7 \\
 585 \\
 \hline
 5420.0 \\
 5909 \\
 \hline
 10190.0 \\
 59181 \\
 \hline
 427190.0 \\
 591827 \\
 \hline
 129111
 \end{array}$$

Et operatione facta, ut in exemplis superioribus, radicem quadratam ad unitates usque accuratam inueniemus 295917. Radix isthæc ad numerum 87567000000 pertinet; nunc vero agitur de radice numeri 87567, sive 87567,000000. Idcirco tres postremas radiceis ejus notas, dimidium videlicet numerum earum, quas numero dato cifras addidimus, virgula ad partes decimales separabimus, & radix quæsitæ erit 295,917 ad millesimas usque exacta. Eo-

Eodem modo, si radix quadrata numeri 2 ad millionefimas usque exigatur, extrahenda erit radix a numero 2000000000000, quam inueniemus esse 1414213, & sex ad dextram notis virgula discretis, radix quadrata numeri 2 ad partes usque millionefimas accurata erit 1,414213.

¶ Hujusce operationis Examen ab ipsa radicis definitione manifeste derivatur (n. 130.). Multiplicanda enim erit per seipsam radix, factoque addendum residuum, si quod fuit; ita enim restituetur numerus propositus, si operatio rectè processerit. Si ex. gr. ex numero 12541028 radicem invenerimus 3541, & residuum 2347, ut operationis examen instituamus, radicem per se ipsam multiplicabimus, orieturque productum 12538681, cui residuum 2347 addemus, & numerus propositus cum redeat 12541028, errorem operationi nullum irrepsisse intelligemus.

Si cui novenaria probatione uti volupe fuerit, novenarios a radice subtrahat, residuumque per se ipsum multiplicet, & a facto novenarios similiter abjiciat, si quidem habeat; quod autem superest residuo operationis addat, unaque novenarios abjiciat, & quod tandem reliquum fuerit id ipsum erit, quod abjectis a numero proposito novenariis relinqui debet. Sic in eodem exemplo, abjectis novenariis a radice 3541 relinquitur 4, quod in se ipsum ductum conficit 16; abjectoque novenario, 7; hoc autem residuum, si operationis residuo 2347 addatur, unaque novenarii subtrahantur, tandem relinquetur 5, quod etiam ex numero 12541028 superesse debet, ut re ipsa superest. Ut novenaria, ita & undenaria probatio accommodatur, de quibus idem erit judicium, quod indicatum jam fuit (n. 75.). ¶

141 Cum paulo superius ostensum sit (n. 106.) ad fractionem per fractionem multiplicandam oportere

tere

tere numeratores invicem, ac denominatores multiplicare, sponte consequitur, fractionis quadratum habitum iri, si uterque ejus terminus ad quadratum evehatur. Sic quadratum fractionis $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, quadratum fractionis $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$ &c.

142 Igitur & vicissim radix quadrata fractionis habebitur, si numeratoris, atque denominatoris radices extrahantur. Sic radix quadrata fractionis $\frac{9}{16}$ erit $\frac{3}{4}$, quia numeratoris 9 radix est 3, & denominatoris 16 radix est 4.

143 Fieri verò potest, ut numerator, aut denominator, aut uterque quadrati non sint. Si numerator tantummodo quadratus non fuerit, ejus radix quàm proxima per methodum supra traditam extrahatur, cui radix denominatoris exacta denominatoris loco subscribatur.

Sic ex. gr. si radix quæretur fractionis $\frac{2}{9}$, numeratoris 2 radicem quàm proximam extraheamus, eritque 1, 4, vel 1, 41, vel 1, 414, vel 1, 4142 &c, prout maior, vel minor accuratio- nis fuerit habenda ratio; cui denominatoris 9 radicem 3 denominatoris loco donabimus, eritque fractionis datæ $\frac{2}{9}$ radix vero quàm proxima $\frac{1,4}{3}$, vel $\frac{1,41}{3}$, vel $\frac{1,414}{3}$, vel $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Quod si denominator fractionis propositæ quadratus non fuerit, uterque ejus terminus per denominatorem ipsum multiplicabitur, & res ad regulam præcedentem adducetur.

Sic ex. gr. si radix quadrata fractionis $\frac{3}{5}$ inve-

invenienda proponatur, fractionem revocabimus ad $\frac{15}{25}$, & radice numeratoris 15 ad millesimas usque extracta, si pro quæstionis ratione id sufficiat, fractionis $\frac{15}{25}$, five $\frac{3}{5}$, radix quàm proxima erit $\frac{3,872}{5}$.

144 Ne pluribus fractionum generibus simul distrahamur, radicem hujus formæ $\frac{3,872}{5}$ ad fractionem merè decimalem reducere possumus, si nimirum 3,872 per 5 dividamus, id quod radicem fractionis $\frac{3}{5}$ partibus tantum decimalibus expressam ostendet 0,774 (n. 99.).

145 Si denique integri fractionibus adhæreant, ipsi ad fractionum suarum nomen adducantur (n. 86.), & operatio fiat, quemadmodum in exemplis superioribus ostensum est. Ut ex. gr. radicem extrahamus a numero 8 $\frac{3}{7}$, hunc transmutabimus primùm in $\frac{59}{7}$ (n. 86.), deinde in $\frac{411}{49}$ (n. 143.), cujus radix quàm proxima est $\frac{20,322}{7}$, five 2,903.

146 Fractio etiam, quæ integro adhæret, decimales in partes transmutari potest, antequam radicis extractionem aggrediamur; in quo illud observandum est, ut notarum decimalium numerum, & parem, & duplum earum, quas in radice habere propositum est, eliciamus. Ut hanc numero 8 $\frac{3}{7}$ methodum ita accomodemus, ut radix ad millesimas usque protrahatur, revocandus ipse erit ad 8,428571 (n. 99.), cujus radix quadrata

drata habebitur 2,903, ut paulo ante invenimus.

147 Ubi autem fractionis decimalis radix extrahenda proponitur, illud curandum est, ut sedes decimales pari numero constituentur, & duplo insuper earum, quæ in radice habendæ sunt, additis quot opus fuerint cifris (n. 30.); radix autem inventa dimidiatum sedium numerum feret, qui interjectis inter virgulam & priorem notam cifris supplebitur, si necesse fuerit.

Sic, ut radicem quadratam a 21,935 ad millesimas usque extrahamus, numerum constituemus 21,935000, & instituta operatione radix erit 4,683. Eodem modo inveniemus radicem hujus fractionis 0,542 ad millesimas productam esse 0,736, radicemque hujus 0,0054 ad millesimas itidem accuratam esse 0,073; & ita de reliquis.

148 Quod Divisioni peragendæ compendium supra traditum est (n. 69. & seq.), id & radicam extractioni facile accommodatur. Si enim radix ad unitates usque exacta sufficiat, numerus primum in classes distribuetur, deinde tot ad ejus dextram notæ minus una rejicientur, quot classes fuerint, & ex iis quæ relinquentur radix per methodum hætenus traditam investigabitur. Quod verò postremum fuerit residuum per operationis precedentis divisorem postrema ad dextram nota multatum dividetur; quod inde rursus reliquum fuerit per eundem divisorem alia nota multatum dividetur; & ita deinceps.

De numerorum cubicorum genesi, eorumque radicibus extrahendis.

149 **S**I quadratum numeri cujusque per numerum ipsum multiplicetur, qui inde gignitur numerus prioris illius *cubus* appellatur.

Sic

Sic numerus 27 cubus est numeri 3, quia ex ipfius 3 per quadratum 9 multiplicatione producitur.

Numerus adeo, qui ad cubum evehendus assumitur, ter ipfius cubi factor habetur; quapropter & cubus *tertia ejus numeri potentia*, seu *tertii gradus potentia* nominatur.

150 Numerus in univcrsum ad secundam, tertiam, quartam, quintam &c potentiam elevari dicitur, quum per se ipsum semel, bis, ter, quater &c multiplicatur, seu, quod eodem redit, quum bis, ter, quater, quinquies &c factor adhibetur.

151 *Radix* autem *cubica* dicitur numerus, qui in quadratum ductus cubum producit. Sic 3 radix cubica est numeri 27, quia ex multiplicatione numeri 3 per ejus quadratum 9, numerus ipse 27 producitur.

152 Ut igitur numerus quivis ad cubi potentiam evehatur, nulla alia quam Multiplicationis regula opus est. Ut autem a cubo ad radicem vicissim redeamus, peculiaris methodus adhibenda est, quam ex ipfius cubi formatione colligemus.

Observandum tamen est, eam methodum ad radicem integram eruendam necessariam non esse, nisi quum propositus fuerit numerus qui ex pluribus quam tribus notis constat. Cum enim 1000 cubus sit numeri 10, manifestum est, numerum minorem quam 1000, qui adeo tres ultra notas non excurreret, radicem habere minorem quam 10. Horum autem radices scire oportet, ut operatio in grandioribus numeris instituat.

Numerus igitur omnis, qui ex pluribus quam tribus notis non constat, radicem cubicam integram habebit unum aliquem numerorum digitorum

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

quorum isti sunt cubi

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Sic

Sic radix cubica numeri 428 quoad unitates integra erit 7; cum enim numerus 428 inter 343, & 512 contineatur, ejus quoque radix inter illorum radices 7, & 8 existat necesse est, ac proinde quod ad unitates integras spectat, cum radice 7 numeri cubici proxime minoris 343 omnino consentiet.

153 Plures itaque sunt numeri, qui radicem accuratam non habent. Sed ad eam tamen tam proximè accedere supputando possumus, ut defectus data qualibet quantitate minor existat, quemadmodum paulo inferius demonstrabitur, postquam radice a cubo perfecto extrahendæ methodus tradita fuerit.

154 Hæc autem ut probè intelligatur, videndum est quibus ex partibus constare debeat cubus ejus numeri, qui decadas tantum unitatesque complectitur.

Quoniam verò cubus ex multiplicatione quadrati per ejus radicem exoritur (n. 149.), illud recolendum est, quadratum numeri ex decadibus unitatibusque compositi (n. 134.) tribus ex partibus constari, *quadrato videlicet decadam, duplo decadam per unitates producto, & unitatum quadrato.*

Ut igitur cubus formetur, tres illæ quadrati partes per decadas unitatesque radice multiplicandæ sunt.

Et primùm quidem, si per decadas multiplicentur, tria exurgent producta, cubus scilicet decadam, duplum ex quadrato decadam unitatibusque productum, & productum ex quadrato unitatum per decadas multiplicato. Deinde, si per unitates multiplicentur, tria alia producta orientur, productum nimirum ex quadrato decadam per unitates multiplicato, duplum ex quadrato unitatum decadibusque productum, & cubus unitatum.

Si

Si ergo producta similia jungamus, perficiendum fiet, cubum numeri ex decadibus unitatibusque compositi quatuor partes omnino continere, *cubum nempe decadum, triplum ex quadrato decadum unitatibusque productum, triplum ex decadibus quadratoque unitatum productum, & cubum unitatum.*

Harum vero partium ratione constituta, numeri cujusvis ex decadibus unitatibusque compositi cubum invenire licet. Sit exempli loco ad cubum evehendus numerus 43.

64000

14400

1080

27

 79507

Primum notæ 4 cubum investigabimus 64, qui *millia* exhibebit, quia nota 4 decadas significat, & 10 cubum habet 1000; adeoque prior cubi totius pars erit 64000.

Tum triplum quadratum ejusdem notæ 4, videlicet 48, per notam 3 quæ unitatum sedem occupat multiplicabimus, & productum erit 144, quod centenas ostendet, siquidem decadum quadratum centenas conficit, ac proinde pars altera cubi propositi erit 14400.

Deinde triplum ejusdem notæ 4 decadibus significandis consignatæ per quadratum 9 ipsius 3 multiplicabimus, & productum fiet 108, quod cum decadas exhibere debeat, partem tertiam cubi propositi ostendet 1080.

Postremo cubus unitatum erit 27, qui ultimam cubi totius partem constituet.

Quibus tandem partibus additis, cubum numeri

meri propositi 43 esse reperiemus 79507; qui quidem multo facilius inveniri poterat, si numerus datus 43 per se ipse primùm, & rursus per productum 1849 multiplicaretur; sed isthæc numeri cubici genesis non eò spectat, ut is expeditissimo calculo formetur, sed ut via ostendatur, qua ad radicem inversa operatione redire liceat.

155 His autem positis, cubicæ radicis extrahendæ methodus erit hujusmodi.

Exemplum I.

Q Uærat^rur radix cubica ejusdem numeri 79507.

Cubus	Radix
79.5 07	43
15 5.07	
48	
79 5 07	
00 0 00	

Ut partem in numero dato secernamus, in qua cubus decadum radicis inveniendæ continetur, posteriores tres ad dextram notas 507 puncto separabimus, in quibus cubum illum minime contineri supra ostendimus, quippe qui millia significat. Ejus verò partis 79, quæ ad sinistram relinquitur, radicem cubicam eruemus, quam inveniemus esse 4, eamque post lineoliam ad ipsius numeri latus adscribemus.

Hujus notæ 4, quæ radicis decadas ostendit, cubum accuratum conficiemus 64, eumque a parte ipsa 79 auferemus, & residuum 15 infra notabimus, ad cujus latus tres illas notas adscribemus, quæ fuerant a numero proposito separatæ, eritque totum residuum 15507, quod tres reli-
quas

quas cubi totius partes continere debet, triplum videlicet productum ex quadrato decadam inventarum per unitates multiplicato, triplum productum ex iisdem decadibus per unitatum quadratum multiplicatis, & cubum unitatum.

Quoniam verò earum partium prior centenas exhibet, duas residui notas ad dextram c7 puncto separabimus, & quæ ad sinistram reliquæ sunt 155 productum ex triplo decadam quadrato per unitates multiplicato continebunt. Quare, ut unitates inveniamus (n. 74.), dividenda erit pars ipsa 155 per triplum quadratum 4 decadam, quas invenimus, nimirum per 48; quem numerum infra partem dividendam scribemus; cumque diviorem 48 *ter* inveniamus in 155 contineri, notam 3 in radice scribemus, quæ unitates ostendet.

Ut notam inventam probemus, & residuum si quod est inveniamus, tres illas partes supputare possumus, quæ in residuo 155c7 contineri debent; sed æque commodum erit radicem inventam 43 ad cubum evehere, quæ cum propositum numerum restituat, ejus radix exacta esse dignoscitur.

Si numerus proponatur, qui plures notas habeat quàm sex, in ejus radice extrahenda ratiocinabimur, ut in exemplo sequenti videre licet.

Exemplum II.

SI extrahenda proponatur radix cubica a numero 596947688.

$$\begin{array}{r|l}
 596.947.688 & 842 \\
 \underline{849.47} & \\
 192 & \\
 \underline{592704} & \\
 42436.88 & \\
 \underline{21168} & \\
 596947688 & \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} & \\
 00000000 &
 \end{array}$$

Ejus primùm radicem spectabimus tanquam ex unitatibus decadibusque compositam, adeoque tres postremas ad dextram notas puncto separabimus. Deinde, cum reliqua pars 596947 quæ decadum cubum amplectitur plures & ipsa notas habeat quàm tres, ejus quoque radix plures habeat quàm unam necesse est, ac proinde ex unitatibus decadibusque decadum constabit. Ut harum quoque decadum cubum inveniamus, tres alias ad dextram notas ob eandem rationem segregare oportet, & reliqua pars erit 596, in qua cubus earum continebitur.

Radicem igitur cubicam partis 596 investigabimus, quam inveniemus esse 8, eamque notam post lineolam scribemus, cujus cubum exactum 512 a parte ipsa 596 subtrahemus, residuumque 84 infra notabimus. Ad ejus residui dextram classem alteram 947 adducemus, fietque 84947, cujus duas postremas ad dextram notas puncto separabimus, & sub parte reliqua 849 divisorem scribemus 192, triplum scilicet quadratum radice inventæ 8, factaque divisione quotum inveniemus

4, quem post priorem notam 8 radici adscribemus.

Ut radicem hanc probemus, unaque residuum inveniamus, eam ad cubum seorsum evehemus, fietque 592704, quem numerum a parte dati numeri respondente 596947 subtrahemus, residuumque 4243 infra notabimus. Ad hujus dextram classem reliquam 688 adnectemus, cujus duas postremas notas puncto discriminabimus, partem verò quæ superest 42436 dividendam accipiemus per triplum quadratum radicis hætenus inventæ 84, nimirum per 21168, & quotum inveniemus 2, quem radici adscribemus.

Rursus, ut radicem inventam 842 probemus, & residuum si quod est inveniamus, ejus cubum similiter investigabimus 596947688, quem a numero proposito subtrahemus; & quia nihil superest, numerum inventum 842 radicem cubicam numeri propositi, eamque exactam esse constabit.

Notandum verò est, in operationis hujusce ductu fieri nunquam posse, ut nota maior quàm 9 radici adscribenda habeatur; si autem maior interdum re ipsa obtingat, id argumento erit notam præcedentem fuisse justo minorem assumptam. Facile etiam erit dignoscere, an fuerit ex divisione nota justo maior assumpta, quia cubus orietur maior quàm ut subtrahi a parte numeri propositi respondente possit. Tunc radicem una, duabus &c unitatibus gradatim minuemus, quousque ejus cubus a numero superiori subduci queat.

Ubi numerus datur, qui cubus perfectus non fit, radix non invenitur, nisi veræ proxima. Vix autem est, ut eam ad unitates usque extrahere sufficiat. Huic profectò rei commodissimæ sunt fractiones decimales, quarum auxilio ad radicem accedere veram perpetuò licet, quanvis omnino accurata haberi nunquam possit.

156 Ut igitur ad radicem cubi imperfecti tantum, quantum opus fuerit, supputando accedamus, tot cifarum triadas numero dato adjungemus, quot in radice notas decimales habere propositum est. Radice autem ut in exemplis superioribus inventa, tot decimalium sedes virgula separabimus, quot adjectis cifarum ternariis respondent.

Exemplum III.

Quæritur radix cubica numeri 8755 ad millesimas usque exacta. Quoniam millesimæ tertiam decimalium sedem occupant, necesse est ut cubus novem decimalibus constet (n. 54.); adeoque novem dato numero cifræ adjiciendæ sunt.

Quæstio proinde eò redit, ut radix cubica extrahatur a numero 875500000000.

$$\begin{array}{r|l} 8.755.000.000.000 & 20610 \\ \hline 07.55 & \end{array}$$

12

8000

7550.00

1200

8741816

131840.00

127308

8754552981

4470190.00

12743163

8754552981000

447019000

Et numero in classes distributo, finitimæ classis 8 radicem cubicam inveniemus 2, quam notam

tam post lineolam scribemus; ablatoque ejus cubo 8 ab ipsa classe 8, residuum 0 infra notabimus, cui adjicienda erit classis proxima 755. Hujus postremas duas ad dextram notas puncto separabimus, & sub parte reliqua 7 divisorem scribemus 12, triplum videlicet quadratum notæ inventæ 2. Ex divisione autem ipsius 7 per 12, nota quotientis erit 0, quam radici adscribemus, & cubum ipsius radicis 20 jam inventæ, nempe 8000 a parte respondente 8755 subducemus, residuumque 755 infra notabimus, ad cujus latus classis sequentem 000 adducemus, & operationem eodem modo instaurabimus.

Ea tandem absoluta, inveniemus radicem cubicam numeri 875500000000 ad unitates usque exactam esse 20610, adeoque & radicem numeri 8755,00000000 ad millesimas usque veram esse 20,610, siquidem radix triplo minorem sedium decimalium numerum quam cubus ipse ferre debet (n. 54.).

Si quis ulterius radicem exigere vellet, tres alias postremo residuo cifras adjicere, eandemque calculi rationem persequi deberet, quæ fuit in operationibus præcedentibus instituta, quoties singulæ classes ad residui latus adductæ sunt, & ita deinceps.

§§ Hæc radicis cubicæ extrahendæ methodus radicibus altioris gradus accommodari potest. In quibus id in universum notandum est: 1º Ut numerus datus in classes distribuatur a dextra versus sinistram, quarum singulæ tot notis constent, quot sunt potentie datæ gradus, postrema ad sinistram excepta, quæ paucioribus constare poterit, & radix tot notas habebit, quot classes fuerint. 2º Ut classis finitimæ radix quærat gradus propositi, aut exacta, aut proximè minor, quæ maior esse non poterit quam 9, eaque prior erit radicis inveniendæ

nota. 3^o. Ut ejus radicis potentia exacta gradus propositi ab eadem classe finissima subducatur, residuoque prior classis proximè sequentis nota adjiciatur. 4^o. Ut residuo ita aucto divisoris loco subscribatur radicis inventæ potentia gradus proximè minoris per numerum multiplicata, qui gradum propositum exponit. 5^o. Ut divisione instituta, quotus priori radicis notæ adjiciatur, totaque radix inventa rursus ad propositi gradus potentiam evehatur, quæ a parte numeri dati respondente subtrahetur, residuum vero infra notabitur, cui prior classis sequentis nota similiter adjicietur, potentiaque radicis jam inventæ uno gradu minor per numerum multiplicata, qui gradum propositum exponit, divisoris loco subscribetur; & ita deinceps.

Sic ad radicem 5^{am} numeri cujusvis extrahendam, numerum ipsum in classes quinque notarum distribuemus. Classis finissimæ radicem 5^{am} investigabimus, quæ priorem radicis inveniendæ notam ostendet. Hujus potentiam 5^{am} exactam ab eadem classe subtrahemus, residuoque priorem classis sequentis notam adjiciemus. Huic residuo ita aucto divisoris loco subscribemus quintuplum potentia 4^æ ejusdem radicis inventæ, & divisione instituta notam alteram radicis inveniemus, cujus denuo potentiam 5^{am} a parte numeri propositi respondente auferemus, residuoque priorem classis sequentis notam applicabimus, cui & quintuplum potentia 4^æ radicis jam inventæ divisoris loco subscribemus, ut tertiam radicis notam inveniamus, & ita deinceps.

Quo autem facilius radix finissimæ classis extrahatur, tabellam consulere oportet, quæ numerorum digitorum potentias, sive *dignitates* exhibeat, quemadmodum in tabella sequenti ad nonam usque videre licet.

Ut

RADICES	POTENTIÆ							
	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	5	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	5561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

UT autem ad radicem cubicam redeamus, cuius est usus frequentior, diffitendum non est methodum superiorem id potissimum habere incommodi, quod divisores sint seorsum formandi, radixque toties ad cubum evehenda, quoties nova illi nota adcrefcit, cuiusmodi profecto calculus eo molestior evadit, quo plures habendæ in radice sunt notæ. Regula quidem alia radici cubicæ extrahendæ prostat in libris vulgaribus, sed illa tamen adeo implicata, ut fatius fuerit methodum supra traditam amplecti. Ut igitur isthæc faciliori calculo operatio expediatur, peculiarem hic methodum subjungere operæ pretium erit. Est autem huiusmodi.

Facto operationis initio, ut supra traditum est, quousque altera radicis nota inveniatur, hæc etiam infra radicem scribatur, ad ejusque sinistram triplum prioris notæ ejusdem radicis. Numerus qui fiet per eandem notam inventam multiplicetur, productumque sub divisore scribatur, initio tamen facto a sede postrema notarum, quæ fuerunt antea a membro dividendo separatæ. Productum istud divi-

divisori addatur, summaque infra scribatur, quæ
 rursus per eandem notam inventam multiplicetur,
 & productum eadem opera a membro dividendo
 subtrahatur, residuoque classis proxime sequens
 adnectatur, ut novum fiat membrum dividendum.
 Divisor autem facili negotio habebitur, si quadratum
 notæ proxime inventæ mente addatur duobus nume-
 ris membrum dividendum præcedentibus, eaque sum-
 ma sub eodem dividendo scribatur una dextror-
 sum sede promotâ. Divisione instituta, tertiam
 radicis notam inveniemus, quam & infra scribemus,
 & ad ejus sinistram triplum notarum in radice præ-
 cedentium: qui verò numerus fiet per eandem no-
 tam inventam multiplicandus est, cæteraque exe-
 quenda, ut in operatione præcedenti; & ita deinceps.
 Quum divisor prodit parte dividenda maior, cifra
 radici adscribitur, classis alia membro dividendo
 admovetur, ipse verò divisor unam dextrorsum
 sedem provehitur.

Exemplum.

Queritur radix cubica -----
 numeri ----- 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187 358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
000000000000	

Inventis duabus notis 97 juxta methodum vulgarem, earum alteram 7 infra radicem scribemus, & ad ejus sinistram triplum prioris 9, nempe 27, ut fiat numerus 277, quem per eandem notam 7 multiplicabimus, productumque 1939 sub divisore 243 scribemus, initio tamen facto a sede postrema dividendi 187358; additis vero divisore & producto subjecto fiet summa 26239, quam rursus per eandem notam 7 multiplicabimus, unaque pro-

ductum a dividendo 187358 subtrahemus, ut habeatur residuum 3685, cui classem sequentem adjiciemus, fietque membrum rursus dividendum 3685751. Tum quadratum notæ proximè inventæ 7, nempe 49, mente addemus duobus numeris dividendum præcedentibus 26239 & 1939, summaque unam dextrorsum sedem promotam divisorem efficiet 28227.

Divisione instituta quotus erit 1, quem radici adscribemus, & infra præterea notabimus, ad cuius sinistram triplum notarum in radice præcedentium 97 illico scribemus, ut fiat numerus 2911, quem per eandem notam inventam 1 multiplicabimus, productumque similiter divisori addemus, ut fiat summa 2825611, quam rursus per eandem notam 1 multiplicabimus, productumque a membro dividendo subtrahemus, unde residuum erit 860140, cui classem ulteriorem adjungemus, ut novum habeatur membrum dividendum 860140227; quadratum vero notæ inventæ 1 duobus numeris dividendum præcedentibus additum, sedequè una ad dextram promotum, novum divisorem constituet 2828523.

Divisione rursus instituta, quotus deprehenditur 3, qui radici primum adscribetur, deinde infra cum triplo notarum in radice præcedentium numerum efficiet 29133, quo per eandem notam 3 multiplicato, productoque 87399 divisori addito, summa habebitur 282939699, qua rursus per eandem notam 3 multiplicata productoque subducto a membro dividendo, residuum prædabit 11321130, cui classem aliam adjiciemus, ut novum exurgat membrum dividendum 11321130902. Cum verò ex formatione divisoris videamus fore, ut nota 2 numeri dividendum præcedentis incidat sub priore ipsius dividendi nota 1, adeoque divisionem institui nequitiam posse, cifram illico radi-

radici adscribemus, classẽ aliam dividendo applicabimus, quadratum notæ præcedentis 3 duobus numeris dividendum præcedentibus addemus, summamque duabus dextrorsum sedibus promovebimus, ut divisor fiat 283027107.

Divisione tandem instituta, quotus erit 4 radici adscribendus, ipseque cum triplo notarum præcedentium efficiet 2913904, quo per 4 multiplicato, productoque sua in sede scripto, ac divisoni addito, sũma habebitur 2830282725616, qua rursus per eandem notam 4 multiplicata, productoque ablato a dividendo, nihil superest, quod argumento est radicem cubicam numeri propositi exactam esse 971304. ¶¶

157 Cum in fractionibus multiplicandis oporteat numeratores inter se invicem, ac denominatores similiter inter se multiplicare (n. 106.), perspicuum est, fractionis cubum habitum iri, si uterque ejus terminus ad cubum evehatur. Quare vicissim, ut radix cubica a fractione extrahatur, numeratoris ac denominatoris radices extrahendæ sunt. Sic fractionis $\frac{27}{64}$ radix cubica erit $\frac{3}{4}$, quia numeratoris 27 radix cubica est 3, denominatoris autem 64 est 4.

158 Si denominator tantum cubus perfectus fuerit, numeratoris radix quàm proxima eruetur, illique exacta denominatoris dati radix denominatoris loco subscribetur.

Sic ex, gr. si radix cubica petatur fractionis $\frac{143}{343}$, numeratoris radicem ad centesimas usque inveniemus esse 5,22, denominatoris autem radicem accuratam 7; adeoque radix quæsitæ erit quàm proximè $\frac{5,22}{7}$, sive 0,74 (n. 99.).

159 At si denominator cubus perfectus non fuerit, uterque fractionis terminus per ipsius denomina-

minatoris quadratum multiplicabitur (n. 88.), & operatio instituetur ut in priori exemplo.

Sic ex. gr. ut radicem cubicam fractionis $\frac{3}{7}$ extrahamus, utrumque ejus terminum multiplicabimus per 49, quadratum scilicet denominatoris 7, ipsaque reducetur ad $\frac{147}{343}$ (n. 88.), cujus radix cubica erit quàm proximè $\frac{5,27}{7}$ (n. 158.), sive 0,75 (n. 99.).

Quum fractiones integris adhærent, integri ad suarum fractionum nomen revocantur, iisque adduntur (n. 86.), & quæstio ad exempla jam tradita redit. Possunt etiam fractiones, vel illæ quidem seorsum propositæ, vel integris adjunctæ, ad partes decimales transferri, antequam radix extrahatur; sed hæc tamen reductio eò protrahenda est, quousque notæ decimales habeantur triplo plures quàm in radice desiderantur.

Sic ex. gr. ut radicem cubicam ad milleimas usque extrahamus a numero $7\frac{3}{11}$, hunc reducemus ad 7,272727272, cujus radix erit 1,937.

160 Quum radix cubica a fractione decimali extrahenda proponitur, curandum est, ut additis quot opus fuerint cifris notæ decimales triplo plures constituentur, quàm in radice exiguntur. Tunc, nulla virgulæ ratione habita, radix extrahetur, in qua demum sedes decimales virgula discernentur, tertia nimirum pars earum, quas in numero proposito constituimus; si autem notæ inventæ ad id non sufficiant, sedium numerus adjectis ad sinistram cifris omnino supplebitur.

Ex. gr. Ut radicem cubicam ad millesimas usque extrahamus a numero 6,54 septem illi cifras adjiciemus, radicemque investigabimus quasi a numero integro 654000000, quam deprehendemus

mus esse 1870. Hujus vero tres ad dextram notas decimalibus partibus significandis discernemus, quia novem sedes decimales in numero dato positæ fuerunt, eritque radix quæsitæ 1,870, seu 1,87. Eodem modo inveniemus radicem cubicam hujus fractionis 0,0006 ad centesimas exactam esse 0,08; & ita de aliis.

161 Ea, quam Divisioni peragendæ methodum compendiarium tradidimus (n. 69. & seq.), radicis etiam cubicæ extractioni facili negotio accommodatur. Si enim radix ad unitatum sedem accurata sufficiat, numerum propositum in classes primùm distribuere oportebit, deinde tot ad dextram notæ, minus duæ, segregandæ erunt, quot sunt classes bis acceptæ. Earum vero, quæ ad sinistram reliquæ fuerint, radix per methodum hætenus traditam extrahetur, & ubi ad postremum residuum ventum fuerit, divisor illi postrema nota multatus applicabitur, & ita deinceps; sed divisor operationis præcedentis nunquam adhibebitur, nisi totidem in eo notæ ad sinistram constantes reperiantur, quot ejus residui in quo versamur notæ sunt.

De Rationibus, Proportionibus, & Progressionibus; Regulisque independentibus.

162 **R**atio, quatenus ad Mathesim spectat, nihil aliud est quàm magnitudo relativa, quæ ex mutua duarum quantitatum comparatione consequitur. Hæc autem duplex est.

163 Si enim quantitatem quantitati ita conferimus, ut quantum prima alteram excedat, vel ab illa excedatur, omnino attendamus, quod ex hujus-

hujusmodi comparatione proficiscitur nihil est aliud quam earum quantitatum differentia, eaque *Ratio Arithmetica* nominatur.

Si ex. gr. numerum 15 ad numerum 8 ita invicem comparemus, ut unam eorum differentiam 7 attendamus, ipse numerus 7 qui ex tali comparatione proficiscitur ratio arithmetica est numeri 15 ad numerum 8.

Ut duas innuamus quantitates eodem modo invicem relatas, eas puncto interjecto dirimere consuevimus. Sic per 15.8 intelligimus nihil aliud considerari quam rationem arithmetica[m] numeri 15 ad numerum 8.

164 Si autem quantitates inter se ita conferimus, ut quoties alia aliam contineat, vel in illa contineatur, omnino inspiciamus, id quod ex comparatione consequitur *Ratio Geometrica* appellatur. Ubi autem *Ratio* dicitur, nisi quid additum fuerit, *Geometrica* semper intelligitur.

Si ex. gr. numerum 12 ad numerum 3 comparando referimus, ut quoties primus alterum contineat intelligamus, quod ex hujusmodi comparatione concluditur, esse nimirum 12 *quadruplum* ipsius 3, ratio geometrica est numeri 12 ad numerum 3.

Ut quantitates hac sub consideratione acceptas designemus, eas duobus punctis discernimus. Sic per 12:3 nihil aliud exhibetur, quam ratio geometrica numeri 12 ad numerum 3.

165 Duarum verò quantitatum, quas arithmetice vel geometricè invicem comparamus, ea quæ prior vel enuntiatur, vel scribitur *antecedens*, quæ posterior *consequens* nominatur. Sic in ratione 12:3 numerus 12 antecedens, numerus 3 consequens est; ambo autem communi vocabulo rationis *termini* appellantur.

166 Ut ratio duarum quantitatum arithmeti-

sa dignoscatur, nihil aliud opus est quàm minorem a maiori subducere, & residuum rationem ostendet, quantum videlicet alia aliam excedat.

167 Ut autem duarum quantitatum ratio geometrica innotescat, earum alia per aliam dividenda est, & quotus rationem ostendet quæ inter illas intercedit.

168 Hanc deinceps semper æstimabimus ex divisione termini antecedentis per consequentem, licet ille minor existat. Sic ratio numeri 12 ad numerum 3 erit 4, numeri verò 3 ad numerum 12 erit $\frac{3}{12}$, five $\frac{1}{4}$.

¶ Notandum verò est, rationem intercedere non posse, nisi inter quantitates *homogeneas*; siquidem *heterogeneæ* neque se invicem excedunt, neque se invicem continent. Sic 12 *hexapedas* ad 3 *libras* neque arithmetice, neque geometricè referre possumus. Quanvis enim numerus 12 excedat numerum 3 per differentiam 9, tamen 12 *hexapedæ* non excedunt 3 *libras* per 9 *libras*, nec per 9 *hexapedas*, nec per quidvis aliud. Et eodem modo, licet numerus 12 numerum 3 quater contineat, 12 tamen *hexapedæ* 3 *libras* nullo modo continent, quia quantitates sunt generis omnino diversi, in quibus nulla est comparatio.

Differentia terminorum in ratione arithmetica, & quotus ex divisione antecedentis per consequentem in ratione geometrica, rationis etiam *nomen*, *denominatores*, & *exponentes* appellantur.

Ratio autem Geometrica dividitur in *rationalem* & *irrationalem*. Rationalis est, quum exponens numero aliquo integro vel fracto significari potest; irrationalis, quum exponens per numerum defini exactè nequit, qualis est ratio unitatis ad radicem quadratam numeri 2. Dividitur etiam in rationem *æqualitatis* & *inequalitatis*, pro-

ut termini æquales, vel inæquales sunt; dicitur autem ratio *maioris inæqualitatis*, quum antecedens consequente maior est; *minoris inæqualitatis*, quum minor.

Ratio maioris inæqualitatis apud veteres Mathematicos in quinque genera distribuitur (quæ ignorare non debet is, qui illorū scripta intelligere velit). Sunt autem hujusmodi: *Multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *Multiplex-superparticularis*, *Multiplex-superpartiens*; rationis autem minoris inæqualitatis totidem sunt genera, quæ iisdem nominibus particula *sub* præfixa significantur, *submultiplex*, *subsuperparticularis* &c.

Ratio *multiplex* est, quum antecedens terminus consequentem aliquoties exactè continet; *submultiplex*, quum eodem modo in illo continetur. Prioris species sunt ratio *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c, posterioris autem ratio *subdupla*, *subtripla* &c, prout exponens postulaverit. Sic ratio 10:1 *decupla* est; & vicissim ratio 1:10 *subdecupla* &c.

Superparticularis ratio est, quum antecedens consequentem semel continet & partem in super ejus aliquotam, ut 3:2; *subsuperparticularis* autem, quum antecedens eodem modo in consequente continetur, ut 2:3. Prioris species significantur per ipsius partis aliquotæ nomen præfixa particula *sesqui*. Sic rationes 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 &c eodem ordine dicuntur *sesquialtera*, *sesquitertia*, *sesquiquarta*, *sesquiquinta* &c. Posterioris vero species iisdem nominibus indicantur præfixa particula *sub*. Sic rationes 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 &c dicuntur *subsesquialtera*, *subsesquitertia*, *subsesquiquarta*, *subsesquiquinta* &c.

Superpartiens est, quum antecedens consequentem semel continet, & aliquot præterea partes ejus aliquotas, ut 5:3; *subsuperpartiens* autem, quum

quum antecedens in consequente eodem modo continetur, ut $3:5$. Harum species significantur, adjecta partium aliquotarum denominatione, & interjectis post *super* vocibus *bi*, *tri*, *quadri* &c, quibus declaratur, quot earum partium aliquotarum assumantur. Sic $5:3$ ratio est *superbipartiens tertias*, $8:5$ ratio *supertripartiens quintas* &c. Et vicissim $3:5$ ratio *subsuperbipartiens tertias*, $5:8$ ratio *subsupertripartiens quintas* &c.

Multiplex-superparticularis est, quum antecedens aliquoties consequentem continet, & unam insuper partem ejus aliquotam; *submultiplex-superparticularis*, quum antecedens in consequente eodem modo continetur. Prioris species sunt *dupla-sesquialtera* $5:2$, *dupla-sesquitertia* $7:3$ &c, *tripla-sesquialtera* $7:2$, *tripla-sesquitertia* $10:3$ &c &c; posterioris autem *subdupla-sesquialtera* $2:5$, *subdupla-sesquitertia* $3:7$ &c, *subtripla-sesquialtera* $2:7$, *subtripla-sesquitertia* $3:10$ &c &c.

Multiplex-superpartiens tandem est, quum antecedens aliquoties consequentem continet, & aliquot præterea ejus partes aliquotas; *submultiplex-superparticularis* autem, quum antecedens eodem modo in consequente continetur. Harum species ex supra traditis facile denominantur. Ratio $8:3$ est *dupla-superbipartiens tertias* ratio $74:7$ *decupla-superquadripartiens septimas* &c; & vicissim ratio $3:8$ est *subdupla-superbipartiens tertias*, ratio $7:74$ *subdecupla-superquadripartiens septimas* &c. ¶

169 Ratio arithmetica eadem manet, quoties uterque ejus terminus una eademque quantitate vel augetur, vel minuitur; quia eorum differentia, in qua ratio consistit, per id non mutatur. Sic 3.8 idem est ac 4.9 , 5.10 &c.

170 Ratio autem geometrica eadem manet, quoties uterque ejus terminus per eandem quantita-

titatem multiplicatur, vel dividitur. Cum enim ea ratio exponatur per quotum ex divisione termini antecedentis per consequentem (n. 168.), quantitas est fractionum naturam referens (n. 97.), quæ proinde mutari nequit, quum termini per eandem quantitatem simul multiplicentur, aut dividuntur (n. 88. 89.). Sic ratio 3: 12 eadem est atque 6: 24, quæ oritur ex multiplicatione utriusque termini per 2; & eadem atque 1: 4, quæ ex divisione utriusque termini per 3 proficiscitur.

171 Hæc verò proprietas usus est maximi, ut rationes ad terminos quàm fieri potest simplicissimos adducantur. Si ex. gr. expendere oporteat rationem quantitatis $6\frac{1}{4}$ ad $10\frac{2}{3}$; utroque termino ad fractionem primùm revocato, eandem esse comperiemus ac rationem fracti $\frac{27}{4}$ ad $\frac{32}{3}$; deinde reductione facta ad communem denominatorem, eandem rursus esse inveniemus atque rationem fractionis $\frac{81}{12}$ ad $\frac{128}{12}$; & communi tandem denominatore rejecto (quod nihil aliud est, quàm utrumque terminum multiplicare per 12), ratio proposita exprimetur per rationem quam habet numerus 81 ad numerum 128.

¶ Quæ in ratione arithmetica mutatio contingit, quantitate data antecedenti termino addita, vel ab eodem subtracta, eadem omnino fiet si eadem quantitas a consequente subtrahatur, vel eidem addatur; siquidem quæ duæ hoc pacto rationes emergunt ita erunt constitutæ, ut altera ex alterius terminis eadem quantitate vel auctis, vel multatis constet. Sic in ratione 5.9 eadem mutatio fiet, si numerus 2 antecedenti addatur, ut transeat in 7.9, ac si idem numerus 2 a consequente subtrahatur, ut transeat in 5.7; & vicissim

iffim eodem recidet numerum 2 ab antecedente subtrahere, ut fiat 3.9, ac eundem numerum 2 consequenti addere, ut fiat ratio 5.11.

Quæ vero in ratione geometrica mutatio peragitur, ubi antecedens per quantitatem datam multiplicatur, vel dividitur, eadem haberi potest, si consequens per eandem quantitatem dividatur, vel multiplicetur; utraque enim operatione rationes oriuntur, quarum altera ex alterius terminis per eandem quantitatem multiplicatis, vel divisis constat. Sic in ratione 4:9 idem omnino erit antecedentem terminum dividere per 2, atque consequentem multiplicare per 2, siquidem utroque modo rationes æquales emergent 2:9 & 4:18; & similiter, idem erit antecedentem terminum multiplicare per numerum 3, atque per eundem dividere consequentem, sicut enim rationes eadem 12:9 & 4:3. ¶

172 Si quatuor quantitates tales fuerint, ut duæ priores eandem inter se rationem habeant, quam duæ posteriores, eas *Proportionem* efficere dicimus. Quæ quidem *Proportio* arithmetica, vel geometrica erit, prout rationes arithmeticae vel geometricae fuerint.

Sic quatuor hæ quantitates 7, 9, 12, 14 proportionem arithmeticam exhibent, quia inter duas priores, & duas posteriores eadem differentia 2 deprehenditur. Ut huiusmodi proportionem designemus, quatuor terminos ad hunc modum scribimus 7.9:12.14, sive etiam $7-9=12-14$: expressionem vero utramque ita enuntiamus, 7 est ad 9, ut arithmetice est 12 ad 14.

Quatuor autem quantitates 3, 15, 4, 20 proportionem geometricam constituunt, quia 3 in 15 toties continetur, quoties 4 in 20. Ut autem eas ita se habere ostendamus, hac notatione utimur 3:15::4:20, seu $3:15=4:20$, quas ex-

pressiones ita enuntiamus : 3 est ad 15 , ut 4 ad 20.

¶ Hinc facile intelligitur , multiplicationis cujuscumque productum quartum esse terminum geometricè proportionalem ad unitatem & factores, id est , unitatem esse ad factorum alterum , ut alter ad productum ; quia productum toties factorem alterum , quoties alter unitatem continent.

Et eodem modo in divisione , unitas est ad quotum ut divisor ad dividendum, quia dividendus æquatur facto ex divisore & quotu.

Notandum verò est , omnes geometricas rationes esse inter se homogeneas , siquidem in quotu consistunt antecedentis per consequentem divisi , qui profecto quotus numerum abstractum perpetuò refert. Ea de causa , licet ratio inter terminos heterogeneos nulla existat , proportio nihilominus haberi potest , dummodo antecedens quique terminus suo consequenti homogeneus statuatur. Sic 12 hexapedæ sunt ad 3 hexapedas , ut 8 libræ ad 2 libras ; quia licet hexapedæ ad libram nulla comparatio fit , ratio tamen hexapedarum ad hexapedas comparari potest cum ratione librarum ad libras ; quoties enim 3 hexapedæ in 12 hexapedis , toties 2 libræ in 8 libris continentur , nimirum quater. ¶

173 Primus , & quartus proportionis terminus extremi ; secundus & tertius , medii nominantur.

Cum duæ in proportionem rationes sint , adeoque duplex antecedens duplexque consequens , prioris termini primus antecedens & primus consequens , posterioris verò secundus antecedens & secundus consequens appellantur.

174 Quum medii proportionis termini æquales sunt , proportio dicitur continua.

Sic 3 . 7 : 7 . 11 proportio est arithmeticè continua , terminus autem 7 medius arithmeticè proportionalis inter 3 & 11. Hujusmodi proportio brevitatis

ergo

ergo ita scribitur $\div 3.7.11$, signo \div indicante terminum medium 7 primi consequentis & secundi antecedentis simul vices gerere.

Eodem modo $5 : 20 :: 20 : 80$ proportio est geometricè continua, terminus autem 20 *medius proportionalis* inter 5 & 80. Hæc autem proportio notatur ad hunc modum $\div 5 : 20 : 80$, signo itidem \div designante terminum medium 20 bis esse accipiendum.

175 Ex his, quæ circa proportionem tam arithmetica quam geometricam dicta sunt hæcenus, consequitur :

1º Si in proportione arithmetica uterque antecedens augeatur vel minuaturs ipsa differentia, quæ in duabus rationibus habetur, prout minores vel maiores consequentibus fuerint, utrumque suo consequenti æqualem fieri; per id enim minori cujusque termino additur quod illi deest, ut maiorem æquet, vel majori subtrahitur id per quod minorem superabat. Sic in proportione $3.7 : 8.12$, si primo & tertio termino addatur differentia 4, manifestum est utrumque antecedentem suo consequenti æqualem evadere hoc modo, $7.7 : 12.12$.

2º Si in proportione geometrica uterque consequens per rationum exponentem multiplicetur, unumquemque suo antecedenti æqualem evadere; per id enim consequens uterque sumitur quoties in suo antecedente continetur. Sic in proportione $12 : 3 :: 20 : 5$, si 3 & 5 multiplicentur per exponentem 4, habebitur proportio $12 : 12 :: 20 : 20$; & eodem modo in proportione $15 : 9 :: 45 : 27$, si 9 & 27 per exponentem $\frac{15}{9}$ seu $\frac{5}{3}$ multiplicentur, proportio orietur in ratione æqualitatis $15 : 15 :: 45 : 45$.

Proportionum arithmeticarum proprietates.

176 **P** Ræcipua arithmeticarum proportionum proprietas, quæ cæteris omnibus fundamento est, in eo consistit, ut *extremorum summa mediorum summe æqualis* perpetuò habeatur. Sic ex. gr. in hac proportione 3. 7 : 8. 12 tam extremorum 3 & 12, quam mediorum 7 & 8 summa habetur 15.

Et quidem si duo priores termini, duo item posteriores æquales fuerint, ut in proportione 7. 7 : 12. 12, manifestum est, extremos mediosque terminos eandem summam conficere. Omnis autem proportio arithmetica ad eam formam revocari potest, si uterque antecedens augeatur vel minuat ipsa differentia, quæ in proportione obtinet (n. 175. 1^o). Cum igitur ejusmodi additio vel subtractio mediorum extremorumque summam æqualiter augeat vel minuat, adeoque æqualitatem vel inæqualitatem turbare nequeat, manifestum est, summas quæ per eam reductionem æquales reperiuntur, & antea æquales extitisse.

177 Cum in proportione continua medius terminus bis accipiatur & duorum vices gerat, summa extremorum erit dupla ejusdem medii. Sic in proportione \div 7. 11. 15 summa extremorum 7 & 15 conficit 22, duplum nempe medii 11.

¶ Et vicissim : Si quatuor quantitates fuerint, quarum extremæ & mediæ eandem summam reddant, proportionem arithmeticam constituent.

Ut enim summæ æquales habeantur, necesse est, ut quantum mediarum una extremarum unam excedit, tantum mediarum altera ab extremarum altera excedatur; ac proinde eadem inter primam & secundam atque inter tertiam & quartam diffe-

differentia erit, quod proportionem arithmetica constituit.

Unde, si tres quantitates fuerint, quarum media æqualis sit semifummæ extremarum, proportionem arithmetice continuam inter illas intercedere consequitur.

Datis igitur tribus terminis, quartum arithmetice proportionalem inueniemus, si tertium secundo addamus, & a summa primum subtrahamus; datis duobus terminis, tertium continue proportionalem habebimus, si a secundi duplo primum auferamus; datis duobus terminis, medium arithmetice proportionalem inueniemus, si datorum summam bifariam dividamus.

Inde etiam manifestum est, quatuor quascunque quantitates in proportione arithmetica semel constitutas, proportionales adhuc manere, quoties medix ad extremarum sedem transeunt, & vicissim; & quoties vel medix, vel extremæ sedem invicem permutant. Sic ex proportione 3. 7 : 8. 12 proportiones sequentes per solam terminorum permutationem oriuntur :

$$3. 7 : 8. 12$$

$$3. 8 : 7. 12$$

$$7. 3 : 12. 8$$

$$7. 12 : 3. 8$$

$$8. 3 : 12. 7$$

$$8. 12 : 3. 7$$

$$12. 7 : 8. 3$$

$$12. 8 : 7. 3$$

Ex eodem principio facile intelligitur, proportionem arithmetica non turbari, si quantitas quælibet primo simul ac tertio, aut secundo simul & quarto addatur, aut ab eisdem subtrahatur. Sic in proportione 3. 7 : 8. 12, si utrique ante-

antecedenti numerum quemvis v. gr. 6, & utri-
que consequenti numerum quemcunque v. gr. 9,
addamus, proportio retinebitur 9. 16 : 14. 21.

Et similiter, duabus aut pluribus proportio-
nibus arithmetiis constitutis, si earum termini
addantur, aut invicem subtrahantur, summæ vel
differentiæ proportionem reddent. Sic proportio-
nibus 3. 7 : 8. 12 & 2. 5 : 6. 9 additis, propor-
tio emergit 5. 12 : 14. 21; subducta verò poste-
riori a priori, proportio 1. 2 : 2. 3. ¶

Proportionum Geometricarum proprie- tates.

178 **O** Mnis proportio geometrica id sibi pro-
prium habet, ut *extremorum factum
mediorum factum æquale sit*; quemadmodum in pro-
portione 3 : 15 :: 7 : 35 extremorum 3 & 35, ac
mediorum 7 & 15 factum idem habetur 105.

Manifestum est enim extremorum, mediorum-
que factum idem fore, quoties antecedens quisque
terminus suo consequenti æqualis fiet. Omnis au-
tem proportio geometrica eò adduci potest, ut
antecedentes termini consequentibus æquales eva-
dant (n. 175. 2º), utroque nimirum consequen-
te per exponentem rationis multiplicato. Igitur,
cum per huiusmodi multiplicationem utrumque
factum per eundem exponentem multiplicatum
insuper prodeat, perspicuum est, & ante multi-
plicationem fuisse extremorum mediorumque fa-
cta æqualia.

In proportione igitur continua *factum extremo-
rum medii quadrato æquale est*. Mediis enim termi-
nis æqualibus positis, eorum factum est unius-
cujusque quadratum.

Datis igitur duobus numeris, medium propor-
tiona-

tionalent inveniemus, si ab eorum facto radicem quadratam extrahamus. Sic ex. gr. ut medium geometricum inter 4 & 9 inveniamus, a datorum producto 36 radicem quadratam 6 extrahemus, & habebitur $\therefore 4 : 6 : 9$.

179 Datis tribus prioribus geometricæ proportionis terminis, quartus inveniatur, si secundus per tertium multiplicetur, & productum dividatur per primum. Est enim manifestum, quartum terminum habendum fuisse, si extremorum productum per primum divideretur (n. 74.); sed extremorum productum æquale est mediorum producto (n. 178.): igitur quartus terminus æquè habebitur, si mediorum productum per primum dividatur.

Sic ex. gr. si quartus terminus quæeratur proportionis geometricæ, cujus tres priores sint 3: 8:: 12, multiplicandus erit terminus 8 per 12, & productum 96 dividendum per 3. Quotus 32 erit quartus proportionalis, ut habeatur 3: 8:: 12: 32; & quidem ratio prior est $\frac{3}{8}$, posterior autem $\frac{12}{32}$, quæ etiam, utroque termino diviso per 4 (n. 29.), reducitur ad $\frac{3}{8}$.

Eadem ratiocinatione adhibita facile liquet terminum quemvis posse in universon deprehendi, ubi tres dati fuerint. *Si terminus inveniendus fuerit extremorum aliquis, productum mediorum per extremum datum; si autem mediorum alteruter, productum extremorum per medium datum dividetur.*

180 Hæc vero proprietas, quæ in factorum ex mediis & extremis æqualitate consistit, convenire nequit, nisi quatuor quantitibus in proportione geometrica constitutis. Si enim quantitates in proportione non fuerint, utroque consequente per rationem duarum priorum multiplicato, primus
tan-

tantum antecedens suo consequenti æqualis fiet; adeoque productum extremorum mediorum producto æquale esse non poterit.

Igitur, si quatuor fuerint quantitates, quarum mediæ atque extreme idem factum producant, proportionem ipsæ geometricam conficiant.

181 Unde consequitur, proportionem servari inter quatuor quantitates, si mediæ ad extremas, extreme ad medias transferantur.

182 Idem continget, si extreme inter se, aut mediæ inter se invicem sedem permutent. Utroque enim modo factum sub mediis factum sub extremis æquale retinebitur.

Sic ex proportione 3 : 8 :: 12 : 32 per solam terminorum permutationem proportionem sequentes oriuntur.

$$3 : 8 :: 12 : 32$$

$$3 : 12 :: 8 : 32$$

$$8 : 3 :: 32 : 12$$

$$8 : 32 :: 3 : 12$$

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$12 : 32 :: 3 : 8$$

$$32 : 12 :: 8 : 3$$

$$32 : 8 :: 12 : 3$$

Quarum secunda a prima derivari alternando dicitur, tertia invertendo, quarta invertendo & alternando, quinta alternando & invertendo, sexta transponendo, septima transponendo & invertendo, octava denique transponendo invertendo & alternando.

183 Quoniam tertius proportionis terminus in locum secundi transferri potest, & vicissim, proportionem servari consequitur, quoties uterque antecedens, vel uterque consequens, per eandem quantitatem multiplicatur, vel dividitur.

Facta enim terminorum permutatione, anteceden-

cedentes qui erant priorem, consequentes vero posteriorem rationem conficiunt. Quare utrumque antecedentem vel utrumque consequentem per eandem quantitatem multiplicare vel dividere nihil est aliud, quam utrumque rationis terminum per eandem quantitatem multiplicare vel dividere, quod nullam rationi mutationem affert (n. 170.).

Sic ex. gr. si proportio detur $3 : 7 :: 12 : 28$, utroque antecedente diviso per 3 inferre possumus $1 : 7 :: 4 : 28$; quia prior proportio *alternando* fiet $3 : 12 :: 7 : 28$ (n. 182.), quæ, duobus prioris rationis terminis per 3 divisus abit in $1 : 4 :: 7 : 28$; & rursus *alternando* $1 : 7 :: 4 : 28$ (n. 182.).

184 *Si in proportione quacunque geometrica summa antecedentis & consequentis, vel eorum differentia, ad antecedentem vel consequentem eodem modo in utraque ratione comparetur, proportio semper habebitur.*

Nam, si summa vel differentia ad consequentem referatur, facile intelligitur antecedentem suo consequente auctum vel multatum illum semel in super, aut semel minus quam antea continere; cum autem isthæc comparatio eodem modo fiat in posteriori ratione, quæ juxta proportionis naturam priori æqualis est, necessario consequitur, rationes quæ inde oriuntur æquales similiter fore. Si autem ad antecedentem referantur, eidem ratiocinationi locus erit, consequentibus in antecedentium sedem mutatis, & vicissim (n. 181.).

Si ex. gr. proportio detur $12 : 3 :: 32 : 8$, quatuor inde alias quæ sequuntur proportionem colligere possumus, in quibus signum + plus, signum vero - minus significat:

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$12 + 3 : 3 :: 32 + 8 : 8$$

$$12 + 3 : 12 :: 32 + 8 : 32$$

$$12 - 3 : 3 :: 32 - 8 : 8$$

$$12 - 3 : 12 :: 32 - 8 : 32$$

Quarum prior a proportione data per *compositionem rationis*, sive *componendo* proficisci dicitur, altera per *compositionem rationis inversam*, tertia *dividendo*, sive per *divisionem rationis*, & quarta per *divisionem inversam*, seu per *conversionem rationis*.

185 Unde colligitur, *summam vel differentiam antecedentium in omni proportione geometrica esse ad summam vel differentiam consequentium, ut antecedens quisque terminus ad suum consequentem.*

Sic ex proportione $12 : 3 :: 32 : 8$, duæ quæ sequuntur proportionibus proficiscuntur :

$$12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3$$

$$32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3$$

Data enim proportio *alternando* convertetur in $12 : 32 :: 3 : 8$ (n. 182.); hæc autem per *compositionem ac divisionem inversam rationis* duas alias reddet $12 + 32 : 12 :: 3 + 8 : 3$, & $32 - 12 : 12 :: 8 - 3 : 3$ (n. 184.); quæ *alternando* convertentur in $12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3$ & $32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3$ (182.).

186 Igitur, si plures fuerint rationes æquales, *summa omnium antecedentium erit ad summam omnium consequentium, ut antecedens quisque terminus ad suum consequentem.* Exempli ergo, si rationes æquales fuerint $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, erit etiam $4 + 7 + 2 : 12 + 21 + 6 :: 4 : 12 :: 7 : 21$ &c.

Sumptis enim duabus prioribus $4 : 12 :: 7 : 21$ habebitur $4 + 7 : 12 + 21 :: 4 : 12$ (n. 185.), seu (ob

4: 12 :: 2: 6) 4 ÷ 7: 12 ÷ 21 :: 2: 6; hæc vero rursus convertetur in 4 ÷ 7 + 2: 12 + 21 ÷ 6 :: 2: 6 (n. 185.).

187 *Ratio composita* dicitur, quæ ex duabus pluribusve rationibus fit, earum antecedentibus inter se, & consequentibus inter se invicem multiplicatis. Si ex. gr. rationes proponantur 12: 4 & 25: 5, productum antecedentium erit 300, & consequentium 20; adeoque 300: 20 erit ratio composita ex rationibus propositis 12: 4 & 25: 5.

188 Cum ratio quævis æstimeretur per quotum ex divisione antecedentis termini per consequentem, adeoque per fractionem cujus numerator antecedens, denominator vero consequens fit (n. 168), manifestum est, rationem compositam fieri per multiplicationem fractionum, quæ rationum componentium valorem exponunt (n. 106.). Sic ratio 12: 4 exponitur per $\frac{12}{4}$ five per 3, & ratio 25: 5 per $\frac{25}{5}$ five per 5; ratio autem ex iis composita 300: 20 exponitur per $\frac{300}{20}$, five per 15, factum videlicet exponentium rationum 12: 4 & 25: 5.

189 Quæ ex duabus rationibus æqualibus componitur, *ratio alterutrius duplicata* nominatur; quæ ex tribus, *triplicata*; quæ ex quatuor, *quaduplicata* &c; quælibet autem rationum componentium erit in primo casu rationis compositæ *subduplicata*, in altero *subtriplicata* &c. Positis ex. gr. rationibus æqualibus 2: 3 & 4: 6, quæ ex iis componitur 8: 18 ratio erit duplicata ipsius 2: 3, vel 4: 6; harum vero alterutra erit ratio subduplicata ipsius 8: 18.

190 Si due proportionales ordinatim multiplicentur, id est, si primus unius terminus per primum alterius, secundus per secundum &c multiplicentur, quatuor inde orta producta proportionem constituent.

Quam

Quum enim proportionēs ita multiplicantur; nihil aliud fit, quàm duas rationes æquales per duas alias similiter æquales multiplicare (n. 172.); duæ igitur quæ emergunt rationes compositæ æquales sunt; igitur quatuor producta inde orta proportionem constituunt (n. 172.).

191 Unde consequitur, *quadrata, cubos, & generatim potentias similes quatuor quantitatum proportionalium, proportionales itidem esse*; siquidem, ut potentiæ hujusmodi formentur, nihil aliud requiritur quàm ut proportio data per se ipsam semel, iterum &c multiplicetur.

192 Et Similiter, *radices quadratæ, cubicæ, & generatim radices similes quatuor quantitatum proportionalium, proportionales sunt*. Radicibus enim extractis, nihil aliud agitur, quàm a rationibus æqualibus ejusdem ordinis radices extrahere (n. 142. 157. 168.); quæ igitur rationes emergunt æquales habentur; ac proinde radices proportionales erunt (n. 172.).

Propositionum superiorum usus.

193 **Q**uas hæcenus Propositiones, seu, ut vocant, *proportionum Regulas* demonstravimus, frequentissimi per universam Mathesim usus sunt. Sed ea tantum in præsentia attingemus, quæ Arithmeticam spectant, & imprimis propositionis ejus paulo superius traditæ (n. 179.) usum indicabimus, quæ cæteris ferè omnibus fundamento est.

De regula trium directæ & simplicis.

194 **R**egula trium, quæ ob insignem usum *aurea* quoque nominatur, plures in species dividitur, quibus omnibus id propositum est,

est, ut ex tribus proportionis terminis datis reliquus inveniatur.

Quæ vero *regula trium directa & simplex* appellatur, *simplex* dicitur, quia enuntiatum quæstionum, quibus accommodatur, plures haud involvit quàm quatuor quantitates, quarum tres cognitæ sunt, quarta invenienda proponitur.

Directa etiam dicitur, quia ex quatuor quæ ibi considerantur quantitatibus duæ sunt præcipuæ inter se homogeneæ, a quibus duæ aliæ ita determinantur, ut quemadmodum illarum prior alteram continet, aut in illa continetur, ita quæ a priore dependet eam contineat quæ ab altera dependet, aut in illa continetur. Id autem fiet, quoties quantitas principalis & quæ ab illa pendet antecedentium simul, aut consequentium sedem occupant, quod in *regula trium inversa* fieri nequit, ut postea demonstrabitur.

Ad quartum verò proportionis terminum inveniendum, adeoque ad regulam trium directam ac simplicem peragendam, cum methodus sit jam satis exposita (n. 179.), id unum superest, ut regulæ usum exemplis illustremus.

Exemplum I.

SI 40 operarii dato tempore 268 operis hexapedas conficiunt, 60 operarii eodem tempore quot hexapedas conficient?

Per ipsammet quæstionis enuntiationem liquet, duplicem operariorum numerum 40 & 60 terminos principales exhibere, a quorum priore pendet opus 268 hexapedarum, & a posteriore numerus hexapedarum quæsitus definietur. Liquet præterea hunc numerum auctum iri in ratione operariorum, ut duplus, triplus, quadruplus &c eorum numerus, duplum, triplum, quadruplum &c opus eodem

dem tempore conficiat; adeoque numerum hexapedarum quæsitum esse debere ad numerum hexapedarum datum, ut numerus operariorum 60 a quibus illæ sunt conficiendæ ad numerum operariorum 40 a quibus hæ confectæ ponuntur. Proinde termini heterogenei invicem dependentes aut antecedentium simul, aut consequentium sedem occupare debent, quod proportionem directam ostendit. Quærendus igitur erit quartus proportionalis ad tres terminos sequentes - - - - -

$$40 : 60 :: 268 :$$

Sive, prioris rationis terminis divisus per 20 (n. 170.), ad tres sequentes - - - - -

$$2 : 3 :: 268^T :$$

Quare (n. 179.) numerum 268^T multiplicabimus per 3, productumque 804^T dividemus per 2; & quotus 402^T erit quartus terminus quæsitus, opus scilicet a 60 operariis conficiendum, si eodem tempore eademque diligentia elaborent, atque illi 40, qui 268^T perfecerunt.

Exemplum II.

N Avis vento uniformi 275 leucarum iter 3 diebus confecit. Quæritur, quot diebus 2000 leucarum cursum conficiet, si ventus cæteraque eadem maneant?

Perpicuum est, tempus eò maius requiri quò plures fuerint leucæ percurrendæ, adeoque dierum numerum quæsitum toties debere 3 dies complecti, quoties 2000 leucæ continent 275 leucas. Quærendus itaque est quartus proportionalis ad tres terminos sequentes - - - - -

$$275 :: 2000 :: 3^d :$$

Quare numerum 2000 per 3^d multiplicabimus, & productum fiet 6000^d ; quo diviso per 275, quotus erit $21^d \frac{2}{11}$, tempus scilicet quod 2000 leucis conficiendis juxta quæstionis conditiones requiritur.

Exemplum III.

S Oluto pretio $168^{lb} 9s 4^d$ pro $52^T 4^P 5^P$ operis, quæritur pretium pro $77^T 1^P 8^P$ solvendum.

Ex ipsa quæstione palam est, pretium ipsis $77^T 1^P 8^P$ respondens complecti toties debere pretium ipsis $52^T 4^P 5^P$ constitutum, quoties numerus $77^T 1^P 8^P$ numerum $52^T 4^P 5^P$ continet. Igitur quærendus erit quartus proportionalis ad tres terminos sequentes -----

$$52^T 4^P 5^P : 77^T 1^P 8^P :: 168^{lb} 9s 4^d :$$

Quod quidem fiet, si numerum $168^{lb} 9s 4^d$ per $77^T 1^P 8^P$ multiplicemus, & productum per $52^T 4^P 5^P$ dividamus, juxta regulas pro hujusmodi numerorum calculo jam traditas (n. 122. 128.).

Sed multò commodius erit prioris rationis terminos ad infimæ speciei unitates, *pollices* videlicet, revocare; & quæstio eò redibit, ut quartus terminus proportionalis inveniatur ad tres sequentes -----

$$3797 : 5564 :: 168^{lb} 9s 4^d :$$

Tunc multiplicato numero $168^{lb} 9s 4^d$ per 5564 productum habebitur $937348^{lb} 10s 8^d$; quo diviso per 3797, quotus $246^{lb} 17s 3^d \frac{2789}{3797}$ pretiû erit solvendum pro $77^T 1^P 8^P$,

Si fractiones præterea terminis iisdem adhæreant, postquam ad infimæ speciei unitates revocati fuerint, ut in tradito exemplo, eorum ratio simplici formâ donabitur, quemadmodum paulo superius ostensum est (n. 171.).

De regula trium inversa & simplici.

195 **R**egula trium simplex & inversa, sive reciproca est, quum terminus quæsitus ad homogeneum datum eam rationem habere debet, quam hujus terminus relativus habet ad relativum illius; & id quidem inversum ordinem præ se fert, quia in regula directa terminus quæsitus est ad homogeneum datum ut illius terminus relativus ad relativum hujus. Unde in regula inversa, terminis convenienter dispositis, altera quantitatum principalium cum sua relativa extremorum, altera cum sua mediorum sedem occupare debent.

Cæterum, terminis rite dispositis, juxta quæstionis naturam, operatio nihil differt a superiori, cum sit inveniendus quartus terminus proportionalis ad tres datos.

Exemplum I.

SI 30 operarii certum opus 25 diebus faciunt, quot operarii adhibendi sunt, ut idem opus 10 diebus absolvatur?

Perspecta quæstionis natura, illico intelligimus eò plures operarios requiri quò dierum numerus minor fuerit. Quare numerus operariorum quæsitus continere debet homogeneum datum (30 operarios), quemadmodum hujus terminus relativus (25 dies) continet relativum illius (10 dies). Quærendus adeo erit quartus terminus proportionalis ad tres sequentes

$$10^d : 25^d :: 30^{\text{oper.}} :$$

Es

Et secundo per tertium multiplicato, producto-
que per primum diviso, quotus erit 75, nume-
rus operariorum quæsitus.

Exemplum II.

SI classiaris cibaria fuerint ad 15 dies, ipsis
vero 20 dierum iter supersit, quæritur qua
ratione sit uniuscujusque diarium minuendum?

Sumpta unitate pro consueto cujusque diario,
perspicuum est, diarium quæsitum eo futurum uni-
tate minus quò 20 dierum numerus ipsis 15
diebus maior est; adeoque inveniendum esse quar-
tum terminum proportionalem ad tres sequentes ---

$$20^d : 15^d :: 1 :$$

Qui reperietur $\frac{15}{20}$, sive $\frac{3}{4}$; ac proinde tres quis-
que quadrantes ejus diarii accipiet, quod ferre
deberet, si iter diebus 15 absolvendum foret.

De Regula trium composita.

196 **I**n Regula trium composita quantitatis in-
veniendæ ratio ad homogeneam datam
per rationem simplicem duarum aliarum quantita-
tum, ut in regulis superioribus non determinatur,
sed per plures rationes simplices, quæ, facto quæ-
stionis examine, sunt componendæ (n. 187.). Iis
verò semel compositis, quæstio ad regulam trium
simplicem rédit, quemadmodum ea quæ subji-
mus exempla satis ostendent.

Exemplum. I.

SI 30 operarii 132 operis *hexapedas* 18 diebus
conficiunt, 54 operarii quotnam *hexapedas*
28 diebus conficient? M Perf-

Perspicuum est, opus quæsitum penderè non modo ab operariorum, sed etiam a dierum numero. Ut utriusque ratio habeatur, considerare oportet, 30 operarios 18 diebus idem opus conficere atque decies & octies 30, sive 540 operarios die una; & similiter, 54 operarios 28 diebus tantum operis, quantum 1512 operarios die una præstare. Quæstio proinde huc redit: Si 540 operarii 132 operis hexapedas conficiunt, 1512 operarii quotnam hexapedas conficient? Adeoque inveniendus erit quartus terminus proportionalis ad tres sequentes - - - - -

$$540 : 1512 :: 132^T :$$

Et multiplicato secundo per tertium, productoque diviso per primum, numerus quælitus prodibit $369^T 3^P 7^P 2^I \frac{2}{5}$.

Exemplum II.

Viator quidam, septem quotidie horis itineri datis, intra 30 dies 230 leucas confecit. Quæritur, quotnam diebus 600 leucas conficeret, si 10 quotidie horas eadem velocitate incederet?

Si horarum numerus in utroque casu idem esset, apertum est, tempus eò requiri longius, quò distantia maior percurrenda foret; sed cum plures sint in altero casu horæ itineri dandæ minor inde dierum numerus requiretur; ac proinde quæstio a regula trium directâ simul atque inversa pendet. Ad regulam verò simplicem revocabitur, si attendamus nihil aliud esse 30 dies incedere, 7 quotidie horis itineri datis, quàm 210 horarum iter habere. Quæstio igitur ad hanc redit: Confecit 230 leucarum itinere intra 210 horas, quotnam horæ requiruntur;

fur; ut 600 leucæ conficiantur? Inventus autem horarum numerus huic quæstioni conveniens dividendus erit per 10, (quia nimirum viator quo de agitur 10 singulis diebus horas viæ impendit), ut quæsitus dierum numerus habeatur. Quærendus adeo est quartus terminus proportionalis ad tres sequentes - - - - -

$$230^l : 600^l :: 210^h :$$

quem inveniemus esse $547^h \frac{19}{23}$, eoque diviso per 10, numerus dierum quæsitus prodibit $54 \frac{18}{23}$.

De Regula Societatis.

197 **R**egula hæc nomen sortita est a Societatibus mercatoriis, in quibus usum potissimum habet, quum lucrum vel damnum inter Socios distribuendum est pro cujusque sorte. Ejus autem in universum est numerum datum in partes dividere, quæ datam inter se rationem habeant. Quæ ad id peragendum methodus traditur eo principio innititur, quod paulo superius ostendimus. (n. 186.), quemadmodum ex subiecto exemplo fiet perspicuum.

Exemplum I.

Sit numerus 120 in tres partes dividendus, quarum rationes sint eadem ac numerorum datorum 4, 3, 2.

Quæstionis ipsius enuntiatum hæc duas proportioniones suggerit: 4 ad 3 ut 1^a pars quæsitæ ad 2^{am}, & 4 ad 2 ut 1^a pars ad 3^{am}; sive (n. 182.) duas istas: 4 ad 1^{am} partem ut 3 ad 2^{am}, & 4 ad 1^{am}; ut 2 ad 3^{am}; unde tres habentur rationes

M 2

æquæ-

æquales, scilicet: 4 ad 1^{am} partem quæsitam, ut 3 ad 2^{am}, ut 2 ad 3^{am}.

Ostensum est autem (n. 186.) summam antecedentium plurium rationum æqualium esse ad summam consequentium, ut antecedens quisque ad suam consequentem; igitur & in exemplo proposito summa partium datarum 9 erit ad summam quæsitaram 120, ut datarum quælibet ad quæsitam quæ illi respondet.

Regula igitur eo redibit, ut regula trium toties instituat, quot sunt partes inveniendæ, adhibita ubique partium datarum summa pro termino primo, numerus distribuendus pro secundo, pro tertio autem ea partium datarum, quæ parti inveniendæ respondet. Sic in quæstione proposta tres quæ sequuntur proportiones adimplendæ sunt. -----

$$9 : 120 :: 4 :$$

$$9 : 120 :: 3 :$$

$$9 : 120 :: 2 :$$

Et prioris quidem quartus terminus invenietur $53 \frac{1}{3}$, alterius 40, tertiæ $26 \frac{2}{3}$ (n. 179.), qui simul efficiunt 120, & datam numerorum 4,3,2, inter se rationem obtinent.

¶ Hujus Regulæ praxis compendiosior erit, si numerus distribuendus per summam datarum partium dividatur, & quotus deinde per singulas partes datas multiplicetur. Siquidem in regula quaque trium instituenda idem est secundum per tertium multiplicare productumque dividere per primum, ac secundum dividere per primum quotumque multiplicare per tertium. Cum autem in Regula Societatis, primus & secundus terminus iidem maneant, unica divisio regulis trium omnibus peragendis sufficiet. Sic

Sic in exemplo proposito, si numerus distribuendus 120 per summam datarum partium 9 dividatur, quotus habebitur $13 \frac{1}{3}$; quo singulatim multiplicato per partes datas 4, 3, 2, producta $53 \frac{1}{3}$, 40, $26 \frac{2}{3}$ partes quæsitæ ostendent. ¶

Cæterum quo demum cumque pacto operatio instituat, pars quæsitæ postrema ut directè inveniatur necesse non est; sed inventarum summam a numero proposito subducere sufficiet, & residuum partem reliquam ostendet.

Exemplum II.

Sit navis hostilis præda 800000 *librarum* pretio habita tres inter Socios distribuenda, quorum primus exposuit 120000, alter 60000, & tertius 20000 *libras*. Quæritur uniuscujusque pars.

Agitur itaque de numero 800000^{lb} in tres partes dividendo, quæ inter se datam numerorum 120000, 60000, 20000, sive (n. 170.) 12, 6, 2, rationem habeant, quia lucrum cujusque sorti proportionale esse debet. Facta igitur summa 20 partium datarum 12, 6, 2, quartus erit terminus inveniendus in subjectis proportionibus - - - - -

$$\begin{array}{l} 20 : 800000^{lb} :: 12 : \\ 20 : 800000^{lb} :: 6 : \\ 20 : 800000^{lb} :: 2 : \end{array}$$

Et primi Socii pars invenietur 480000^{lb}, alterius 240000^{lb}, & tertii 80000^{lb}.

Exemplum III.

TRes mercatores, inita societate, lucrati sunt 12050 *libras*. Primus contulit 3000^{lb} per menses 6, alter 4000^{lb} per menses 5, tertius 3000^{lb} per

per menses 9; quantum singulis debetur?

Quæstionis enuntiatum ad Regulam Societatis compositam pertinet, quæ nullo negotio ad simplicem revocatur. Primi enim fors 3000^{lb} per 6 menses idem producit, atque sexies 3000, sive 18000^{lb} uno mense; similiter alterius fors 4000^{lb} per menses 5 idem præstat, atque quinquies 4000, seu 20000^{lb} uno mense; & tertii fors 8000^{lb} per menses 9 idem valet, ac novies 8000, seu 72000^{lb} uno mense. Quæstio igitur eò redit, ut lucrum 12050^{lb} tribus sociis distribuatur, quorum primus symbolam contulit 18000^{lb}, alter 20000^{lb}, tertius 72000^{lb}; & operatione instituta, ut in exemplo superiori, primo debebitur pars 1971^{lb} 16^s 4^d $\frac{4}{11}$, alteri 2190^{lb} 18^s 2^d $\frac{2}{11}$, & tertio 7887^{lb} 5^s 5^d $\frac{5}{11}$.

198 Ad eandem Societatis Regulam quæstiones revocantur quamplurimæ, præparatione adhibita, quas, cum tironibus negotium facessere possint, duobus exemplis illustrare supervacuum non erit.

Si numerus detur 650 in tres partes ita distribuendus, ut prima ad secundam sit ut 5 ad 4, ad tertiam vero ut 7 ad 3, quæstioni ita enuntiatæ per Regulam Societatis satis fieri non poterit, quia nimirum rationes datæ 5 : 4 & 7 : 3 priorem terminum eundem non habent. Sed possunt tamen, valore immutato (n. 170.), ad id facile adduci, si uterque cujusque terminus per priorem alterius multiplicetur. Sic rationis 5 : 4 terminis per 7, & rationis 7 : 3 per 5 multiplicatis, rationes respectivæ æquales emergent 35 : 28, & 35 : 15; ac proinde quæstio eò redibit, ut numerus 650 in tres partes distribuatur proportionales numeris 35, 28, 15, quod per regulam datam obtinebitur.

Si numerus fuisset in quatuor partes dividendus, qua-

quarum prima esset ad secundam ut 5 ad 4, ad tertiam ut 9 ad 5, & ad quartam ut 7 ad 3, datæ rationes priori termino communi donarentur, utroque uniuscujusque termino multiplicato per factum ex prioribus reliquarum terminis. Sic rationes datæ abirent in 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135, & quæstio eo reduceretur, ut numerus propositus quatuor in partes distribueretur, quæ numeris 315, 252, 175, & 135 proportionales essent.

De Regula Falsi.

199 **R**egula falsi, quæ etiam Regula Positionis appellatur, tunc adhibetur, quum numerum quemvis loco quæsitum in quæstionem inducimus, & quod inde fit cum eo quod fieri debuisset conferimus, ut inde verum, qui quæstioni satisfaciat, numerum eliciamus. Simplex autem dicitur, quum una sufficit hypothesis; duplex, quum duæ sunt necessariæ.

Simplex ad regulam trium revocatur, in qua prior terminus erit numerus qui ab hypothesis juxta quæstionem ductum inventus est, alter numerus datus qui inveniendus erat, & tertius ipsa hypothesis. Quapropter in iis tantum quæstionibus adhibenda erit, in quibus numerus quæsitus est ad propositum ab illo derivatum, ut quivis alius ad eum quem similiter producit; quod profectò ex ipsius quæstionis natura dignoscendum est: sin minus, tentari regula poterit, & periculo facto innotescet, an inventus re ipsa numerus satisfaciat.

Exemplum.

Quæritur numerus, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{7}$ simul efficiant datum numerum 808.

Ut fractionum molestiam vitemus, hypothesis afflu

assumatur, cujus partes 3^a , 5^a , & 7^a integræ habeantur, quod facile fiet, numeris 3, 5, 7 invicem multiplicatis, productoque 105 in hypothesim adhibito. Hujus verò partes juxta quæstionis enuntiatum sunt 35, 21, & 45, quibus additis efficitur numerus 101, cum emergere debuisset 808. Quærendus igitur erit juxta Regulam quartus proportionalis ad tres sequentes.

$$101 : 808 :: 105 :$$

Prodibit autem numerus 840, qui re ipsa quæstionem solvit.

Regula duplicis positionis latius patet. Ejus ope quæstiones universæ, quæ per simplicem hypothesim solvuntur, similiter enodantur, & aliæ prætereà quamplurimæ, quæ illius indaginem fugiunt. Est autem hujusmodi :

Ponatur quivis numerus loco quæsiti, & quod inde fit juxta quæstionis naturam eliciatur. Rursum quivis alius in hypothesim assumatur, & similiter quod inde gignitur adnotetur. Tum fiat: *Ut differentia inter numeros qui ab utraque hypothesi prodire, ad differentiam inter id quod exurgere deberet & quod per hypothesim primam habitum est, ita differentia hypothesum ad quartum.* Et numerus inventus addendus vel subtrahendus erit primæ hypothesi, prout ipsa minus vel plus quam par erat exhibuit, si tamen aucta hypothesi quod inde fit etiam augeatur; secus, inventus erit addendus vel subtrahendus, prout prima hypothesi plus vel minus justo produxit. Nihil vero interest, quænam hypothesi prima dicatur, proinde duplici ratione numerus quæsitus haberi potest.

Exemplum.

Tres lucrati sunt 6954^{lb}. Lucrum secundi 54^{lb} superat lucrum primi, lucrum vero tertii 78^{lb} excedit lucra primi & secundi simul. Quæritur lucrum singulorum.

Ponatur facilioris calculi gratia lucrum primi esse 1^{lb}. Erit ergo lucrum secundi 1^{lb} + 54^{lb}, seu 55^{lb}, & lucrum tertii 1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}, id est, 134^{lb}, quibus additis efficitur summa 190^{lb}.

Rursus ponatur lucrum primi esse 2^{lb}, & erit lucrum secundi 56^{lb}, tertii vero 136^{lb}, quorum summa emergit 194^{lb}.

Ex duplici itaque hypothesi 1^{lb}, & 2^{lb}, summae proficiscuntur 190^{lb}, & 194^{lb}, cum haberi debuisset 6954^{lb}. Differentia inter summas ab hypothesibus exhibitas est 4^{lb}, differentia inter summam a prima hypothesi prodeuntem & veram summam 6954^{lb} est 6764^{lb}, differentia hypothesium 1^{lb}. Quærendus adeo erit quartus proportionalis ad tres qui sequuntur - - - - -

$$4 : 6764 :: 1^{\text{lb}} :$$

Inventus autem 1691^{lb} addendus erit primæ hypothesi 1^{lb}, & lucrum primi habebitur 1692^{lb}, adeoque lucrum secundi 1746^{lb}, & tertii 3516^{lb}, quæ simul efficiunt 6954^{lb}, & juxta quæstionis legem se invicem superant.

Manifestum verò est regulam adhiberi non posse nisi in quæstionibus, ubi differentia hypothesium fuerit differentia numerorum juxta conditiones datas emergentium perpetuo proportionalis, quod periculo facto tandem dignoscitur. Quum tamen hypotheses sumuntur, quæ à vero parum abludant, in universis quæstionibus ea proportio quam proximè habetur; quo fit ut hujus

Regulæ usus in æquationibus altioris gradus, plurimisque aliis per universam Mathesim quæstionibus solvendis, insignis evadat.

Si duæ fuissent quantitates inveniendæ, tribus opus esset positionibus. Primum enim pro quæsitis ponerentur quantitates quælibet, deinde manente earum prima alteram data quacunque quantitate augere vel minuere, & tandem manente altera primam vicissim mutare necesse esset. Eodem modo ostenditur, quatuor opus esse positionibus, si tres fuerint quantitates, & ita porrò. Sed implicatissimum esset, Regulas pro iis Arithmeticas flatuere, cum aliàs formulis Algebraicis ad id institutis calculus faciliori negotio dirigi queat.

De Regula Alligationis.

200 **H**Æc Regula versatur circa res diversi pretii inter se miscendas. Est autem duplex: Directa, quum datis quantitatibus miscendis, earumque pretio, mixti inde conflati pretium quæritur; Inversa, quum mixti conflandi pretium, miscendarumque rerum numerus datur, & pars uniuscujusque adhibenda inquiritur.

Prior solvitur ad hunc modum: *Singule quantitates in valorem suum ducantur, producta omnia addantur, summa per numerum quantitatum dividatur, & quotus erit pretium quæsitum.*

Exemplum.

Sint conflandæ 5 selibræ auri purissimi 24 graduum, 8 aliæ 21 graduum, & 6 tandem 17 graduum. Quæritur gradus mixti.

Multiplicentur 5 selibræ per suos gradus 24, fietque productum 120, deinde 8 per 21, & 6 per 17, fientque producta 168, 102. Tribus his-

se productis additis, summa habebitur 390, qua
divisa per 19 totius selibras, quotus erit $20 \frac{10}{19}$,
gradus scilicet auri ex partibus datis conflati.

In Regula inversa, ubi duæ tantum res alligandæ proponuntur ad pretium quodvis inter earum pretia constitutum, methodus erit hujusmodi. Fiat: *Ut differentia inter pretia data, ad differentiam inter pretium medium & datorum minus, ita quantitas totius alligandi, ad quantitatem rei maioris pretii.* Et rursus: *Ut differentia inter pretia data, ad differentiam inter medium & datorum maius, ita totum ad partem minoris pretii addibendam.*

Exemplum.

A Urifex opus conflare sibi proponit ad gradum Legis $20 \frac{1}{2}$, quod 8 selibras pendat, auri vero duo genera adhibenda habet, quorum alterum 22 gr. alterum 17 gr. est. Quæritur pars utriusque sumenda.

Differentia sumatur inter gradus datos 22, 17, nimirum 5, inter gradum propositum $20 \frac{1}{2}$ & utrumque datum, nimirum $3 \frac{1}{2}$ & $1 \frac{1}{2}$. Deinde duplex instituatur proportio - - - - -

$$5 : 3 \frac{1}{2} :: 8 : \quad \text{five (n. 171.)} \quad 10 : 7 :: 8 :$$

$$5 : 1 \frac{1}{2} :: 8 : \quad 10 : 3 :: 8 :$$

Quarum prior dabit $5 \frac{1}{5}$, hoc est, 5 selibras, 4 octav. $57 \frac{1}{5}$ gran. partem scilicet auri purioris; posterior autem $2 \frac{2}{5}$, five 2 selibras, 3 octav. $14 \frac{2}{5}$ gran. partem nimirum auri posterioris adhibendam.

Ubi autem plures quam duæ pretii diversi res
alli-

alligandæ fuerint, primum omnes, quarum pretium proposito maius, per Regulam directam inter se alligentur, sumptis uniuscujusque partibus prout libuerit, mixtique pretium inquiratur. Idem fiat circa omnes, quarum pretium fuerit proposito minus. Hoc pacto duæ tandem res alligandæ supersunt ad pretium datum, ut in exemplo postremo, inventisque partibus utriusque adhibendis, earum etiam partes innotescunt, ex quibus illas coalescere ad libitum posuimus.

Exemplum.

QUatuor sunt vini genera. Prioris sextarius 120 *regalium* pretio venditur, alterius 90, tertii 60, & quarti 50. Hæc autem ita sunt commiscenda, ut sextarius 70 *regalibus* vendi possit.

Primum misceantur duo priora, sumptis utriusque partibus ut libuerit, duæ ex. gr. mensuræ ejus cujus pretium est 120, & 3 ejus cujus pretium est 90, & mixti pretium erit 102. Duo similiter posteriora misceantur, quibusvis utriusque partibus assumptis, duæ ex. gr. mensuræ ejus quod valet 60 & 3 ejus quod valet 50, & mixti pretium habebitur 54. His peractis res eo redit, ut duo vini genera, quorum alterum valet 102, alterum 54, ad pretium datum 70 revocentur, & instituta operatione ut in exemplo superiori, reperiemus prioris adhibendam esse partem quæ sit ut $\frac{1}{3}$, posterioris autem ut $\frac{2}{3}$, sive prioris ut 1 & posterioris ut 2. At utrumque constat ex duobus aliis quorum partes posuimus ut 2 & 3; quatuor igitur vina ita erunt commiscenda, ut partes sint, ut 2, 3, 4, 6; id est, pro 2 primi sextariis, 3 alterius, 4 tertii, e 6 quarti admiscendi sunt. Eadem quaestio aliter atque aliter solveretur, prout duo quæ
ad

ad libitum composita partialia alligantur, juxta
diversam partium rationem assumerentur.

*Regulæ aliæ ad Proportionem spe-
ctantes.*

201 **P**urimæ aliæ apud Arithmeticos Regulæ pas-
sim occurrunt, quæ ad Regulam trium revo-
cantur, & perspecta quæstionum natura nullum iis,
qui superiora probè intellexerint negotium afferre
possunt.

202 Hujusmodi est Regula circa pecuniam fe-
nori datam. Pacto enim fenore annuo in singula cen-
tum præstando, quid pro quaque summa præstandum
sit pro ratione fortis & temporis facile colligitur.

Quæritur ex. gr. fenus summæ 449200 *rega-
lium* 7 annis & 3 mensibus debitum, posito fe-
nore annuo 5 in singula 100: Cum 100 lucrentur
5 singulis annis, tempore dato $7\frac{1}{4}$ lucrari debent
 $36\frac{1}{4}$, adeoque erit: Ut 100 ad $36\frac{1}{4}$, ita fors da-
ta 449200 ad fenus illi debitum, quod invenietur
162835.

Si detur numerus 612035 summa fortis & fe-
noris intra 7 annos & 3 menses in eadem ratione
debiti, & quæraturs fors; cum 100 eodem tempo-
re lucrentur $36\frac{1}{4}$, erit: Ut $136\frac{1}{4}$ ad 100, ita
summa data ad fortem quæsitam, quam invenie-
mus 449200.

Si quæraturs fors, quæ intra 7 annos & 3 men-
ses fenus 162835 producat, posita ratione fortis ad
fenus annum 100: 5; cum 100 intra datum tem-
pus producant $36\frac{1}{4}$, habebitur: Ut $36\frac{1}{4}$ ad 100
ita fenus datum 162835 ad fortem quæsitam 449200.

Si quæraturs tempus, intra quod fors 449200 fe-
nus

nus 162835 in ratione annua 100 : 5 lucrari debet, fiet: Ut 449200 ad 162835, ita 100 ad quartum, nimirum $36\frac{1}{4}$. Hic autem numerus est fenus sortis 100 intra tempus quæsitum, ac proinde dividendus erit per fenus annum 5 ejusdem sortis, & quotus $7\frac{1}{4}$ tempus ostendet, 7 videlicet annos & 3 menses.

Si tandem quæraturs fenus annum in singula centum, quo pacto fors 449200 intra $7\frac{1}{4}$ annos fenus 162835 reddat, fiet: Ut fors 449200 ad fenus 162835, ita 100 ad quartum, $36\frac{1}{4}$. Hoc autem diviso per tempus $7\frac{1}{4}$, prodibit fenus annum 5 ad sortem 100.

Est & aliud usurarum genus, quod *anatocisium* vocant, quum fenus singulis annis debitum forti accedit. Hoc autem, & plures aliæ circa usuras quæstiones in Algebra facilius expedientur.

203 Simili ratiocinio invenitur quantum de summa aliqua ad tempus datum solvenda deduci debeat, quum ante præstatur quam dies cedat, ut ex his quæ sequuntur exemplis liquet.

Emit quis agrum 4536 *librarum* pretio decem annis elapsis solvendo. Sed statim pecuniam numerare paratus præsentem venditori solutionem offert, facta deductione fenus in ratione $4\frac{1}{2}$ ad 100. Quæritur summa præstanda.

Manifestum vero est, hic nihil aliud quæri quam fors, quæ simul cum fenore in ratione data intra decem annos efficiat 4536^{lb}. Cum igitur 100 singulis annis fenus $4\frac{1}{2}$ præstent, intra decem annos 45 præstent necesse est; adeoque habebitur: Ut 145 ad 100 ita 4536^{lb} ad quartum, scilicet 3128^{lb} 5s 6d $\frac{6}{29}$. Obli-

Obligatur quis mercatori dato chirographo ad 2854 *libras* elapso anno præstandas, 7 vero mensibus elapsis de obligatione solvenda conveniunt, facta deductione in ratione 6 ad 100.

Cum ex pactione 100 intra annum fenus 6 lucrentur, intra septem menses $3\frac{1}{2}$ præstabunt. Igitur quod ab initio solvendum erat ut 100, elapso anno præstari deberet ut 106, & elapsis tantum 7 mensibus ut $103\frac{1}{2}$; adeoque fiet: Ut 106 ad $103\frac{1}{2}$, ita summa data 2854^{lb} ad summam quæsitam, nimirum 2786^{lb} 13^s 9^d $\frac{15}{33}$.

Ad hunc fere modum, regula trium adhibita, aliæ quamplurimæ rei mercatoricæ quæstiones solvuntur, in quibus longiorem operam collocare necessarium non est, cum potissimum exemplis superioribus perspectis nullo negotio expediantur.

De Progressionibus Arithmeticis.

204 **P**rogressio Arithmetica est series terminorum ea lege succedentium, ut quisque præcedentem eadem perpetuo quantitate superet, aut ab eo deficiat. Hæc ex. gr. series

÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . &c.

Progressio est Arithmetica, quia terminorum quisque finistrè vicinum excedit eadem perpetuo quantitate 3. Hæc autem Progressio signo eodem ÷ indicari consuevit, quo Proportio arithmeticè continua (n. 174.), quia re ipsa nihil est aliud, quam ea ipsa Proportio ultra tres terminos promota.

Progressio *crescens*, *ascendens*, vel *divergens* dicitur, quum termini evadunt perpetuo maiores, *decrecens*, *descendens*, vel *convergens*, quum minores. Quoniam vero utraque eisdem proprietatibus gaudet, mutata additione in subtractionem, &

& vicissim, Progressionem ascendentem deinceps considerabimus; quæ enim de ascendente dicta fuerint descendenti nullo negotio accommodari possunt.

205 Ex ipsa igitur Progressionis notione facile liquet, dato termino primo & communi omnium differentia, quæ & Progressionis *ratio* audit, reliquos omnes haberi posse, per additionem perpetuam ejusdem rationis. Terminus enim secundus ex primo simul & ratione; tertius ex secundo & eadem ratione, seu ex primo & rationis duplo; quartus ex tertio itidem ac ratione constat, sive ex primo & rationis triplo, & ita deinceps.

206 Unde, in universum, *terminus quicumque Progressionis Arithmetice constare intelligitur ex primo & ratione toties sumpta quot ante illum sunt termini.*

207 Si igitur prior terminus fuerit cifra, terminus quisque æquabitur facto ex ratione multiplicata per numerum terminorum, quotquot ante illum sunt.

208 Hujusce principii ope terminum quemcunque Progressionis invenire possumus, quin reliquos supputemus, quot illi cunque præire debeant.

Quærat ex. gr. quisnam sit futurus terminus ordine centesimus in hac Progressione $\div 4. 9. 14. 19.$ &c. Quoniam terminus quæsitus est loco centesimus, 99 erunt ante illum termini. Constabit igitur ex primo termino 4 & ratione 5 per 99 multiplicata, adeoque erit 499.

209 Inde etiam intelligitur, quo pacto duo quicumque numeri, interjectis quotcunque aliis, committi debeant, ita ut omnes Progressionem Arithmeticam constituent, seu, qua ratione datus mediorum arithmeticoꝝ numerus inter duos quoscunque numeros inferendus sit. Id autem fiet, si datorum minus a maiore subducatur, & residuum per nume-
rum

rum mediorum unitate auctum dividatur. Quotus enim erit ratio Progressionis, qua inventa termini omnes medii facili negotio dignoscuntur (n. 205.).

Etenim datorum maius tanquam postremum, minus tanquam primum Progressionis terminum habere licet. Postremus autem constat ex primo & ratione toties sumpta, quot ante illum sunt termini (n. 205.). Igitur, si a datorum maiore minus subducatur, residuum erit ratio ducta in numerum terminorum, qui ante postremum sunt. Numerus autem terminorum postremo præeuntium unitate excedit numerum mediorum. Igitur, si residuum per numerum mediorum unitate auctum dividatur, quotus erit ratio Progressionis (n. 74.).

Si ex. gr. inter 4 & 11 octo sint media arithmetica inserenda, 4 ab 11 subducemus, & residuum 7 per 9 (numerum scilicet mediorum unitate auctum) dividemus, & quotus $\frac{7}{9}$ erit Progressionis ratio; adeoque habebitur $\div 4. 4\frac{7}{9}. 5\frac{5}{9}. 9\frac{1}{9}. 7\frac{1}{9}. 7\frac{8}{9}. 8\frac{6}{9}. 9\frac{4}{9}. 10\frac{2}{9}. 11.$

Eodem modo, si inter 0 & 1 novem fuerint media inserenda, subtracto datorum minore a maiori residuum erit 1, quo diviso per $9 + 1$, sive per 10, erit Progressionis ratio $\frac{1}{10}$, sive 0,1; proindeque Progressio erit huiusmodi $\div 0. 0,1. 0,2. 0,3. 0,4. 0,5. 0,6. 0,7. 0,8. 0,9. 1.$

210 Unde apertum est, inter duos numeros; quorum differentia sit quantum libuerit exigua; numerum quemvis mediorum arithmeticozum utcumque magnum inferi posse.

Plura de Progressionibus Arithmeticis in præsentia non superaddimus, de quibus hîc sermonem tantum iniecimus, ut ea intelligantur quæ de Logarithmis paulo inferius tradituri sumus. Reliquas

earum proprietates quæ plurimæ habentur, & plurimis quæstionibus solvendis usum haud infrequenter vindicare consueverunt, commodior aliàs dabitur persequendi locus.

De Progressionibus Geometricis.

211 **P**rogressio Geometrica est series terminorum ea lege sibi perpetuo succedentium, ut proximum quisque æque contineat, aut in illo contineatur. Hæc ex. gr. series.

∴ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : &c.

Progressio Geometrica est, quia terminorum quisque finistre vicinum eadem ratione continet, nimirum bis. Numerus autem exponens quoties terminus quivis proxime præcedentem contineat, ut in exemplo adducto numerus 2, Progressionis *denominator*, sive *ratio* appellatur. Huic Progressioni præfigi solet signum ∴, ut in Proportione Geometrica continua, quia nimirum Progressio nihil est aliud, quam ea ipsa Proportio tres ultra terminos promota.

Progressio Geometrica *crescens*, *ascendens*, ac *divergens* dicitur, quum termini evadunt perpetuo maiores; *decrescens*, *descendens*, & *convergens*, quum minores. De utraque seorsum præcipere opus non est, cum iisdem proprietatibus gaudeant, mutata tantum divisione in multiplicationem, & vicissim, præterquam quod inverso terminorum ordine altera in alteram transit. Ea de causa Progressionem crescentem deinceps tantummodo considerabimus: & quæ circa illam dicta fuerint, de Progressione decrescente intelligenda relinquemus.

212 Perspecta Progressionis notione consequitur, ex termino primo & ratione reliquos omnes prodire. Secundus enim fiet primo in rationem ducto; tertius secundo itidem per rationem multiplicato, seu, quod eodem redit, primo per
qua-

quadratum rationis multiplicato; quartus, tertio similiter in rationem ducto, seu primo per cubum rationis multiplicato; & ita ulterius.

Sic in Progressione superiori terminus secundus 6 fit, primo 3 per rationem 2 multiplicato; tertius 12, secundo 6 per rationem 2, vel primo 3 per quadratum rationis 4 similiter multiplicato; quartus 24, tertio 12 in rationem 2, vel primo 3 in cubum rationis 8 ducto; & ita deinceps.

213 Quare in universum, terminus quicumque in Progressione Geometrica habebitur, si primus multiplicetur per rationem evectam ad potentiam, cujus exponents sit numerus terminorum qui ante illum sunt.

Si prior terminus fuerit 1, quicumque alius erit ipsa ratio ad eam potentiam evecta, quæ numero terminorum præeuntium respondeat, siquidem primus terminus, utpote unitas, productum multiplicando non auget.

214 Hinc terminum quemvis Progressionis Geometricæ data sede extitutum invenire licet, præcedentibus haud supputatis, quod est sæpe commodissimum.

Quærat ex. gr. terminus duodecimus hujus Progressionis $\ddot{::} 3 : 6 : 12 : 24$ &c. Cum ante duodecimum termini sint undecim, terminus quæsitus erit factum ex primo 3 & potentia undecima rationis 2. Hæc autem potentia habetur per continuam ipsius 2 multiplicationem, ita ut in producto tandem undecies factor deprehendatur. Sed compendii gratia primùm rationem 2 ad cubum 8 evehemus, deinde cubum 8 ad cubum 512, quæ erit potentia nona ipsius 2, & tandem multiplicato numero 512 per quadratum rationis 4, erit factum 2048 potentia undecima ipsius 2. Hac vero multiplicata per primum Progressionis terminum 3, productum erit terminus duodecimus 6144, qui requirebatur.

215 Inde etiam patet methodus numerum quemvis mediorum inter data extrema inferendi. Quod quidem fiet, si *extremorum maius per minus dividatur, & a quoto radix extrahatur ejus gradus, qui per numerum mediorum unitate auctum indicatur*. Hujusmodi enim radix erit ratio Progressionis, qua semel inventa, termini quæsitii methodo supra tradita innotescunt (n. 212.).

Siquidem extremorum maius æquabitur facto ex minore & ratione ad eam potestatem evecta, quæ per numerum terminorum præter postremum, sive per numerum mediorum unitate auctum indicatur (n. 213.). Si igitur extremorum maius per minus dividatur, quotus erit ratio Progressionis ad eam potestatem evecta, quæ per mediorum numerum unitate auctum exponitur (n. 74.). Proinde extracta radice ejusdem gradus, ratio Progressionis habebitur.

Sint ex. gr. inter 2, & 2048 novem termini in Progressione Geometrica medii inferendi. Primum, numerus 2048 per 2 dividendus erit, & quotus prodibit 1024. Deinde hujus radix decima extrahenda (pag. 147.), quam inveniemus 2, eaque erit ratio Progressionis, qua inventa, termini quæsitii innotescunt, ut habeatur $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048$.

Si quatuor forent media geometrica inter 6 & 48 inferenda, diviso postremo termino 48 per primum 6, quotus haberetur 8, cujus radix quinta invenienda esset. At cum numeri 8 radix ejusmodi accurata haberi nequeat, id argumento est, quatuor media geometrica inter 6, & 48 per numeros assignari exacte non posse. Cum tamen ad eam radicem accedere liceat quam proximè libuerit, media etiam quæsitia, quam vero proxima opus fuerit, exhibere licebit. Sic radix quinta numeri 8 inveniatur quam proxime 1,515767
(pag.

(pag. 148.), adeoque si media quæsitæ ad quartam usque decimalium sedem exprimere sufficiat, habebitur $\div 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48$.

Quibus perspectis manifestum fit, media geometrica quotcunque, aut exacta, aut vero quam proxime libuerit appropinquantia, inter datos numeros, utut fuerint inter se vicini, interjici posse. Et hæc sunt, quæ in præsentia de Progressionibus Geometricis præfari oportuit, ut gradum ad Logarithmos faciamus, cætera in Algebrae Elementis plenius tradituri.

De Logarithmis.

216 *L*ogarithmi sunt numeri in Progressione Arithmetica, qui ad numeros totidem in Progressione Geometrica excurrentes pro ratione sedium referuntur. Positis ex. gr. duabus Progressionibus

$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \text{ \&c.}$

$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 \text{ \&c.}$

terminus quisque superioris Logarithmus dicitur termini inferioris, qui illi in eadem sede respondet; 3 nempe Logarithmus est numeri 2; 5 Logarithmus numeri 4 &c.

217 Numerus igitur quivis plures in infinitum habere Logarithmos potest, prout eidem Progressioni Geometricæ, in qua est, alias atque alias Progressiones Arithmeticas respondere pro lubita posuerimus.

Quia tamen Logarithmorum usum potissimum spectamus, in diversis, quæ inter se Progressiones Arithmeticæ & Geometricæ componi possunt, contemplandis haud immorabimur, sed statim ad eas quæ in Tabulis usu receptis adhibitæ sunt veniemus.

218 Adhibita autem fuit Progressio Arithmetica

tica numerorum naturalium, & Geometrica in ratione decupla perpetuo excurrans, quæ scilicet ipsi numerationis legi convenientiores visæ sunt. Proinde duæ quæ sequuntur Progressiones Logarithmicis vulgaribus fundamento sunt - - -

̄ 0. 1. 2 . 3 . 4 . 5 : 6 &c.
 ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Quare in hoc Logarithmorum systemate facillimum est Logarithmum nosse eorum numerorum, qui per unitatem addito quocunque cifrarum numero exprimentur; totidem enim Logarithmus unitates, quot numerus post 1 cifras, continebit.

Quod autem spectat ad numeros intermedios assumptæ Progressionis decuplæ, ex principiis hætenus traditis methodum ostendere non possumus, quæ eorum Logarithmi fuerunt re ipsa inventi. Sed viam tamen indicabimus, ipsi quidem supputationi ineundæ incommodam, sed Logarithmorum genesi ac naturæ concipiendæ aptissimam, qua utique idem opus conficeretur, si nulla præter ea, quæ ab Arithmetica suppeditantur principia, adfuissent.

220 Ut numeri cujuscvis ex. gr. 3, Logarithmum deprehendamus, ex ipsa Logarithmorum notione constat, numerum propositum in Progressione Geometrica assumpta ∷ 1 : 10 : 100 : &c. locum esse habiturum. Si igitur inter 1, & 10 permagnum mediorum geometricorum numerum inferamus (n. 215.), alterutrum eveniat necesse est, ut vel eorum aliquod in numerum 3 accurate incidat, vel certe, ut duo se invicem consequantur, quorum alterum minus, alterum proxime maius illo sit, differentia eò minore existente quo mediorum numerus maior fuerit; proindeque eorum alterum, aucto quantum opus fuerit mediorum nume-

ro, pro eodem numero 3 haberi tandem quam proximè poterit.

Jam si inter 0 & 1 tot media arithmetica inferantur (n. 209.), quot inter 1 & 10 geometrica fuere interjecta, terminus hujusce Progressionis eadem sede respondens termino illius, qui vel 3 sit, vel numerus a 3 quam minimè discrepans, Logarithmus erit ipsius 3; & ita de aliis.

221 Quare, insertis 1000000 mediis arithmeti-
 cis inter 0 & 1, totidemque inter 1 & 2, in-
 ter 2 & 3 &c, concipiendum est, 1000000 iti-
 dem media geometrica inter 1 & 10, inter 10 &
 100, inter 100 & 1000 &c. interposita fuisse;
 Dispositis vero harum Progressionum terminis, quæ-
 sitos fuisse in Serie Geometrica numeros 1, 2, 3,
 4, 5 &c, aut his proxime æquales, & in Arithmetica
 notatos fuisse numeros, qui illis singulis loco respon-
 derent, adeoque eorum Logarithmi forent; Inde
 vero, scriptis tantum numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c.
 in columna verticali, ut in Tabula sequenti, unius-
 cujusque Logarithmum inventum e regione posi-
 tum fuisse. Et huc redit Logarithmorum vulga-
 rium genesis, quanquam, ut paulo superius indi-
 cavimus, ad eorum supputationem aliquanto expedi-
 tiori ratione ventum fuerit.

TABU-

T A B U L A
L O G A R I T H M O R U M
Numerorum naturalium ab 1 ad 200.

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf. negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672008	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,077724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,139879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158262	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271843
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276452
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278724
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 Prior in singulis Logarithmis nota ad sinistram *Characteristica* appellatur, quia scilicet, ad quam spectet decadam numerus Logarithmo respondens apertè designat. Si ex. gr. Logarithmus *characteristicam* habuerit 3, argumento est, numerum illi respondentem ad *millia* pertinere. Siquidem Logarithmus numeri 1000 est 3, & numeri 10000 est 4, adeoque numerus omnis inter 1000 & 10000 Logarithmum habebit 3 cum fractione. *Characteristica* igitur erit 3, & reliquæ notæ decimales fractionem illam ostendent. Verbo: *Numerus tot notis plus una constabit, quot in characteristica Logarithmi unitates fuerint.*

Logarithmi autem in Tabella superiori, quam exempli loco adjunximus, sex tantummodo notas post *characteristicam* decimales habent, in Tabulis vero usu receptis septem. Sed id discrimen exemplis paulo post adducendis nihil obest.

Logarithmorum Proprietates.

223 CUM de Logarithmis aliis quam vulgaribus quæstio in præsentia non fit, manifestum est, eas quas tradituri sumus proprietates, ad Progressiones Geometricas præcipuè referri, quæ ab 1; Arithmeticas vero, quæ a 0 initium sumunt.

Jam vero sint Progressiones quæcunque, quæ iis conditionibus subjiciantur, duæ ex. gr. quæ sequuntur - - - - -

÷ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.

∴ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Ex ipsa Progressionum indole, & terminorum eisdem sedibus sibi mutuo respondentium comparatione constat, rationem toties sumptam terminum quemvis prioris efficere, quoties ratio alterius in termino respondente factor existit. Etenim

nim ratio Progressionis Arithmeticæ toties continetur, ratio uero Progressionis Geometricæ toties factor est in termino quocunque, quot ante illum sunt termini (n. 207. 212.); sed termini sibi respondententes in utraque Progressione eodem terminorum numero præeunte perpetuo gradiuntur: igitur &c.

Sic ex. gr. in termino prioris 28 ratio 4 septies continetur, & in respondente posterioris termino 2187 ratio 3 septies similiter factoris vices gerit; & ita de aliis.

224 Hinc, si duo quicunque Progressionis Arithmeticæ termini addantur, & qui illis in Geometrica respondent invicem multiplicentur, horum factum & illorum summa termini erunt in iisdem Progressionibus sibi mutuo respondententes.

Nam summa rationem Progressionis Arithmeticæ toties sumptam manifesto complectitur, quoties in terminis additis simul continetur; factum vero rationem Progressionis Geometricæ toties factorem habet, quoties in terminis invicem multiplicatis simul existit. At terminus quisque Progressionis Arithmeticæ rationem toties complectitur, quoties terminus in Geometrica illi respondens rationem factoris loco habet. Summa igitur toties rationem in Arithmetica Progressione contineat necesse est, quoties factum in Geometrica rationem sibi in factorem vindicat; ac proinde termini erunt in iisdem Progressionibus sibi mutuo respondententes.

225 Duobus igitur quibuscunque Progressionis Arithmeticæ terminis additis, terminorum illis in Geometrica respondentium factum inveniemus, si Progressiones ad id fuerint calculo semel factis satis promotæ.

Si ex. gr. terminos addamus 8 & 24, quibus respondent 9 & 729, fiet summa 32, cui in Progress-

gressione Geometrica respondebit numerus 6561; quem proinde cognoscemus factum esse ex numeris 9 & 729 invicem multiplicatis, ut re ipsa est.

226 Hæc vero cum ad universa Progressionum systemata pertineant, quarum Arithmetica a 0, & Geometrica ab 1 incipiat, cumque numeri naturales 1, 2, 3, &c. in Tabella superiori fuerint a Geometrica Progressione excerpti, quæ ab 1 initium sumit, eorum vero Logarithmi a Progressione Arithmetica, quæ a 0 exorditur, habita sedium ratione in quibus sibi invicem respondebant; manifestum est, quod si duorum quorumcumque numerorum Logarithmi addantur, summa erit Logarithmus producti. Atque hinc Logarithmorum usus, isque longioribus operationibus absolvendis, ut per universam Matheſim, maxime utilis, profuxit:

Logarithmorum usus.

227 **U**T igitur multiplicatio Logarithmorum ope instituat, nihil aliud opus est, quam factorum Logarithmos addere, & summam habere pro Logarithmo producti; qua proinde quaesita inter Tabularum Logarithmos, productum erit numerus illi respondens.

Sit ex. gr. multiplicandus numerus 13 per 14. In Tabula superiori inveniemus Logarithmos utriusque factoris, videlicet:

Log. num. 13	- - - - -	1,113943
Log. num. 14	- - - - -	1,146128

Et summa - - - - - 2,260071 erit Logarithmus producti, quod proinde inveniemus esse 182, numerus scilicet, qui illi Logarithmo in Tabula respondet.

228 Hinc sponte fluit, numerum quemvis ad quadratum Logarithmorum ope evectum iri, si ejus Logarithmus duplicetur. Cum enim numerus ad quadratum evehendus per se ipsum multiplicari debeat, ejus Logarithmus sibi ipsi addendus, sive duplicandus erit. Eodem modo intelligitur, Logarithmum triplicari oportere, quoties numerus quicumque fuerit ad cubicam dignitatem evehendus.

229 Et in universum: Quo numerus quicumque ad potentiam seu dignitatem quamvis promoveatur, ejus Logarithmus erit toties sumendus, quotus est ipsius potentie gradus, sive (quod eodem redit) per exponentem ejusdem potentie multiplicandus; & Logarithmus prodibit, qui in Tabula potentiam quæsitam indicabit.

Sic ex. gr. si quærat septima potestas numeri 2, hujus Logarithmus 0,301030 per 7 multiplicabitur, fietque Logarithmus 2,107210, cui in eadem Tabula præfigitur numerus 128, qui potentia septima ipsius 2 reapse est.

230 Igitur & vicissim: Si a numero quocumque radix fuerit, quadrata, cubica, quarta, quinta &c., extrahenda, ejus Logarithmum per 2, 3, 4, 5 &c., sive, in universum, per numerum qui radice gradum exponit, dividere oportebit: & quotus erit Logarithmus ipsius radice; quæ proinde facili negotio ex Tabulis constabit.

Si ex. gr. invenienda proponatur radix quadrata numeri 144, ejus Logarithmum in Tabula reperiemus 2,158362, quo diviso per 2 habebitur Logarithmus 1,079181, cui in eadem Tabula respondet numerus 12, ac proinde concludemus numerum 12 radicem esse quadratam ipsius numeri propositi 144, ut re ipsa est.

Si radicem septimam numeri 128 invenire oporteat, ejus numeri Logarithmum 2,107210 Tabu-

la suppeditabit, & eo diviso per 7 (quia nimirum de septimi gradus radice quæstio est) Logarithmus prodibit 0,301030, cui in eadem Tabula præfigitur numerus 2, qui septima profecto radix est numeri propositi 128; & ita de aliis.

231 Ut autem Divisionem numerorum, adhibito Logarithmorum artificio, peragamus, Logarithmum divisoris a Logarithmo dividendi subtrahere oportet, & residuum erit Logarithmus ipsius quoti.

Sit ex. gr. dividendus numerus 187 per 17. Id ut exequamur, quærendus est

Log. divid.	187	-----	2,271842
Log. divis.	17	-----	1,230449

Et residuum ----- 1,041393 erit Logarithmus quoti, qui proinde in Tabula invenietur, nimirum 11.

Quum Logarithmus quoti in Tabulis accurate non reperitur, sed inter duos quoscunque earum Logarithmos incidit, argumento est, divisionem absque residuo fieri non posse. Quid tum faciendum sit, paulo inferius declarabimus, ubi de numeris, quorum Logarithmi in Tabulis non extant, inveniendis sermo fuerit.

Hujusce Regulæ manifesta ratio fiet, si attendamus ex divisore per quotum multiplicato dividendum produci (n. 74.). Igitur si Logarithmi addantur tam divisoris quam ipsius quoti, summa erit Logarithmus dividendi (n. 227.). Igitur si a Logarithmo dividendi Logarithmus divisoris subtrahatur, residuum erit Logarithmus quoti (n. 39.).

232 Quare iis perspectis, quæ hactenus tradita sunt, pronum erit intelligere, qua sit ratione instituenda Regula trium Logarithmorum ope. Logarithmus enim termini secundi Logarithmo tertii adden-

addendus, & ab eorum summa Logarithmus primi subtrahendus est; & residuum erit Logarithmus quarti, qui proinde ex Tabulis constabit.

Si ex. gr. quartus sit inveniendus proportionalis ad terminos $7 : 12 :: 105 :$, operatio erit hujusmodi :

Log. 3 ⁱ .	105	-----	2,021189
Log. 2 ⁱ .	12	-----	1,079181
Summa		-----	3,100370
Log. 1 ⁱ .	7	-----	0,845098

Residuum - - - - 2,255272. five

Logarithmus numeri 180, qui adeo quartus erit terminus quæsitus.

233 Animadvertendum vero est, quod si operatione aliqua instituta Logarithmus tandem prodeat, qui cum Logarithmo Tabularum aliquo ad amissim consentiat in notis omnibus præter postremam ad dextram, hujus differentie ratio nulla haberi debeat. Quippe cum Logarithmi singuli numerorum, qui inter Progressionis decuplæ terminos medii sunt, accurati non sint nisi ad dimidiam usque unitatem postremæ decimalium sedis, fieri potest, ut ex plurium Logarithmorum additione particulæ illæ, quæ utique in singulis dimidia postremæ sedis unitate maiores nunquam abundant, nec deficiunt, tandem collectæ unam aut alteram unitatem excessus vel defectus in postremam notam conferant; cujus rei operatio præcedens exemplo est.

De Numeris, quorum Logarithmi in Tabulis non extant.

234 **C**Um Tabulæ Logarithmorum pro numeris integris in serie naturali gradientibus fuerint constructæ, fractorum qui inter illos
medi

medii sunt Logarithmos ab iis immediate haud exhiberi apertum est. Idem intelligendum de radicibus numerorum, qui potentiae perfectae non sunt &c.

Quamobrem, si Logarithmus quaeratur numeri, cui fractio quaecunque adhæreat, ipse ad fractionis denominationem revocandus, illique addendus erit, ut totum sub fractionis formam redigatur (n. 86.). Tum Logarithmus denominatoris a Logarithmo numeratoris subtrahatur, & residuum erit Logarithmus quaesitus.

Si ex. gr. quaeratur Logarithmus numeri $8 \frac{3}{11}$, hic primum revocabitur ad $\frac{21}{11}$, deinde 1,041393 Logarithmus denominatoris 11 subtrahendus erit a 1,959041 Logarithmo numeratoris 91; & residuum 0,917648 pro Logarithmo habebitur numeri propositi $8 \frac{3}{11}$, sive $\frac{91}{11}$; quia videlicet $\frac{91}{11}$ nihil est aliud quam quotus ex divisione numeri 91 per 11 (n. 96.).

235 Eadem ratione ostenditur, Logarithmum fractionis propriae habitum iri, si Logarithmus denominatoris a Logarithmo numeratoris subducatur. At, cum ejusmodi subtractio fieri nequeat, propterea nimirum quia Logarithmus denominatoris Logarithmo numeratoris maior est, Logarithmus hujus a Logarithmo illius subtrahendus erit; & residuum erit Logarithmus fractionis, praefixo tamen signo $-$, quo nimirum ostenditur, illam quam praemisimus subtractionem praepostero ordine fuisse institutam. Sic Logarithmus fractionis $\frac{11}{91}$ habebitur $- 0,917648$.

236 Id vero signum quemadmodum declarat subtractionem fuisse aliter quam oporteret factam, ita etiam, ut id tandem pensetur, ostendit Logarithmos fractionum adhibendos esse juxta regulam
oppo

oppositam illi, quam pro Logarithmis integrorum tradidimus. Id est, si multiplicandum sit per fractionem, ejus Logarithmus subtrahendus; si dividendum, addendus est (*).

¶ In universum, hæc circa multiplicationem Regula tenenda est: Si Logarithmi factorum omnes positivi, vel omnes negativi, eorum summa cum eodem signo; si partim negativi, partim positivi, differentia inter utrorumque summas cum signo maioris Logarithmum facti exhibebit. Circa divisionem vero: Divisoris Logarithmus signo contrario donetur, & multiplicationis Regula observetur.

Sunt qui fractionum Logarithmos aliter exprimere consueverunt, sola characteristica negativa inducta, retentisque notis decimalibus perpetuo positivis. Hæc autem Logarithmorum forma exoritur, si Logarithmus denominatoris re ipsa subtrahatur a Logarithmo numeratoris a dextra versus sinistram, & quum ad characteristicas ventum fuerit, totidem unitates negativè sumantur, quot characteristicae Logarithmi numeratoris deerunt, ut characteristica Logarithmi ipsius denominatoris subtrahi absque residuo possit.

Ex. gr. Si quærat^r Logarithmus fractionis $\frac{2}{151}$, a Logarithmo numeratoris 2, nimirum 0,301030 subtrahendus erit Logarithmus denominatoris 151, nimirum 2,178977. Quo autem subtractio fieri posset, addendæ essent 2 unitates ad characteristicam Logarithmi numeratoris, ut fieret 2,301030, & residuum haberetur 0,122053. Logarithmus igitur fractionis propositæ erit - 2,122053, signo utique - solam characteristicam afficiente. Sed ne hujusce formæ Logarithmi cum superioribus prorsus negativis aliàs usu receptis confundantur,

(*) Numeri, quibus præfigitur signum -, negativi appellantur. Eorum indolem in Algebra distinctius explicabimus. Interim monuisse sufficiat eos peiperam concipi tanquam nihilominus, cum infra nihilum nihil esse possit.

cos sic designare placuit $\bar{2},122053$, interdum etiam signo $\bar{+}$ præfixo, ad hunc modum $\bar{+}2,122053$.

Ratio hujus rei est, quia sumpto Logarithmo $2,301030$ pro $0,301030$, numerus 2 huic respondens per 100 multiplicari censetur. Igitur, si a Logarithmo $2,301030$ Logarithmum $2,178977$ subtrahamus, residuum $0,122053$ erit Logarithmus fractionis improprie $\frac{200}{151}$. Ut autem hæc redeat ad $\frac{2}{151}$, dividi debet per 100 ; adeoque subtrahi oportet 2 ab illius Logarithmi characteristica 0 ; Logarithmus igitur fractionis $\frac{2}{151}$ erit -2 $\bar{+}0,122053$, sive $\bar{2},122053$.

Quum istiusmodi Logarithmi in calculum veniunt, regulæ superiores servandæ erunt quoad utramque cujusque partem. Si nimirum multiplicatio proponatur, addendæ erunt notæ decimales, omnes quippe positivæ; si quid inde ad characteristicarum sedem venerit, positivis adjungendum; & denique differentia inter summam positivarum & negativarum cum signo majoris characteristicam dabit. Si divisio instituat, divisoris Logarithmus, quoad partes decimales a Logarithmo dividendi subtrahitur; deinde characteristica illius mutato signo additur characteristicae hujus juxta regulam multiplicationis. Quum in subtractione decimalium peragenda petenda fuerit unitas a sede characteristicae, & hæc fuerit 0 , vel negativa, unitas insuper inde detrahitur, quapropter pro 0 manebit $\bar{1}$, pro $\bar{1}$ manebit $\bar{2}$ &c.

Eodem modo: Quum Logarithmus per numerum aliquem fuerit multiplicandus, ut in formandis potentiis, multiplicandus primum notæ decimales, & si quid inde ad characteristicae sedem venerit, mente retinetur ab ejusdem facto subtrahendum. Quum vero dividendus, ut in ra-

dicibus extrahendis, si characteristica divisorem exacte continet, divisio solita ratione peragitur; si minus, characteristica tot unitatibus negativis augetur, quod sufficiunt, ut divisorem exacte contineat, & totidem positivæ decadam loco notæ sequenti adjunguntur, ut illud pensetur, & divisio ulterius promoveatur. Sic, si $\bar{2},873245$ multiplicari oporteat per 5, factum erit $\bar{6},366225$; si dividi per 7, quotus erit $\bar{1},839035$. &c.

Cæterum Logarithmi, quibus de agimus, in alios prorsus negativos transeunt, si a characteristica unitas auferatur, & pro reliquis notis sumatur earum complementum ad 9, præter postremam ad dextram, cujus sumendum erit complementum ad 10. Contra, si Logarithmus omnino negativus sola characteristica negativa donandus fuerit, characteristica unitate augebitur, & notarum decimalium, ut modo diximus, complementum assumetur. Sic Logarithmus $\bar{2},374972$ in $-1,625028$, Log. $\bar{1},587430$ in $-0,412570$ mutantur; & vicissim. ¶

237 Quando numerus Tabularum (quæ fere ad 20000, vel saltem ad 10000 pertingunt) fines prætergreditur, ejus adhuc Logarithmus ex Tabulis haberi potest, si modo pluribus, quam Logarithmorum sedes decimales sunt, notis non constet.

238 Id ut expediamus, illud recolendum est, quod si 1, 2, 3, &c unitates ad characteristicam cujuscunque Logarithmi addantur, numerus ipsi respondens per 10, 100, 1000 &c multiplicatur; & contra, si 1, 2, 3 &c unitates a characteristica subtrahatur, numerus ipse per 10, 100, 1000 &c. re ipsa dividitur. Per id enim nihil aliud fit, quam Logarithmum numeri 10, vel 100, vel 1000 &c illi addere, vel subtrahere (n. 219. 227. 231.).

239 His positis, si quærat ex. gr. Logarithmus

thmus numeri 357859, tot versus dextram notæ virgula secernendæ erunt, quot sufficiant, ut reliquæ ad sinistram intra Tabularum limites contineantur, duæ videlicet in hoc exemplo, & fiet numerus 3578,59 proposito centies minor (n. 28.). Deinde quærendus erit Logarithmus numeri 3578, nimirum 3,5536403, & differentia inter illum & Logarithmum proxime sequentem numeri 3579, quæ quidem est 1214. Tum Regulam trium concifiemus: Si 1 differentia numerorum 3578 & 3579 differentiam Logarithmorum habet 1214, differentia numerorum 0,59 quamnam Logarithmorum differentiam habebit? Cum prior terminus sit unitas, satis est secundum per tertium multiplicare, & factum 716,26, seu rejectis decimalibus 716 erit differentia addenda Logarithmo 3,5536403 numeri 3578, ut fiat 3,5537119 Logarithmus numeri 3578,59. Et tandem, cum 3578,59 multiplicari debeat per 100 ut fiat 357859, duæ ad characteristicam Logarithmi inventi unitates addendæ supersunt, ut fiat 5,5537119 Logarithmus numeri propositi 357859.

Si notæ ad dextram fuerint cifræ, manifestum est, nihil aliud facto opus esse, quam partis reliquæ ad sinistram Logarithmum invenire, ejusque characteristicæ tot unitates addere, quot fuerunt cifræ dextrorsum sejunctæ.

240 Quum decimales notæ numero adhærent, ejus Logarithmus quæritur quasi integer esset, si ve in Tabulis immediate extet, si ve methodo superiori utendum sit (n. 239.), & tandem ab ejus characteristicâ tot unitates subtrahuntur, quot in numero notæ decimales sunt. Si ex. gr. quærat^{ur} Logarithmus numeri 3,27 invenietur in Tabulis Logarithmus numeri 327, nimirum 2,5145477, & duabus a characteristicâ unitatibus subtractis, erit Logarithmus quæsitus 0,5145477. Si quærat^{ur} Logarithmus numeri 35,7859, invenietur Lo-

garithmus numeri 357859 (n. 239.) 5,5537119, & quatuor a characteristica demptis unitatibus, numeri propositi Logarithmus erit 1,5537119.

241 Quum tandem numerus solis notis decimalibus constat, quærendus itidem erit ejus Logarithmus, quasi integer esset; sed is tamen subtrahendus a totidem unitatibus, quot decimales sunt, & residuum signo — notandum. Ut ex. gr. Logarithmum numeri 0,03 habeamus, quærendus nobis erit Logarithmus numeri 3, qui quidem est 0,477121, eoque subtracto a 2, residuum — 1,522879 erit Logarithmus ipsius numeri 0,03.

¶ Quod si characteristica tantum negativa desideretur, quæratnr numeri ejusdem Logarithmus, nulla virgulæ ratione habita, & ab illius characteristica tot unitates subtrahantur, quot partium decimalium sedes sunt. Ad hunc plane modum Logarithmus fractionis 0,03 invenietur 2,477121, fractionis autem 0,00327 Logarithmus erit 3,514548, & sic de aliis. ¶

De Logarithmis, quorum Numeri in Tabulis non extant.

242 UT in operationibus suscipiendis a numeris ad Logarithmos magno laboris compendio confugimus, sic re confecta a Logarithmis ad numeros redeamus necesse est. Vix autem fit, ut qui Logarithmus quæsitum tandem ostendit, numero respondeat & integro, & intra Tabularum cancellos contento, ac proinde ut inter earum statim Logarithmos ipse reperiatnr. Quare methodo opus est, qua numerus Logarithmo cui-cunque proposito respondens Tabularum auxilio deprehendatur. Est autem hujusmodi.

243 A Logarithmi characteristica tot unitates subtrahantur, quot opus fuerint, ut Tabularum limites Logarithmus non excedat. Tunc,

Si Logarithmus cum Logarithmo Tabularum aliquo omnino consentiat, numerus illi respondens tot ad dextram cifris additis, quot fuere unitates a characteristica sublatæ, quæsitum ostendet. Logarithmus ex. gr. 7,2273467, tribus a characteristica unitatibus subtractis respondet numero 16879; atque inde Logarithmum propositum 7,2273467 numero 16889000 respondere intelligimus (n. 238.).

Si autem characteristica ad Tabularum fines adducta, Logarithmus inter duos tabulares incidat, operatio fiet ad hunc modum; Quærendus ex. gr. fit numerus respondens Logarithmo 5,2432768. Ablatis 2 unitatibus a characteristica 5, Logarithmus 3,2432768 incidit inter Logarithmos numerorum 1750 & 1751, adeoque ejus numerus erit 1750 cum fractione. Hæc ut inveniatur, sumenda erit ex Tabulis differentia inter Logarithmos numerorum 1750 & 1751, nimirum 2481 & differentia inter Logarithmum propositum & Logarithmum numeri 1750, quæ quidem est 2388. Tum fiet: Ut differentia Logarithmorum 2481, ad differentiam numerorum 1, ita differentia Logarithmorum 2388, ad differentiam numerorum quæsitam. Cum autem secundus terminus sit perpetuo unitas, diviso tertio per primum, quotus erit quartus, in hoc exemplo 0,9625. Proinde 3,2432768 Logarithmus erit numeri 1750,9625, adeoque 5,2432768 Logarithmus numeri 175096,25 (n. 28. 238.).

244 Quum characteristica Logarithmi Tabularum limites non superat, manifestum est, nullas ab illa unitates esse subtrahendas, adeoque numero invento nullas cifras addendas, neque virgulam loco movendam.

245 Sed illud imprimis notandum est, methodum paulo superius traditam, ut fractio numero adjicienda inveniatur, id sumere, differentias Logarithmorum differentiis numerorum proportionales esse, quod ubi numeri sunt paulo

maiores vero proximum est; ubi autem minores, non item. Quapropter, si numerus fuerit minor quam 1800 in Tabulis quæ pertingunt ad 18000, vel minor quam 1000 in Tabulis quæ ad 10000 tantummodo excurrunt, tot characteristicæ unitates addendæ erunt, quot suffecerint, ut numerus in supremo Tabularum ordine inquiratur. Eo autem invento, qui proxime Logarithmo respondeat, tot versus dextram notæ pro decimalibus habendæ, quot fuerunt unitates ad characteristicam adjectæ, quod plerumque satis erit. Si autem accuratio maior exigatur, proportio supra tradita (n. 243.) instituetur, & notæ decimales prodibunt, quæ prioribus adjungantur.

Ex. gr. Si quæretur numerus respondens Logarithmo 0,5432725, is inter 3 & 4 constat ex Tabularum inspectione incidere. Si partes ibi proportionales sumerentur, numerus prodiret 3,529 &c a vero non parum abhorrens. Sed tribus characteristicæ unitatibus additis, Logarithmus 3,5432725 respondere invenietur numero paulo maiori quam 3493, minori autem quam 3494, adeoque si tertia nota decimali contenti sumus, numerus Logarithmo 0,5432725 respondens erit 3,492. At si plures notæ decimales requirantur, methodo superiori inveniemus Logarithmum 3,5432725 respondere numero 3493,594 (n. 243.), proindeque Logarithmum 0,5432725 numero 3,493594 (n. 238.).

Verum hæc numerorum accuratio limites habet ab ipsis Logarithmis circumscriptiones. Cum enim, ut paulo superius notatum fuit, postrema eorum nota decimalis ad dimidiam usque unitatem exacta tantum reddi potuisset, perspicuum est, eorum differentias eandem ferre incertitudinem, adeoque ubi postrema differentie dividendæ nota in quotum cæpit influere, notæ inde incertæ emergant necesse fore; ut divisionem ulterius

promovere frustraneum videatur. Ex Tabulis vulgaribus numerus quisque ad septem usque notas tuto colligitur, quod plerunque satis superque est. Si quando pluribus opus fuerit, aut Tabulæ ampliores consulendæ, aut Logarithmis non utendum.

246 Si Logarithmus negativus proponatur, subtrahendus erit a 4, 5 &c unitatibus, ita ut residuum in suprema Tabularum classe reperiatur, & a numero illi respondente totidem ad dextram notæ decimalibus addicendæ, quot unitates fuerunt, a quibus Logarithmum subtraximus.

Ex. gr. si quæretur fractio respondens Logarithmo $-1,532732$, hunc a 5 subducemus, & residuum erit $3,467268$, cui in Tabula respondet numerus paulo maior quam 2932, & minor quam 2933, adeoque fractio quæsitæ, si quinque notæ decimales sufficiant, erit $0,02932$. Et quidem Logarithmum $-1,532732$ a 5 subducere nihil est aliud quam fractionem illi respondentem multiplicare per 100000 (n. 219. 236.). Igitur numerus residuo respondens dividendus erit per 100000, quinque sedibus a dextra versus sinistram decimalibus consignatis (n. 28.).

¶ Logarithmis penes unam characteristicam negativis propositis, fractio decimalis facilius obtinetur. Logarithmus characteristicæ positiva pro lubitu donetur, & numerus quot opus fuerit notis contentus inquiratur: quo invento, fractio decimalis ita conficietur, ut prior numeri ipsius nota ad sinistram tot sedibus ab unitatum loco removeatur, quot in characteristicæ negativa Logarithmi propositi unitates sunt. ¶ Sic ex. gr. si fractio respondens Logarithmo $-2,235724$ ad quartam usque decimalium sedem desideretur, quærendus erit numerus in Tabulis proxime respondens Logarithmo $2,235724$, nimirum 172, & fractio quæsitæ erit $0,0172$. Si fra-

Et respondens Logarithmo $\bar{1},732589$ ad sextam usque notam decimalem quærat, inveniendus erit numerus quam proxime respondens Logarithmo $5,732589$, qui quidem reperietur 540242 , proindeque fractio erit $0,540242$. ¶

247 Quæ dicta sunt hactenus permagnum perque commodum in Trigonometria, pluribusque aliis Matheseos partibus usum habitura sunt. Interim nonnullis exemplis ab ipsa Arithmetica petitis, supputationum compendia a Logarithmorum artificio profecta demonstremus.

Exemplum I.

Dividendus esto numerus 17954 per 12836 , & quotus ad decimas usque millesimas exigatur. Res per Logarithmos fiet ad hunc modum:

Log. divid. 17954	- - - -	$4,254161$
Log. divis. 12836	- - - -	$4,108430$

Residuum - - - - - $0,145731$ characteristica 4 donatum respondet numero 13987 ; igitur quotus erit $1,3987$ (n. 238.).

Exemplum II.

Quærat radix cubica numeri 53 ad centesimas usque millesimas accurata.

Logarithmus numeri 53 est $1,724276$, eoque diviso per 3 (n. 230.) quotus $0,574759$ erit Logarithmus radicis, qui proinde characteristica 5 donatus numerum suppeditabit quam proxime 375628 ; adeoque radix quæsitæ erit $3,75628$ (n. 238.).

Exemplum III.

Sit extrahenda radix quinta numeri 5736 ad cubum exactæ, eaque ad millesimas usque exacta. Triplicetur Logarithmus numeri 5736 , videli-

cet 3,758609, & fiet 11,275827 Logarithmus cubi ejusdem numeri, quo diviso per 5 prodibit 2,255165 Logarithmus radicis quæsitæ; hujus si characteristicæ 3 unitates addamus, numerum quam proximè reperiemus 179955, adeoque radix erit 179,955.

Exemplum IV.

Sint quatuor media geometrica inter numeros $2\frac{2}{3}$ & $5\frac{3}{4}$ inferenda. Cum dividere $5\frac{3}{4}$ per $3\frac{2}{3}$, & a quoto radicem quintam extrahere oporteret (n. 215.), ut ratio Progressionis haberetur; per Logarithmos res multo facilius expedietur.

A Logarithmo numeri $5\frac{3}{4}$ nempe 0,759668 subtrahatur Logarithmus numeri $2\frac{2}{3}$ nimirum 0,425969 (n. 231.), & residuum 0,333699 dividatur per 5 (n. 230.). Quotus 0,066740 erit Logarithmus rationis quæsitæ, qui si characteristica 4 donetur, in Tabula numerum 11661 ad unitatum usque sedem accuratum suppeditabit; ac proinde ratio erit 1,1661 ad decimas usque millesimas exacta. Nihil igitur aliud superest, quam primum terminum $2\frac{2}{3}$ per 1,1661 multiplicare, productum rursus per 1,1661, &c (n. 211.).

Sed hæc quoque operationes per Logarithmos commodissime absolventur, si Logarithmo prioris termini 0,425969 Logarithmus rationis 0,066740 addatur, deinde hujus duplum, triplum, & quadruplum; ut quatuor mediorum Logarithmi orientur 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929; quibus quam proximè respondent numeri 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

De Complemento Arithmetico Logarithmorum, ejusque usu.

248 **U**bi Logarithmorum ope calculus instituitur, & alii addendi, alii deinde subtrahendi sunt, operatio reddi potest multo simplicior, si ad eorum complementa arithmetica confugiamus.

249 Quod ut perspicue intelligatur, notandum est, ad numerum quemvis ab alio, qui per unitatem adjecto quolibet cifrarum numero exprimitur, subtrahendum, nihil aliud opus esse, quam singulas notas a sinistra versus dextram a 9 subducere, præter postremam quæ subtrahenda est a 10. Sic ex. gr. si numerus 526927 subtrahendus proponatur a 1000000, singulas notas 5, 2, 6, 9, 2 mente subducemus a 9, & postremam 7 a 10, & residuum una eademque opera scribemus 473073. Si numerus 4873 a 1000000 subducendus sit, numerus considerabitur ut 004873, & regula eadem adhibita residuum habebitur 995127.

250 Hujuscemodi autem residuum dicitur *Complementum Arithmeticum* numeri propositi, unde derivatur.

251 Cum vero sit tam facilis expeditaque complementi determinatio, ut vix operationis loco habenda videatur, ubi plures addendi subtrahendique sunt numeri, ad unam additionem reduci operationem posse manifestum est. Si ex. gr. addendi proponantur numeri 672736, 426452, & ab eorum summa subtrahendi 432752 & 18675, (quod alioquin duplicem additionem, subtractionem unam exigeret) operatio unica fiet ad hunc modum:

$$\begin{array}{r}
 672736 \\
 426452 \\
 \text{Compl. num. } 432752 \text{ --- } 567248 \\
 \text{Compl. num. } 18675 \text{ --- } 981325 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Summa - - - - - } 2]647761$$

Id est, priores duo numeri cum posteriorum com-

plementis adduntur, & summa prodit 2647761; cujus prima nota 2 secernenda erit, & reliquæ 647761 numerum quæsitum ostendent.

Hujusce operationis ratio est, quia ubi pro subtractione numeri 432752, ejus complementum additur, videlicet 1000000 - 432752, numerus quidem 432752 re ipsa subtrahitur, sed simul numerus 1000000 insuper ponitur, decas scilicet una ad sinistram prioris numerorum addendorum sedis. Pro singulis igitur complementis singulæ unitates a priori summæ nota rejiciendæ sunt, ut numerus quæsitus habeatur.

252 Jam vero id quomodo Logarithmis accommodandum sit, facile constat. Pro iis, qui subtrahendi sunt, Complementum (quod litteris CL designari solet) addendum subrogatur, & summa confecta tot a characteristica decades rejiciuntur, quot sunt complementa in operationem ingressa.

Exemplum I.

Sit inveniendus quartus proportionalis ad tres numeros 1677 : 1599 :: 129.

Cum Logarithmos numerorum 1599 & 129 addere, & a summa Logarithmum numeri 1677 subtrahere oporteret (n. 232.), res hoc modo facilius expediatur:

CL. num.	1677	----	6,775467
Log. num.	1599	----	3,203848
Log. num.	129	----	<u>2,110590</u>

Et summa ----- 2,089905, rejecta characteristicæ decade, erit Logarithmus quarti, qui in Tabulis reperietur 123.

Exemplum II.

Sint multiplicandæ fractiones $\frac{675}{527}$, $\frac{952}{377}$, & productum dividendum per $\frac{631}{753}$.

Cum multiplicare invicem oporteret numeros 675, 952, 753; & numeros itidem 527, 377, 631; factumque prius per posterius dividere (n. 106. 109.), per Logarithmos calculus ita conficitur:

Log. num. 675	- - - - -	2,829304
Log. num. 952	- - - - -	2,978637
Log. num. 753	- - - - -	2,876795
CL. num. 527	- - - - -	7,278189
CL. num. 377	- - - - -	7,423659
CL. num. 631	- - - - -	<u>7,199971</u>

Et summa - - - - - 0,586555, reje-ctis tribus a characteristica decadibus, quia nimirum tria complementa adhibita sunt, numerum quæsitum indicabit 3,8597 quam proximè.

253 Illud præterea calculo percommodum accidit, ut complementis adhibitis fractionum Logarithmi positivi reddantur. Sic ex. gr. ut Logarithmum habeamus fractionis $\frac{3}{4}$, quæ numerum 3 per 4 divisum exprimit (n. 96.), ad Logarithmum ipsius 3, nempe 0,477121, addendum est complementum Logarithmi ipsius 4, videlicet 9,397940, & summa 9,875061 erit Logarithmus fractionis $\frac{3}{4}$. Sed illud notandum, in hujusmodi Logarithmo complementum involvi, adeoque decadem a characteristica rejiciendam fuisse, quod idcirco factum non est, quia characteristica ipsa decade minor prodiit. Verum decas abundans mente retinetur, absolutis operationibus rejicienda demum, si fieri possit.

¶ Hujus formæ Logarithmi ab iis, qui unam characteristicam negativam præferunt, nihil re ipsa dissentiunt. Logarithmus enim 9,875061, ubi decas subintelligitur a characteristica subtrahenda, characteristica 9-10 proculdubio afficitur, idemque omnino exhibet, ac $\bar{1},875061$. Si duæ decades auferendæ subintelligerentur, characteristi-

ca censeretur $9 - 20$, adeoque Logarithmus idem exprimeret, ac $\overline{11},875061$.

Adde, quod Logarithmi complementorum vi-
ces sibi mutuo præstant. Ut enim $9,875061$ com-
plementum est Logarithmi $0,124939$, ita vicissim
 $0,124939$ complementum est Logarithmi $9,875061$.
Qui vero sibi mutua complementa exhibent Lo-
garithmi, numeris itidem inter se reciprocis om-
nino respondent. *Reciproci* autem sunt numeri,
quorum factum est unitas, ut 3 , & $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$, & $\frac{4}{3}$
&c. Unde, cum idem sit dividere per 3 , ac
multiplicare per $\frac{1}{3}$, ubi subtrahendus est Loga-
rithmus numeri 3 , addi potest Logarithmus ipsius $\frac{1}{3}$,
complementum videlicet Logarithmi ejusdem nu-
meri 3 ; & ita de aliis. ¶

254 Idem de fractionibus decimalibus omnino in-
telligendum est. Si quærat ex-gr. Logarithmus frac-
tionis $0,575$, quæ idem exhibet atque $\frac{575}{1000}$ ad
Logarithmum numeri 575 addendum erit comple-
mentum Logarithmi numeri 1000 , & summa
 $9,759668$ quæsitum ostendet. Regula huc redit: Ut
quærat Logarithmus fractionis decimalis quasi nu-
merus integer foret, & pro ejus characteristica alia
supponatur, quæ a 10 , 20 &c tot unitatibus deficiat,
quot prior fractionis nota sedibus ab unitatum se-
de distat. Sic Logarithmus fractionis $0,05621$ erit
 $8,749812$; Logarithmus fractionis $0,000000005621$
erit $0,749812$; fractionis autem $0,0000000005621$
erit $9,749812$; ita ut duo priores complemento uno,
tertius vero duobus, affecti subintelligantur.

255 Quum vero a Logarithmis ad numeros re-
deundum est, si tot in Logarithmo prodeunte decades
a characteristica rejici non possint, quot in operatio-
nem inuenta fuere complementa, fractionem per
ipsum designari perspicuum est. Hæc ut habeatur,
deletis a characteristica decadibus quotcunque reji-

ci possunt, numerum Logarithmo respondentem investigabimus, quasi integrum designaret (n. 242. & seq.), quo invento, tot sedium decimalium decadas a dextra versus sinistram constituemus, quot in Logarithmo complementa superesse dignovimus.

Si ex. gr. Logarithmus prodeat 8,732235, qui complementum unum adhuc involvat, adeoque fractionem designet, ejus numerum, quasi integrum innueret, inveniemus 539802500 (n. 242.), & decem sedibus decimalibus constitutis, fractio habebitur 0,0539802500.

Verum, cum vix unquam fiat, ut fractiones adeo exquisitæ desiderentur, Logarithmi characteristica pro lubitu sumi potest, & numerus quot opus fuerint notis contentus ad fractionem decimalem ita revocabitur, ut prior ejus nota ab unitatum sede tot gradibus distet, quot characteristica Logarithmi propositi unitatibus distat a numero 10, si Logarithmus complementum unum involvit; a 20, si duo &c.

Sic Logarithmus 8,732235, substituta characteristica 3, numero respondet 5398 quam proxime: & quia a characteristica 8 ad 10 duæ sunt unitates, prior nota 5 duobus ab unitatum sede gradibus distabit, eritque fractio 0,05398. Si autem Logarithmus idem duo complementa secum afferret, fractio esset 0,00000000005398.

256 Quum hujus formæ Logarithmi multiplicentur, ut in formandis potentiis fractionum, notandum est, complementa simul multiplicari. Ea propter, rejectis quæ possunt a producto decadibus, dispiciendum est, quotnam adhuc complementa supersint, ut fractionis valor recte constituatur.

Ex. gr. Si Logarithmus 7,924753 complementum unum involvat, & fractio illi respondens ad potentiam quintam evehenda proponatur, Logarithmus per 5 multiplicabitur, & productum fiet 39,623765, quod 5 complementa continebit; ac proinde, cum 3 rejici tantum possint,

Logarithmus qui superest 9,623765 duo adhuc complementa retinere, fractionique propterea 0,0000000004205 respondere censebitur.

257 Contra, quum iidem Logarithmi dividendi sunt, ut in extrahendis fractionum radicibus, curandum est, ut adjectis si opus fuerit characteristicæ decadibus, tot in iis complementa ponantur, quot sunt unitates in exponente radicis, vel duplo, triplo &c plura; & divisione facta, residuum complementum unum, vel duo, tria &c continebit.

Sit Logarithmus 9,702922, qui complementum unum complectatur, & a fractione per illum indicata extrahenda sit radix cubica. Adjectis duabus characteristicæ decadibus, Logarithmus fiet 29,702922 tribus complementis abundans, eoque diviso per 3, quotus 9,900974 uno complemento afficietur, adeoque radicem quæsitam ostendet 0,7961. Rursus sit Logarithmus 1,987542 duobus complementis donatus, & a fractione respondente extrahenda sit radix quadrata. Dividatur is per 2 (quia decadas hic adjicere opus non est) & quotus 0,993771 complementum unum continebit, radicemque adeo indicabit 0,0000000009857. Sit tandem Logarithmus 9,887745 quinque complementis affectus, & a fractione illi respondente extrahenda sit radix quarta. Adjectis tribus decadibus, Logarithmus 39,887745 octo complementis donabitur, eoque diviso per 4, quotus 9,971936 duo complementa retinebit, ac proinde radicem indicabit 0,0000000009374; & ita de aliis.

Complementorum usus in Trigonometricis potissimum rationibus subducendis, adeoque in Astronomia, cæterisque Matheseos Partibus, ubi triangulorum analysis Logarithmorum ope instituenda est, maximum laboris compendium affert.

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

A QUANTIDADE he tudo aquillo que he capaz de aumento, ou diminuiçãõ.

n. 1.

A *Arithmetica* he a Sciencia de contar. n. 2.

A *Unidade* he huma quantidade arbitraria, que serve de termo de comparaçãõ a todas as outras quantidades da mesma especie. n. 4.

O *numero* mostra de quantas unidades, ou partes da unidade se compoem qualquer quantidade. n. 5.

Numero abstracto, he o que não se applica a especie alguma determinada de unidades; e *concreto*, o que representa huma especie determinada de unidades. n. 6.

A *Numeraçãõ* he a arte de ler, e escrever os numeros por algarismos. n. 7.

A *Numeraçãõ actual* he fundada sobre este principio de convençãõ: Que as unidades representadas por qualquer algarismo são des vezes maiores que as unidades representadas pelo algarismo immediato para a parte direita, e des vezes menores que as unidades representadas pelo algarismo immediato para a parte esquerda. n. 15.

Numero incomplexo he todo aquelle, que envolve huma só especie de unidades; e *complexo*, o que consta de partes, cada huma das quais tem diferente especie de unidades. n. 18.

A *Dizima*, ou fraccioens decimais, são partes successivamente menores que a unidade, na razão decupla. Escrevem-se com os mesmos algarismos, postos adiante da cata das unidades, e

separados della com huma virgula. n. 21. 24.

Hum numero faz-se des, cem, mil vezes &c maior, mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c para a direita; e des, cem, mil vezes &c menor, mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c para a esquerda. n. 28.

Hum numero não muda de valor, acrescentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. n. 30.

Somar he achar o valor total de muitos numeros, representado por hum só, que seja igual a todos juntos. Este chama-se *Soma*, e aquelles *addicoens*, ou *parcelas*. n. 33.

Para somar, he necessario hir por partes, somando as unidades de todas as addicoens, depois as dezenas &c; advertindo, que se a soma das unidades fizer alguma, ou algumas dezenas, estas se somarão com as dezenas da columna seguinte, e assim por diante. n. 35.

Esta Regra he absolutamente a mesma nas partes decimais, tendo a attençaõ de somar da direita para a esquerda millesimas com millesimas, centesimas com centesimas &c. n. 34.

Diminuir he achar o resto, o excessõ, ou a differença de dous numeros da mesma especie. n. 35.

Para diminuir, procede-se por partes, tirando da direita para a esquerda as unidades das unidades, as dezenas das dezenas &c; advertindo, que se o algarismo, donde havemos de tirar o outro, for menor do que elle, aumentallo-hemos com des unidades, e trataremos o algarismo

- mo immediato para a esquerda como diminuido de huma n. 35.
- Havendo dizima, reduzem-se os numeros a ter as mesmas casas decimais, enchendo com cifras os lugares do que tiver menos, e pratica-se a mesma Regra. n. 37.
- A Prova de huma operaçãõ Arithmetica he huma nova operaçãõ, pela qual nos certificamos do resultado da primeira. n. 38.
- Prova-se a conta de Somar, formando outra vez todas as columnas pela ordem inversa da esquerda para a direita, e diminuindo a somma de cada huma da parte correspondente da somma total; e sendo certa a operaçãõ, não deverá ficar resto algum. n. 38.
- Prova-se a conta de Diminuir, somando o resto achado com o menor dos numeros dados, e a somma deve sair igual ao maior. n. 39.
- Multiplicar* he tomar hum numero tantas vezes, quantas são as unidades de outro numero dado. n. 40.
- O numero que se intenta repetir, chama-se *multiplicando*; o que mostra as vezes, *multiplicador*; e o resultado, *producto*. n. 41.
- Tanto o multiplicando, como o multiplicador, chamaõ-se tambem *factores* do producto. n. 42.
- A multiplicação equivale a huma addição do multiplicando escrito tantas vezes, quantas são as unidades do multiplicador. n. 43.
- O multiplicador sempre he, ou deve considerar-se como numero abstracto. n. 46.
- O producto sempre deve mostrar unidades da mesma natureza que as do multiplicando. n. 47.
- Para multiplicar hum numero composto por hum numero simples, procede-se por partes, multiplicando primeiro as unidades, depois as dezenas &c; advertindo, que se o producto das unidades contiver algumas dezenas, estas se guardarão para se ajuntarem ao producto da casa seguinte, e assim por diante. n. 50.
- Se o multiplicador for composto, nelle tambem se procederá por partes, multiplicando primeiro pelas unidades d'elle, depois pelas dezenas &c; advertindo, que o producto das dezenas deve começar a escrever-se no seu lugar competente da direita para a esquerda &c; e a soma de todos os productos parciais será o producto que se busca. n. 51.
- Na multiplicação da Dizima observa-se a mesma regra, sem atender á virgula dos factores, e no producto separaõ-se tantas letras de Dizima para a direita, quantas são as que tem os factores ambos juntos; para o que se meterão (quando for necessario) huma ou mais cifras, entre a virgula, e a primeira letra significativa do producto. n. 54.
- Dividir* he buscar quantas vezes hum numero contém outro numero dado. n. 59.
- O numero que se divide, chama-se *partição*, ou *dividendo*; o outro pelo qual se divide, *partidor*, ou *divisor*; e o resultado, *quociente*. n. 59.
- A Divisão he equivalente a huma diminuição reiterada; e o quociente mostra, quantas vezes o divisor se pôde tirar do dividendo. n. 59.
- O dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente. n. 59.
- A especie das unidades do quociente não pôde determinar-se, senão pela natureza da queição, que der lugar á divisão. n. 59.
- Para dividir hum numero composto por hum numero simples, procede-se por partes da esquerda para a direita, examinando

riando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que não cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e não chegando a caber hum vez, se assentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operação he do mesmo modo: Toma-se no dividendo hum parte não menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar hum nova parte que se torna a dividir do mesmo modo, e assim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he final que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto não menor que o divisor, he final que a letra do quociente se assentou menor do que convinha. n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros, procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais. n. 68.

Se ao resto final de hum divisaõ se ajuntar hum cifra, e se conti-

nuar a operação, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante. n. 68.

A Divisaõ, e Multiplicação provaõ-se reciprocamente hum pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve sahir o outro no quociente; e multiplicando o divisor pelo quociente, deve sahir o producto igual ao dividendo. n. 74.

Fracção, ou Quebrado, he o numero que representa as partes da unidade, a qual se suppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado saõ necessarios dous numeros, hum que mostre em quantas partes se suppoem dividida a unidade, o qual se chama *denominador*; e o outro, que mostre de quantas dessas partes consta a quantidade que queremos significar, o qual se chama *numerador*. n. 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-se *termos* d'elle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador, vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em hum expressaõ fraccionaria, divide-se o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-se pelo denominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado não muda de valor, quando se multiplicaõ, ou dividem ambos os seus termos por hum mesmo numero. n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mesmo denominador, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo denominador do outro: Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros. n. 90. 91.

Numero *primo* he todo aquelle que não tem divisor exacto, senão a si mesmo, ou a unidade, n. 91.

Todo o numero que acabar em algarismo par he divisivel por 2; e se acabar em 0, ou 5, será divisivel por 5. n. 94.

Todo o numero, cujos algarismos somados fizerem 3, ou hum multiplo de 3, he divisivel por 3; e se fizerem 9, ou hum multiplo de 9, será divisivel por 9. n. 94.

Para reduzir hum quebrado á mais simples expressão possível, dividem-se ambos os seus termos pelo maior divisor commum. n. 95.

O maior divisor commum de dous numeros se achata, dividindo o maior pelo menor, depois o divisor pelo resto que ficar, e assim por diante até chegar a huma divisão sem resto; e o divisor della será o maior divisor commum dos numeros propostos. n. 95.

Hum quebrado representa o quociente de huma divisão, na qual o numerador he o dividendo, e o denominador he o divisor. n. 97.

Hum quebrado pôde reduzir-se á dizima, dividindo o numerador (aumentado de tantas cifras á direita quantas são as casas decimais que queremos) pelo denominador. n. 99.

Para somar, ou diminuir quebrados, he necessario reduzi-los a o mesmo denominador, quando o não tiverem; depois somam-se, ou diminuem-se os numeradores; e a soma, ou resto, se dá o mesmo denominador commum delles. n. 101. e seg.

Para multiplicar quebrados, he necessario multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador. n. 106.

A multiplicação de quebrado por inteiro, ou de inteiro por quebrado, reduz-se a multiplicar o

inteiro pelo numerador do quebrado. n. 107.

Os numeros mixtos de inteiro; e quebrado, reduzem-se a quebrados simples; e entraõ na regra geral. n. 108.

Para dividir hum quebrado por outro, invertem-se os termos do divisor, e pratica-se a regra da multiplicação. n. 109.

A divisão de hum quebrado por hum inteiro redaz-se a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado; e na divisão de hum inteiro por hum quebrado, pratica-se o mesmo, e depois invertem-se os termos. n. 110.

Os numeros mixtos reduzem-se a quebrados simples, e pratica-se a regra geral. n. 111.

Quebrado de quebrado he o que exprime as partes de outro quebrado, considerado como hum todo, e dividido em hum numero determinado de partes iguais. n. 114.

Hum quebrado de quebrado he igual ao producto de todos os quebrados que entraõ na sua expressão, reportando-se entã esse producto á unidade principal. n. 114.

Para somar numeros complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; se a soma dellas contém huma, ou mais unidades da especie seguinte, escreve-se somente o resto, e essas levoã-se para a columna seguinte, e assim por diante. n. 117.

Para diminuir complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; e quando não pôde fazer-se a subtracção, toma-se huma unidade da especie immediata, que se converte em unidades da especie actual, e se ajunta com as outras, e da soma se faz a diminuição, guardando-se huma analogia perfeita com a regra ordinaria. n. 118.

A multiplicação, e divisão de complexos, pôde fazer-se pelas regras dos quebrados ordinarios; reduzindo

zindo as espécies inferiores a h'a fracção da principal, antes de fazer as ditas operações. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente. n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as espécies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resolução não suggerer productos facéis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incompleto, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da mesma especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sair no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor, reduz-se ás unidades da sua mesma especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisão, como no caso do divisor incompleto. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que não he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém o quadrado das dezenas, o dobro do producto das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que pôde ser de humasó letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminua da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se esreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará á classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada; e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz approximada de hum numero, que a não tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas são as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de hum quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se os termos são quadrados perfeitos; quando não, reduz-se o quebrado á dizima, de foite que ten a numero

- mero par de casas decimais, e tira-se a raiz, como se fosse inteiro, advertindo que a raiz deve ter ametade das casas decimais, que houver na fracção proposta. n. 142. 146.
- O *Cubo* de hum numero he o producto do mesmo numero pelo seu quadrado. n. 149.
- Raiz *cubica* de hum numero he o numero que multiplicado pelo seu quadrado produz o dito numero proposto. n. 151.
- O *Cubo* de hum numero, composto de dezenas e unidades, contém o *cubo das dezenas*, o *triplo do producto do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades*, o *triplo do producto das dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades*, e o *cubo das unidades*. n. 154.
- Para extrahir a raiz cubica de hum numero, divide-se em classes de tres letras começando da direita para a esquerda; da ultima classe à esquerda (a qual pôde ser de duas, e de huma letra) tira-se a raiz, e esta será a primeira letra da raiz procurada; o cubo desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto se ajunta a classe seguinte, que formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o triplo do quadrado da raiz achada, o qual se assentará da terceira letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, e formando o cubo da raiz total achada se diminuirá das duas classes respectivas do numero proposto, e ao resto se ajuntará a terceira classe para formar outro dividendo, o qual se partirá do mesmo modo pelo triplo quadrado da raiz total já achada; e assim por diante. n. 155.
- Querendo approximar a raiz de hum numero, que não he cubo perfeito, ajuntar-lhe-hemos tantas classes de tres cifras, quantas são as letras decimais, que queremos na raiz, e praticaremos a regra precedente. n. 156.
- Para extrahir a raiz cubica de hum quebrado, he necessario tirar as raizes tanto do numerador, como do denominador. Se estes não forem cubos perfeitos, reduz-se o quebrado a fracção decimal, procurando que tenha tres vezes mais casas de dizima do que queremos na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 157. e seg.
- Raçaõ* he a grandeza relativa, que resulta da comparação de duas quantidades do mesmo genero. n. 162.
- A *raçaõ* he *Arithmetica*, quando se considera a differença de duas quantidades; *Geometrica*, quando se considera quantas vezes huma contém a outra. Quando se diz *Raçaõ* simplesmente, sempre se entende a *Geometrica*. n. 163. 164.
- As duas quantidades, que se comparãõ na *Raçaõ*, chamãõ-se *termos*; o primeiro d'elles, *anterior*; e o segundo, *consequente*. n. 165.
- Huma *raçaõ arithmetica* não muda de valor, quando se ajunta, ou se tira a ambos os termos della, huma mesma quantidade. n. 169.
- Huma *raçaõ geometrica* não muda de valor, quando ambos os termos se multiplicãõ, ou dividem por hum mesmo numero. n. 170.
- Proporçaõ*, ou *Analogia*, he a igualdade de duas *raçoens*; e esta he *Arithmetica*, ou *Geometrica*, conforme as *raçoens*. n. 172.
- Proporçaõ continua* he, quando os termos medios são iguais entre si. n. 174.
- Em toda a *proporçaõ arithmetica*, a soma dos meios he igual à dos extremos; e reciprocamente. n. 176.

Se a proporção arithmetica for continua, a soma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporção geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 173. 180.

Se a proporção for continua, o producto dos extremos será igual ao quadrado do meio, e reciprocamente. n. 173.

Dados tres termos de huma proporção geometrica conhecer-se-ha o quarto. Porque se este for hum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo outro; e se for hum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporção de quatro termos não se perde, mudando os extremos para meios, e os meios para extremos; nem tambem, trocando entre si de lugar os meios, ou os extremos. n. 181. 182.

A proporção não se póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por hum mesmo numero. n. 183.

Se em qualquer proporção geometrica, a soma, ou differença do antecedente e consequente, se comparar com o antecedente ou consequente, em ambas as razões do mesmo modo, o resultado estará em proporção. n. 183.

Em toda a proporção geometrica, a soma, ou differença dos antecedentes he para a soma, ou differença dos consequentes, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente. n. 185.

Em qualquer numero de razões iguais, a soma de todos os antecedentes he para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente. n. 186.

Razão composta he a que resulta de duas, ou mais razões, mul-

tiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. n. 187.

Razão duplicada, triplicada, quadruplicada &c, he a que se compoem de duas, tres, quatro &c razões iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporções, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem estão em proporção. n. 190.

As potencias semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem são proporcionais. n. 191.

As raizes semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem são proporcionais. n. 192.

A Regra de tres tem por objecto achar hum dos termos de huma proporção por meio dos outros. Esta he simples, quando a questão não envolve mais do que quatro termos; e composta, quando envolve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres directa he quando hum dos termos principais deve conter o outro do mesmo modo que o relativo do primeiro contém o relativo do segundo; e inversa, ou reciproca, quando hum dos termos principais deve conter o outro, como o relativo deste contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o seu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes; e na inversa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A Regra de Companhia tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaisquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a soma dos numeros dados para o numero proposto, assim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A Regra de falsa posição he simples

- ples, quando vimos no conhecimento de hum numero por meio de huma hypothese; e composta, quando são necessarias duas. n. 199.
- Na simples, deve ser: Como o resultado da hypothese para o verdadeiro resultado, que devia fahir, assim a hypothese para o numero que se procura. n. 199.
- Na composta, deve fazer-se: Como a differença dos resultados das duas hypotheses, para a differença entre o resultado da primeira, e o verdadeiro, que devia fahir; assim a differença das hypotheses, para a differença entre a primeira, e o numero que se busca. n. 199.
- A *Regra de Liga* tem por objecto a mistura de quantidades de valor diverso. He directa, quando se dão as quantidades com o seu valor, e se procura o valor do misto; *inversa*, quando se dá o preço do misto com o dos simples, e se perguntão as partes que de cada hum delles se devem tomar. n. 200.
- Na directa: multiplicaõ-se as unidades de cada especie pelo seu valor respectivo; a soma dos productos divide-se pelo numero total das unidades do composto; e o quociente he o valor de cada unidade delle.
- Na inversa, sendo duas especies sómente, as partes que dellas se devem tomar são na razão inversa das differenças entre o valor das ditas especies, e o preço proposto. Sendo mais de duas, todas as de maior valor que o misto proposto se ligaráõ arbitrariamente pela regra directa, e da mesma sorte todas as de menor valor: e reduzido o caso a duas especies, se praticará a regra precedente. n. 200.
- A *Progressão Arithmetica* he huma serie de termos, que tem sempre a mesma differença entre si. n. 204.
- Qualquer termo de huma Progressão Arithmetica compoem-se do primeiro, e da differença repetida tantas vezes, quantos são os termos precedentes. n. 206.
- Entre dous numeros dados pôde meter-se qualquer numero de meios proporcionais arithmeticos, diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero dos meios aumentado de huma unidade; o quociente será a razão; ou differença da Progressão, com a qual se formarão os termos pedidos. n. 207.
- A *Progressão Geometrica* he huma serie de termos cada hum dos quais contém, ou he contido no seu antecedente igual numero de vezes. n. 211.
- Qualquer termo de huma Progressão Geometrica forma-se do primeiro, multiplicado pela razão elevada á potencia, que tem por expoente o numero dos termos precedentes. n. 213.
- Entre dous numeros dados pôde meter-se qualquer numero de meios geometricos, dividindo o maior pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão correspondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade; esta raiz será a razão da Progressão com a qual se formarão os meios pedidos. n. 215.
- Os *Logarithmos* são os numeros de huma Progressão Arithmetica, que correspondem termo por termo a outra serie de numeros em Progressão Geometrica. n. 216.
- Na construcção dos Logarithmos vulgares fez-se corresponder a progressão arithmetica 0, 1, 2, 3, &c. á progressão geometrica 1, 10, 100, 1000, &c. n. 218.
- Chama-se *Caracteristica* de hum Logarithmo a letra, ou letras, que á esquerda estão no lugar dos

- dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.
- O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas são as unidades da característica, e mais huma. n. 222.
- A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 226.
- O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo d'elle, multiplicado pelo expoente da mesma potencia. n. 229.
- O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo d'elle, dividido pelo expoente da mesma raiz. n. 230.
- O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.
- Prática-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.
- O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracção, achar-se-ha, reduzindo tudo a fracção, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.
- O Logarithmo de huma fracção propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do sinal —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isto os Logarithmos das fracções proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.
- Se á característica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero des, cem, mil vezes &c. maior; e ao contrario. n. 238.
- Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde ás primeiras quatro, ou cinco letras d'elle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cettará outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a característica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.
- O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da Característica se tiraõ tantas unidades, quantas são as casas decimais. n. 240.
- O Logarithmo de huma fracção decimal propria busca-se tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas são as casas decimais, e ao resto se poem o final —.
- Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se não acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximoamente menor. n. 243.
- Se o Logarithmo tiver menor, ou maior característica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula para

para a direita tantas casas, quantas foraõ as unidades que se tiráraõ, ou para a esquerda, quantas foraõ as que se ajuntáraõ á caracteristica. n. 243. 245.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo negativo, tira-se este de tantas unidades, quantas bastarem para que a caracteristica do resto pertença á classe suprema das Taboas; e no numero correspondente se tomarãõ tantas casas decimais, quantas foraõ as unidades das quais se diminuo o Logarithmo. n. 246.

Complemento Arithmetico de hum numero he a differença entre elle, e a unidade seguida de tantas cifras, quantas sãõ as casas do mesmo numero. n. 250.

Toma-se o complemento de hum numero, escrevendo da esquerda para a direita o que falta a cada huma das letras para 9, e na ultima o que lhe falta para 10. n. 249.

Por meio dos Complementos se mudaõ as subtraçcoens em addiccoens, substituindo em lugar dos Logarithmos subtractivos os seus complementos, e deixando na forma de escrever tantas dezenas na caracteristica, quantos forem os complementos. n. 252.

Ao Logarithmo de hum quebrado dá-se forma positiva, ajuntando ao Logarithmo do numerador o complemento do Logarithmo do denominador; mas neste Logarithmo se entenderá que fica huma dezena de mais

na caracteristica, a qual se tirará no fim das operaçoens em que elle entrar, podendo ser. n. 253.

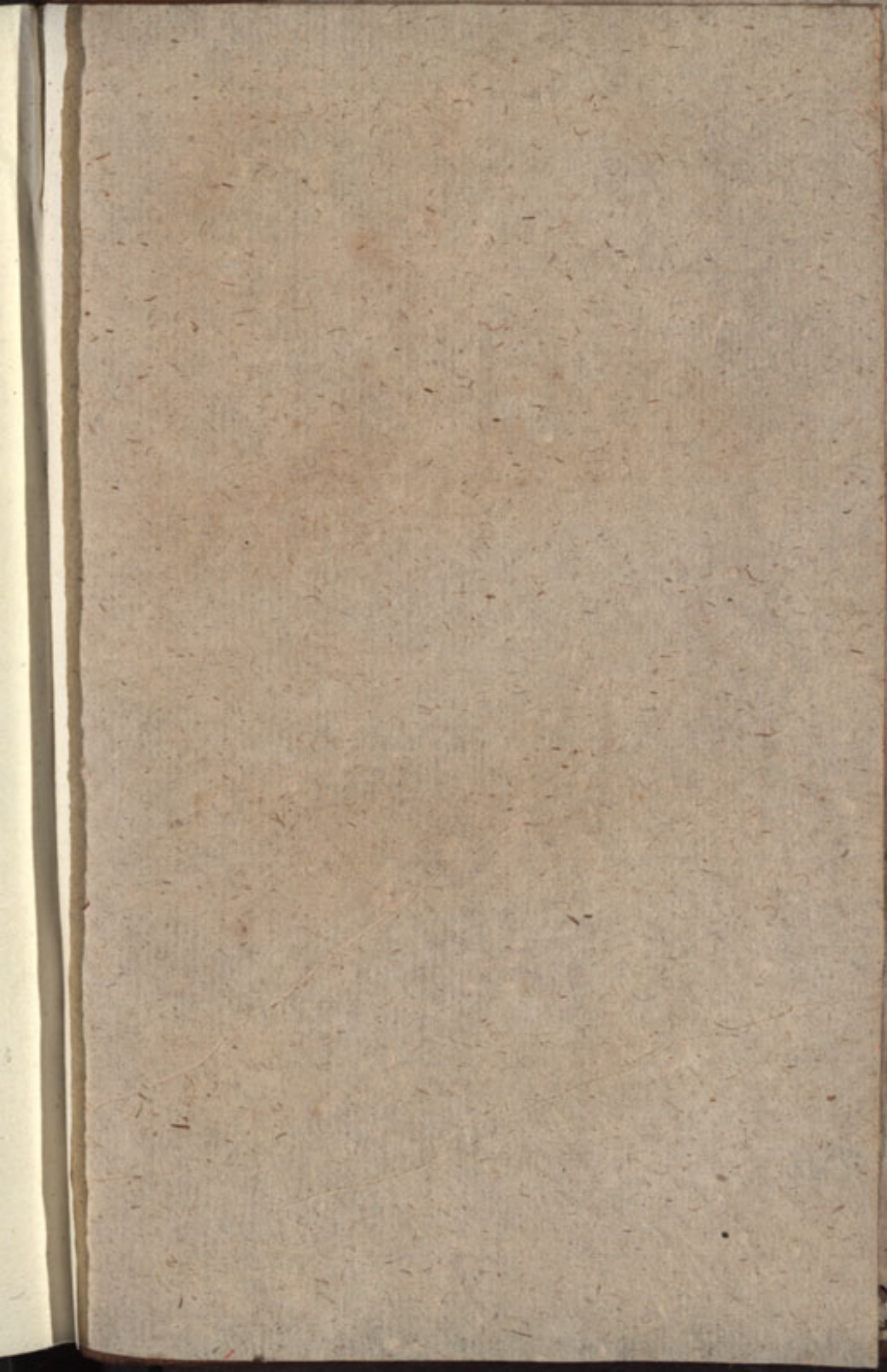
Para dar forma positiva ao Logarithmo de huma fracção decimal, busca-se como se foisse numero inteiro, e dá-se-lhe huma caracteristica que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas sãõ as casas desde a virgula até a primeira letra significativa da fracção. n. 254.

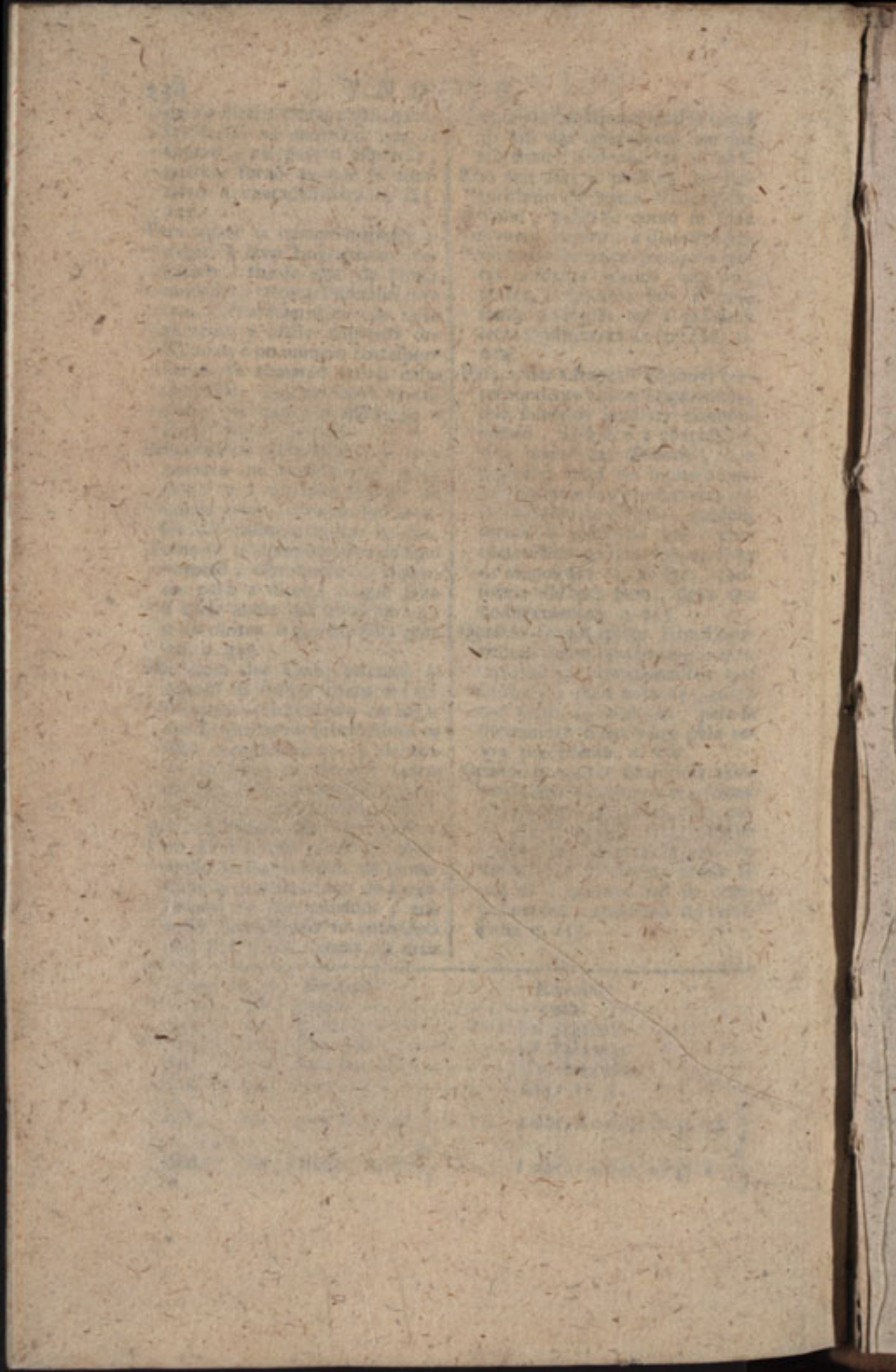
Para achar a fracção decimal correspondente a hum Logarithmo, que sabemos involver complemento, dá-se-lhe a caracteristica maior das Taboas, e a primeira letra do numero correspondente se escreve tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a caracteristica do Logarithmo tiver de menos que 10, 20 &c., conforme elle tiver hum, dous &c complementos. n. 255.

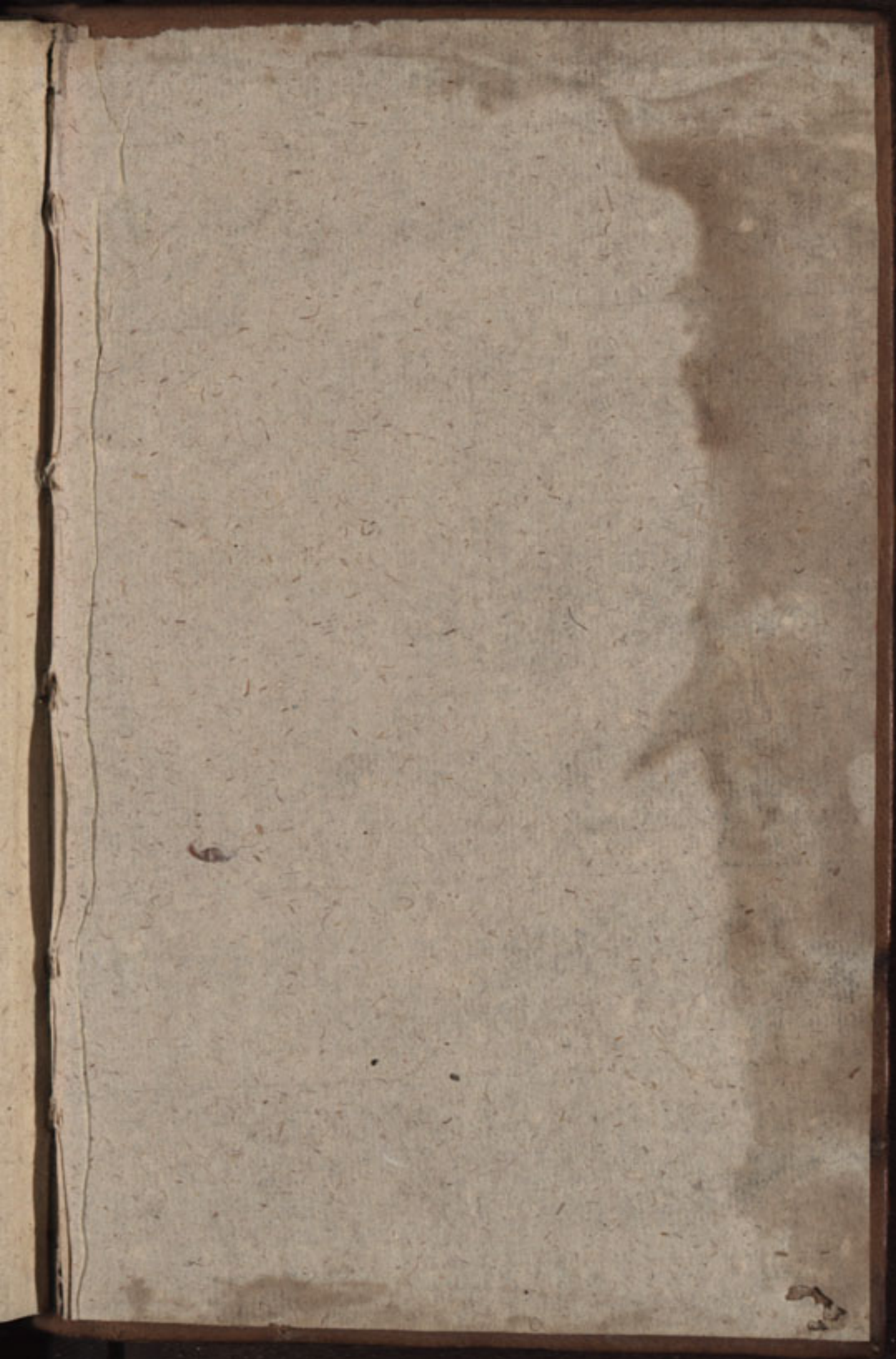
Quando se multiplica hum Logarithmo destes, igualmente se multiplicaõ os complementos que inclue; e deve notar-se, quantos ficaõ no resultado, para se determinar o seu valor pela regra precedente. n. 256.

Quando se houver de dividir, ajuntar-se-haõ as dezenas que forem necessarias á caracteristica, para que o numero dos complementos seja hum multiplo do divisor; e do mesmo modo se notará, quantos sãõ os complementos, que ficaõ no resultado. n. 257.

Pag.	Lin.	Erratas	Emendas
4.	29.	vezem - - - - -	vezes
41.	4.	R. partir - - - - -	59. Repartir
55.	13.	Para que - - - - -	68. Para que
116.	18.	Para isto - - - - -	121. Para isto
109.	25.	2549 18 7 - - - - -	2549 18 5
123.	20.	4 oitav. 57 gr. $\frac{3}{5}$ - - -	4 onç. 6 oitav. 28 gr. e $\frac{4}{5}$
ibid.	22.	3 oitav. 14 gr. $\frac{2}{5}$ - - -	3 onç. 1 oitav. 43 gr. e $\frac{1}{5}$







ARITHME
DE BEZO