ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c &c.

Traduzidos do Francez..

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXIII.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

ELEMEN-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆNOTIONES

De natura, & diversis Numerorum generibus.

1

QUANTITAS generatim dicitur omne id, quod augeri, vel minui potest: ut *extensio*, *duratio*, *pondus*, &c. Quantitatis in universum pertractatio ad Mathesim refertur. Arithmetica vero, quæ inter Mathematicas Disciplinas prima, & cæterarum veluti janua censetur, circa quantitatem numeris contentam (quam *discretam* vocant) occupatur.

2 Est igitur *Arithmetica* numerandi scientia: Hæc numerorum naturam, proprietatesque considerat; idque sibi propositum habet, ut viam, atque rationem præscribat non modò numeros repræsentandi, sed eos componendi, ac resolvendi: quod qui certa, expeditaque methodo peragit, is rationes subducere, aut supputare dicitur.

3 Ut vero accuratam numerorum notionem habeamus, primùm quid sit *unitas* scire oportet.

4 *Unitas* est quantitas (pro lubitu plerunque sumpta) ad quam omnes quantitates ejusdem generis referuntur. Sic, quum dicimus corporis pondus esse *quinque* libras, *libra* est unitas, quantitas scilicet, qua in comparationem adhibita corporis pondus innotescit. Eodem modo *unciam* pro unitate assumere licebat: quod si fieret, corporis ejusdem pondus esset *octoginta*.

5 *Numerus* exprimit quot unitates, aut unitatis partes in quantitate qualibet data contineantur.

Si quantitas abſoluta unitatum multitudine conſtat, numerus eam exprimens, *integer* appellatur: ſin autem ex unitatibus & ſimul unitatis partibus, aut ſi tantum ex unitatis partibus coaleſcit, numerus dicitur *fractus*, aut *fractio*: ſic *tres & ſemi* fractum numerum, *tres quadrantes* fractionem conficiunt.

6 Si ſpecies unitatum numerando non deſignatur, ut quum dicimus *tres*, aut *ter*, *quatuor*, aut *quater*, numerus *abſtractus* nominatur: ſi vero unitatum ſpecies definitur, ut *quatuor libræ*, *bis centum mille pondo* (*cent tonneaux*), numerus *concretus* appellatur.

Plura ſunt alia numerorum genera, quæ poſtea, quum de iis ſermo erit, commodius definienda relinquimus.

De Numeratione cõmuni, & Decimali.

7 NUmeratio eſt ars propoſitum quemlibet numerum exprimendi, idque paucis vel nominibus, vel characteribus. Characteres hujuſmodi *Cifras* appellant. (*Cifra* genuino ſenſu nobis erit *nihili* ſignum, quod alii *zerum* vocant). Numerorum nomina hîc tradere opus non eſt, quippe quæ ſunt omnibus notiſſima. Quod vero ad methodum attinet, qua numeri ope notarum exhibentur, *Numerationis* principia accurate explanandа ſuſcipimus.

8 Jam characteres, quibus hodie numerando utimur, & numerorum illis reſpondentium nomina, ſunt hujuſmodi:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ciſra	*unum*	*duo*	*tres*	*quatuor*	*quinque*	*ſex*	*ſeptem*	*octo*	*novem.*

Ut autem numeri quanticunque eſſent, his characteribus exhiberi poſſent, illud inſtitutum eſt, ut ut ex decem unitatibus una conflaretur, quæ *decas* appellaretur, & per decadas pariter ac per unitates numeratio fieret: ut decades *duæ*, decades *tres* &c. usque ad *novem*. Ad repræsentandas verò novas hasce unitates, placuit easdem notas adhibere, quibus in simplicibus unitatibus exprimendis utimur, hoc tantum discrimine, ut ad sinistram unitatum simplicium collocarentur.

Sic ad exprimenda *quinquaginta quatuor*, quæ decadas *quinque*, & *quatuor* unitates continent, scribendum est 54. Ad *sexaginta* exprimenda, quæ perfectum decadum numerum continent, nullam verò unitatem, scribere debemus 60, cifram adhibendo, quæ & nullas ibi reperiri unitates ostendat, & notam 6 ad *decadum* numerum significandum determinet. Et eodem modo numerare licet usque ad *nonaginta novem*.

9 Quare, antequam ulterius progrediamur, hanc *Numerationis* hodiernæ proprietatem animadvertamus oportet: *Notam scilicet quamlibet ad sinistram alterius positam, aut quam cifra subsequatur, numerum exhibere decies maiorem, quàm ipsa sola indicaret.*

10 Eadem lege à 99 usque ad *nongenta & nonaginta novem* numeratio instituitur. Nam ex decem decadibus unitatem conficimus, quam *centenam* appellamus, quia decies decem centum efficiunt: tum *centenas* hujusmodi ab *una* usque ad *novem* numeramus, & notis iisdem exhibemus, hoc tantum discrimine, ut ad decadum sinistram rejiciantur.

Si itaque *octingenta* & *quinquaginta novem* exprimere velimus, quibus *octo* centenæ, *quinque* decades, & *novem* unitates continentur, scribere debemus 859. Si *octingenta* & *novem*, quibus *octo* insunt centenæ, *nullæ* decades, & *novem* unitates, hoc modo scribendum est 809; cifra nimirum vacuam decadum ſedem indicante. Quod ſi unitates pariter deficerent, cifras duas adhiberemus; ut ad enuntianda *octingenta*, ſcribere neceſſe ſit 800.

11 Quare & illud pariter ex hujuſmodi inſtitutione animadvertendum: *Notam quamlibet, quam duæ quæcumque aliæ ſequantur, numerum exhibere centies maiorem, quàm ſola indicaret.*

12 Pari artificio à 999 uſque ad *novem millia nongenta & nonaginta novem* numerabimus, ſi primùm ex decem centenis unitatem conficiamus, quam *mille* appellabimus, quia decies centum mille conficiunt: deinde has unitates modo jam tradito numeremus, & iiſdem notis repræſentemus ad centenarum ſiniſtram poſitis.

Sic *ſeptem millia, octingenta, & quinquaginta novem* exprimuntur per 7859; *ſeptem millia, & novem* per 7009; *ſeptem millia*, per 7000. Unde intelligitur, *notam tribus aliis, aut tribus cifris præpoſitam numerum denotare millies maiorem, quam ipſa ſeorſum exprimeret.*

13 Si ad hunc modum progrediamur, decemque unitates cujuſque ordinis in unam colligamus, & novas inde emergentes unitates ſedibus ad ſiniſtram gradatim vergentibus aſſignemus, id conſequemur, ut iiſdem decem notis numeros omnes, qui excogitari poſſunt, uniformi ratione exprimamus.

14 Ut autem numerus quotcunque notis expreſſus facili negotio enuntietur, diſtribuendus erit in claſſes, quarum ſingulæ tribus notis conſtent, ſi poſtremam verſus ſiniſtram excipias, quæ pro notarum numero una vel duabus conſtare poteſt. Primæ claſſi, tertiæ, & reliquis imparibus à dextra ad ſiniſtram ſequentia nomina tribuemus, *unitates, milliones, billiones, trilliones, &c.* Secundæ verò, & reliquis paribus cōmune nomen *mille*. His poſitis, prima cujuſque claſſis nota (initio

ſto ſemper à dextra facto) ejus claſſis unitates indicabit, altera earum decadas, tertia centenas.

Tum, initio jam à ſiniſtra facto, ſingulas claſſes ita enuntiabimus, quaſi ſeorſum acciperentur, ſuarum cuique unitatum nomen adhibendo. Sic ex. gr. ut numerum ſequentem verbis exprimamus,

23,	456′	789,	234′	565,	456
Mille	*billiones*	*mille*	*milliones*	*mille*	*unitates.*

Dicendum: Viginti tres *mille*, quadringenti & quinquaginta ſex *billiones*; ſeptingenti & octoginta novem *mille*, ducenti triginta quatuor *milliones*; quingentæ & ſexaginta quinque *mille*, quadringentæ & quinquaginta ſex *unitates*.

15 Ex modò tradita Numerationis lege, quæ ab hominum inſtituto omninò profluxit, illud conſequitur, quò plus à dextrâ ad ſiniſtram progredimur, eò unitates, quæ per notas ſingulas exhibentur, decies fieri perpetuò maiores. Quare ſi numerum decies, centies, millies &c maiorem reddere velimus, nihil aliud opus eſt, quàm poſt notam unitatibus conſignatam *cifram* unam, duas, tres &c. ſubjungere. Et viciſſim: eadem ratione conſtat, quò plus a ſiniſtra ad dextram gradatim revertimur, eò unitates evadere decies perpetuò minores.

16 Et hujuſmodi quidem eſt *Numeratio* uſu recepta. Quæ naturæ magis conſentanea cæteris omnibus numerandi generibus fundamentum eſt, licet in pleriſque artibus ea ſemper non ſervetur numerationis ratio, quæ per decadas, decadas decadum &c. progrediatur.

17 At vero ut quantitates aſſumpta unitate minores numeris exprimantur, non abſimili ratione unitas ipſa in unitates minores dividitur. Earum numerus pro lubitu aſſumitur, dummodo iis quanti-

tatibus,

tatibus, quæ proponuntur, exprimendis conveniant. Sed illud imprimis curandum circa ejusmodi divisiones, ut calculis peragendis fiant, quam maximè poterint, commodissimæ. Ea de causa unitas non est in plurimas illico particulas distribuenda, quæ minimis quantitatibus exprimendis sufficiant; sed potius ea ineunda divisionis ratio, ut primum in pauciores quasdam partes fiat, quæ iterum in alias minores distribuantur, & ita deinceps. Hujus rei exemplum præbent nummi, in quibus *Libra* in 20 partes dividitur, quæ *solidi* appellantur; *solidi* vero in 12 partes, quas *denarios* nominamus. Idem in ponderibus observatur: nam *Libra* in duos *besses* distribuitur, *bes* in 8 *uncias*, *uncia* in 8 *drachmas* &c: unde numeratio fit in primo casu per *vigesimas*, & *duodecimas*, in secundo vero per *semisses*, *octavas* &c.

18 *Complexus* (*Denominatum* alii, alii *Heterogeneum* vocant) est numerus, qui ex hujusmodi partibus constituitur, quæ ad diversi generis unitates referuntur: *Incomplexus* verò, qui unam tantum unitatum speciem complectitur. Sic 8 $^{lb.}$, aut 8 *Libræ* numerus est incomplexus; 8 $^{lb.}$ 17 $^{s.}$ 8 $^{d.}$, vel 8 *Libræ*, 17 *solidi*, 8 *denarii*, complexus.

19 Jam artis cujusque peculiaris quædam est ratio primam sibi propositam unitatem dividendi. Neque enim eodem modo *hexapedam*, ac *libram* dividimus; *libram*, ac *diem*, vel *horam*: *diem* præterea, & *horam* aliter dividimus, atque *bessem*, & ita de reliquis. Omnes autem hujusmodi divisiones indicabimus, quum de numeris complexis sermo erit.

20 Porrò ex omnibus unitatis divisionibus, ac subdivisionibus ea calculis aptissima proculdubio est, quæ fit per partes *decimales*, unitatem scilicet dividendo in partes decies, ac decies perpetuò minores. Illius usus in Mathematicis calculis fre-

frequentissimus est. Decimalium verò genesis & calculus idem omninò est, ac vulgarium, vel integrorum numerorum, quemadmodum deinceps ostendemus.

21 Ut decimalibus exprimantur partes unitate minores, unitatem ipsam, veluti *libram*, *hexapedam*. &c concipimus ex decem partibus compositam, ad eum modum quo *decadem* ponimus ex decem unitatibus simplicibus conflatam, aut *libram* ex 20 *solidis*. Hujusmodi unitates, ut à decadibus discriminentur, *decimæ* appellantur; notis iisdem, quibus simplices unitates, exprimuntur; & quoniam decies minores sunt, ad earum dextram collocantur.

Sed ne ambiguitati locus relinquatur, & *decimæ* per imprudentiam pro unitatibus principalibus sumantur, harum sedem placuit semel stabilire, ac peculiari nota designare, quæ plerumque virgula est (vel punctum, vel lineola) ad dextram notæ unitates exhibentis posita, seu, quod idem est, inter *unitates*, & *decimas*: sic ad exprimendas *viginti quatuor unitates*, & *tres decimas*, scribendum est 24,3.

22 Nunc similiter *decimas* considerare possumus, tanquam unitates ex decem aliis compositas, quarum singulæ decies minores sint *decimis*, & eas eadem ratione ad harum dextram adponemus. Unitates hujusmodi decies minores *decimis* erunt centies minores primis illis unitatibus, proinde que *centesimæ* dicentur. Quare si designare velimus, *viginti quatuor unitates*, *tres decimas*, & *quinque centesimas*, scribemus in hunc modum 24,35.

23 Rursus, si eadem ratione *centesimas* fingamus decem partibus constare, partes hujusmodi erunt millies minores prima unitate, ac idcircò *millesimæ* appellabuntur: & quia sunt decies minores *centesimis*, ad earum dextram constituentur. Et ita

dein-

deinceps, in ratione decupla ſubdividendo, novæ efficientur unitates, quas gradatim nominabimus *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas*, *decimas-millioneſimas*, *centeſimas-millioneſimas*, *&c.* eaſque ſedibus magis ac magis a virgula dextrorſum recedentibus adſcribemus.

24 Id genus partes, in quas unitas dividitur perpetuò in ratione decupla, *fractiones decimales*, aut *decimales* ſine addito nominantur.

25 Quod verò ad earum enuntiationem attinet, res ferme ut in numeris vulgaribus conficitur. Poſt enuntiatas notas ad ſiniſtram virgulæ ſitas, decimales ſimiliter enuntiantur, addito tamen ad finem nomine unitatum decimalium poſtremæ ſedi congruentium: ſic ad enuntiandum hunc numerum 34, 572 dicendum eſt, triginta quatuor unitates, & quingentæ ſeptuaginta duæ milleſimæ: ſi ex. gr. de *hexapedis* ſermo eſſet, haberentur triginta quatuor *hexapedæ*, & quingentæ ſeptuaginta duæ milleſimæ ipſius *hexapedæ* partes.

Hujuſce rei perſpicua ratio erit, ſi animadvertamus in numero 34, 572 notam 5 æque ſumi poſſe pro quinque *decimis*, aut pro quingentis *milleſimis*: cum enim *decima* valeat 10 *centeſimas* (n. 22.) & *centeſima* 10 *milleſimas* (n. 23.), conſequens eſt ut *decima* contineat decies decem ſive 100 *milleſimas*: proinde 5 *decimæ* nihil aliud exhibent, quàm 500 *milleſimas*. Eodem modo nota 7 efferri poteſt per ſeptuaginta *milleſimas*, quia *centeſima* quæque (n. 23) valet 10 *milleſimas*.

26 Quantum autem ad nomen unitatum poſtremæ notæ reſpondentium, id facili negotio inveniemus, ſi notis ſingulis a virgula verſus dextram ſingula nomina ſequentia gradatim tribuamus, *decimæ*, *centeſimæ*, *milleſimæ*, *decimæ-milleſimæ*, *centeſimæ-milleſimæ*, *millioneſimæ* &c.

27 Si nullæ habeantur integræ unitates, ſed

tan-

tantum partes unitatis, cifra unitatum ſedem ante virgulam occupare debet : ſic ad denotandas 125 *milleſimas*, ſcribendum eſt 0, 125. Si 25 *milleſimas* ſignificare libuiſſet, ſcribere deberemus 0, 025, cifra inter virgulam & cæteras notas interjecta, non modo ut nullas ibi eſſe *decimas* conſtaret, ſed etiam ut notis ſequentibus ſuus cuique genuinus valor, ac ſedes attribueretur. Eodem modo ſi ſignificare velimus 6 *decimas-milleſimas*, ſcribere debemus 0,0006 &c.

28 His rite perſpectis, conſiderare oportet, quænam in dato numero mutatio contingat, ſi virgula ſuo loco moveatur.

Quoniam virgulæ id officium eſt, ut unitatum ſedem determinet, cumque cæterarum notarum valor ex earum ab ipſa virgula diſtantiis æſtimetur, illud conſequitur, ſi virgula uno loco, duobus, tribus &c. verſus ſiniſtram retrahatur, numerum fieri decies, centies, millies &c. minorem ; & ab oppoſito, decies, centies, millies &c. maiorem, ſi uno, duobus, tribus locis &c. verſus dextram promoveatur.

Quamobrem, ſi fuerit numerus 4327, 5264, & virgula uno loco verſus ſiniſtram recedat, ut ſcribatur 432, 75264 ; facile apparet, ea quæ *millia* ſunt in primo numero, *centenas* evadere in ſecundo ; *centenas* etiam in *decadas* mutari, *decadas* in *unitates*, *unitates* in *decimas*, *decimas* in *centeſimas*, & ſic deinceps. Igitur prioris numeri partes ſingulæ (adeoque totus numerus) hac mutatione decies minores redditæ ſunt. Contrà vero, ſi virgula uno loco dextrorſum concedat, ut ſcribatur 43275, 264 ; quæ *millia* in primo numero fuerant in *decadas* millium convertuntur, *centenæ* in *millia*, *decades* in *centenas*, *unitates* in *decadas*, *decimæ* in *unitates*, & ita deinceps. Numerus igitur emergit propoſito decies maior.

29 Si-

29 Simili plane ratiocinio perſpicuum eſt, quod, ſi virgula duabus vel tribus ſedibus ſiniſtrorſum retrahatur, numerus redditur centies vel millies minor; & ab oppoſito centies vel millies maior, ſi virgula duabus aut tribus ſedibus dextrorſum progrediatur; & ſic deinceps.

30 Illud poſtremo obſervandum nobis eſt, quod licet plurimæ cifræ ad poſtremam decimalium notam adjungantur, numeri valorem nullo modo poſſunt immutare, ſi virgula loco non moveatur. Sic 43, 25 idem omnino eſt atque 43, 250, vel 43, 2500, vel 43, 25000 &c.

Etenim, cum *centeſima* quæque valeat 10 *milleſimas*, vel 100 *decimas-milleſimas* &c. 25 *centeſimæ* idem omnino exhibent atque 250 *milleſimæ*, vel 2500 *decimæ-milleſimæ* &c. Uno verbo: Res ita ſe habet, quaſi pro 25 *aureis* (25 *piſtoles*) dicamus 250 *francos*; aut pro 25 *centumpondiis* (25 *quintaux*), 2500 *libras*.

De Arithmeticæ Operationibus.

31 *ADditio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Diviſio* quatuor præcipuæ ſunt Arithmeticæ operationes, quibus reliquæ omnes innituntur. Omnis enim, quæ circa numeros quæſtio verſatur, ad illarum aliquam, vel plures exequendas tandem revocatur. Quapropter plurimum intereſt, his facili negotio exequendis aſſueſcere, earumque rationem perſpectam, ac penitus familiarem habere.

32 Arithmetica, ut paulò ſuperius diximus, id ſibi propoſitum habet, ut viam tradat numeros facili exploratáque ratione ad calculum revocandi. Quod quidem in eo potiſſimum conſiſtit, ut in calculis tractandis numeri maximè compoſiti ad ſimpliciores, aut pauciſſimis, quoad fieri poteſt, notis expreſſos redigantur. Id autem deinceps explanandum eſt.

A D-

ADDITIO
Numerorum integrorum, & Decimalium.

33 *A Ddere* nihil aliud eſt, quàm plures numeros per unum illis ſimul ſumptis æqualem exprimere. Quoties numeri, qui addendi proponuntur, *digiti* ſunt, id eſt, una tantum nota conſtant, nulla regula opus eſt: at ſi plures habeant notas, tum ad collectum eorum valorem, qui *ſumma* dicitur, inveniendum, en regulam in *Additione* tenendam: ſcribe numeros omnes datos ſupra ſe invicem, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenæ centenis &c. in eadem columna verticali ſibi mutuo reſpondeant. Et infra numeros ita ſcriptos duc lineam tranſverſam, quæ ſummam ab addendis partibus dirimat.

Tum primò: adde notas omnes, quæ ſunt in columna unitatum. Si ſumma 9 non excedat, eam ſcribe infra lineam ſub eadem columna unitatum; ſi excedat, quia tum decadas continebit, id tantum ſcribe, quod decadum numerum excedit, & decadas quaſi totidem unitates adde notis columnæ proximè ſequentis. Idem obſerva in additione ſecundæ columnæ, & ita deinceps uſque ad poſtremam, infra quam ſumma tandem inventa ſcribenda erit integra, ſive una, ſive pluribus notis conſtet. Res exemplis fiet illuſtrior.

Exemplum I.

A Ddendus eſto numerus 54925 numero 2023; eos cſribo in hunc modum 54925

$$\begin{array}{rl} 54925 & \\ 2023 & \\ \hline 56948 & \text{Summa.} \end{array}$$

Tum

Tum ducta linea transversa, ab unitatum additione incipio, hoc modo: 5 & 3 conficiunt 8, & scribo 8 sub eadem columna; deinde in columna decadum, 2 & 2 conficiunt 4, quæ pariter subscribo; tum in columna sequenti, 9 & 0 sunt 9, quæ similiter scribo; deinde in proxima columna, 4 & 2 efficiunt 6, quæ subjicio; postremò in ultima columna, 5 & 0 sunt 5, quæ supposita vides.

Perspicuum est, numerum 56948 hac operatione inventum, summam esse datorum numerorum, quos addendos sumpsimus, quia complectitur omnes eorum unitates, decadas, centenas, millia, & decadas millium, quæ quidem omnia gradatim operando collegimus.

Exemplum II.

QUæritur summa horum quatuor numerorum ... 6903 .. 7854 .... 953 .... 7327: eos ita scribo, ut in subjecto schemate apparet.

$$\begin{array}{rl} 6903 & \\ 7854 & \\ 953 & \\ \underline{7327} & \\ 23037 & \text{Summa.} \end{array}$$

Et initium ducens à dextra, ut in priori exemplo, rem ita conficio: 3 & 4 sunt 7, & 3 fiunt 10, & 7 sunt 17; scribo 7 unitates sub prima columna; & decadem 1 servo, ut instar unitatis, addatur notis alterius columnæ, quæ pariter decadas significant.

Ad secundam columnam venio, & notas colligo ad hunc modum: 1, quod retinui, & 5 (nam cifram appellare nihil attinet) conficiunt 6, & 5 con-

conficiunt 11, & 2 conficiunt 13; ſcribo dexteriorem notam 3 ſub eadem columna, & alteram 1 ſervo ad proximam columnam, ubi inſtituto ſimiliter calculo progredior, 1 & 9 fiunt 10, & 8 fiunt 18, & 9 fiunt 27, & 3 fiunt 30: ſub hac columna ſcribo dexteriorem notam 0, & alteram 3 retineo ſequenti columnæ adnumerandam, ad hunc modum; 3 & 6 ſunt 9, & 7 valent 16, & 7 fiunt 23. Hujus numeri ſcribo priorem notam 3 ad columnam pertinentem, & quoniam altera 2 columnam ulterius non habet, cui addatur, ipſa ſedem proximè ſiniſtram occupabit; abſolutaque operatione numerus inventus 23037 ſummam quatuor datorum exhibebit.

34 Siquæ præterea ſint partes decimales, cum ipſæ pariter ac cæteri numeri per decadas numerentur, prout à dextra verſus ſiniſtram progredimur, eadem omnino regula in earum additione obtinet, ea ſemper lege ſervata, ut unitates ejuſdem ordinis ſub eadem columna ſibi mutuo reſpondeant.

Exemplum III.

Sint addendi tres numeri 72,957 . . . . . 12,8 . . . . . & 124,03; eos ita ſcribemus, ut hîc videre licet.

72,957	
12,8	
124,03	
209,787	Summa.

Et inſtituta, ut in ſuperioribus exemplis, operatione inveniemus eorum ſummam eſſe 209,787.

SUB-

SUBTRACTIO
Numerorum integrorum, & Decimalium.

35 SUbtractio est operatio, cujus ope numerus à numero aufertur. Quod, facta hujusmodi operatione, reliquum est, *residuum*, *excessus*, aut *differentia* nominatur.

Ut hæc operatio fiat, numerus subtrahendus alteri subscribatur, ea lege servata, quam in *additione* tradidimus; deinde, ducta linea transversa, singulæ notæ inferiores (à dextra versus sinistram) à superioribus illis respondentibus auferantur, hoc est, unitates ab unitatibus, decades à decadibus &c; & quæ supersunt infra scribantur eodem ordine; cifra verò, ubi nihil reliquum est.

Si nota inferior maior sit, quàm superior illi respondens, huic adjungantur decem unitates, quas quidem habebimus, si mente unitatem unam mutuabimur a nota vicina ad sinistram, quæ idcirco in operatione sequenti unitate multata censeri debet.

Exemplum I.

SUbtrahendus sit numerus 5432 à numero 8954. Eos scribes in hunc modum:

$$\begin{array}{r l} 8954 & \\ \underline{5432} & \\ 3522 & \text{Residuum.} \end{array}$$

Deinde ab unitatum sede exorsus ita ratiocinaberis: Si 2 a 4 auferantur, supersunt 2, & subscribes 2; tum in decadum sede, si 3 a 5 subducantur, relinquuntur 2, quæ similiter sub decadibus scribes; inde in tertia columna, si 4 a 9 subtrahantur, remanent 5, quæ infra notabis; postremò, mò, si 5 ab 8 auferantur, supersunt 3, quæ eodem modo subscribes; & erit residuum, sive differentia inter numeros datos 3522.

Exemplum II.

SUbtrahendus sit numerus 7987 à 27646. Scribantur ad hunc modum 27646

7987

19659 Residuum.

Et quia à 6 auferri 7 non possunt, unitas a nota vicina 4 petenda est ut fiant 16, & tunc dicendum est, si 7 a 16 auferantur, supersunt 9 infra scribenda. Jam in decadum sede dicendum non est, si 8 a 4 auferantur, sed, si 8 à 3, quia unitas in priori operatione ablata fuit a nota 4. Quoniam vero 8 a 3 auferri similiter nequeunt, unitas quoque a nota vicina 6 petenda est, ut fiant 13, & tunc ablatis 8 a 13 supersunt 5, quæ infra scribentur. Hinc in tertia columna dicendum similiter est, ablatis 9 a 5, seu potius a 15 (unitatem scilicet proximæ sedis usurpando) relinquuntur 6 infra notanda. Ob eandem rationem in quarta sede dicendum, ablatis 7 a 16 supersunt 9, quæ subscribentur; & quia in postrema sede nihil habemus subtrahendum, scribenda erit nota superior 2, habita tamen ratione unitatis jam ablatæ, ut maneat tantum 1; proindeque integrum residuum habetur 19659.

36 Si nota, unde unitas petenda est, fuerit cifra, ab illa quidem non accipitur, sed a nota significativa proximè sequenti. Licet vero tunc nihil aliud re ipsa fiat, quàm 100, 1000, aut 10000 petere, prout una, duæ, vel tres cifræ consequuntur, nihilominus operatio instituetur, ut in exemplis superioribus, hoc est, 10 tantummodo

notæ

notæ indigenti adjicientur, ſive unitas proximæ ſedis. Et quia 10 illa ſumpta cenſentur ex 100, vel 1000 &c. ablatis a proxima nota ſignificativa, ut habeatur ratio reſiduorum 90, vel 990 &c; cifræ omnes conſequentes pro totidem 9 habendæ ſunt. Id exemplo ſubſequenti fiet perſpicuum.

Exemplum III.

	99
SI à numero - - - - - - - - -	20064
auferre velimus - - - - - - -	17489
	2575 Reſiduum.

Primùm dicendum erit, ablatis 9 a 4, ſeu potius a 14 (unitate ſcilicet a nota ſequenti accepta) ſuperſunt 5. Deinde, cum 8 a 5 in proxima ſede auferri nequeant, neque etiam poſſit unitas a nota ſequenti utpote cifra poſtulari, ea accipietur a nota 2, & habita ratione ad ſedem ubi operamur 1000 valebit. Ex his 1000 capientur tantummodo 10 notæ indigenti adjungenda, ut fiant 15, a quibus ſi 8 auferantur, ſuperſunt 7.

Quia vero ex 1000 tantummodo 10, aut ex 100 tantummodo unitatem adhibuimus, reſiduum 99 adhibebimus, ut ab eo duæ notæ ſequentes auferantur, id quod perinde eſt, ac cifras ſequentes pro totidem 9 habere. Sic proinde dicendum eſt, ablatis 4 a 9, manent 5, ablatis 7 a 9 habentur 2, & tandem 1 ab 1 ablato nihil ſupereſt.

37 Si numeri ad operationem propoſiti partibus etiam decimalibus conſtent, eadem omnino regula tenenda erit. Ut tamen praxis planior evadat & expeditior, curandum prius erit, ut æque multæ ſint notæ decimales in utroque numero, tot nimirum,

rum, quot opus fuerint, cifris additis eorum alteri, qui pauciores habeat notas decimales: quod ejus valori nihil officit (n. 30.)

Exemplum IV.

SI a numero - - - - - - - - 5403,25
Subtrahendus sit - - - - - - 385,6532

Primùm duas cifras addo decimalibus numeri superioris; deinde operationem instituo circa numeros ita præparatos juxta regulam pro numeris integris traditam,

$$\begin{array}{r} 5403,2500 \\ 385,6532 \\ \hline 5017,5968 \end{array} \quad \text{Residuum.}$$

Qua absoluta, residuum invenio 5017, 5968.

Additionis, & subtractionis Examen.

38 EXamen operationis Arithmeticæ est operatio alia ad id instituta, ut primam recte processisse certiores simus.

Ut examen *Additionis* fiat, singulæ rursus columnæ adduntur, sed ordine inverso a sinistra versus dextram. Primæ columnæ aggregatum aufertur a membro summæ probandæ illi respondente, & residuum, si quod fuerit, in eadem sede subscribitur, quod decadum loco notæ sequenti ejusdem summæ adplicatur, ut novum fiat membrum, unde rursus columnæ sequentis aggregatum subtrahatur, & ita porrò usque ad postremam sedem, ubi subtractione facta nihil superesse debet.

Sic, cum paulo ſuperius inventum ſit, quatuor hoſce numeros 6903

	6903
	7854
	953
	7327
Summam conficere ...	23037
	03110
	000

Ad illam probandam, eoſdem rurſus numeros colligo, initium ducens à ſiniſtra, hoc modo: 6 & 7 efficiunt 13, & 7 efficiunt 20, quibus ſubductis à 23, relinquunt 3, aut tres decadas, quæ cum cifra poſteriori conjunctæ efficiunt 30. Deinde in ſecunda columna: 9 & 8 ſunt 17, & 9 ſunt 26, & 3 ſunt 29, quibus ablatis à 30 reliquum eſt 1, aut decas, quæ cum ſequenti nota 3 conficit 13. Tum in tertia columna: 5 & 5 fiunt 10, & 2 fiunt 12, quibus detractis à 13, relinquitur 1, & cum ſequenti nota 7 fiunt 17. Denique in poſtrema ſede: 3 & 4 conficiunt 7, & 3 efficiunt 10, & 7 efficiunt 17, quæ ſi à membro inferiori 17 ſubtrahantur, nihil ſupereſt: unde colligo priorem *Additionis* operationem accurate fuiſſe confectam. Id autem liquet eſſe colligendum, quum facto examine nihil relinquitur, quia ſingulatim ablatis millibus, centenis, decadibus, unitatibus, ex quibus ſumma tota conflari debet, ſi error operationi non irrepſit, nihil denique ſupereſſe neceſſe eſt.

39 *Subtractionis* examen per *Additionem* fit, reſiduum ſcilicet per operationem inventum, & ablatum conjungendo; ſi enim operatio recta, hujuſmodi aggregatum numerum reſtituet, unde alter fuit ablatus. Sic in tertio exemplo ſuperius tradito

dito, video operationem fuiſſe recte confectam, quia aggregatum ex ablato 17489 & reſiduo 2565 totum 20054 reſtituit, unde illorum prior fuit ſubductus.

20054
17489
2565
20054

§§ Utriuſque Operationis Examen vulgò fit per *abjectionem novenarii*, quæ methodus praxi valde commoda eſt.

Ex numero autem quocumque *novenarius*, quoties poteſt, facile aufertur, ſi notæ ejus omnes continuò addantur, & ubi ſumma fuerit 9 abjiciatur, ubi exceſſerit 9, ejus ſimiliter notæ mente addantur, & quod inde fit retineatur ad operationem proſequendam. Sic, ut abjiciantur novenarii à numero 86097546, dicendum eſt: 8 & 6 ſunt 14, & abjectis novenariis, id eſt, additis etiam notis 1 & 4, fiunt 5; 5 & 7 (nam 0 & 9 appellare ſupervacuum eſt) ſunt 12, & abjectis novenariis, fiunt 3; 3 & 5 ſunt 8, & 4 ſunt 12, & abjectis novenariis, fiunt 3; 3 & 6 ſunt 9, & abjectis novenariis, relinquitur 0.

Hujus vero operationis ratio facile conſtabit, ſi ad *Numerationis* principia attendamus. Nam ex. gr. in numero 6745 nota 6 idem valet ac *millies* 6, hoc eſt, *nongenties nonagies novies & ſemel* 6; ſed *nongenties nonagies & novies* 6 novenarios exactè conficiunt; iis igitur abjectis, manet *ſemel* 6. Similiter nota 7 exprimit *centies* 7, ſeu *nonagies novies & ſemel* 7; adeoque abjectis *nonagies & novies* 7, supereſt ſemel 7. Eodem modo, cum nota 4 exprimat *novies & ſemel* 4, abjectis *novies* 4, reſiduum erit *ſemel* 4. Igitur, ſi addantur notæ omnes, quasi singulæ unitatis sedem occuparent, summa 22 erit residuum ex abjectione novenariorum, qui in *decadibus*, *centenis*, & *millenariis* propositi numeri continentur. Quoniam vero summa residuorum partialium 22, & ipsa novenarios continet, ejus notæ similiter adduntur, ut fiat residuum 4 ex abjectione omnium novenariorum ejusdem numeri 6745.

Jam in *Additione* probanda, abjiciantur *novenarii* à numeris additis, & residuum seorsum notetur; idemque fiat in summa. Si æquale residuum utrobique non fuerit, certum erit indicium, *Additionem* (si modò Examen probè factum est) errore aliquo laborare, cùm fieri nequeat ut summa partibus addendis æqualis sit, si abjectis utrinque novenarii multiplis æquale residuum non emergit. Si autem idem maneat residuum, certum omninò non est, *Additionem* fuisse rectè confectam, sed maximè probabile, si nimirum per novenarii multipla erratum non fuerit; siquidem in examine novenarii abjiciuntur, nulla habita ratione an æquè multi utrobique abjiciantur. Cum tamen illud erroris genus, quod per multipla novenarii progreditur, vix, aut ne vix unquam contingat, nisi dedita opera erratum sit; ubi æquale prodit residuum, operatio recta censebitur. Sic in exemplo superiori, abjectis novenariis à numeris 6903 ... 7854 ... 953 ... 7327, residuum habetur 6; quod, cum similiter in summa 23037 deprehendatur, argumento est operationem fuisse recte confectam.

In *Subtractionis* examine, abjiciuntur novenarii primùm à numero minuendo; deinde à numeris ablato & residuo simul. Et prout idem utrobique, vel diversum fuerit residuum, idem erit judicium, quod modò pro *Additione* indicavimus. Sic in exemplo superiori, ablatis novenariis à minuendo 20054, residuum habetur 2, quod idem

su-

supereſt, ablatis ſimiliter novenariis à reſiduo 2565 & ablato 17489 ſimul; ac proinde *Subtractio* non improbabitur.

De Multiplicatione.

40 MUltiplicare numerum per numerum, nihil aliud eſt, quàm eorum alterum toties accipere, quot ſunt unitates in altero. Sic multiplicare 4 per 3 idem eſt, ac 4 ter ſumere.

41 Numerus, per quem multiplicatur alter, *multiplicator*; qui multiplicatur, *multiplicandus*; & qui ex multiplicatione gignitur, *productum*, ſive *factum* appellatur.

42 Vocabulum hoc *productum* latiori ſenſu vulgò ſumitur. Sed nobis in præſentia illud tantum ſignificabit, quod ex multiplicatione conficitur.

Tam multiplicator quàm multiplicandus, communi vocabulo, *factores* producti nominantur. Sic 3 & 4 factores ſunt numeri 12, quia 4 ter ſumpta conficiunt 12.

43 Ex modò tradita multiplicationis notione ſatis intelligitur, eam peragi poſſe, multiplicandum toties ſcribendo, quot ſunt in multiplicatore unitates, & additionem deinde inſtituendo. Sic ad multiplicandum 7 per 3, ita ſcribere poſſemus.

$$\begin{array}{rl} 7 & \\ 7 & \\ 7 & \\ \hline 21 & \text{Summa.} \end{array}$$

Et ſumma 21 ex operatione confecta eſſet productum.

Sed iſthæc multiplicandi ratio eò longior moleſtiorque evaderet, quo maior numerus foret multiplitiplicator. Quapropter ea, quæ propriè multiplicatio dicitur, methodo compendiaria idem exequitur.

44 Quandiu numeri in *abstracto* considerantur, nulla habita ratione rerum per illos significatarum, parum interest, quisnam ex duobus propositis, multiplicandi, aut multiplicatoris vices gerat. Unde si sit multiplicandus 4 per 3, nihil interest, multiplicetur 4 per 3, an 3 per 4; productum enim semper erit 12. Et sane ter 4 nihil aliud est, quàm triplum numeri 4 semel sumpti, & quater 3 nihil aliud, quàm triplum numeri 1 quater sumpti; est autem manifestum, idem esse quater 1, & semel 4. Et eadem datis quibusque numeris invicem multiplicandis ratiocinatio accommodari potest.

45 Ubi autem circa numeros *concretos* operatio versatur, *multiplicandum* à *multiplicatore* distinguere oportet: quod diligentius erit attendendum in multiplicatione numerorum *complexorum*, de quibus posteà.

Cæterùm ea distinctio nullo fere negotio habetur. Nam ex proposita quæstione semper intelligitur, utra sit quantitas, quæ aliquoties repetenda sumitur, id est, uter sit numerus *multiplicandus*; & utra numerum indicet, quoties multiplicandus repetendus proponitur, quæ idcirco *multiplicatoris* vices gerit.

46 Quia verò multiplicatoris officium est signare, quoties repetendus est multiplicandus, *abstractus* sit numerus necesse est. Sic, quum quæritur quanti constare debeant 52 *hexapedæ* tignarii operis, pretio 36 *librarum* in singulas *hexapedas* constituto, facile discernitur, *multiplicandum* numerum esse 36 *libr.*; toties nimirum accipiendum, quot sunt unitates in numero 52, nulla habita ratione denominationis earum, sive *hexapedas*, sive quid aliud exhibeant.

47 In-

47 Inde conſequitur, *productum*, quod ex *multiplicandi* additione repetita coaleſcit, ad illius etiam *unitates* eſſe referendum. (*)

Hæc præfati de genere, & denominatione unitatum, quæ tum à *factoribus*, tum à *producto* exhibentur, ad ipſius *producti* inveniendi methodum veniamus.

48 Regulæ pro multiplicandis numeris compoſitis reducuntur ad multiplicationem numerorum ſimplicium, unica nota conſtantium. Quapropter, adhibita prius exercitatione, horum utcumque inter ſe multiplicatorum *facta* noviſſe debemus, quæ facile quis inveniet, ſi numerum quemque ab 1 ad 9 ſibi ipſi addat uſque ad novies. Uti etiam quiſque poterit Tabula ſequenti, quæ *Pythagoræ* adſcribitur.

---

[*] Multiplicationem Geometricam ab hac lege neutiquam excipimus, in qua pariter *multiplicatoris* unitates *abſtractæ* neceſſariò ſunt, & *multiplicandi* ac *producti* unitates ejuſdem nominis eſſe debent, uti in Geometria declarabimus.

Tabula Pythagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Prima hujus tabulæ columna, ſive verticalis, ſive tranſverſa, gignitur ex iterata unitatis 1 ad ſe ipſam additione; altera ex ſimili additione numeri 2; tertia ex additione numeri 3, & ita deinceps.

49 Ut hujus Tabulæ auxilio *productum* inveniamus duorum numerorum ſimplicium, quæratur eorum alter, *multiplicandus* ex. gr. in ſuperiori columna tranſverſa, unde rectà deſcendatur uſque ad cellulam poſitam è regione *multiplicatoris*, qui quidem in prima columna verticali reperietur: numerus autem in ea cellula inventus erit *productum* quæſitum.

ſitum. Ut inveniatur ex. gr. productum numeri 9 per 6, ſeu quot ſint ſexies 9, deſcendo á 9 in ſuperiori columna tranſverſa uſque ad cellulam è regione poſitam ipſius 6 primæ columnæ: numerus ibi inventus eſt 54; proindeque ſexies 9 conficiunt 54.

Habes, quantum prærequiritur ad *Multiplicationis* regulam exequendam in numeris per quotcunque notas expreſſis.

MULTIPLICATIO
Numeri compoſiti per numerum ſimplicem.

50 SCribe *multiplicatorem*, quem hîc ponimus unica nota conſtare, ſub numero *multiplicando*. Parum quidem refert, qua ſede ſcribatur; ſed commode tamen ſub unitatum ſede locari conſuevit.

Ducta linea tranſverſa, quæ *productum* inveniendum à *factoribus* dirimat, multiplica notam unitatum multiplicandi per multiplicatorem; & ſi productum unitates tantum contineat, illud unitatum ſedi ſubſcribe; ſin unitates & decadas, unitates tantum ſcribe, & decadas quaſi totidem unitates mente retine.

Multiplica ſimiliter decadas multiplicandi per eundem multiplicatorem; producto adde unitates a proxima operatione retentas, ſi quas habes; & ſummam ſubſcribe decadum ſedi, ſi una quidem nota fieri poſſit, ſin minus, ſolas unitates ſcribe, decadas vero, quæ totidem ſunt centenæ, retine addendas producto ſequenti, quod ex centenis pariter coaleſcet.

Juxta eandem regulam, ſingulatim multiplica omnes

omnes multiplicandi notas; & notarum ſeries ex productis ſingulis orta productum quæſitum exhibebit.

Exemplum.

QUæritur quot pedes habeant 2864 *hexapedæ.* (*Hexapedæ* ſingulæ pedes habent ſex). Quæſtio eò redit, ut ſex pedes toties accipiamus, quot ſunt unitates in numero 2864, quod idem eſt (n. 44), ac 2864 pedes ſumere ſexies.

Scribatur igitur - - - -	2864	Multiplicandus
	6	Multiplicator.
	17184	Productum.

Et ab unitatibus exorſus, dic: ſexies 4 efficiunt 24; ſcribe 4, & 2 unitates pro duabus decadibus reſerva. 2º Sexies 6 efficiunt 36, quæ cum 2 retentis efficiunt 38; ſcribe 8, & 3 ſimiliter reſerva. 3º Sexies 8 efficiunt 48, quæ cum 3 modo retentis faciunt 51, ſcribe 1, & reſerva 5. 4º Sexies 2 conficiunt 12, & 5 retenta conficiunt 17, quæ, quoniam nihil ſupereſt multiplicandum, integra denique ſcribe.

Numerus 17184 ita inventus eſt *productum* quæſitum, ſeu pedum numerus in 2864 *hexapedis* contentus. Continet enim ſexies 4 unitates, ſexies 6 decadas, ſexies 8 centenas, ſexies 2 millia, proindeque ſexies totum numerum propoſitum 2864.

MULTIPLICATIO
Numeri compoſiti per compoſitum.

51 QUum multiplicator pluribus notis conſtat, pro earum unaquaque idem ſervandum eſt, quod paulo ante pro multiplicatore ſimplici præ-

præcepimus, initio facto a nota dexteriore. Ita multiplicentur primùm notæ omnes multiplicandi per unitates multiplicatoris, deinde per ejuſdem decadas, & ſecundum hoc productum primo ſubſcribatur. Cum verò ſecundum productum decadas exponat, quippe per decadas multiplicatio facta eſt, illius dexterior nota decadum ſedi aſſignetur, reliquæ verò ſedibus ad ſiniſtram progredientibus.

Simili plane ratione, tertium quod fiet productum ex multiplicatione ejuſdem numeri multiplicandi per centenas multiplicatoris, ſecundo ſubſcribatur, initio facto ab ipſa centenarum ſede verſus ſiniſtram; & ita deinceps.

Abſolutis ſingulatim multiplicationibus per notas omnes multiplicatoris, producta inde orta addantur, & ſumma erit productum quæſitum.

Exemplum I.

SIt multiplicandus numerus - 65487
per - - - - - - - - - - - - 6958

523896	
327435	
589383	
392922	
455658546	Productum.

Primùm multiplico 65487 per notam multiplicatoris 8, quæ unitatum ſedem occupat, & producti notas gradatim inventas 523896 infra lineam ſcribo, operatione inſtituta juxta regulam pro caſu primo ſupra traditam (n. 50.)

Deinde multiplico eundem numerum 65487 per alteram multiplicatoris notam 5, & productum 327435 ſuperiori producto ita ſubſcribo, ut prior nota

nota 5, quæ ad decadas pertinet, ſub illius decadibus maneat.

Tum facta ſimiliter multiplicatione ejuſdem numeri 65487 per tertiam notam 9, illius productum 589383 ſub præcedenti ſcribo, ſed primam notam 3 in centenarum ordine colloco, quia nota multiplicans ad centenarum claſſem pertinet.

Poſtremò multiplico eundem numerum 65487 per ultimam notam 6, & productum infra tertium ſcribo à ſede verſus ſiniſtram proxima, ut nempe dexterior nota 2 in ſede millium ponatur, quia nota multiplicans millia ſignificat.

Tandem ſingula producta in ſummam colligo, & invenio 455658546 eſſe productum numeri 65487 multiplicati per 6958, valorem ſcilicet numeri 65487 toties accepti, quot ſunt unitates in numero 6958. Et quidem numerus 65487 acceptus eſt octies in prima operatione, quinquagies in altera, nongenties in tertia, ſexies millies denique in quarta; proindeque toties, quoties unitas continetur in numero 6958.

52 Quum multiplicandus, aut multiplicator, aut ambo in cifras deſinunt, compendiaria fiet operatio, ſi multiplicentur perinde quaſi nullæ ibi cifræ invenirentur, quæ omnes poſtea invento producto dextrorſum adjiciuntur.

Exemplum II.

SIt multiplicandus numerus 6500
per - - - - - - - - - - 350

325
195

2275000. Productum.

Cifris omiſſis, multiplico 65 per 35, & invenio

nio productum 2275, cui dextrorſum adjungo tres cifras, quot omninò in multiplicando, & multiplicatore ſimul inveniuntur.

Et quidem multiplicandus 6500 exhibet 65 centenas; & idcirco quum 65 multiplicatur, ejus productum centenas deſignare intelligitur. Similiter multiplicator 350 decadas 35 repræſentat, proindeque quum multiplicatio fit per 35, productum decadas exhibebit. Exprimet igitur utriuſque productum decadas centenarum, id eſt, millia; proindeque tres cifræ adjiciendæ ſunt.

53 Quum inter multiplicatoris notas cifræ reperiuntur, quæ in ſuperiores multiplicandi notas ductæ nihil efficiunt, id cifrarum productum ſcribere ſupervacaneum eſt. Statim ad primam notam ſignificativam, quæ poſt cifras occurrit, gradum facimus, productumque ita ſcribimus, ut dexterior ejus nota eandem notæ multiplicantis ſedem occupet.

Exemplum III.

Multiplicandus ſit - - -	42052
per - - - - - - - -	3006
	252312
	126156
	126408312. Productum.

Facta multiplicatione per 6, & ſcripto producto 252312, ſtatim fiet per 3; ſed productum 126156 eo modo ſcribetur, ut dexterior nota 6 millia ſignificet; igitur quartam ſedem occupabit, hoc eſt, in eadem notæ multiplicantis ſede collocabitur.

Mul-

Multiplicatio Decimalium.

54 IN multiplicatione decimalium eadem numerorū integrorum regula tenenda eſt, nulla virgulæ habita ratione: ſed ab invento producto, ad dexteram, virgula ſejungemus tot notas, quot fuerint multiplicandi, & multiplicatoris ſimul notæ decimales.

Exemplum I.

SIt multiplicandus numerus - - 54,23
per numerum - - - - - 8,3

16269
43384

450,109

Multiplicabimus 5423 per 83, productum erit 450109, & quia duæ in multiplicando reperiuntur notæ decimales, & una in multiplicatore, ſejungentur a producto ad dextram tres notæ, quod idcirco fiet 450, 109; ut eſſe debet.

Ratio hujus regulæ facile concipietur, ſi animadvertamus, quod, multiplicatore exiſtente 83, producti notæ decimales *centeſimas* referrent, cum utique *ter* & *octogies* ſumeretur numerus 54, 23, qui *centeſimas* deſignat. Quoniam vero multiplicator eſt 8, 3; id eſt, (n. 28.) decies minor quàm 83, productum unitates referre debet decies minores, quàm *centeſimas*; igitur nota poſtrema decimalium (n. 23.) *milleſimas* debet exponere; proindeque productum tres notas decimales habebit, tot nimirum, quot in multiplicando & multiplicatore ſimul inveniuntur.

Et eadem in alio quocumque exemplo ratiocinatio locum habet.

Exem-

Exemplum II.

Si multiplicandus esset - - - - - - - 0,12
per - - - - - - - - - - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicaretur numerus 12 per 3, & productum haberetur 36. Verùm, cum regula tres hîc notas sejungendas præscribat, & productum plures non habeat quàm duas, id tironi posset negotium facessere. Si tamen quis ratiocinationem a nobis exemplo superiori accommodatam in mentem revocet, facile deprehendet, cifram esse, ut in exemplo ostenditur, inter 36 & virgulam necessariò interponendam. Et quidem, si numerus 0,12 multiplicandus esset per 3, manifestum est futurum fuisse productum 0,36; igitur, cum sit multiplicandus per 0,3, hoc est, per numerum decies minorem quàm 3, productum erit decies minus quàm 0,36, idest, *millesimas* exprimet; ac proinde (n. 27. 28.) scribendum est 0,036, cifra nimirum locum explente, ut totidem semper in producto notæ decimales sint, quot in factoribus habentur.

55 Cum decimalium usus eò præcipuè tendat, ut calculi faciliores reddantur, inducta sæpe computatione vero quàm proxima, sed ea tamen expedita, & quæ ad rem propositam sufficiat, in locum accurati, sed molestioris calculi; a re alienum non erit, si methodum compendiariam tradamus, qua productum ad datum exactionis gradum invenire liceat.

Ponamus ex. gr. multiplicandum esse numerum 45,625957 per 28,635, & productum satis esse ad *millesimas* usque exactum. Primùm, datos numeros scribo, ut in subjecto exemplo; id est, inverso situ notarum alterius, illum alteri ita subjicio, ut quæ erat unitatum nota illi superioris numeri sedi res-

reſpondeat, quæ ſit duplici gradu dexterior quàm ſedes, ad quam uſque productum exactum requiritur. Tum multiplicationem inſtituo, nulla habita ratione notarum, quæ in multiplicando ſunt ad dextram notæ multiplicantis. Producta ſingula ita ſcribo, ut prior omnium nota ad dextram in eadem columna maneat; iiſque additis, poſtremas duas ſummæ notas expungo, ea tamen lege, ut earum quæ ſuperſunt poſtrema unitate augeatur, ſi illæ expunctæ excedant 50. Quibus peractis, virgulam ea ſede noto, quam decimales exigunt, quas habere conſtitui.

Exemplum III.

DEtur multiplicandus numerus - 45,625957
per - - - - - - - - - - - - - - 28,635

Et ſatis habeatur productum invenire ad milleſimas uſque accuratum: Numeri ita ſcribantur. - - - - - - - - - - - - 45,625957

53682
91251914
36500760
2737554
136875
22810
1306499(13

Et productum erit - - - - 1306,499

Si ſolita ratione multiplicatio fieret, haberetur productum 1306,499278695, quod cum præcedenti uſque ad tertiam decimalium ſedem convenit, quemadmodum exigebatur.

Si decimales in multiplicando non ſufficiant, ut nota

nota unitatum multiplicatoris inversi illi respondeat, cui ex regula debet, cifræ adduntur, quæ locum suppeditent.

Exemplum IV.

Sit multiplicandus numerus - - 54, 236
per numerum - - - - - - - 532, 27

Et productum requiratur ad centesimas usque exactum, eos scribemus ad hunc modum:

$$
\begin{array}{r}
54{,}236000 \\
72235 \\
\hline
271180000 \\
16270800 \\
1084720 \\
108472 \\
37961 \\
\hline
2886819{,}53
\end{array}
$$

Et productum erit - - - - 28868,20 .... postremæ scilicet notæ addita unitate, quia binæ expunctæ 53 excedunt 50.

Exemplum V.

Sit multiplicandus numerus - - 0, 227538917
per numerum - - - - - - 0, 5664178

Et productum requiratur ad septimam usque decimacimalium notam accuratum, eos scribemus ad hunc modum - - - - - - - - - - - - 0,227538917

87146650

. 0

113769455

13652334

1365228

91012

2275

1589

176

1288820(69

Productum - - - - - - - - 0,1288821

¶¶ Iis, qui Tabulam Pythagoricam memoriter non tenent, methodus traditur ad *Multiplicationem* perficiendam ope solius *Additionis*, quæ ita se habet.

Construatur seorsum tabella, in qua *multiplicandus* primùm scribatur e regione unitatis; deinde ipse sibi addatur, & summa infra scribatur è regione ipsius 2; rursus summa modò inventa addatur ipsi multiplicando, & nova quæ fiet summa respondeat ipsi 3, & ita porrò usque ad 10: si autem e regione ipsius 10 in summam obvenerit ipse multiplicandus cifra auctus, examen erit, additiones fuisse recte confectas.

Tabella proinde, ut ex constructione perspicuum sit, producta exhibet multiplicandi per numeros simplices usque ad 9. Quare, pro singulis *multiplicatoris* notis sumantur producta, quæ illis in tabella respondent, eaque ita scribantur, ut dexterior cujusque nota eidem sedi assignetur, quam multiplicatoris nota occupat. Denique ex his productis fiat summa, quæ productum quæsitum dabit. Res exemplo fiet manifesta.

Sit

Sit multiplicandus numerus 79856345 per numerum 9605843; ſcribantur ambo more ſolito, ut in exemplo apparet,

79856345	1 79856345
9605843	2 . . . 159712690
	3 . . . 239569035
239569035	4 . . . 319425380
319425380	5 . . . 399281725
638850760	6 . . . 479138070
399281725	7 . . . 558994415
479138070	8 . . . 638850760
718707105	9 . . . 718707105
767087512623835	10 . . . 798563450

Deinde tranſlato multiplicando verſus dextram e regione ipſius 1, ſibi addatur, ut habeatur ſumma, quæ reſpondet ipſi 2; hæc ſimiliter addatur ipſi multiplicando, & ſumma prodibit, quæ habetur e regione ipſius 3; hæc rurſus eidem multiplicando addatur, fietque numerus reſpondens notæ 4, & ita deinceps.

Tabella confecta, ad multiplicationem venimus. Et quia multiplicatoris prior nota eſt 3, numerum in tabella reſpondentem ipſi 3 transferimus, ſuæque ſedi accommodamus. Idem pro notis ſubſequentibus 4, 8, 5, 6, & 9 exequimur, & additione tandem facta productum invenimus 767087512623835.

Hæc profecto methodus indirecta eſt, & longior, quàm ut commendari præ rugula ſuperius tradita poſſit, aut debeat. Sed in numeris tamen paulo maioribus multiplicandis id habet commodi, quod minus attentionis requirit, & errandi periculum aut propemodum tollit, aut certe imminuit. Quum autem, ut ſæpe fit, numerus idem per plurimos alios ſingulatim multiplicandus eſt, tunc, cùm tabella semel confecta plurimis operationibus inserviat, ipsa expediendi operis methodus est omnium non solum commodissima, sed etiam brevissima. ʃʃ

Multiplicationis usus.

56 NOn id nobis propositum est, ut Multiplicationis usus omnes prosequamur, qui latissimè patent; sed eos breviter indicabimus, qui ad reliquos facile intelligendos viam faciant.

Multiplicatio in universum adhibetur ad valorem investigandum plurium unitatum, quum de uniuscujusque valore constat. Quæritur ex. gr. 1° *Quanti fiunt 5842 bexapedæ lateritii operis, pretio 54 lb in singulas bexapedas constituto?* Multiplicentur 54 lb per 5842, seu 5842 lb (n. 44.) per 54, & pretium quæsitum erit 315468 lb. 2° *Quot libras pendent 5954 pedes cubici aquæ* (*), *posito pondere 72 lb in singulos pedes?* Multiplicentur 72 lb per 5954, seu 5954 lb per 72, & pondus quæsitum erit 428688 lb.

57 Multiplicationis ope reducuntur unitates datæ cujuscumque speciei ad unitates minoris speciei; *Libræ*, ex. gr. ad *solidos*, *solidi* ad *denarios*; *bexapedæ* ad *pedes*, *pedes* ad *pollices*, *pollices* ad *lineas*; *dies* ad *boras*, *boræ* ad *minuta prima*, *prima* ad *secunda* &c. Hujusmodi autem reductionum, quarum frequentissimus est usus, exempla quædam hîc subjiciemus.

Detur numerus 8 lb 17 f 7 d ad *denarios* reducendus. Quia *libra* valet 20 f, multiplicabuntur 8 lb per 20 (n. 50.), quæ conficient 160 f: his adjicientur 17 f, & fient 177 f, quibus multiplicatis

---

(*) Pes cubicus est mensura pedem longa, lata, & profunda, quæ æstimandæ corporum capacitati inservire solet, ut in Geometria demonstrabitur.

catis per 12 (nam *solidi* singuli valent *denarios* 12) efficientur 2124 *denarii*; quibus præterea addendi sunt 7 *denarii*, & fiet valor numeri propositi in *denarios* conversi 2131^d.

Rursus quæratur, quot minutis horariis constet annus communis, nimirum 365 dies, 5 horæ, & 48 minuta, sive $365^d\ 5^h\ 48^m$. Cum dies singuli horas 24 contineant, multiplicentur 24^h per 365, & producto 8760^h addantur 5^h; summa 8765 multiplicetur (n. 52.) per 60, quia nimirum hora minuta 60 complectitur, & producto 525900^m addantur 48; fietque summa 525948^m, minuta scilicet, quæ in anno communi continentur.

58 Ea multiplicationis ratio compendiaria, quam suprà (n. 52.) tradidimus, commode adhibetur ad eam ponderum mensuram, quam Gallicè *tonneaux*, Lusitanè *tonnelládas* appellamus, ad libras reducendam. Cum enim quælibet id genus mensura ponatur esse pondus 2000 librarum, si earum ex. gr. 854 sint ad libras reducendæ, nihil aliud opus est quàm numerum 854 duplicare, & producto tres cifras adjungere, fietque earum valor 1708000 ℔. Notent autem tirones, numerum *duplicare*, *triplicare*, *quadruplicare* &c. nihil aliud esse quàm multiplicare per 2, per 3, per 4 &c.

De Divisione.

59 DIvidere numerum per numerum in universum est quærere quoties eorum alter in altero contineatur. Sic dividere 12 per 4 idem est, ac invenire quoties numerus 4 in numero 12 contineatur, nempe *ter*.

Numerus, qui dividitur, *Dividendus*; per quem dividitur, *Divisor*; qui vero per operationem invenitur, ut ostendat quoties Divisor in Dividendo continetur, *Quotiens*, sive *Quotus* appellatur.

Divi-

Diviſionem quidem non eo ſemper fine inſtituimus, ut ſciamus quoties numerus numerum contineat; ſed operatio nihilominus perinde inſtituitur, quaſi id tantum præ oculis ſemper haberemus. Quapropter *diviſionem* generatim ſpectare poſſumus, tanquam operationem, cujus ope invenimus, quoties diviſor in dividendo contineatur.

¶¶ Ex modò tradita Diviſionis notione intelligitur, eam poſſe per *ſubtractionem* perfici, ſi nimirum diviſor a dividendo iteratis vicibus auferatur; eſt enim perſpicuum diviſorem toties in dividendo contineri, quoties inde auferri poteſt: Sic, ut 21 dividerentur per 7, tres fierent ſubtractiones, ad hunc modum:

$$
\begin{array}{l}
21 \\
\underline{\ 7\ } \\
14 \text{ - - - } 1^{um} \text{ reſiduum.} \\
\underline{\ 7\ } \\
\ 7 \text{ - - - } 2^{um} \text{ reſiduum.} \\
\underline{\ 7\ } \\
\ 0 \text{ - - - } 3^{um} \text{ reſiduum.}
\end{array}
$$

Et quia diviſor 7 ter fuit ablatus a dividendo 21, & nihil ſuperfuit, ter in illo exacte continetur; adeoque *Quotus* erit 3.

Cum tamen hæc dividendi methodus eò longior ac moleſtior fieret, quò maior *Quotus* eſſet, peculiaris *Diviſionis* operatio, quaſi *Subtractionis* compendium, ad id exequendum adhibetur. ¶¶

Ex eadem notione conſequitur, *Dividendum produci, ſi Diviſor per Quotum multiplicetur*; quia nimirum per id nihil aliud fit, quàm Diviſorem toties ſumere, quoties in Dividendo continetur. Id autem in univerſum intelligi debet, ſive Quotus numerus integer ſit, ſive fractus.

Quod

Quod verò ad nomen unitatum, quæ per *Quotum* exhibentur, id neque per *Dividendum*, neque per *Divisorem*, neque per utrumque dignoscitur; *Dividendo* enim & *Divisore* iisdem manentibus quoad nomen unitatum, Quotus alia, atque alia unitatum genera designare potest, pro quæstionis ratione, quæ Divisioni locum dedit.

Ex. gr. Si quæratur, quoties 4 lb contineantur in 8 lb, *Quotus* erit numerus abstractus 2, qui *bis* significabit. At, si quæratur quantum operis fiet pro 8 lb, pretio 4 librarum in singulas operis hexapedas constituto, *Quotus* erit 2 hexapedæ, numerus scilicet concretus, cujus species neque ad dividendum, neque ad divisorem refertur. Quare, cujusnam sint nominis unitates per Quotum exhibitæ, ex sola quæstione, quæ divisioni locum præbet, dignoscendum relinquitur.

DIVISIO
Numeri Compositi per numerum simplicem.

60 EA, quam modò tradituri sumus, operatio illud prærequirit, ut unusquisque usu exercitationeque sciat, quoties numerus quilibet simplex in numero simplici, aut ex duabus tantum notis composito contineatur: quæ quidem cognitio habetur, simulatque producta numerorum simplicium memoriter tenentur. Ubi hæc exercitatio desit, auxilio erit Tabula paulo superius (n. 48.) a nobis descripta. Si ex. gr. inveniendum sit quoties sint 9 in 74, quæratur Divisor 9 in superiori columna transversa, indeque rectà descendatur quousque aut numerum ipsum 74, aut proxime minorem, ut hic 72, inveniamus; & numero invento respondebit in prima columna verticali ad finis-

ſiniſtram quotus quæſitus, ut in hoc exemplo 8.

His poſitis, Diviſio numeri compoſiti per numerum ſimplicem hoc modo peragitur:

Scribatur diviſor ad latus dexterum ipſius dividendi, lineola interjecta, quæ utrumque dirimat. Sub eodem diviſore ducatur linea tranſverſa, infra quam notæ ipſius *Quoti* ſcribendæ erunt, prout fuerint per operationem inventæ.

Tum ſumatur prior dividendi nota ad ſiniſtram, aut duæ priores, ſi prior fuerit diviſore minor, ut fiat membrum partiale dividendum; & inquiratur, quoties diviſor in eo membro contineatur, numeruſque inventus in quoto ſcribatur.

Nota quoti inventa per diviſorem multiplicetur, & productum ſcribatur ſub membro dividendo, a quo ſubtrahatur; & reſiduo adjungatur nota proximè ſequens numeri propoſiti, ut novum fiat membrum dividendum.

In altero membro eadem operatio inſtituatur, & nota quotientis inventa ad dextram prioris reponatur, per diviſorem multiplicetur, & productum a membro auferatur. Reſiduo addatur nota alia numeri propoſiti, eademque operatio inſtituatur; & ita deinceps, quouſque omnes dividendi notæ gradatim abſolvantur.

Regulæ praxis, exemplis ſequentibus apprime perſpectis, nullo negotio comparabitur.

Exemplum I.

SIt dividendus numerus 8769 per 7; eos ſcribemus hoc modo:

Dividendus	7 Diviſor
8769	$1252\frac{5}{7}$ Quotus
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et initio facto à priore dividendi nota ad ſiniſtram, inquirendum mihi eſſet quoties 7 in 8 *millibus* contineantur; ſed ſatis eſt, ut videam, quoties 7 in 8 continentur, nimirum *ſemel*; proindeque nota 1 in quoto ſcribenda eſt, quæ quidem *mille* repræſentare debet, ſed de locali ejus valore nullam rationem habeo, qui à reliquis notis poſtea inveniendis determinabitur. Tum notam quoti inventam 1 multiplico per diviſorem 7, & productum 7 ſcribo ſub parte dividenda 8, factaque ſubtractione manet reſiduum 1, pars ſcilicet ipſius 8, quæ diviſa non fuit. Hæc *decadis* loco habetur reſpectu ejus notæ 7, quæ in dividendo proxime ſequitur, & proinde ad ejus latus dextrum adducitur, ut fiat novum membrum dividendum 17.

Rurſus, eadem operatione inſtituta, invenio diviſorem 7 in 17 contineri 2 vicibus, & notam 2 ipſi quoto adſcribo ad dextram prioris modò inventæ, eamque ſimiliter multiplico per diviſorem 7, &

& productum 14 membro dividendo 17 subscribo, factaque subtractione, residuum est 3, pars nimirum ipsius membri, quæ divisa non fuit, cui notam dividendi proxime sequentem 6 adjungo, ut fiat membrum rursus dividendum 36.

Quare, instaurata operatione, quæro quoties 7 in 36 contineantur, & invenio contineri *quinquies*; ac proinde notam 5 quotienti adscribo, quam deinde per divisorem multiplico, & productum 35 à membro dividendo 36 subduco, residuoque 1 ulteriorem dividendi notam 9 adjungo, ut fiat membrum de integro dividendum 19. Eodem modo, in membro 19 contineri divisorem 7 comperio 2 vicibus; adeoque notam 2 quotienti adscribo, quam similiter per divisorem multiplico, & productum 14 à membro 19 subduco, residuumque postremum erit 5.

Inventum itaque est 7 toties contineri in proposito numero 8769, quoties per quotum designatur, hoc est, 1252 vicibus, & superesse præterea 5.

De hujusmodi autem residuo observare interim sufficiat, illud ad dextram ipsius quoti ita adscribi, ut in exemplo ostenditur; divisore nimirum illi subscripto, lineolaque interposita, quæ utrumque dirimat; quod expressionis genus *quinque septimas* significat unitatis partes, quemadmodum postea explicabimus, quum de *Fractionibus* sermo erit.

61 Si in operationis contextu membrum occurrat divisore minus, quod proinde illum ne *semel* quidem contineat, cifra erit in quoto scribenda; & statim, omissa multiplicatione & subtractione, ulterior dividendi nota membro adjungi debet, ut novum fiat membrum dividendum, quo adhibito operatio procedat.

Exem-

Exemplum II.

PRoponatur dividendus numerus 14464 per 8.

$$
\begin{array}{r|l}
14464 & 8 \\
8 & \overline{1808} \\
\hline
64 & \\
64 & \\
\hline
064 & \\
64 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

In exemplo propoſito membrum dividendum efficiam ex prioribus duabus dividendi notis 14, quia prima 1 diviſore 8 minor eſt, ac proinde illum non continet.

Tum invenio diviſorem 8 in 14 non contineri pluſquam *ſemel*, & proinde ſcribo 1 in quoto, factaque multiplicatione & ſubtractione, reſiduum eſt 6, cui proxime ſequentem dividendi notam 4 adjungo, ut alterum fiat membrum dividendum 64.

Rurſus in 64 quoties 8? invenio 8, quam notam quotienti adſcribo, factaque multiplicatione & ſubtractione, relinquitur o, cui ſequentem dividendi notam adjungo, nempe 6. Quia verò membrum dividendum 6 minus eſt quàm diviſor 8, quotienti cifram adſcribam, & ſtatim ulteriorem dividendi notam 4 membro adjungam, ut fiat 64. Tunc in 64 quoties 8? *octies*. Unde ſcribo 8 in quoto, & facta multiplicatione & ſubtractione nihil relinquitur: quod argumento eſt, numerum 8 in numero 14464 exactis 1808 vicibus contineri.

DIVISIO
Numeri compositi per compositum.

62 QUum divisor fuerit numerus ex pluribus notis compositus, Divisionis methodus erit hujusmodi.

Sumatur ex dividendo ad sinistram membrum tot notarum, quot opus fuerint, ut divisor in illo contineatur. Et quia difficile esset inquirere quoties totum membrum dividendum, ut in priori casu, totum divisorem contineat, satis erit inquirere, quoties prior divisoris nota ad sinistram in parte membri sibi respondente contineatur; quotus autem ita inventus suo loco notabitur.

Tum nota ipsius quoti per omnes divisoris notas multiplicetur, juxta regulam supra traditam (n. 50.), & producti notæ, prout singulatim fuerint inventæ, membro dividendo à dextra ad sinistram subscribantur. Productum deinde à membro subtrahatur, residuoque nota dividendi proxime sequens adjungatur, ut fiat membrum denuò, & eodem modo dividendum.

Rem exemplis illustrabimus, unàque iis casibus occurremus, qui aliquid difficultatis præ se ferunt.

Exem-

Exemplum I.

SIt dividendus numerus 75347 per 53.

$$
\begin{array}{r|l}
75347 & 53 \\
\cline{2-2}
53 & 1421\,\frac{34}{53} \\
\cline{1-1}
223 & \\
212 & \\
\cline{1-1}
114 & \\
106 & \\
\cline{1-1}
87 & \\
53 & \\
\cline{1-1}
34 &
\end{array}
$$

In hoc exemplo primum membrum dividendum ſumo ex prioribus duabus dividendi notis 75, quia totidem ſufficiunt, ut fiat membrum diviſore non minus. Tum non inquiro quoties 75 contineant 53, ſed quoties 7 decades membri 75 contineant 5 decadas diviſoris 53, id eſt, quoties 7 contineant 5; & invenio 1, quod quotienti adſcribo.

Deinde multiplico quotum inventum 1 per diviſorem 53, & productum membro dividendo 75 ſubſcribo, factaque ſubtractione, reſiduum eſt 22, cui notam ſequentem dividendi 3 adjungo, ut fiat membrum rurſus dividendum 223. Tum ſimiliter in 22 quoties 5? invenio *quater*. Proinde ſcribo 4 in quoto, & diviſorem multiplico per 4, productumque 212 membro dividendo 223 ſubſcribo, & facta ſubtractione, reſiduum eſt 11, cui notam dividendi ſequentem 4 adjungo, ut fiat membrum denuò dividendum 114. Eodem modo 5 in 11 continentur 2 vicibus, adeoque 2 quotienti adſcribo, & multiplico per diviſorem, productumque 106 à mem-

membro 114 ſubduco, & reſiduum eſt 8, cui ulteriorem dividendi notam 7 adjungo, ut fiat membrum poſtremò dividendum 87. Et inſtituta, ut anteà, operatione, notam 1 pro quoto invenio, & reſiduum 34, quod juxta quotum ita ſcribo, ut paulo ſuperius indicatum fuit (n. 60.)

63 Praxis hujuſce regulæ rigidiori methodo fieret, ſi quoties diviſor totus in membris ſingulis dividendis continetur, ſtatim inquireretur. Quia tamen id plurimum attentionis laborisque exigeret, ſatis habemus inquirere, ut in ſuperiori exemplo, quoties maior dividendi pars maiorem diviſoris partem contineat. Quotus hoc pacto inventus verus quidem ſemper non erit, non enim directè, ſed quaſi tentando invenitur. Sed prætérquamquod iſtiuſmodi tentamine verum plerunque quotum aſſequimur, aut certè à vero parum aberrantem; facta illico multiplicatione probamus, fuerit-ne exactum de nota in quoto ſcribenda judicium, eamque emendamus, ſi neceſſe eſt.

Et quidem ſi diviſor in membro dividendo reapſe *ter* contineretur; & judicium fieret *quater* contineri, facile intelligitur quod facta multiplicatione per 4, productum dividendo maius conficeretur; ſiquidem diviſorem ſæpius ſumeremus, quàm in membro dividendo contineretur; proindeque ſubtractio fieri non poſſet. Tunc minuendus eſſet quotus una, duabus &c unitatibus, donec productum haberetur quod ſubtrahi poſſet. Contra verò, ſi in eo caſu 2 in quoto ſcriberentur, productum quidem ſubtrahi poſſet, ſed reſiduum haberetur diviſore maius, quod argumento eſſet, diviſorem ſæpius in membro dividendo contineri, quàm judicatum fuerat, adeoque quotum eſſe juſto minorem. Quantum vero augeri minuive debeat quotus primum inventus, ſi verus facta multiplicatione non deprehenditur, id uſu exercitationeque facile comparatur.

Exem-

Exemplum II.

SIt dividendus numerus 189492 per 375

189492	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

In hoc exemplo membrum prius dividendum aſſumo ex quatuor prioribus dividendi notis, quia tres efficerent membrum ipſo diviſore minus.

Deinde, in 18 quoties 3? re quidem ipſa, nulla habita ratione notarum ſequentium, *ſexies*: quia tamen diviſore 375 multiplicato per 6, productum emergit membro dividendo maius, 5 tantùm quotienti adſcribo, factaque multiplicatione & ſubtractione, reſiduum eſt 19, cui notam ſequentem Dividendi 9 adjungo, ut novum fiat membrum dividendum 199.

Rurſus, quia in 1 non continetur 3, ciſram ſcribo in quoto, & adducta ſequente dividendi nota 2, membrum habeo denuò dividendum 1992. Ubi ſimiliter operatione inſtituta, reperio 3 in 19 re ipſa *ſexies* contineri; ſed ob rationem jam indicatam, quotienti adſcribo tantum 5, & abſoluta operatione, reſiduum habetur 117.

64 Hîc illud monitum habeatur, quod ſæpe a pluribus in quoto inveſtigando experimentis inutiliter factis liberabit. Cum dubia plerunque tentamina fiant, ubi altera diviſoris nota fuerit valde maior, quàm 5; tunc prior unitate augenda mente erit, & inquirendum poſtea quoties in parte membri dividendi reſpondente contineatur. Sic enim judicium fiet, quod ad verum quotum magis accedet.

Ex-

Exemplum III.

Sit dividendus numerus 1832 per 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \overline{} \\ & 6\frac{104}{288} \\ \hline 104 & \end{array}$$

In hoc exemplo non dicam in 18 quoties 2, ſed in 18 quoties 3; ſiquidem diviſor 288 multò propius accedit ad 300 quàm ad 200. Sic ſtatim verum quotum invenio 6, cum alioquin tentando per 9, 8, & 7 primùm excurrerem.

Regulæ ſuperioris Compendium.

65 Ut Diviſionis methodus hactenus tradita facilius intelligeretur, producta ſingula ex multiplicatione diviſoris per notas quotientis inventas orta ſub membris dividendis, a quibus ſubtrahenda erant, ſcribenda præcepimus. Quoniam tamen Arithmeticæ propoſitum eſt, ut operationes quàm breviſſimæ reddantur, illud obſervandum eſt, poſſe quemquam ab iis productis ſcribendis abſtinere, ſi una eademque opera multiplicationem & ſubtractionem peragat. Id quomodo fiat, exemplo ſequenti adhibito, ſatis intelligetur.

Ex-

Exemplum.

SI dividendus proponatur numerus 756984 per numerum 932;

756984	932
1138	
2064	$812\frac{200}{932}$
200	

Sumptis pro membro dividendo quatuor prioribus notis, quia tres membrum efficerent divisore ipso minus, inquirendum est quoties prior divisoris nota 9 in parte 75 ipsius membri contineatur; cumque *octies* contineri compertum sit, nota 8 in quoti sede collocabitur. Tunc, cùm juxta priorem regulam quotus inventus 8 per divisorem 932 seorsum multiplicandus, productumque sub membro 7569 scribendum, & deinde ab illo subtrahendum esset, id una eademque opera conficiemus, hoc modo: octies 2 sunt 16, quæ cum subtrahi non possint a 9, subtrahantur a 19, & residuum erit 3 ipsi 9 subscribendum.

Ut autem ratio habeatur unitatis acceptæ á nota vicina 6, cujus ope, pro 9 sumpsimus 19, ipsa quidem unitate multata non censeatur, quemadmodum in Subtractione præcepimus, sed unitas mente retineatur producto sequenti addenda. Tunc enim dicendum: octies 3 sunt 24, & 1, quod retinuimus, sunt 25, quæ cum auferri nequeant á 6, auferentur a 26, & residuum erit 1, quod ipsi 6 subscribetur. Hoc quidem pacto habita est ratio unitatis subtrahendæ a nota 6, quia unam amplius retentam modò subtraximus; & eadem ratione compensabimus in operatione sequenti ipsa 2, quæ modò accepimus a nota 5, ut pro 6 haberentur 26. Sic enim dicendum erit: octies 9 sunt 72, & 2 retenta (siquidem subtractio præcedens facta fuit a 26) sunt 74, quæ si a 75 subducantur, superest 1 ipsi 5 subscribendum.

Residuo 113 notam proximè sequentem ipsius dividendi 8 adjungamus, ut membrum rursus dividendum consiat 1138. Ubi, priore divisoris nota 9 mente applicata parti respondenti 11, inquirendum est quoties 9 in 11 contineantur, *semel* nimirum, ac proinde 1 in quotiente scribendum. Deinde, multiplicatione subtractioneque instituta; semel 2 sunt 2, quæ si ab 8 subtrahantur, supersunt 6, quæ ipsi 8 subscribentur; semel 3 sunt 3, & iis ablatis a 3, relinquitur 0, quæ sub ipsa nota 3 collocabitur; semel 9 sunt 9, quibus ablatis ab 11, restant 2, quæ infrà notabuntur. Residuo similiter 206 sequentem dividendi notam 4 adjungamus, ut fiat membrum eodem modo dividendum 2064. Cum autem 9 *bis* contineantur in 20, nota quotientis erit 2, & instaurata operatione, dicendum: bis 2 sunt 4, quæ si a 4 auferantur, manet 0 infrà scribenda; bis 3 sunt 6, quibus ablatis a 6, relinquitur 0; bis 9 sunt 18, iisque ablatis a 20, supersunt 2.

66 In partialibus divisionibus conficiendis, ex quibus tota operatio componitur, illud accidere quandoque potest, ut membrum dividendum re ipsa divisorem contineat plusquàm *novies*, cum tamen in quoto nota maior scribi non possit quàm 9. Enim vero id argumento erit, notam justo minorem pro quoto sumptam fuisse in operatione præcedenti; ea siquidem *decas*, quæ quotienti postea invento adhæret, ad notam paulo ante inventam procul dubio pertinebit.

67 Quum dividendus ac divisor in cifras desinunt, antequam divisionis operationem ineamus, tot in utroque cifras delere licet, quot in eo sunt, qui pauciores habet. Si ex. gr. dividendus proponatur numerus 8000 per numerum 400, duabus

bus in utroque cifris deletis, dividendus erit numerus 80 per 4; eſt enim perſpicuum, 4 centenas in 80 centenis toties contineri, quoties 4 unitates in 80 unitatibus continentur.

Diviſio Decimalium.

68 NE ſupervacuis diſtinctionibus immoremur, diviſionem numerorum, quibus fractiones decimales adhærent, ad regulam unam revocabimus, quæ ita ſe habet:

Fac ut numeri ad diviſionem propoſiti æquè multas habeant notas decimales, additis quot opus fuerint cifris eorum alteri, qui pauciores habuerit, quod quidem ejus valorem minimè lædit (n. 30.); tum dele virgulam, numeroſque perinde divide quaſi integri eſſent; & quotus prodibit quæſitus, in quo virgulæ rationem habere opus non eſt; quippe a decimalium conſideratione immunis erit.

Exemplum I.

SI dividendus proponatur numerus 12, 52 per numerum 4, 3;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & \underline{430} \\ 392 & 2\frac{392}{430}. \end{array}$$

Eos primùm ad æque multas notas decimales revocabimus, addita cifra diviſori, ut fiat 4, 30. Deinde, virgula expuncta, dividendus erit numerus 1252 per 430; & inſtituta operatione, inveniemus quotum 2, & reſiduum 392; adeoque quotientem totum $2\frac{392}{430}$.

At, cum decimalium calculus eo potiſſimum fine adhibeatur, ut ſolitæ fractiones vitentur;

 loco

loco fractionis ex residuo & divisore confectæ, quam in exemplo superiori quoto integro 2 adposuimus, notas decimales ipsius quoti invenire possumus, si residuo utamur ad operationem ulterius promovendam, quemadmodum in exemplo sequenti ostenditur:

Exemplum II.

1252	430
3920	2,9116 &c
500	
700	
2700	
120	

UBi quotus integer 2 inventus fuerit, ut in priori Exemplo, residuo 392 cifra adjungatur, quæ illud re ipsa reddet decies maius, ut fiat membrum de integro dividendum 3920; & instituta operatione, notam 9 quotienti adscribendam inveniemus, signata tamen prius unitatum sede per virgulam appositam post quotum integrum 2. Hoc pacto nota inventa 9 *decimas* tantum exprimet, ac per id rescindetur quod in membro dividendo decies maiori positum fuerat; est enim perspicuum, quod, si ex divisione numeri 3920 per 430 quotus habetur 9, ex divisione numeri 392 per 430 quotus erit decies minor, nempe 0,9. Jam multiplicatione ac subtractione factis, residuo 50 alia cifra adjungatur, quod idem profecto erit, ac si duæ ab initio cifræ dividendo adjungerentur. Quia tamen nota pro quoto invenienda 1 ad dextram ipsius 9 collocabitur, ut *centesimas* exprimat, per id similiter compensabitur quod in dividendo centies maiori positum fuit.

Ad

Ad hunc modum operatio continuabitur quousque libuerit, habita tamen ratione quæstionis propositæ, quæ facile ostendet quot decimales notæ sufficiant. Et quidem, si duabus notis inventis operationem sistamus, quotus integram *centesimam* unitatis partem a vero aberrare non potest; si tribus, *millesimam*; & ita deinceps; quia nimirum notæ postremò inventæ unitas addi auferrive nequit, quin fiat quotus justò maior, aut minor.

Et eodem modo residuum, si quod fuerit, ad partes decimales reducitur, ubi circa numerorum integrorum divisionem operatio versatur.

Reliquum est, ut ostendamus cur virgula tam in dividendo quam in divisore deleta, quotus neutiquam immutetur, ubi æquè multæ fuerint in utroque numero notæ decimales. Id autem nullo negotio intelligitur: Nam in exemplo superiori dividendus 12,52 re ipsa exprimit 1252 *centesimas*, & divisor 4,30 similiter reddit 430 *centesimas*, siquidem unitates integræ *centenas centesimarum* complectuntur (n. 22.); est autem perspicuum, 1252 *centesimas* toties continere 430 *centesimas*, quoties 1252 unitates continent 430 unitates: nullam igitur virgulæ rationem habere necesse est, quum uterque numerus ad eandem decimalium sedem protenditur.

69 Si quando, pro quæstionis ratione, quotus sufficiat ad datum limitem accuratus, divisionis compendium adhiberi potest, quod modò explanandum suscipimus.

Et illud primùm statuamus, quotum requiri ad unitates usque exactum (nam qua ratione eadem methodus cæteris casibus accomodari debeat, postea declarabimus). Regula erit hujusmodi.

Rejiciantur a dividendo ad dextram tot notæ, minus una, quot in divisore reperiuntur; deinde divi-

divisio juxta regulam superius traditam instituatur. Si nullum fuerit residuum, quoto invento adjungantur tot cifræ quot fuerunt notæ a dividendo rejectæ, & fiet quotus quæsitus. Si verò aliquod residuum fuerit, id rursus dividatur per divisorem postrema ad dextram nota multatum. Hac divisione confecta, residuum quod fuerit dividatur porrò per eundem divisorem alia similiter nota multatum; & ita deinceps. Hujusce regulæ praxis iis, quæ sequuntur, exemplis perspectis facile constabit.

Exemplum I.

SI dividendus proponatur numerus 8789236487 per numerum 64423, & quotiens sufficiat ad unitatum sedem accuratus, rejiciantur postremæ quatuor dividendi notæ, quia videlicet divisor quinque notis constat, & dividatur 878923 per divisorem propositum 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 - -	6442
2772 - -	644
196 - -	64
4 - -	6

Et primùm quidem, duplici operatione instituta, quotum inveniemus 13, & residuum 41424. Tum residuum hoc dividemus per 6442, rejecta scilicet dexteriore divisoris nota, & notam 6 reperiemus ipsi quoto adscribendam post notas 13 primùm inventas, & residuum erit 2772. Hoc similiter dividemus per 644, nota itidem divisoris præcedentis dexteriore rejecta, & notam 4 inveniemus quoto jam habito 136 adjungendam, & residuum habebitur 196. Quod eodem modo partientiendum est per 64, omissa alia divisoris nota, & quotum inveniemus 3, residuum vero 4. Postremo, si residuum 4 per 6 dividatur, nota quoto adscribenda erit 0. Ac proinde habemus, quotum ex divisione numeri 8789236487 per numerum 64423 esse 136430 ad unitates usque exactum. Et quidem, si operatio solita fieret, quotus inveniretur 136430 $\frac{6597}{64423}$.

Notandum est, divisores singulos e regione residuorum emergentium necessariò scribendos non esse, quemadmodum a nobis factum idcirco est, ut operationis ratio facilius intelligeretur. Satis erit, divisoris propositi notas a dextra versus sinistram puncto vel lineola notare, prout fuerint in operationis ductu gradatim rejiciendæ.

70 Si prioris divisionis residuum deprehendatur divisore sibi respondente minus, cifra quotienti adscribatur, & residuo eodem manente, divisor alia nota multetur. Si adhuc residuum novo divisore minus reperiatur, alia ad quotum cifra adjiciatur; & ita deinceps.

Exemplum II.

UT quotum ex divisione numeri 55106054 per numerum 643 ad unitatum sedem accuratum inveniamus, dividendus erit juxta consuetam rationem numerus 551060, qui rejectis duabus ad dextram notis superest, per numerum 643, ad hunc modum:

```
551060 | 643
3666   | 85701
 4510
   09 - - 64
    9 - - 6
    3
```

Et

Et inſtituta operatione inveniemus quotum 857, & reſiduum 9, quod juxta regulam dividendum foret per 64. At, cum reſiduum hujuſmodi ſuo diviſore minus deprehendatur, cifram in quotô adnotabimus, idemque reſiduum ad operationem ſequentem retinebimus. Tum parato juxta regulam diviſore 6, dividendum erit reſiduum 9 per 6, & 1 quotienti obveniet; ac proinde quotus ex diviſione numeri 55106054 per 643 ad unitatum ſedem accuratus erit 85701, quemadmodum exigebatur.

71 Si, quum in operationis limine notæ a dividendo rejiciuntur, quas regula præſcribit, tot ſuperſtites non fuerint quot requiruntur, ut membrum dividendum efficiant diviſore non minus; a diviſore itidem ad dextram tot rejicientur notæ, quot opus fuerint, ut in membro dividendi contineatur.

Exemplum III.

SIt dividendus numerus 1611527 per numerum 64524, & quotus requiratur ad unitates uſque exactus.

Primùm rejicientur quatuor notæ 1527 ipſius dividendi. Deinde, cum reliquæ 161 numerum reddant diviſore 64524 minorem, ab ipſo ſimiliter tres notæ poſteriores 524 rejicientur, quot nimirum opus ſunt, ut reliquæ 64 in dividendo 161 contineri valeant. Tum inſtituta, ut in exemplis ſuperioribus, operatione dividendus erit numerus 161 per 64;

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ \cline{2-2} 161 & 25 \\ 33 - & 6 \\ 3 & \end{array}$$

& quotus habebitur 25 ex diviſione numeri 1611527 per numerum 64524, in quo per unitatem integram

a vea vero neutiquam aberrabitur. Et quidem quotus exactus eſt $24\frac{62951}{64524}$, qui multo propius accedit ad 25, quàm ad 24.

72 Quum in operatione peragenda notæ ſingulæ a diviſore rejiciuntur, accuratius rem conficiemus, ſi earum quæ ſuperſunt poſtremæ unitatem addamus, quotieſcunque nota rejecta fuerit 5, aut maior quàm 5. Et eodem modo poſtremæ, quæ ſupereſt, dividendi notæ unitas addenda erit, ubi notæ expunctæ exceſſerint 5, vel 50, vel 500 &c, prout una, duæ, tres &c. abolendæ fuerint.

Exemplum IV.

Dividendus eſto numerus 8657627 per 1987, ita ut quotus ad unitatum ſedem accuratus habeatur.

Juxta id, quod modò adnotavimus, dividendus aſſumetur numerus 8658 per 1987, ut hîc factum vides:

$$\begin{array}{r|l} 8658 & \underline{1987} \\ & 4357 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 710 \text{ -- } 199 \\ 113 \text{ -- } 20 \\ 13 \text{ -- } 2 \end{array}$$

Ubi, ad dividendum reſiduum 710, loco diviſoris 198 aſſumitur 199, quia nota rejecta 7 excedit 5. Eodem modo in operatione ſequenti loco diviſoris 19 aſſumitur 20, quia rejicitur 9. Et tandem in operatione ſequenti, cum diviſor 2 juſto maior ſit, & ſexies contineatur in 13, ac præterea $\frac{1}{2}$, ſcribenda potius in quoto erit nota 7 quàm 6; & quotus, diviſione peracta, habebitur 4357.

73 Jam verò facile erit intelligere, quid facto opus

opus ſit, ubi quotus requiritur accuratior, quàm hactenus fuit a nobis inventus.

Si ex. gr. quotus inveniendus proponatur ad *decimas-milleſimas* omnino exactus, res eò redit, ut dividendo tot cifræ adjungantur, quot habendæ in quoto ſunt notæ decimales, ut in adducto exemplo quatuor. Tunc diviſio inſtituenda erit, juxta methodum hactenus expoſitam. Ac tandem, ubi quotus fuerit inventus ad unitates uſque exactus, tot ab illo ad dextram notæ decimales per virgulam diſcriminandæ erunt, quot omnino habere propoſitum fuerat.

Exemplum V.

Sit dividendus numerus 6927 per numerum 4532, & quotus requiratur ad *decimas-milleſimas* accuratus.

Cum *decimæ-milleſimæ* quartam decimalium ſedem occupent, quatuor dividendo cifras adjungemus; & quæſtio eò adducetur, ut quotum ex diviſione numeri 69270000 per 4532 ad unitates uſque, ut in exemplis ſuperioribus, exactum inveniamus. Ac proinde, juxta regulam traditam, inſtituenda erit diviſio numeri 69270 per 4532, ad hunc modum:

```
        | 4532
  69270 |------
  23950 | 15285
  1290 - - 453
   384 - - 45
    24 - - 5
```

Et, tot decimalibus per virgulam diſcriminatis, quot fuerunt cifræ dividendo additæ, quotus habebitur 1,5285 ad quartam uſque decimalium ſedem accuratus, quemadmodum exigebatur.

Si

Si in dividendo, aut in divisore, aut in utroque fuerint notæ decimales, præparandi erunt prius, ut virgula deleri possit, juxta id quod paulo superius adnotavimus (n. 68.). Deinde operatio instituetur, quemadmodum in postremo exemplo paulo ante ostendimus.

Quum *fractio* vulgaris ad partes decimales reducenda proponitur, id perquàm expeditè fiet, si methodum hactenus traditam adhibeamus, & illud observemus, quod a nobis paulo superius notatum fuit (n. 71.).

Ex. gr. Si fractio $\frac{4253}{9678}$ partibus decimalibus exprimenda detur, ita ut ejus valor ad millesimas usque exactus requiratur; erit utique (n. 73.) dividendus numerus 4253000 per 9678, quod eò redit (n. 69.), ut dividatur numerus 4253 per 9678, seu (n. 71.) numerus 4253 per 968, juxta methodum suprà expositam. Facta operatione, quotus prodibit 439; adeoque fractionis datæ valor erit 0,439 ad millesimas usque exactus.

55 Ea, quam *Multiplicationis* tractationi methodum adjunximus, ut solius *Additionis* auxilio perageretur, *Divisioni* quoque ita accommodatur, ut nihil præterea quàm *Subtractionem* exigat. Est autem hujusmodi.

Construatur seorsum tabella ex *divisoris* continua ad se ipsum additione, quemadmodum illic pro *multiplicando* præcepimus (pag. 34.).

Tum ex dividendo sumatur membrum tot notarum ad sinistram, quot opus fuerint, ut in tabella reperiatur numerus illi aut æqualis, aut proximè minor. Nota huic e regione respondens ad quotum transferatur, numerus vero ipse membro dividendo subscribatur, & ab illo subtrahatur. Residuo nota dividendi proximè sequens adjungatur, ut aliud fiat membrum dividendum, cui similiter in tabella quæraratur numerus aut æqualis, aut proximè minor, & ita deinceps. Si autem in tabella non reperiatur numerus membro dividendo minor, aut ſaltem æqualis, cifra quotienti adſcribetur, & membrum nota ſequenti a dividendo ſumpta augebitur, ut aliud habeatur membrum dividendum, quo ſimiliter adhibito, operationem proſequamur.

Si ex. gr. dividendus proponatur numerus 220188745725 per 236743, eos primùm ſcribemus, ut in diviſione vulgari fieri conſuevit.

	236743	1 ... 236743
220188745725	930075	2 ... 473486
2130687		3 ... 710229
		4 ... 946972
712004		5...1183715
710229		6...1420458
		7...1657201
1775572		8...1893944
1657201		9...2130687
1183715		10..2367430
1183715		
0000000		

Deinde tabellam conficiemus ex continua diviſoris additione ad ſe ipſum, ut in exemplo apparet, qua ſemel parata, Diviſio nullo negotio abſolvenda ſuſcipietur.

Facto itaque membro dividendo ex ſeptem prioribus dividendi notis 2201887, quia ſex membrum efficerent ipſo diviſore minus, numerum in tabella proximè minorem inveniemus 2130687 e regione ipſius 9. Quare notam 9 ad quotum, numerum vero ad membrum tranſcribemus, factaque ſubtractione, notam ſequentem dividendi 4 reſiduo adplicabimus, ut fiat membrum rurſus dividendum 712004. Huic in tabella reſpondet numerus proxixime minor 710229 e regione notæ 3; quæ proinde ad quotum transfertur, numerus vero ipſe a membro ſubducitur, & reſiduo nota ſubſequens dividendi 5 ſuperadditur, ut habeatur membrum 17755.

Quoniam vero huic non reperitur in tabella numerus æqualis, nec minor, cifra quoto adſcribetur, & membrum ſubſequenti dividendi nota 7 augebitur, ut fiat 177557. Quia autem neque huic numerum æqualem minoremve tabella ſuppeditat, cifra rurſus in quoto notabitur, & alia dividendi nota 2 membro adjicietur, fietque 1775572. Cui tabella numerum offert proximè minorem 1657201 e regione notæ 7; quæ proinde quotienti adponenda, numerus ipſe a membro ſubtrahendus, reſiduoque nota dividendi poſtrema 5 adjungenda eſt, ut membrum fiat 1183715. Huic æqualis in tabella deprehenditur numerus qui notæ 5 reſpondet, quæ tandem quotienti adſcribitur; & quia facta ſubtractione numeri a membro nihil relinquitur, quotus erit 930075 omnino exactus.

De hujuſce methodi uſu idem erit judicium, quod aliàs indicavimus, quum de Multiplicatione ſimiliter peragenda ſermo fuit (pag. 35.). §§

Multiplicationis, ac Diviſionis examen.

74 QUa ſit ratione probandum id, quod multiplicatione, aut diviſione abſoluta invenimus, ex ipſa, quam tradidimus, utriuſque operationis definitione facile intelligitur.

Cum enim in Multiplicatione toties ſumatur multiplicandus quoties unitas in multiplicatore continetur; ſi quæratur quoties multiplicandus in producto ſit, id eſt (n. 59.), ſi productum per multiplicandum dividatur, multiplicatorem quotientis loco habendum eſſe, perſpicuum eſt. Quoniam verò multiplicandum pro multiplicatore accipere licet,

& viciſſim (n. 44.); illud in univerſum ſtatuendum eſt; *Factorum alterum in quoto reperiendum neceſſariò eſſe, ſi productum ex multiplicatione ortum per alterum dividatur.*

Sic ex. gr. cum paulo ſuperius (n. 50.) inventum ſit productum 17184 ex multiplicatione numeri 2864 per 6; ſi 17184 per 2864 dividamus, inveniendus erit quotus 6: & viciſſim, ſi per 6 dividamus, quotus erit 2864.

Et ſimiliter, cum ea ſit quotientis natura, ut oſtendat quoties diviſor in dividendo contineatur; ſi diviſor toties ſumatur quoties unitas in quotiente continetur, id eſt (n. 40.), ſi diviſor per quotum multiplicetur, producendum eſſe dividendum, modò nullum fuerit ex diviſione reſiduum, nemo non videt. At ſi quod reſiduum fuerit, id producto ex diviſore per quotum multiplicato addendum erit, ut dividendus reſtituatur.

Sic ex. gr. ex diviſione numeri 189492 per numerum 375 quotum 505, & reſiduum 117 ſupra invenimus (n. 63.). Multiplicatione vero inſtituta ipſius quoti 505 per diviſorem 375, productum emergit 189375, cui ſi reſiduum 117 addamus, dividendus habetur 189492.

Multiplicatio proinde ac Diviſio ita ſunt inter ſe comparatæ, ut altera alterius ope probari poſſit.

Sed alia tamen, eaque multò faciliori ratione utramque operationem probare licet, quam deinceps oſtendemus. Non tamen idcirco negligenda ſunt ea, quæ modò adnotavimus, quorumque uſus alioquin eſt maximus.

EXA-

EXAMEN

Per abjectionem novenarii.

75 UT hujuſce Examinis rationem exemplo adducto oſtendamus, fac multiplicetur numerus 65498 per numerum 454, unde oriatur productum 29736092, quod probandum ſit, rectene ſe habeat, an ſecus. Operatio erit hujuſmodi.

Addantur notæ ipſius multiplicandi 6, 5, 4, 9, 8, quaſi omnes in ſede unitatum conſiſterent, & *novenarius* abjiciatur, prout in ſummam venerit. Quod autem cunque fuerit reſiduum, ut in hoc exemplo 5, ad latus ejuſdem multiplicandi dexterum notabitur.

Addantur itidem notæ multiplicatoris 4, 5, 4, & novenarius abjiciatur; reſiduum habebitur 4, quod ſimiliter ad ipſius multiplicatoris dextram notandum eſt.

Tum ducantur in ſe invicem reſidua utriuſque factoris inventa, & a producto, quod in exemplo propoſito eſt 20, novenarii abjiciantur, ſi quos habuerit, ut reſiduum fiat, quod in eodem exemplo erit 2.

Jam, ſi productum quod probandum accepimus rectè ſe habet, neceſſe eſt, ut collectis itidem in ſummam ejus notis 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, abjectiſque ſimiliter novenariis, nihil aliud ſuperſit quàm illud ipſum reſiduum 2, quod a multiplicatione reſiduorum utriuſque factoris habetur, ut periculo facto ſupereſſe inveniemus.

Regula hæc illud aſſumit, quod ex Numerationis lege facile demonſtratur (n. 39 §§.), nihil aliud opus eſſe, ut habeatur reſiduum ex ſubtractione omnium novenariorum, qui in dato quolibet numero continentur, quàm ejus notas addere, nulla ſedis quam obtinent ratione habita, & nove-

novenarium abjicere quoties in ſumma deprehendatur. Quo poſito, examinis ratio ita ſe habet:

Cum multiplicandus 65498 ex quodam novenariorum numero & reſiduo 5 componatur, & multiplicator ſimiliter ex quodam novenariorum numero & reſiduo 4; perſpicuum eſt, productum ex eorum multiplicatione genitum per id tantum abeſſe ut ex novenariis accuratè componatur, quod ex multiplicatione reſiduorum 5 & 4 conficitur, id eſt, per 20, ſeu (abjectis etiam ex hoc producto novenariis) per 2. Si igitur productum, quo de agitur, accuratum eſt, per abjectionem novenariorum idem relinquere debet reſiduum, quod per productum reſiduorum ex factoribus emergentium, abjectis etiam ab illo novenariis, ſi quos habeat, indicatur.

Quod de multiplicatione traditum eſt, Diviſionis examini facile accommodatur. Cum enim productum ex multiplicatione diviſoris per quotum, addito reſiduo ſi quod fuerit, dividendum reſtituat (n. 74.), nihil aliud opus eſt ad probandam diviſionem, quàm novenarios ſubtrahere tam a diviſore quam a quotiente, reſidua invicem multiplicare; a producto novenarios auferre, ſi quidem habeat; a reſiduo diviſionis novenarios abbjicere, reſiduumque illi addere quod ex proxima multiplicatione reſiduorum ſuperfuit, & a ſumma novenarios itidem auferre, ſi quos habeat. Et tandem habebitur reſiduum, quod erit pariter in dividendo reperiendum, ſi operatio vitioſa non fuit.

Sic ex. gr. cum paulo ſuperius quotum 812, & reſiduum 200 ex diviſione numeri 756984 per 932 invenerimus; ſi operationem probare velimus, novenarios abjiciemus a diviſore & quoto, & reſidua erunt 5 & 2, quibus invicem multiplicatis habetur 10, abjectoque novenario, 1; ex diviſionis reſiduo ſimiliter novenarios auferemus, & erit reſi-

residuum 2, quod cum residuo proximè invento conjunctum conficit 3; atque hoc ipsum abjectis novenariis a dividendo superesse debet, ut re ipsa superest.

Si accuratiùs rem ipsam perpendamus, examen modò propositum erroris expers omnino non est. Siquis enim in multiplicatione peragenda producti notam aliquam una, duabus, aut pluribus unitatibus maiorem quàm par est in producto constituat, deinde aliam quamlibet totidem unitatibus minorem; cum per id nihil mutaretur in residuo, quod abjectis novenariis relinquitur, manifestum est, errorem ita comissum per id genus examen deprehendi neutiquam posse. At cum duplex error, isque & æqualis, & oppositus ad id requiratur, quod idem est ac per novenarium, aut novenarii multipla aberrare, vix aut ne vix quidem in praxi unquam eveniet, ut hæc examinis ratio quemquam decipiat.

55 Id, quod per *novenarii* subtractionem examen conficitur, per numeri cujusvis abjectionem fieri potuisset, nisi sua se novenaria probatio simplicitate præ cæteris commendaret. Verum, cum *undenariorum* subtractionem eadem prope facilitate, qua novenariorum perfici posse deprehendamus, idque Numerationis decadicæ proprietatem, alioquin & usui futuram præ se ferat, eam hîc adjungendam existimavimus. Est autem hujusmodi.

Si prima numeri cujuscumque, tertia, & reliquæ per sedes impares notæ a dextra versus sinistram addantur, undenario rejecto quotiescumque in summam venerit, & residuum notetur; deinde secunda, quarta, & reliquæ per sedes pares notæ eadem lege addantur, & residuum a priori illo, (cui si opus fuerit undenarius adjicietur) subtrahatur; residuum habebitur, quod abjectis omnibus propositi numeri *undenariis* superest.

Sic ex. gr. ut ſubtrahantur undenarii a numero 7543945, dicendum erit: 5 & 9 ſunt 14, abjectoque undenario, ſunt 3, & 4 ſunt 7, & 7 ſunt 14, ſublatoque undenario, ſuperſunt 3; deinde, 4 & 3 ſunt 7, & 5 ſunt 12, rejectoque undenario, ſupereſt 1, quod ſi a priori reſiduo 3 ſubtrahatur, reſiduum erit 2 ex ſubtractione undenariorum omnium, qui in numero 7543945 continentur. Rurſus, ut a numero 527381 undenarii auferantur, dicendum erit: 1 & 3 ſunt 4, & 2 ſunt 6; deinde, 8 & 7 ſunt 15, rejectoque undenario ſunt 4, & 5 ſunt 9; quia autem 9 a priori reſiduo 6 auferri nequeunt, huic undenarius adjicietur, ut fiat 17, & ſubtractione facta habebitur reſiduum 8 ex abjectione undenariorum numeri propoſiti 527381.

Hac profecto, eaque cumprimis inſigni Numerationis hodiernæ proprietate uti eodem jure poſſumus ad probandas quatuor Arithmeticæ operationes. Et examen quidem erit ejuſmodi, ut errorem ſolum, qui per undenarium aut undenarii multipla ſteterit, omnino non detegat. Si autem novenaria ſimul undenariaque probatio conjungantur, multo probabilius fiet de operatione judicium, ſiquidem is tantum error, qui numerum 99, aut ejus multipla ferat, examen effugiet. ∬

Diviſionis uſus.

76 DIviſionis operatio in univerſum adhibetur, non modò ut quoties numerus numerum contineat inveniamus, ſed etiam ut datum numerum in partes quotcunque æquales partiamur. Et quidem numeri cujuſque dimidiam, tertiam, quartam, quintam, vigeſimam, trigeſimam &c partem ſumere, nihil aliud eſt quàm ipſum dividere per 2,3,4,5,20,30 &c, ſive in 2,3,4,5,20,30 &c,

par-

partes æquales eundem dispertire, ut earum unam assumamus.

Divisionis ope unitates datæ cujusque speciei ad unitates maioris speciei revocantur; ut ex. gr. *denarii* ad *solidos*, *solidi* ad *libras*.

Sic ex. gr. ut 5864 *denarios* ad *solidos* reducamus, notandum erit, *solidum* confici ex 12 *denariis*, ac proinde tot *solidos* dato *denariorum* numero inesse, quoties 12 denarii in eo reperiuntur. Quapropter dividendus erit numerus 5864 per 12, & quotus prodibit 488*ſ*, residuum vero 8^{d}. Ut autem 488 *solidi* ad *libras* revocentur, cum *libræ* singulæ ex 20 *solidis* constent, dividendus erit numerus 488 per 20, & quotus habebitur 24^{lb}, & residuum 8*ſ*. Datus proinde denariorum numerus revocatur ad 24 libr. 8. sol. & 8 den.

Data hujusce divisionis per 20 peragendæ occasione, illud in universum adnotandum est, operationis compendium adhiberi posse, quoties divisor in cifras desinit. Tunc enim tot in dividendo notæ ad dextram separandæ erunt, quot in divisore cifræ reperiuntur; quæ autem supersunt, per notas ipsius divisoris significativas, cifris rejectis, dividentur. Si verò quod fuerit residuum, illi ad dextram notæ adjungentur, quæ fuerunt a dividendo rejectæ, & residuum totum habebitur; sin autem nihil reliquum fuerit, ipsæ notæ a dividendo segregatæ residuum solæ præstabunt.

Sic ex. gr. si numerus 5834 per 20 dividendus proponatur, rejicienda erit postrema dividendi nota 4, & dividendæ reliquæ 583 per 2. Quotus invenietur 291, & residuum 1, ad cujus dextram nota a dividendo rejecta 4 adscribetur, ut residuum totum habeatur 14; ac proinde quotus absolutus invenietur $291\frac{14}{20}$.

Ea compendii ratio percommodè adhiberi potest ad onerariæ ſarcinam reducendam ad maiores ponderum menſuras, quas Luſitanè *tonnelladas* appellamus.

Si ex. gr. navis onus ponatur eſſe 2584954 *libras*, ut id ad hujuſmodi menſuras reducatur, id eſt, ut per 2000 dividatur, nihil aliud opus eſt quàm tres poſtremas ad dextram notas a propoſito numero ſegregare, & reliquarum dimidium ſumere. Sic enim deprehendemus 1292 *tonnelladas* & 954 *libras*.

Idem diviſionis compendium aliis quampluri-mis menſuris reducendis, quæſtionibuſque ſolvendis accommodari poteſt, prout earum ratio poſtulaverit.

DE FRACTIONIBUS.

77 FRactiones, ſi Arithmeticè ſpectentur, nihil aliud ſunt, quàm numeri, quibus quantitates unitate minores exprimuntur.

78 Ut accuratam ac dilucidam earum notionem animo concipiamus, illud imprimis obſervandum eſt, quantitatem unitatis loco acceptam poſſe & ipſam ſpectari, tamquam ex unitatibus minoribus compoſitam; quemadmodum ex. gr. *libra* concipitur ex 20 partibus, ſive unitatibus conflari, quæ *ſolidi* nominantur.

Una, aut plures earum partium, in quas unitas dividitur, aut ex quibus compoſita intelligitur, id conſtituunt, quod unitatis *fractionem* appellamus, quo etiam vocabulo numeri donantur, qui ad eaſdem partes exprimendas adhibentur.

79 Duplex autem fractionem per numeros exprimendi modus eſt, & quidem uterque uſu receptus.

Primus in eo conſiſtit, ut unitatis partes, ex quibus propoſita quantitas componitur, ad numerorum integrorum inſtar numerentur, earum ſingulis

gulis pro totidem unitatibus alterius ordinis acceptis, quibus & nomen peculiare donatur.

Sic ad *ſeptem* partes ſignificandas, quarum viginti *libram* conficiunt, ſepoſita interim *libræ*, id eſt, unitatis præcipuæ conſideratione, eas peculiari vocabulo *ſolidos* appellamus, ac deinde quaſi unitates abſolutas nota 7 denotamus, cui & litteram indicem unitatum, quas ſignificat, ſuperaddimus, hoc modo 7ſ; quod expreſſionis genus in ſe quidem integrum & abſolutum, ſi ad *libram* referatur, ejus fractionem exhibet.

Hæc fractionum ratio in numeris *complexis* locum habet, de quibus poſtea.

80 Cum tamen infinitum quiddam eſſet, ſi ſingulæ quæ fieri poſſunt unitatis diviſiones peculiari nomine ſignove diſtinguerentur, alter fractiones exprimendi modus inventus eſt, duplici numero adhibito, quorum alter ſupra lineolam ſcribitur, ut unitatis partes exprimat, quæ in propoſita quantitate continentur; alter vero infra lineolam, ut oſtendat, quot earum partium unitatem conficiant. Sic ad ſeptem, quas paulo ante memoravimus, *libræ* partes exprimendas, ſcribendum erit $\frac{7}{20}$.

81 Ut autem fractionis valor enuntietur, numerus ſuperior, qui *Numerator* dicitur, per *cardinales*; inferior verò, qui *Denominator* appellatur, per *ordinales* numeros reddendus erit. Sic $\frac{7}{20}$ *ſeptem vigeſimas* ſignificat unitatis partes; $\frac{11}{100}$ *undecim centeſimas* &c: per *undecim* autem *centeſimas* undecim partes intelliguntur, quarum centum unitatem conficiant.

82 Numerator igitur deſignat quot unitatis partes habeantur in quantitate per fractionem expreſ-

ſa; denominator verò earum partium magnitudinem definit, quippe qui oſtendit earum numerum, qui ad unitatem conſtituendam omnino requiritur. Et quidem denominator idcirco appellatur, quia fractionis partibus nomen tribuit; idque efficit, ut poſitis ex. gr. fractionibus $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, prioris partes *quintæ*, poſterioris autem *ſeptimæ* nominentur.

83 Numerator & denominator, communi etiam vocabulo, fractionis *termini* appellantur. Poſitis autem duabus fractionibus, numeratores, aut denominatores ſimul *termini homologi*; numerator autem unius cum denominatore alterius, *termini heterogenei* nominantur.

De integris ſub fractionum forma ſpectatis.

84 QUæ circa fractos numeros operationes fiunt, eò ſæpe calculum ducunt, ut fractio emergat, cujus numerator ſit denominatori æqualis, aut etiam maior, ut ex. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

Id autem genus expreſſiones fractionem propriè non exhibent, ſed numeros aut plane integros, aut integros cum fractionibus involvunt.

85 Si igitur integros quis ſecernere velit, quos ejuſmodi fractiones continent, numeratorem ſciat per denominatorem eſſe dividendum. Quotus enim integros oſtendet, & reſiduum diviſionis, ſi quod fuerit, numerator erit fractionis propriæ quæ integris adhærebit, eodem manente denominatore. Sic $\frac{27}{5}$ reducuntur ad $5\frac{2}{5}$, id eſt, quinque unitates, & duæ prætereà quintæ unitatis partes.

Et

Et quidem in numero hujus formæ $\frac{27}{5}$, denominator 5 ostendit unitatem esse ex 5 partibus compositam; tot igitur unitates integræ per fractionem $\frac{27}{5}$ exprimuntur, quoties 5 in 27 continentur.

86 Multiplicatio, ac divisio numerorum integrorum, quibus fractiones adhærent, facilioris saltem calculi gratia, exigunt, ut integri ad fractionis formam reducantur. Id autem fiet, si numerus integer per denominatorem fractionis multiplicetur, ad quam revocandus proponitur, & productum numeratoris loco assumatur.

Si ex. gr. numerum 8 ad fractionem revocare velimus, cujus sit denominator 5, multiplicandus erit 8 per 5, & productum 40 numeratorem dabit, eritque fractio quæsita $\frac{40}{5}$. Et quidem, quum numerus 8 ad *quintas* reducendus est, singulæ unitates ex 5 partibus compositæ intelliguntur: igitur 8 unitates 40 earum partium necessario conficient. Eodem modo numerus mixtus $7\frac{4}{9}$ in nonas partes conversus fiet $\frac{67}{9}$, siquidem integer 7 conficiet $\frac{63}{9}$, quibus si $\frac{4}{9}$ addantur, fient $\frac{67}{9}$.

Quum numerus integer sub fractionis forma exhibendus est, nihil autem interest quonam sit denominatore affectus, simplicissimum est unitatem assumere, quæ ipsa numeris omnibus integris subscripta intelligitur. Nam ex. gr. numerus integer 8 octo unitatibus numerandis adhibetur, ac proinde est veluti numerator fractionis cujus denominaminator unitas sit. Ut enim per $\frac{8}{3}$ octo *triëtes*, & per $\frac{8}{2}$ octo *semisses*, sic per $\frac{8}{1}$ octo *unitates* declarantur.

De variationibus, quas fractionis termini subire possunt, quin ejus valor mutetur.

87 QUò plures in partes unitas divisa concipitur, eò plures earum requiri, ut una eademque quantitas exprimatur, manifestum est.

88 Denominatorem igitur fractionis cujusque duplum, triplum, quadruplum &c. reddere poussumus, idque manente fractionis valore, dummodo numeratorem unà duplum, triplum, quadruplum &c. constituamus.

Quare in universum tenendum est, *Fractionis valorem manere, quotiescunque ejus termini per eundem numerum ambo multiplicantur.*

Sic $\frac{3}{4}$ eandem quantitatem exprimit, quam $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c; $\frac{1}{2}$ idem exhibet, ac $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Haud absimili ratione intelligitur, quò minori fuerit partium numero unitas constituta, eò pauciores assumendas esse, ut una eademque quantitas exprimatur.

Quapropter denominatorem duplo, triplo, quadruplo &c. minorem reddere licet, quin fractionis valor quidquam immutetur, si numerator similiter duplo, triplo, quadruplo &c. minor constituatur.

Unde in universum: *Fractionis valor idem manet, quoties ejus termini per eundem numerum dividuntur.*

Ut

Ut harum propoſitionum veritas innoteſcat nihil aliud opus eſt, quàm attentè perpendere quid per denominatorem, quid per fractionis numeratorem intelligamus.

Hinc vero notandum eſt, fractionis terminos per eundem numerum multiplicare ac dividere, longe aliud eſſe quàm fractionem ipſam multiplicare ac dividere; hujuſmodi enim operationes fiunt, eodem manente fractionis valore, ut modò declaravimus.

Duo autem, quæ tradidimus, principia fundamento ſunt iis, quæ ſequuntur Reductionibus, quarum uſus in peragendo fractionum calculo frequentiſſimus eſt.

Reductio Fractionum ad eundem denominatorem.

90 I°. SI duæ fractiones ad eundem denominatorem reducendæ proponantur, ſingulos cujuſque terminos per denominatorem alterius multiplicare oportet.

Sint ex. gr. fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ ad eundem denominatorem revocandæ.

Primùm multiplicandi erunt prioris termini 2 & 3 per denominatorem alterius 4, & fractio reducetur ad $\frac{8}{12}$, quæ (n. 88.) eundem valorem retinet ac fractio propoſita $\frac{2}{3}$. Deinde poſterioris termini 3 & 4 in alterius denominatorem 3 ducentur, & habebitur fractio $\frac{9}{12}$, quæ ejuſdem valoris eſt ac fractio $\frac{3}{4}$. Ac proinde fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$

re-

revocatæ ſunt ad $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, quæ illis ſunt reſpectivè æquales, & eodem denominatore communi 12. afficiuntur.

Eſt autem perſpicuum, denominatorem eundem pro utraque fractione habitum ſemper iri, hac regula adhibita, quia ſinguli earum denominatores ex multiplicatione denominatorum earum, quæ propoſitæ ſunt, fractionum oriuntur.

91 2°. Si plures quàm duæ fractiones reducendæ proponantur, ſinguli cujuſque termini per factum ex aliarum denominatoribus multiplicentur, & totidem fractiones exurgent prioribus æquales, & eodem denominatore affectæ.

Sint ex. gr. ad eundem denominatorem reducendæ quatuor fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$.

Primùm ſingulos primæ terminos 2 & 3 multiplicabimus per factum ex denominatoribus aliarum 4, 5, & 7. Quod quidem factum inveniemus, ſi multiplicemus 4 per 5, & productum 20 per 7; habebitur enim factum ex tribus 140. Itaque ſi 2 & 3 per 140 ſigillatim multiplicemus, erunt producta 280 & 420, ex quibus fiet fractio $\frac{280}{420}$, quæ fractioni $\frac{2}{3}$ æqualis eſt (n. 88.). Deinde alterius terminos 3 & 4 multiplicabimus per factum ex aliarum denominatoribus 3, 5, & 7, nempe per 105, & fractionem habebimus $\frac{315}{420}$ ipſi $\frac{3}{4}$ æqualem. Tum ſimiliter tertiæ fractionis terminos 4 & 5 multiplicabimus per 84, productum ſcilicet ex tribus denominatoribus 3, 4, & 7; & loco fractionis $\frac{4}{5}$ aliam ejuſdem valoris habebimus $\frac{336}{420}$. Poſtremò utrumque fractionis quartæ terminum 5, & 7 multiplicabimus per

60,

60, factum videlicet ex tribus aliarum denominatoribus 3, 4, & 5; fractioque prodibit $\frac{300}{420}$, propositæ fractioni $\frac{5}{7}$ omnino æqualis.

Ad hunc modum datæ quatuor fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, & $\frac{5}{7}$ in hasce quatuor $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, & $\frac{300}{420}$ transmutatæ sunt, quæ quidem minus simplicitatis præ se ferunt, sed eundem illarum valorem retinent, idque ob communem denominatorem habent commodi, ut Additionis, ac Subtractionis operationibus suscipiendis accommodatiores evadant.

Liquet autem vel ex ipsa reductionis operatione, fractiones haberi iis quæ propositæ sunt æquales, quia uterque cujusque terminus per eundem numerum multiplicatur (n. 88.). Denominator verò omnium idem semper necessario erit, quia singularum fractionum denominator fit ex producto omnium denominatorum earum fractionum, quæ reducendæ proponuntur.

§§ Cùm superiori methodô plerumque fiat, ut fractiones oriantur, denominatore quidem communi affectæ, sed non illo tamen simplicissimo quem habere possunt, quapropter & alia, eaque valde operosa reductione opus esset, cujus auxilio ad majorem, quæ per eam nominis ejusdem conditionem licet, simplicitatem revocarentur; satius utique erit, multoque compendiosius, operationem ita instituere, ut fractiones propositæ ad communem denominatorem minimum illico adducantur. Id autem fiet ad hunc modum.

Si fractionum reducendarum, quæ quidem minimis ponuntur terminis expressæ, denominatores sufuerint, qui nullum inter ſe communem diviſorem habeant, reductio prorſus inſtituetur, ut paulo ſuperius traditum eſt; & denominator communis inventus minimus erit, quem ejuſmodi fractiones habere poſſunt.

Quod ſi denominatores communi diviſore gaudeant, per illum ſinguli dividentur, & quidem per maximum, ubi plures fuerint; & fractiones in totidem alias mutabuntur, quæ quidem ejuſdem valoris non erunt, ſed eò poſteà reſtituentur. Hæ ad commune nomen adducentur, juxta regulam ſupra traditam; communis autem earum denominator per eundem diviſorem multiplicabitur, per quem denominatores fuerunt paulo ante diviſi. Et hoc pacto tandem fiet, ut fractiones reductæ, & datis æquales evadant, & communi denominatore minimo exprimantur.

Quum in fractionibus propoſitis denominatores tantum aliqui communem inter ſe diviſorem habent, ipſi quidem per illum dividentur, ſed per eundem unà multiplicandi erunt numeratores fractionum, quarum denominatores dividi nequeunt. Ita emergent novæ fractiones, in quibus reductio inſtituenda erit. His autem denominatore communi donatis, denominator ſimiliter per diviſorem multiplicabitur, ut ad fractionum datarum valorem redeant. Eodem modo, quum denominatores propoſiti communem diviſorem habent, factaque diviſione fractiones oriuntur, in quibus denominatores aliqui communi adhuc inter ſe diviſore gaudeant, ipſæ ut in priori caſu præparandæ erunt; & ita deinceps. Fractionibus autem reductis, earum denominator multiplicandus erit per factum diviſorum omnium, qui in reducendis denominatoribus adhibiti ſunt. Regularum praxis ex iis quæ ſequuntur exemplis fiet perſpicua.

Exemplum I. Sint ad eundem denominatorem revocandæ fractiones $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$. Cum denominatores 18, & 27, communem divisorem maximum habeant 9, utrumque per 9 dividemus, & fractiones fient $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; quibus ad eundem denominatorem adductis, fractiones emergent $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; & communi earum denominatore 6 per divisorem 9 multiplicato, evadent $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$, quæ & datis æquales sunt, & communi denominatore minimo exprimuntur. Si reductio solita fieret, earum loco haberemus $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplum II. Sint fractiones $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$ ad communem denominationem reducendæ. Quia denominatores 26, 13, 39, communem divisorem habent 13; divisione facta, eas transmutabimus in $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$; his autem ad eundem denominatorem revocatis, fractiones orientur $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; & denominatore tandem per divisorem 13 multiplicato, fractiones emergent $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$, quæ & datis æquales, & omnium quæ communi nomine gaudeant simplicissimæ habentur. Operatione autem vulgari instituta, pro iis invenirentur fractiones valde compositæ $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplum III. Si reducendæ proponantur fractiones $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; cum tres denominatores 7, 15, 30, communem divisorem non habeant, sed duo

duo tantū posteriores 15, & 30, hos per divisorē maximum 15 dividemus, per quem & numeratorem 2 prioris fractionis multiplicabimus, cujus denominator dividi non potuit. Ita emergent fractiones $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, quæ, reductione facta, evadent $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; & denominatore 14 per divisorem 15 multiplicato, fractiones primùm propositæ reducentur ad $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$, cùm alioquin vulgari methodo adhibita reducerentur ad $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplum IV. Dentur communi nomine exprimendæ fractiones $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primùm, quia denominatores communem divisorem habent 11, facta divisione fractiones mutabimus hoc modo: $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Deinde, quia duarum posteriorum denominatores 7, & 14, communem adhuc divisorem habent 7, illos per hunc dividemus, & per eundem multiplicabimus numeratores 3, & 7 duarum priorum, quarum denominatores per 7 dividi nequeunt; & hoc pacto novæ aliæ fractiones emergent $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, in quibus reductionis operatio instituenda erit. Qua absoluta, inveniemus eas reduci ad $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; & denominatore communi 10 per factum divisorum 11 & 7, id est, per 77 multiplicato, fractiones primùm propositas reduci inveniemus ad $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, idque sub forma quàm fieri potest simplicissima. Si usitata methodus hîc adhiberetur,

ea-

earum loco haberentur fractiones valde compositæ $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quæ utique molestissimum calculum exigerent, ut ad simpliciorem illarum formam revocarentur, cum ad id communem divisorem maximum inter denominatorem & quatuor numeratores invenire oporteret, ut paulo inferius demonstrabitur.

Reductio fractionum ad expressionem simplicissimam, sive ad minimos terminos.

92 Fractiones eò simpliciores habentur, quò minoribus terminis exprimuntur. Sæpe autem fieri potest, ut fractio proposita ad minores terminos reducatur, idque locum habet tunc, quum ejus numerator ac denominator per unum aliquem numerum simul dividi possunt. Cum enim hujusmodi operatio fractionis valorem non mutet (n. 89.), adhibenda procul dubio est, ut fractiones maxima qua possunt simplicitate donentur, quod quidem non tam ad expressionis elegantiam, quàm ad ejus valorem facilius concipiendum pertinet. Licet enim ex. gr. fractio $\frac{27}{63}$ idem valeat ac $\frac{3}{7}$, per hanc tamen, utpote simpliciorem, ejus, quæ per utramque significatur, quantitatis notionem longe facilius concipimus, animo nimirum præ multitudine partium minimè distracto.

Hæc autem id genus reductioni peragendæ ratio proponitur.

93 Dividatur primùm uterque fractionis terminus per 2, eaque operatio tandiu repetatur, quandiu absque residuo fieri poterit. Deinde divisio instituatur per 3, quæ eodem modo iteranda erit,

quoties poterit. Eadem lege gradatim assumantur divisores 5, 7, 11, 13, 17 &c, numeri videlicet qui *primi* dicuntur, nullumque divisorem agnoscunt præter se ipsos, aut unitatem.

Una hujusce operationis difficultas est, ut videamus quisnam per 2, 3, 5 &c. dividi numerus exactè queat, ne divisio frustra instituatur. Eam ad rem quæ sequuntur principia plurimum faciunt.

94 Numerus omnis, cujus postrema ad dextram nota numerum parem exhibet, dividi exactè potest per 2.

Numerus omnis, cujus notæ in summam collectæ, nulla valoris localis ratione habita, efficiunt 3, aut multiplum ipsius 3, dividi absque residuo potest per 3. Sic ex. gr. numerus 54231 divisibilis est per 3, quia ejus notæ 5, 4, 2, 3, 1, efficiunt 15, multiplum nimirum ipsius 3, quia *quinquies* numerum 3 exactè continet.

Eodem modo si notarum summa conficiat 9, aut multiplum ipsius 9, numerus per 9 dividi exacte poterit.

Qui in cifram, aut in 5 numerus desinit, per 5 dividi sine residuo potest.

ʃʃ Numerus omnis, cujus notæ in sedibus imparibus a dextra versus sinistram summam efficiunt æqualem illi, quam notæ in sedibus paribus exhibent; aut inæqualem etiam, dummodo differentia sit 11, aut multiplum ipsius 11, divisibilis est per 11. (n. 75. ʃʃ). Sic numerus 89452 divisibilis erit per 11, quia notæ in sedibus imparibus 2, 4, 8, eandem summam conficiunt quam notæ in sedibus paribus 5, & 9. Eodem modo numerus 8452719 exacte dividetur per 11, quia notæ in sedibus imparibus 9, 7, 5, 8 summam 29 conficiunt, paribus autem in sedibus 1, 2, 4 conficiunt 7, & utriusque summæ differentia est 22, multiplum ipsius 11. ʃʃ

Quod

Quod ad numerum 7, & reliquos *primos* attinet, licet regulæ ſimiles inveniri poſſent, diviſio potius tentanda erit, quæ ipſa minus negotii allatura videbitur.

Sit ex. gr. ad minimos terminos reducenda fractio $\frac{2016}{5796}$. Primùm ejus terminos dividemus per 2, quia poſtremæ utriuſque notæ ad dextram numerum parem exhibent, & fractio prodibit $\frac{1008}{2898}$. Rurſus diviſione inſtituta per 2, fiet $\frac{504}{1449}$. Cum autem diviſio amplius fieri nequeat per 2, ex iis quæ ſupra diximus illico dignoſcitur fieri poſſe per 3; & diviſione inſtituta, habetur $\frac{168}{483}$. Rurſus per 3 dividemus, & fiet $\frac{56}{161}$. Denique diviſionem tentabimus per 7, quæ abſque reſiduo ſuccedit, ac proinde fractio tandem reducitur ad $\frac{8}{23}$.

In hac operatione diviſionem tantum per numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c. ineundam idcirco præſcribimus, quia facta ex. gr. diviſione per 2, quoties poteſt, diviſionem per 4 tentare ſupervacuum eſt. Si enim hæc locum haberet, & illa adhuc potiori jure inſtitui poſſet.

95 Alia etiam via, eaque directa præ cæteris, fractio quælibet ad minimos terminos revocari poteſt, quæ eò redit ut illius termini per communem utriuſque diviſorem maximum ſtatim dividantur. Ejuſmodi autem diviſor hac ratione invenitur.

Dividatur terminorum maior per minorem. Si nihil ex diviſione reliquum fuerit, ipſe terminus minor communis utriuſque diviſor maximus erit. Si autem aliquod reſiduum fuerit, per id terminus minor dividatur: Tum si nihil relinquitur, id, quod divisoris loco fuit residuum, communem maximum divisorem ostendet; sin autem aliquid superest, per id dividatur operationis præcedentis divisor; & ita deinceps, quousque divisio habeatur absque residuo. Hujus postremæ divisionis qui divisor fuerit, is & divisor communis maximus erit utriusque termini fractionis propositæ. Si autem postremus divisor fuerit unitas, id argumento erit, fractionem ad minores terminos revocari non posse.

Proponatur ex. gr. reducenda fractio $\frac{3760}{9024}$. Primùm quærendus erit maximus utriusque termini divisor; ac proinde dividemus terminum 9024 per 3760, unde quotum inveniemus 2, & residuum 1504. Rursus 3760 per 1504 dividemus, unde quotus erit 2, & residuum 752. Tum 1504 per 752 ulterius dividemus, cumque nihil supersit, erit postremus divisor 752 maximus divisor terminorum fractionis propositæ; quæ adeo divisione peracta reducetur ad $\frac{5}{12}$.

Et quidem per operationem inventum est, numerum 752 divisorem exactum esse ipsius 1504: igitur divisor quoque erit numeri 3760, qui ex numero 1504 bis sumpto & 752 componitur; adeoque & numerum 9024 exacte dividet, qui ex numero 3760 bis sumpto & 1504 coalescit.

Præterea facile est intelligere, numerum 752 maximum esse divisorem, quem termini 9024 & 3760 habere possunt. Nam communis divisor esse nequit inter 9024 & 3760, quin sit & ipse communis divisor inter 3760 & 1504; neque similiter inter hos, quin simul communis numerorum 1504 & 752 divisor habeatur. Est autem 752 maximus communis divisor inter 1504 & 752, ut patet: igitur &c.

55

¶¶ Si maximus communis divisor inter plures quàm duos numeros inveniendus proponatur, methodus erit hujusmodi.

Quæratur maximus communis divisor inter primum & secundum, inter secundum & tertium, inter tertium & quartum &c, quocumque sint numeri ordine dispositi. Circa divisores inventos eadem instauretur operatio, & ita deinceps, donec ad unicum divisorem perveniamus, qui tandem erit communis divisor maximus numerorum propositorum. Si in qualibet operationis parte duo, aut plures divisores iidem emerserint, eorum tantum unus pro operatione sequenti adhibebitur; si autem omnes iidem prodierint, ulterius progredi supervacuum erit, cum eorum quilibet numerus sit in quem desitura esset operatio, si ad finem usque juxta regulam traditam promoveretur, adeoque & maximus communis divisor, quem invenire propositum fuerat. At si ad duos quoscunque numeros operatio deveniat, qui divisorem communem, præter unitatem, non habeant, neque propositi numeri habere poterunt.

Exemplum. Sit inveniendus communis divisor maximus numerorum .... 7174090 .... 1956570 .... 913066 .... 465850 .... 46585. Primùm quærentur divisores inter primum & secundum, secundum & tertium &c, & numeros inveniemus .... 652190, 130438 .... 18634 .... 46585; deinde circa hos operationem eandem ordiemur, & divisores emergent .... 130438 .... 18634 .... 9317; tum super his similiter operabimur, & divisores orientur .... 18634 .... 9317; denique, invento inter hos communi divisore maximo 9317, is tandem numerorum datorum communis divisor maximus habebitur. ¶¶

Alia fractiones considerandi ratio, & quæ inde derivantur.

96 QUæ a nobis hactenus fractionum notio tradita est, in eo consistit, ut denominator ostendat quot ex partibus unitas composita concipiatur; numerator autem, quot earum partium in ea quantitate sint, quæ per fractionem exprimitur.

Sed alia præterea ratione fractionem concipere possumus, si numeratorem consideremus exhibere quantitatem quamlibet propositam, quæ sit in tot partes distribuenda, quot in denominatore unitates deprehenduntur, ut earum partium una assumatur.

Sic ex. gr. in fractione $\frac{4}{5}$ numerator 4 spectari potest, tanquam numerus quatuor res quascunque exhibens, ex. gr. quatuor *libras*, quæ in 5 partes distribuendæ ponuntur, ut earum una significetur. Est enim perspicuum, idem omnino esse 4 *libras* in 5 partes dividere, ut una assumatur, atque 1 *libram* in 5 partes secernere, ut earum assumantur 4.

97 Fractionis igitur numerator tanquam *dividendus*, denominator vero tanquam *divisor* haberi possunt. Ac proinde liquet, quid significare velint divisionum residua ad eum modum expressa, quem supra præscripsimus (n. 60.).

98 Quare, ut numerus quicunque integer fractionis speciem induat, nihil aliud opus est, quàm numerum ipsum numeratoris loco habere, & unitatem pro denominatore assumere. Sic 3 & $\frac{3}{1}$, 5 & $\frac{5}{1}$ idem omnino exhibent.

99 In-

99 Inde etiam intelligitur ratio fractionem quamlibet in partes decimales tranſmutandi. Numerator enim ſpectari poteſt, tanquam reſiduum diviſionis, in qua denominator diviſoris vices egerit; ac proinde operatio inſtituetur, ut ſupra traditum eſt (pag. 52.), cifra prius quoto adſcripta, quæ vacuam unitatum ſedem occupet. Sic fractio $\frac{3}{5}$ reducitur ad 0,6; $\frac{5}{9}$ ad 0,5555 &c; $\frac{1}{25}$ ad 0,04; & ſic de aliis.

Eadem plane ratione numeri *complexi* ad partes decimales revocari poſſunt.

Si ex. gr. numerus $3^{hex}\ 5^{p}\ 8^{p}\ 7^{l}$ ad decimales ipſius *hexapedæ* partes reducendus detur, ita ut ejus valor ad dimidias uſque *lineas* accuratus retineatur; obſervandum erit, *hexapedam* 864 *lineas* continere, adeoque 1728 linearum dimidia. Quare, ne linearum medietates negligantur, notas decimales ad decimas uſque milleſimas invenire oportet.

Quo poſito, $5^{p}\ 8^{p}\ 7^{l}$ ad *lineas* revocabimus (n. 57.), unde fient 823^{l}, ſive $\frac{823}{864}$ ipſius *hexapedæ*; cujus fractionis valor decimalibus expreſſus, ut paulo ante traditum eſt, reducitur ad 0,9525; adeoque numerus propoſitus convertetur in 3^{hex}, 9525.

II Fractiones autem decimales dupliciter poſſunt ad fractiones vulgares revocari.

Primùm enim, ſi earum formam decimalem, adeoque & virgulam retinere libeat, cum integrorum indolem uſquequaque æmulentur, per regulas ſupra traditas reducuntur (n. 86. 98.) Si ex. gr. fractionem decimalem 0,23 ſub fractionis vulgaris forma exhibere propoſitum fuerit, ſatis erit

erit ita ſcribere $\frac{0,23}{1}$; ſi eandem ad denominatorem datum 7 revocare oporteat, facta operatione ut in numeris integris, reducetur ad $\frac{1,61}{7}$ (n. 86.).

Quod ſi formam decimalem exuere, virgulamque delere velimus, notæ decimales numeratoris locum obtinebunt, denominator autem erit unitas cum tot cifris, quot decimalium ſedes fuerint. Sic 0,23 nihil aliud eſt, quàm $\frac{23}{100}$; 0,0071 nihil aliud, quám $\frac{71}{10000}$ &c.

Ad hæc, quæ in infinitum fractiones decimales excurrunt, ad fractiones vulgares finitis terminis expreſſas nullo negotio revocantur, modò ea lege progrediantur, ut eædem notæ in orbem redeant, cujuſmodi fractiones *periodicas* appellare poſſumus. Hujus indolis eſt fractio decimalis 0,321321321 &c, quæ ex periodo notarum 321 perpetuò recurrente componi intelligitur.

Et quidem, ſi periodi a virgula ſtatim incipiant, periodus una numeratoris loco aſſumetur, denominator autem erit numerus ex tot 9 conſtans, quot ſunt periodi cujuſque ſedes. Sic fractionis hujus decimalis 0,321321321 &c valor accuratus eſt $\frac{321}{999}$; hujus itidem 0,013201320132 &c valor habetur $\frac{132}{9999}$; hujus denique 0,777777 &c, quæ & ipſa periodica eſt, ſingulis videlicet periodis unica nota conſtantibus, valor reducitur ad $\frac{7}{9}$.

At ſi periodi a virgula ſtatim non incipiant, denominator quidem erit numerus ex tot 9 compoſitus, quot periodus quæque ſedes occupat, ſed ipſi

ipsi tot cifræ addentur, quot ante primam periodum sedes decimales deprehenduntur. Ut autem numerator habeatur, multiplicandæ sunt notæ ante primam periodum constitutæ per denominatorem, cifris quidem addendis multatum; & factum uni periodo addendum. Sic ex. gr. ut hanc expressionem 1,357121212 &c ad fractionem communem revocemus, cum periodi binis constent notis, & tres ante primam periodum sedes jaceant, denominator erit 99000. Multiplicatis autem notis 1357 primam periodum antecedentibus per denominatorem cifris multatum 99, productum erit 134343, cui si periodum unam 12 addamus, numerator habebitur 134355; adeoque valor quæsitus erit $\frac{134355}{99000}$. Eodem modo expressio 0,0047347347 &c revocatur ad $\frac{473}{99900}$; hæc autem 0,633333 &c ad $\frac{57}{90}$; & sic de aliis. ¶

De operationibus Arithmeticis circa fractiones.

100 FRactionum calculus iisdem quatuor operationibus tractatur, quæ pro numeris integris traditæ jam sunt. Quarum priores duæ, *Additio* atque *Subtractio*, operationem præparatoriam plerunque exigunt, reliquæ duæ non item.

Fractionum Additio.

101 SI fractiones ejusdem nominis fuerint, ut earum summa habeatur, nihil aliud opus est, quàm numeratores addere, summæque eundem denominatorem subscribere.

Ex.

Ex. gr. si addendæ proponantur fractiones $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$, quæ eodem denominatore 7 afficiuntur, numeratores, 2, 3, 5, addendi erunt, & summa 10 numeratoris loco habenda, cui idem denominator 7 subjicietur; adeoque fractionum summa erit $\frac{10}{7}$, quæ tandem reducitur ad $1\frac{3}{7}$ (n. 85.).

102 Si fractiones propositæ ejusdem nominis non fuerint, reducantur prius ad eundem denominatorem, quemadmodum paulo superius traditum est (n. 90. 91.), deinde operatio instituatur, ut modo ostendimus.

Ex. gr. Si fractiones $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ addere propositum sit, eas ad communem denominatorem revocabimus (n. 91.), fientque $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}, \frac{48}{60}$, quarum summa est $\frac{133}{60}$, seu $2\frac{13}{60}$ (n. 85.).

Fractionum Subtractio.

103 Quum fractionis utriusque denominator idem est, numerator à numeratore subducitur, & residuum numeratoris loco assumitur, cui idem denominator tribuitur, ut fractionum differentia habeatur.

Sic ex. gr. ut $\frac{5}{9}$ ab $\frac{8}{9}$ subtrahamus, numeratorem 5 a numeratore 8 auferemus, & residuo 3 denominatorem ipsum 9 subscribemus; adeoque residuum quæsitum erit $\frac{3}{9}$, quod tandem revocabitur ad $\frac{1}{3}$ (n. 93.).

104 Si a $9\frac{5}{8}$ auferendus proponatur numerus $4\frac{7}{8}$, cum $\frac{7}{8}$ a $\frac{5}{8}$ ſubtrahi nequeant, accipienda erit unitas a numero integro 9, quæ ad denominatorem 8 revocata & fractioni $\frac{5}{8}$ addita efficiet $\frac{13}{8}$ (n. 86.). Tum ablatis $\frac{7}{8}$ a $\frac{13}{8}$ ſuperſunt $\frac{6}{8}$; & tandem ablatis 4 ab 8 (habita ſcilicet ratione unitatis ablatæ a numero 9) ſuperſunt 4. Ac proinde reſiduum quæſitum erit $4\frac{6}{8}$, ſeu $4\frac{3}{4}$ (n. 93.).

105 Quum fractiones propoſitæ nomine differunt, antequam ſubtractio inſtituatur, ad eundem denominatorem revocantur (n. 90.), qua præparatione adhibita, operatio ad regulam ſuperiorem redit.

Sic ex. gr. ut $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$ auferamus, fractiones revocabimus ad $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, & ſubtractione facta reſiduum habebitur $\frac{1}{12}$.

Fractionum Multiplicatio.

106 FRactionibus multiplicandis hæc regula præſcribitur: *Numeratores, ac denominatores invicem multiplicentur, & illorum factum pro numeratore, horum autem pro denominatore ejus quod quæritur producti aſſumantur.*

Si fractio ex. gr. $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ multiplicanda habeatur,

beatur, primùm multiplicandus erit numerator 4 per numeratorem 2, & factum 8 numerator erit producti quæsiti; deinde denominator 5 per denominatorem 3 multiplicabitur, & factum 15 denominator erit ejusdem producti quæsiti, quod adeo erit $\frac{8}{15}$.

Ut hujusce regulæ ratio intelligatur, illud meminisse oportet, numerum per numerum multiplicare nihil aliud esse, quàm eorum alterum toties accipere quot sunt alterius unitates. Quare $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ multiplicare idem est, ac *duas tertias* partes fractionis $\frac{4}{5}$ accipere, seu, quod eodem redit, *tertiam* partem fractionis $\frac{4}{5}$ *bis* sumere. Quum autem denominator 5 per 3 multiplicatur, partes *quintæ* ipsius fractionis $\frac{4}{5}$ in *decimas quintas* transmutantur, partes utique *ter* minores; deinde, quum numerator 4 per numeratorem 2 multiplicatur, eæ partes *ter* minores redditæ *bis* sumuntur; *tertia* igitur pars fractionis $\frac{4}{5}$ *bis* accipitur; ac proinde fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ reipsa multiplicatur.

107 Si numerus integer per fractionem, aut fractio per integrum multiplicanda habeatur, integer fractionis forma donabitur, denominatoris loco unitate subscripta, & operatio instituetur, ut in exemplo superiori.

Ex. gr. Si multiplicandus fuerit numerus 9 per $\frac{4}{7}$, res perinde tractabitur, quasi fractus $\frac{9}{1}$

per

per fractum $\frac{4}{7}$ multiplicandus proponeretur; adeoque productum, juxta regulam, erit $\frac{36}{7}$, quod deinde revocabitur ad $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Ex quo intelligitur, nihil aliud opus esse, ut integer per fractionem, aut fractio per integrum multiplicetur, quàm integrum illicò per fractionis numeratorem multiplicare.

108 Si integris multiplicandis fractiones adhæreant, unusquisque ad suæ fractionis nomen revocetur, illique addatur (n. 86.), & operatio juxta regulam supra traditam instituatur (n. 106.).

Si ex. gr. multiplicandus sit numerus $12\frac{3}{5}$ per $9\frac{3}{4}$, primus ad $\frac{63}{5}$, alter ad $\frac{39}{4}$ revocabitur; deinde multiplicandus erit fractus $\frac{63}{5}$ per $\frac{39}{4}$, productumque habebitur $\frac{2457}{20}$, quod tandem reducitur ad $122\frac{17}{20}$ (n. 85.).

¶¶ In fractionibus multiplicandis illud statim curari potest, ut productum sub terminis quàm fieri potest simplicissimis habeatur.

Et primùm quidem fractiones ipsas, quæ multiplicandæ sunt, ad minimos terminos revocare oportet. Deinde videndum, an termini *heterogenei*, id est, numerator unius cum denominatore alterius, communem inter se aliquem divisorem habeant, per illumque dividantur, & quidem per maximum, si plures habuerint. Fractiones hoc modo paratæ invicem multiplicentur, & productum

ctum fractionum datarum habebitur, idque ad minimos terminos revocatum.

Si ex. gr. multiplicandæ proponantur fractiones $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, cum denominator prioris, & numerator posterioris sit idem numerus 5, qui per se ipsum dividi potest, uterque reducetur ad 1; adeoque absque ullo calculo statim videbimus productum esse $\frac{3}{7}$.

Rursus, si multiplicandæ sumantur fractiones $\frac{18}{13}$, $\frac{26}{63}$, observandum erit, numeratorem prioris cum denominatore posterioris communem divisorem maximum habere 9, adeoque divisione facta reduci ad 2, & 7; denominatorem vero primæ ac numeratorem alterius communem habere divisorem 13, proindeque reduci ad 1, & 2. Ita fractiones evadent $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, quibus invicem ductis, productum quæsitum erit $\frac{4}{7}$, cum alioquin fractio prodiret $\frac{468}{819}$, molestiori calculo ad illius simplicitatem reducenda. ʃʃ

Fractionum Divisio.

109 FRactionibus dividendis regula erit hujusmodi: *Invertantur termini ejus fractionis quæ divisoris locum obtinet, ut numerator in denominatorem, & denominator in numeratorem transeat; multiplicetur dividendus per divisorem ita inversum; & factum quotientis loco habeatur.*

Sic ex. gr. ut fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ dividatur, inververtendus erit ſitus terminorum ipſius diviſori $\frac{2}{3}$, ut fiat $\frac{3}{2}$. Deinde multiplicatio inſtituetur ipſius dividendi $\frac{4}{5}$ per diviſorem inverſum $\frac{3}{2}$, juxta regulam ſupra traditam (n. 106.), & quotus habebitur $\frac{12}{10}$, ſive $1\frac{1}{5}$ (n. 85. 93.).

Ut hujuſce regulæ ratio intelligatur, obſervandum eſt, nihil aliud eſſe $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ dividere, quàm inquirere quoties $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$ contineantur. Eſt autem perſpicuum, diviſorem qui duo *trientes* exhibet ter amplius contineri in $\frac{4}{5}$, quàm ſi duas unitates referret. Liquet præterea unitatem in $\frac{4}{5}$ contineri per $\frac{4}{5}$ unius vicis, adeoque 2 unitates per dimidiam partem ipſius fractionis $\frac{4}{5}$ ibidem comprehendi. Primùm igitur dividendum eſt per 2, deinde multiplicandum per 3, quod nihil aliud eſt quàm dividendi dimidium ter ſumere, ſive multiplicare per $\frac{3}{2}$, quæ fractio diviſorem $\frac{2}{3}$ inverſum exhibet.

110 Si fractus per integrum, aut integer per fractum dividendus fuerit, integer primùm, unitate ſubſcripta, ad fractum reducitur, & operatio per eandem regulam abſolvitur.

Ex. gr. Si numerus 12 per $\frac{5}{7}$ dividendus proponatur, quæſtio eò adducetur, ut $\frac{12}{1}$ per $\frac{5}{7}$ dividanvidantur, ſive (n. 109.) ut $\frac{12}{1}$ per $\frac{7}{5}$ multiplicentur. Unde quotus invenietur $\frac{84}{5}$, ſive $16\frac{4}{5}$. Eodem modo, ſi $\frac{3}{4}$ dividere oporteat per 5, dividenda erit fractio $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{1}$, ſive multiplicanda per $\frac{1}{5}$, & quotus habebitur $\frac{3}{20}$.

Unde intelligitur, diviſionem fractionis per numerum integrum eò reduci, ut integer per denominatorem fractionis multiplicetur.

111 Si integris ad diviſionem propoſitis fractiones adhæreant, unuſquiſque ad ſuæ fractionis denominationem revocabitur (n. 86.), & operatio deinde inſtituetur, quemadmodum in exemplis ſuperioribus traditum eſt.

Ex. gr. Si numerus $54\frac{3}{5}$ per $12\frac{2}{3}$ dividendus proponatur, primus reducetur ad $\frac{273}{5}$, alter ad $\frac{38}{3}$. Deinde dividenda erit fractio $\frac{273}{5}$ per $\frac{38}{3}$, ſive (n. 109.) multiplicanda per $\frac{3}{38}$, & quotus habebitur $\frac{819}{190}$, ſive $4\frac{59}{190}$ (n. 85.).

ſſ In fractionibus etiam dividendis operæ pretium erit illico curare, ut quotus oriatur minimis terminis expreſſus.

Id autem fiet: primùm, ſi fractiones propoſitæ ſint & ipſæ prius ad minimos terminos revocatæ; deinde, ſi termini *homologi*, numeratores ſcilicet, aut denominatores utriuſque, per communem diviſorem maximum dividantur, ſi quem habeant. Ita fractiones orientur, quarum idem

erit

erit quotus, atque fractionum datarum, isque quàm fieri potest simplicissimus.

Si ex. gr. dividenda ponatur fractio $\frac{5}{7}$ per $\frac{5}{6}$, cum numerator uterque dividi possit per 5, adeoque reducatur ad 1, statim sine calculo videbimus quotum esse $\frac{6}{7}$. Eodem modo, si dividenda esset fractio $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{5}$, cum denominator uterque reducatur ad 1, illico agnosceremus quotum esse $\frac{3}{4}$.

Rursus, si fractio $\frac{22}{39}$ per $\frac{11}{13}$ dividenda sumatur, numeratores 22, 11, per communem divisorem 11 dividentur, fientque 2, & 1; denominatores autem per 13, fientque 3, & 1. Ac proinde dividenda erit fractio $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{1}$, & quotus erit quæsitus $\frac{2}{3}$, cum alioquin inveniendus esset $\frac{286}{429}$.

Fractionum usus.

112 His perspectis, quæ paulo superius tradita sunt (n. 96.), facile intelligitur, quo sit pacto eruendus fractionum valor, juxta receptas ejus unitatis divisiones, ad quam referuntur.

Quæritur ex. gr. quantum valeant $\frac{5}{7}$ unius *libræ*. Quoniam $\frac{5}{7}$ unius *libræ* idem exhibent quod $\frac{1}{7}$ quinque *librarum* (n. 96.), 5 *libras* ad *so-*

lidos

lidos revocabimus (n. 57.), fientque 100 *ſolidi*, quibus per 7 diviſis, quotus erit 14^s, reſiduum verò 2^s. Rurſus hoſce 2 *ſolidos* ad *denarios* reducemus, fientque 24^d, quibus per 7 ſimiliter diviſis, quotus erit $3^d \frac{3}{7}$. Ac proinde $\frac{5}{7}$ unius *libræ* reducuntur ad 14 *ſolidos*, 3 *denarios*, & $\frac{3}{7}$ unius *denarii*.

Si quæreretur, quantum valeant $\frac{5}{7}$ viginti quatuor *librarum*, facile intelligitur, poſſe quemquam primùm inveſtigare quantum valeant $\frac{5}{7}$ unius *libræ*, ut in exemplo ſuperiori, idque deinde per 24 multiplicare. Sed calculus erit multò commodior, ſi 24 *libræ* per $\frac{5}{7}$ multiplicentur, & (n. 107.) productum habeatur $\frac{120}{7}$ *libr.* ſive 17 *libr.* & $\frac{1}{7}$ ipſius *libræ*, quæ fractio ad receptas *libræ* diviſiones revocata, ut in exemplo ſuperiori exhibet 2 *ſolidos*, 10 *denarios*, & $\frac{2}{7}$ ipſius *denarii*; adeoque per $\frac{5}{7}$ viginti quatuor *librarum* nihil aliud ſignificatur, quàm 17 *lib.* 2 *ſol.* 10 *den.* $\frac{2}{7}$.

113 Fractiones autem decimales, cum denominatore ſubſcripto non indigeant, multò facilius ad receptas unitatis diviſiones transferuntur. Si ex. gr. quæratur quantum valeant 0,532 unius *hexapedæ*, cum *hexapeda* in 6 *pedes* dividatur, multiplicanda erit fractio 0,532 per 6, & productum 3,192 oſtendet 3 *pedes*, & 0,192 ipſius *pedis*. Cum autem *pes* in 12 *pollices* ſive *un-*

cias

cias dividatur, multiplicanda similiter erit per 12 fractio 0,192, & productum 2,304 exhibebit 2 *uncias*, & 0,304 unius *unciæ*. Denique, cum *uncia* in 12 *lineas* distribuatur, fractio 0,304 per 12 multiplicabitur, & productum 3,648 ostendet 3 *lineas*, & 0,648 ipsius *lineæ*. Quare per 0,532. unius *hexapedæ* significantur 3 *pedes*, 2 *unciæ*, 3 *lineæ*, & 0,648 unius *lineæ*; & ita de aliis.

114 Quæ de fractionum valore intelligendo diximus, sermonem ultro ducunt ad *fractiones fractionum* declarandas, quo nomine intelligitur fractionum series, quæ interjecta particula *ex* invicem separantur, ut, ex. gr: $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{5}{6}$ &c. Fractio enim quælibet non tantum ad unitatem, aut numerum integrum referri potest, ut $\frac{3}{4}$ *unius libræ*, $\frac{3}{4}$ *viginti librarum*, sed etiam ad aliam quamcunque fractionem, cujus valor quasi totum quoddam concipi potest in quot libuerit partes distribuendum, ut earum aliquæ tantum innuantur. Sic ex $\frac{3}{4}$ sumere licet $\frac{2}{3}$, deinde si duo trientes ex tribus quadrantibus, quasi totum concipiantur in *sex* partes divisum, earum *quinque* innuere possumus, fietque fractio fractionum $\frac{5}{6}$ *ex* $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$.

Id genus fractiones ad unam revocari possunt, quæ tantum ad unitatem præcipuam referatur, si numeratores inter se invicem, & denominatores similiter inter se multiplicentur. Sic $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ idem est ac $\frac{6}{12}$, sive $\frac{1}{2}$; & $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{5}{6}$ idem, ac $\frac{30}{72}$, sive $\frac{5}{12}$.

Et quidem facile intelligitur, sumere $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ nihil aliud esse, quàm multiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$, sive *tertiam* partem fractionis $\frac{3}{4}$ *bis* accipere. Eodem modo sumere $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{5}{6}$ eò redit, ut sumantur $\frac{6}{12}$ *ex* $\frac{5}{6}$, siquidem $\frac{2}{3}$ *ex* $\frac{3}{4}$ efficiunt $\frac{6}{12}$; per id autem quod modo demonstravimus $\frac{6}{12}$ *ex* $\frac{5}{6}$ reducuntur ad $\frac{30}{72}$, sive $\frac{5}{12}$.

Si valor quæratur fractionis $\frac{3}{4}$ *ex* 5 $\frac{3}{8}$, integer 5 ad denominatorem 8 revocabitur, suæque fractioni addetur (n. 86.), & quæstio eò adducetur, ut fractio fractionis $\frac{3}{4}$ *ex* $\frac{43}{8}$ ad fractionem simplicem revocetur, fietque $\frac{129}{32}$, sive 4 $\frac{1}{32}$.

115 Quum fractio terminis aliquanto grandioribus expressa maiori simplicitate donari nequit per methodum supra traditam (n. 95.), si pro quæstionis ratione sufficiat eam in aliam convertere, quæ valoris quàm proxime ejusdem sit, sed terminis brevioribus exprimatur, id per methodum sequentem consequemur, cujus ope fractionis propositæ valores juxto maiores, minoresque alternatis vicibus inveniemus, ad verum perpetuò convergentes, donec tandem in ipsam fractionem reducendam incidamus.

Sit exempli loco fractio $\frac{100000000}{314159265}$, quæ, ut in Geometria demonstrabitur, *diametri* ad *peripheriam* circuli rationem vero quàm proximam exhibet, eam-

eamque per alias aliaſque fractiones minus quidem accuratas, ſed brevioribus tamen terminis expreſſas efferre propoſitum habeatur. Rem hac ratione expediemus.

Primùm, datæ fractionis tam numeratorem quam denominatorem per numeratorem ipſum dividemus, & fractio reducetur ad hanc formam $\frac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$. Quæ quidem, ſi fractio adhærens denominatori integro 3 negligatur; reducitur ad $\frac{1}{3}$, valor nimirum fractionis datæ tam vero proximus, quam ſub terminis adeo ſimplicibus fieri poteſt, ſed tamen juſto maior.

Deinde, ut ejuſdem propoſitæ fractionis valorem alium vero propius appropinquantem inveniamus, in ea fractione, quæ denominatori 3 adhæret, utrumque terminum per numeratorem dividemus, & revocabitur ad hanc formam --- $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{885145}{14159265}}}$. Hæc autem, ſi fractio denominatori integro 7 adhærens negligatur, reducitur ad $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ſive (n. 86.) ad $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ſive (n. 109.) ad $\frac{7}{22}$; valor ſcilicet fractionis datæ multo accuratior quàm $\frac{1}{3}$, ſed juſto minor.

Tum, ſi valorem alium propius adhuc ad verum accedentem invenire oporteat, fractionis denominatori 7 adhærentis utrumque terminum per

 nume-

numeratorem dividemus, ipſaque revocabitur ad

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15\tfrac{882090}{885145}}}}.$$

Hæc verò, ſi fractionem adjunctam denominatori 15 negligeremus, valorem exhiberet $\frac{106}{333}$, qui præcedenti quidem exactior eſt, ſed vero aliquantulum maior. At, ſi operationem hîc finire lubeat, fractionem adjunctam denominatori 15 minime negligemus, ſed cum ipſa unitatis valorem ferè adæquet, unitatem denominatori 15 addemus, fractioque erit hujus formæ

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}},$$

quæ reducitur ad $\frac{113}{355}$; valor utique præcedentibus multo accuratior, ſed adhuc juſto minor, cujus à fractione propoſita defectus eſt $\frac{611}{223055307815}$, ſive quàm proximè $\frac{1}{365062232}$.

55 Fractiones ad eam formam revocatæ, quam fractio ſupra propoſita per iteratam fractionum denominatoribus adhærentium diviſionem induit, *fractiones continuæ* appellantur.

Illud autem notandum, diviſionem in hac operatione præſcriptam illam ipſam eſſe, quam exequimur pro diviſore communi inter fractionis terminos inveniendo, ut fractio exactè reducatur, ſi fieri poſſit. Quare, ſi facta operatione invenerimus nullum eos diviſorem habere communem præter unitatem, diviſionum quotientes ſuo ordine in fractionem continuā illico revocabimus, unitate in numeratorem perpetuò aſſumpta, eoſque in ea terminos deinde negligemus, quos res ipſa perſuaſerit.

Ex-

Ex. gr. Si ad fract ionem $\frac{964}{5141}$ reducendam communem diviſorem quæramus, nullum tandem inveniemus, præter unitatem. Sed, cum per operationem quotientes inventi fuerint 5, 3, 321, eos ad fractionem continuam reducemus $\cfrac{1}{5\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{321}}}$, quæ fractioni propoſitæ æqualis eſt. Si autem fractionem adjunctam denominatori 3 negligamus, quæ eo potiori jure contemnitur quò minor eſt, reducitur ad $\cfrac{1}{5\,\cfrac{1}{3}}$, ſive ad $\frac{3}{16}$; fractio quidem ſatis ſimplex, cui tantum deeſt $\frac{1}{82256}$, ut fractionem propoſitam adæquet. §§

De numeris complexis.

116 QUamquam regulæ hactenus traditæ eorum numerorum calculo, qui *complexi*, ſive *heterogenei* appellantur, accommodari & ipſæ poſſunt, non incongruum tamen erit, ſi peculiaris de iis tractatio inſtituatur, quippe qui ab ea, quàm ſibi propriam habent, unitatis diviſione calculum ſæpe faciliorem admittunt.

Sunt autem plurima ejuſmodi numerorum genera, quæ peculiares unitatis diviſiones obtinuerunt, unde potiſſimum calculi regulæ derivantur. Sed neceſſe non eſt ſingula percurrere, cum ex quibuſdam ad reliqua ſupputanda aditus pateat, dummodo ejus diviſionis ratio conſtet, quæ in ſingulis adhibetur. Frequentioris apud nos uſus ſunt ea, quæ hîç ſubjicimus.

§§ Rei nummariæ rationes in Gallia ad *libræ* unitatem plerumque referuntur. *Libra* autem, sive *Francus*, dividitur in 20 *solidos*, & *solidus* in 12 *denarios*. Species autem singulæ litteris initialibus distinguuntur. Sic 32^{lb} 15^{s} 7^{d} idem est ac 32 *libræ*, 15 *solidi*, & 7 *denarii*.

In ponderibus autem *libra* ubique propemodum dividitur in duo besses (*marcos*), *bes* in 8 *uncias*, *uncia* in 8 *octavas*, *octava* in 3 *scrupula*, & *scrupulum* in 24 *grana*. Maiora verò pondera ad alias unitates (*quintais*) referimus, quarum singulæ in 4 alias (*arrobas*) *dividuntur*, & harum quælibet ex 32 *libris* (*arrateis*) componitur.

Mensuræ aridorum in Lusitania ad maiores modios (*moyos*) sæpe referuntur. Horum singuli 15 alias mensuras (*fangas*) continent, quarum singulæ 4 alias (*alqueires*), & hæ similiter 4 alias, quas & *quartas* nominamus; quæ omnia pro ratione locorum aliquantulum inter se differunt, quamvis nomine consentiant.

Mensuras autem liquidorum (*pipas*) habemus, quæ Romanorum *culeos* fere adæquant. Harum singulæ 25 alias mensuras (*almudes*) complectuntur, quarum quælibet in 12 alias (*canadas*) dividitur, harum verò singulæ quatuor alias (*quartilhos*) continent; quæ idem ubique locorum nomen referunt, magnitudinem verò non item.

Locorum distantiis maioribus significandis *stadia*, *milliaria*, *leucæ* adhibentur; minoribus autem *hexapedæ*. *Hexapeda* autem (*toesa*) 6 *pedes*, *pes* 12 *pollices* sive *uncias*, *pollex* 12 *lineas*, *linea* 12 *puncta* continet. Numeri autem litteris specierum initialibus distinguuntur ad hunc modum 72^{T} 3^{P} 7^{p} 10^{l} 5^{pts}. Ulna Lusitana (*braça*) ex 10 *palmis*, *palmus* ex 8 *pollicibus* constat.

Temporum mensura naturalis dies est. *Dies* autem ex 24 *horis*, *hora* ex 60 *minutis*, *minutum* ex

60

60 *secundis* constat &c. Numeri autem ita notantur 223^d 13^h $40'$ $53''$ &c.

Circulus quisque cœlestis in 12 *signa*, *signum* in 30 *gradus*, *gradus* in 60 *minuta* prima, *minutum* in 60 *secunda* &c. dividitur. Signa autem notantur littera s, gradus littera o, minuta prima, secunda &c. una, duabus &c. lineolis supra scriptis, ad hunc modum: 11^s 23^o $43'$ $52''$ $23'''$. &c.

Ad hæc, peculiaris quoque divisio æstimandæ rerum qualitati sæpe accommodatur, cujus in auro & argento exemplum habemus.

Et aurum quidem excoctum, cui nulla alterius metalli pars admiscetur, 24 gradus (*quilates*) continere intelligitur, *gradus* 4 *grana*, & *granum* 8 *octavas*. Datum autem auri pondus, ex. gr. selibra (*bum marco*), si purum putum habeatur, eam valoris rationem obtinet, quæ per 24 *gradus* exprimitur; si alteram alterius metalli partem ferat, per 12 gradus æstimatur; si 5 partes auri, unam vero alterius metalli partem contineat, ad 20 graduum valorem refertur &c. Ea verò *grana*, in quæ *gradum* dividimus a *granis* ponderis distinguere oportet. Priora illa nostrates *grana legis* appellant, quia eorum pretium lege firmum sanctumque est; *grana* autem ponderis pretio sæpe differunt, prout diversi fuerint ipsius auri *gradus*.

Lege vero lata die 4 Augusti An. MDCLXXXVIII in Lusitana ditione constitutum est, selibram auri ad 22 *gradus* exacti, cujusmodi aurum signatum apud nos est, immutabili pretio, habendam in posterum esse pro 96U000 *reis*. Quare, si legitimum valorem per 22 dividamus, *gradus* quilibet in selibra erit 4U363 $\frac{7}{11}$, *granum legis* 1U090 $\frac{10}{11}$ &c; adeoque selibræ 24 *graduum* pretium erit 104U727 $\frac{3}{11}$ *reis*. Eadem Lege cautum est, ne *Bractearii* auro ro uterentur, nisi ad 23 gradus exacto; neve *Aurifices* cœlatum aurum distraherent, citra 20 gradus & 2 *grana*. Selibra adeo auri cœlati, posito valore legitimo auri 22 *graduum*, pretium ferre debuisset 89U454 $\frac{6}{11}$ *reis*, uncia 11U181 $\frac{9}{11}$, & octava 1U397 $\frac{8}{11}$. Sed, ut fractorum molestia tolleretur, Lex ipsa selibram revocavit ad 89U600, unciam ad 11U200, & octavam ad 1U400.

Argentum expurgatum, cui nihil extranei metalli adhæret, ex 12 *denariis* (*dinheiros*) constare intelligitur, *denarius* ex 24 *granis legitimis*; *granum* ex 4 *quadrantibus*. Hujus divisionis ope datum quodcumque argenti pondus æstimatur. Si enim omnino purum fuerit, ejus pretium erit ut 12, si alteram vilioris metalli partem contineat, ut 6 &c.

Eadem vero Lege, quam supra laudavimus, constitutum est, ut selibra argenti ad 11 *denarios* probati, cujusmodi argento signato utimur, pretio staret, 6U000 *reis*. Hoc autem pretio constituto, consequitur, singulos *denarios* in selibra valere U545 $\frac{5}{11}$; adeoque & selibram 12 *denariorum*, qua Bracteatores uti tenentur, valere 6U545 $\frac{5}{11}$. Fabris autem argentariis indictum est, ne argentum cœlarent citra 10 *denarios* & 6 *grana*, cujus selibra constare debuisset 5U590 $\frac{10}{11}$; Sed, quo facilior calculus evaderet, ejusdem Legis auctoritate fuit ad 5U600 revocata.

Notandum autem est, aurum argentumque signatum ultra pretium Lege illa constitutum, valorem adjectitium habere, quatenus signum est auctoritate Regis excusum. Semuncia enim auri ad

22

22 *gradus* excocti pretium (quod vocamus intrinsecum) habet 6U000 *reis*; nummus vero aureus ejusdem ponderis valet 6U400. Eodem modo semuncia argenti 11 *denariorum* in rerum commercio valet U375 *reis*; nummus vero argenteus ejus ponderis U480. §§

Numerorum complexorum Additio.

117 UT hæc operatio fiat, numeri addendi alii subter alios ita scribuntur, ut ejusdem generis unitates in eadem columna verticali maneant. Tum ducta linea transversa, additio inchoatur ab unitatibus minoris speciei a dextra versus sinistram. Si earum summa unitatem speciei proximè maioris non conficit, infra lineam scribitur; si autem unitatem unam aut plures continet, scribendum tantum est id, quod ablato earum unitatum numero superest, aut cifra, si nihil supersit; ipsæ vero unitates retinentur proximæ columnæ addendæ, ubi operatio eodem modo peragitur, & ita deinceps.

Exemplum I.

Addendi sint numeri - - -	227^{lb}	14^{s}	8^{d}	
	2549	18	5	
	184	11	11	
	17	10	7	
	2979^{lb}	15^{s}	7^{d}	Sũma.

Iis dispositis, ut in exemplo videre licet, *denariorum* columnam addemus, & summam efficiet 31^{d}, in qua bis duodecim *denarii*, hoc est, 2 *solidi* continentur, & præterea supersunt 7 *denarii*. Quare in columna *denariorum* scribemus 7^{d}, & 2^{s} retinebimus unitatibus columnæ sequentis addendos.

dos. Sic inveniemus *ſolidorum* unitates efficere 15^{s}, cujus numeri dexteriorem notam 5 ſub iis unitatibus ſcribemus, decadem vero 1 retinebimus addendam decadibus eorundem *ſolidorum*, quæ conficient 5. Quia vero binæ quæque *ſolidorum* decades *libram* conficiunt, numerum 5 mente dividemus per 2, & reſiduum 1 ſub decadibus *ſolidorun* ſcribemus, quotum autem 2 retinebimus *libris* addendum; qua operatione abſoluta, ſumma erit $2979^{lb}\ 15^{s}\ 7^{d}$.

Exemplum II.

SI addendi proponantur quatuor numeri ſequentes - - - - - - - - - - - - - - - -

54^{T}	2^{P}	3^{p}	9^{l}
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^{T}	3^{P}	6^{p}	5^{l} Summa.

Ducto initio a columna *linearum*, eam inveniemus conficere 41^{l}, ſive $3^{p}\ 5^{l}$; ac proinde 5^{l} ſcribemus, & 3^{p} retinebimus columnæ ſequenti adnumerandos. Hæc ſimiliter ſummam conficit 30^{p}, ſive $2^{P}\ 6^{p}$; proindeque 6^{p} tantum ſcribemus, & 2^{P} columnæ ſequenti addemus; quæ ſũmam præbet 15^{P}, ſive $2^{T}\ 3^{P}$. Quare ſubſcriptis 3^{P}, & 2^{T} columnæ ſequenti additis, ſumma quæſita prodibit $85^{T}\ 3^{P}\ 6^{p}\ 5^{l}$.

Exemplum III.

55 SInt addendi numeri -

23^{d}	13^{h}	43^{l}	52^{ll}
35	0	12	41
0	23	0	24
12	14	23	5
72^{d}	3^{h}	20^{l}	2^{ll} Sũm.

In

In *secundorum* columna unitates conficiunt 12; ac proinde infra scribemus 2, & decadem decadibus adnumerabimus, quæ efficient 12, Cum autem sex decades *minutum* conficiant, 12 per 6 mente dividemus, & quotum 2 columnæ sequenti addendum retinebimus, & quia nihil superest, nihil sub decadibus *secundorum* scribemus. In columna sequenti unitates conficiunt 10, ac proinde scripta cifra, decadem 1 decadibus adjungemus, quæ efficiunt 8; quibus divisis per 6 quotus erit 1 columnæ sequenti addendus, residuum vero 2 infra notandum. Jam in columna horarum summa prodit 51^h, quæ 2^d continet & 3^h; adeoque subscriptis 3^h, & 2^d additis columnæ sequenti, summa quæsita erit 72^d 3^h 20^l 2^{ll}.

Exemplum IV.

QUæritur sũma numerorum

11^s	23^o	43^l	53^{ll}
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10^s	27^o	34^l	46^{ll} Sũma.

Additis *secundis*, & *minutis*, ut in exemplo præcedenti, unitatem inveniemus a *minutis* ad *graduum* columnam adnumerandam, ubi unitatum sũma conficiet 7^o infra scribendos, decadum vero conficiet 5; sed quia 3 decades *signum* conficiunt, infra scribemus tantum 2, & unitatem *signis* addendam retinebimus. Horum summa invenitur 22^s; quia tamen circulos integros, sive 12^s, abjicere consuevimus quoties in summam venerint, ablatis 12^s a 22^s, supersunt 10^s; adeoque summa quæsita erit 10^s 27^o 34^l 46^{ll}. ʃʃ

Nu-

Numerorum complexorum Subtractio.

118 UT numerus complexus à numero ejusdem generis subtrahatur, ambo scribuntur ut in Additione præcepimus, & operatio similiter ab infimæ speciei numeris inchoatur. Si numerus inferior auferri potest a superiori, subtractio instituitur, & residuum infra notatur. Si autem auferri nequit, numero superiori addendum erit quod fit ex unitate sedis proxime sequentis ad unitates revocata sedis ejus in qua operamur. Tum facta subtractione, residuum infra notatur, & numerus superior, a quo sumpta est unitas, unitate multatus in operatione sequenti adhibetur, quæ eodem modo perficitur, & ita deinceps.

Exemplum I.

SI a numero - - - - -	143^{lb}	17^{s}	6^{d}
auferendus sit - -	75	12	9
	68^{lb}	4^{s}	9^{d} Residuum.

Cum 9^{d} a 6^{d} auferri nequeant, a 17^{s} mente auferemus 1^{s}, cujus valor est 12^{d}, hisque additis numero 6^{d} fiunt 18^{d}, a quibus si 9^{d} auferamus, supersunt 9^{d}, quos infra scribemus. Tum in sede sequenti, si 12^{s} a 16^{s} (habita scilicet ratione unitatis ablatæ a numero 17^{s}) auferamus, residuum erit 4^{s}. Denique ablatis 75^{lb} a 143^{lb} residuum habetur 68^{lb}; adeoque residuum quæsitum erit 68^{lb} 4^{s} 9^{d}.

Exemplum II.

SI a numero - - - - - - - - -	163^{lb}	0^{s}	5^{d}
subtrahendus detur - -	84	18	9
	78^{lb}	1^{s}	8^{d} Residuum.

Quia

Quia 9^d a 5^d auferri nequeunt, & in *ſolidorum* ſede numerus non eſt, unde unitas petatur, a 163^{lb} mente auferemus 1^{lb}, quæ valet $20 ſ$. Ex his mente relinquemus $19 ſ$ in vacua *ſolidorum* ſede, & $1 ſ$ ad *denarios* revocabimus, ipſisque 5^d addemus; & inſtituta, ut in ſuperiori exemplo, operatione reſiduum inveniemus 78^{lb} $1 ſ$ 8^d.

Exemplum III.

55 S It a numero 7^s 12^o $20'$ $42''$
auferendus -4 23 36 23

2^s 18^o $44'$ $19''$ Reſiduum.

Ubi ad *minutorum* decadas operatio pervenerit, ſe ſe offeret numerus 3 ſubtrahendus ab 1, & cum id fieri nequeat, petenda erit unitas a 12^o, quæ 6 decadas in ſede *minutorum* valet, adeoque auferendus erit 3 a 7. Similiter in decadibus *graduum* reperiemus numerum 2 ſubtrahendum a 0, ac proinde unitatem mutuabimur a 7^s, quæ ad ſedem *graduum* tranſlata 3 decadas exhibet, abſolutaque operatione reſiduum habebitur 2^s 18^o $44'$ $19''$.

In hujuſmodi numeris ſæpe fit, ut maior a minori auferendus proponatur, quia nimirum minori circulus integer addi poteſt, ſive 12^s.

Exemplum IV.

S It a numero - - - - 3^s 0^o $12'$ $27''$
auferendus - - - 9 15 27 22

5^s 14^o $45'$ $5''$ Reſiduum

Primùm, cum in *minutorum* decadibus petenda ſit unitas a ſede proxima, quæ nullam habet, eam

eam mutuabimur a 3^s, quæ reducitur ad 30^o; Ex his mente locabimus 29^o in vacua *graduum* ſede, & 1^o pro 6 decadibus in minutorum ſede utemur. Et operatione ulterius inſtituta, cum tandem 9^s a 2^s auferenda ſe offerant, ipſis 2^s addenda erunt 12^s, factaque ſubtractione reſiduum quæſitum erit $5^s\ 14^o\ 45'\ 5''$. ∬

Numerorum complexorum Multiplicatio.

119 HUjuſce operationis praxis in univerſum revocari poteſt ad fractionum vulgarium multiplicationem, juxta regulam a nobis jam traditam (n. 106.).

Si enim ex. gr. manupretium quæratur ſolvendum pro $54^T\ 3^P$ operis, quum de $42^{lb}\ 17^f\ 8^d$ in ſingulas *hexapedas* ſolvendis convenit; multiplicandum $42^{lb}\ 17^f\ 8^d$ ad *denarios* revocare licet (n. 57.), quem 10292^d conficere inveniemus. Cum autem *denarius* ſit $\frac{1}{240}$ ipſius *libræ*, multiplicandus reducetur ad $\frac{10292}{240}$ ejuſdem *libræ*. Eodem modo multiplicator $54^T\ 3^P$ ad *pedes* revocatur, efficietque 327^P; & quia *pes* eſt $\frac{1}{6}$ ipſius *hexapedæ*, idem multiplicator erit $\frac{327}{6}$ *hexap.* Quæſtio proinde eò redit, ut fractio $\frac{10292}{240}$ unius *libræ* per fractionem $\frac{327}{6}$ multiplicetur (n. 106.); unde productum $\frac{3365484}{1440}$ ipſius *libræ* habetur, quod tandem (n. 112.) ad $2337^{lb}\ 2^f\ 10^d$ reducitur.

Hæc

Hæc quidem methodus numeris omnibus complexis, cujuſcunque ſint generis, accomodari poteſt. Sed in ea tamen diutius non immorabimur, aliam deinceps tradituri, quæ faciliori calculo abſolvitur.

120 Numerus, qui in alio numero aliquoties exactè continetur, pars ejus *aliquota* dicitur; qui autem exactè non continetur pars *aliquanta* nominatur. Sic 3 eſt pars *aliquota* numeri 12; *aliquanta* vero numeri 8.

Multiplicare autem, ut aliàs diximus, nihil aliud eſt quàm numerum datum aliquoties ſumere. Si ex. gr. numerus fuerit quivis per 8 $\frac{3}{4}$ multiplicandus, erit utique octies accipiendus, & tres inſuper ipſius quadrantes. Tres autem numeri quadrantes ſumere poſſumus, ſi primùm quartam ejus partem inveniamus, eamque deinde ter accipiamus; ſeu potius, ſi primùm numeri dimidium, & deinde hujus quoque dimidium quæramus. Sic ex. gr.

Si multiplicandus eſſet numerus - - 84
per - - - - - - - - - - - - - - - - 8 $\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ Produc.

Primùm, multiplicatione inſtituta per integrum 8, productum haberemus 672. Tum, ut $\frac{3}{4}$ multiplicandi 84 facilius ſumeremus, reſolvenda eſſet fractio $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{4}$, ſive $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{4}$. Proinde, ſumpto dimidio numeri 84, nimirum 42, deinde hujus quoque

quoque dimidio 21, quod adeo est quarta pars ipsius 84, & tandem his tribus productis partialibus in summam collectis, productum quæsitum prodiret 735.

U: autem hoc numeris complexis multiplicandis accommodetur, observandum est, unitates specie diversas, ex quibus coalescunt, fractiones esse, tum inter se invicem, tum ad unitatem principalem relatas; adeoque oportere, quo facilius multiplicentur, eas ita resolvere, ut aliæ aliarum partes aliquotas exhibeant. Si autem hujusmodi resolutio partes aliquotas suggesserit, quæ molestam impeditamque calculi rationem præ se ferant, productis subsidiariis inductis, operatio expedietur. Id quo modo fiat, ea quæ sequuntur exempla satis ostendent.

Exemplum I.

QUæritur, quanti fiant $54^T\ 3^P$ operis, pretio 72 *librarum* in singulas *hexapedas* constituto?

Multiplicandus adeo erit numerus - 72^{lb}

per - - - - - - - - - - - - - - $54^T\ 3^P$

$288^{lb}\ 0^f\ 0^d$

360

36

$3924^{lb}\ 0^f\ 0^d$ Prod.

Et primùm quidem multiplicabimus 72^{lb} per 54, juxta consuetam Multiplicationis regulam. Deinde, ut multiplicemus per 3^P, qui numerus dimidiam hexapedam refert, adeoque & dimidium ejus pretium obtinere debet, dimidiam ipsius multiplicandi partem 36 infra scribemus; additisque tribus productis partialibus, productum quæsitum habebitur 3924^{lb}.

Exemplum II.

SIt multiplicandus numerus 72^{lb}

per ---------------	54^T	5^P	
	288^{lb}	0^f	0^d
	360		
	36		
	24		
	3948^{lb}	0	0^d Productū.

Primum 72^{lb} multiplicabimus per 54, ut in exemplo præcedenti. Deinde, cum 5^P sint $\frac{5}{6}$ ipsius hexapedæ, hanc fractionem resolvemus in $\frac{3}{6}$ sive $\frac{1}{2}$, & $\frac{2}{6}$ sive $\frac{1}{3}$. Quare dimidia 72^{lb} parte 36 primùm, deinde tertia 24 assumpta, productisque tandem partialibus additis, productum totum inveniemus 3948^{lb}.

Exemplum III.

MUltiplicandus proponatur numerus -------- ------------------ 72^{lb}

per ---------------	5^T	4^P	8^P
	360^{lb}	0^f	0^d
	36		
	12		
	4		
	4		
	416^{lb}	0^f	0^d Product

Facta prius multiplicatione per 5^T, per 4^P deinde multiplicabimus, quem numerum ad id facilius exequendum resolvemus in 3^P & 1^P. Pro 3^P

autem dimidiam multiplicandi partem 36^{lb} sub priori producto scribemus. Quod vero ad 1^P attinet, observandum est, ipsum esse tertiam partem numeri prioris 3^P, ac proinde cum pro 3^P inventum jam sit productum 36, ejus tertiam partem 12 infra scribemus. Hinc, ut multiplicationem per 8^P instituamus, *pollices* non jam ad *hexapedam*, sed ad *pedem* commodius referemus, numerumque 8^P resolvemus in 4^P & 4^P, quorum uterque est tertia pars ipsius *pedis*, adeoque & productum feret 4, quod est triens producti 12 pro 1^P paulo ante inventi. Additis tandem hisce productis partialibus, quæsitum erit productum 416^{lb}.

122 Si numerus multiplicandus fuerit & ipse complexus, operatio fiet, quemadmodum in exemplo sequenti demonstratur.

Exemplum IV.

Multiplicandus sit numerus - 72^{lb} 6^{s} 6^{d}

per - - - - - - - - - - 27^T 4^P 8^P

504^{lb}	0^{s}	0^{d}
144		
6	15	0
1	7	0
0	13	6
36	3	3
12	1	1
4	0	$4\frac{1}{3}$
4	0	$4\frac{1}{3}$
2009^{lb}	0^{s}	$6^{d}\ \frac{2}{3}$. Product.

Cum primùm multiplicatus fuerit numerus 72^{lb} per

per 27, ut 6ſ per 27 ſimiliter multiplicemus, reſolvendus erit numerus ipſe multiplicandus in 5ſ & 1ſ. Quia verò 5ſ quartam *libræ* partem conſiciunt, idem erit multiplicare 5ſ per 27, ac 27 quartas *libræ* partes aſſumere, ſive quartam 27 *librarum* partem; quapropter $\frac{1}{4}$ ex 27^{lb}, ſive 6^{lb} 15ſ infra notabimus, Tunc, ut 1ſ per 27 multiplicemus, cum ſit quinta pars numeri 5ſ, quem proximè multiplicavimus, quintam ejus producti 6^{lb} 15ſ partem ſubſcribemus, nempe 1^{lb} 7ſ. Ut autem 6^{d} per eundem numerum 27 multiplicemus, animadvertendum eſt, 6^{d} dimidiam *ſolidi* partem exhibere, ac proinde aſſumendam eſſe dimidiam partem illius producti 1^{lb} 7ſ, quod pro 1ſ paulo ante invenimus, videlicet 13ſ 6^{d}.

Atque hactenus totum numerum multiplicandum per priorem multiplicatoris partem 27^{T} multiplicavimus. Nunc, ut eundem quoque per 4^{P} multiplicemus, operatio ineunda erit ut in exemplo præcedenti. Et quidem 4^{P} mente reſolvemus in 3^{P} & 1^{P}, ac pro 3^{P} dimidiam partem ipſius multiplicandi, nimirum 36^{lb} 3ſ 3^{d} aſſumemus, & pro 1^{P} tertiam ejus numeri partem, nempe 12^{lb} 1ſ 1^{d}. Tandem 8^{P} ſimiliter reſolvemus in 4^{P} & 4^{P}, adeoque bis accipiemus tertiam illius producti partem, quod pro 1^{P} invenimus, nimirum 4^{lb} 0ſ 4^{d} $\frac{1}{3}$. Et collectis in ſummam partibus inventis, productum quæſitum habebimus 2009^{lb} 0ſ 6^{d} $\frac{2}{3}$.

123 In ſuperioribus exemplis, quæ multiplicandi numeri partes aſſumendæ erant, facili negotio ob earum ſimplicitatem repertæ ſunt. Ubi autem magis compoſitæ fuerint, operatio inſtituetur, ut in exemplis ſequentibus videre licet.

Exemplum V.

QUæritur, quanti ſiant 17^{T} operis, pacto pretio 34^{lb} 10ſ 2^{d} pro ſingulis hexapedis?

Multiplicandus erit --	34^{lb}	10ſ	2^{d}
per ------	17^{T}		
	238^{lb}	0ſ	0^{d}
	34		
	8	10	
	0	17	
	0	2	10
	586^{lb}	12ſ	10^{d} Producto.

Et primum quidem 34^{lb} per 17 multiplicabimus; deinde 10ſ, qui numerus dimidiam *libram* refert, adeoque ejus productum dabit 17 dimidias *libras*, ſive dimidium 17 *librarum*, nempe 8^{lb} 10ſ. Tum, ut 2^{d} per 17 multiplicemus, obſervandum eſt, 2^{d} eſſe ſextam *ſolidi* partem, ac proinde ſextam ex decima, ſive (n. 114) ſexageſimam partem decem *ſolidorum*. Quapropter pro 2^{d} ſumenda eſſet ſexageſima pars producti 8^{lb} 10ſ proxime inventi pro multiplicando 10ſ. Attamen facilioris calculi gratia, decimam prius ejus producti partem eliciemus, quæ ad 1ſ pertineret, eamque punctis vel lineolis notabimus, ut producti ſubſidiarii loco habeatur, & poſtea in additione negligatur. Hujus vero ſubſidiarii producti 0^{lb} 17ſ ſextam partem aſſumemus 2ſ 10^{d}, quæ ipſa eſt ſexageſima pars producti ſuperioris 8^{lb} 10ſ, quam invenire oportebat; ac tandem additis productis partialibus, erit productum quæſitum 586^{lb} 12ſ 10^{d}.

Exemplum VI.

QUæritur, quantum operis præstari debeat pro 34^{lb} 10 2^{d}, pretio 1^{lb} pro singulis 17^{T} constituto?

Multiplicandus igitur erit - - - - - - - - - - - 17^{T}

per - - - - - 34^{lb} $10ʃ$ 2^{d}

68^{T} 0^{P} 0^{P} 0^{l} 0^{pts}.
51
8 3
$\dot{0}$ $\dot{5}$. $\dot{1}$ $\dot{2}$ $\dot{4}$ $\frac{4}{5}$
0 0 10 2 4 $\frac{4}{5}$

586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$ Product.

Quare primùm multiplicabimus 17^{T} per 34; deinde per $10ʃ$, pro quibus dimidium multiplicandi assumemus, nimirum 8^{T} 3^{P}, quia $10ʃ$ dimidiam unitatis principalis partem ostendunt. Ut autem 17^{T} per 2^{d} tandem multiplicentur, productum prius investigabimus quod pro $1ʃ$ habendum esset, decima scilicet producti præcedentis parte assumpta 0^{T} 5^{P} 1^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$, quod productum subsidiarium punctis notabimus, ejusque sextam partem 0^{T} 0^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$ infra scribemus, reliquis partibus inventis addendam; atque ita productum quæsitum habebitur 586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$.

Atque hoc potissimum exemplo usi sumus, ut illud confirmaretur quod alias jam diximus (n. 45.)

45.), oportere nimirum *multiplicandum* a *multiplicatore* distinguere, quum uterque foret numerus *concretus*. Et quidem, tam in hoc exemplo quam in præcedenti *factores* iidem sunt 17^T, & 34^{lb} 10^{f} 2^{d}; quæ tamen inde orta sunt producta inter se differre inveniuntur.

§§ Notandum autem est, utriusque producti discrepantiam penes solam expressionem esse; re verò ipsa quantum *librarum* per primum, tantundem *hexapedarum* per alterum omnino significari, numeris tamen diversis, quia eadem non est *libræ*, atque *hexapedæ* divisio. Id si quis probare velit, nihil aliud opus erit quàm partes *libræ* in priori ad fractionem *libræ*, partesque *hexapedæ* in posteriori ad fractionem *hexapedæ* revocare, & producta omnino consentient, eruntque $586^{lb}\ \frac{77}{120}$ & $586^T\ \frac{77}{120}$.

Neque illud prætermittendum, unitatem maioris speciei principalem haberi in exemplis superioribus, nihil vero impedire quominus & aliæ præcipuæ constituantur. Posset enim ex. gr. quæri, quantum operis præstandum esset pro 34^{lb} 10^{f} 2^{d}, ubi de 17^T pro 1^{f} præstandis conventum est. Tunc pro 2^{d} productum haberemus 2^T 5^P pro 10^{f} autem 170^T, & pro 34^{lb} tandem 11560^T; adeoque totum productum 11732^T 5^P. §§

Divisio numeri complexi per incomplexum.

124 SI numerus, qui dividendus proponitur, complexus tantum fuerit, & dividendus ac divisor unitates specie diversas referant, operatio erit hujusmodi.

Divi-

Dividantur primùm quæ ſunt præcipuæ in dividendo unitates, juxta regulam pro numeris integris traditam. Deinde reſiduum, ſi quod fuerit, ad unitates ſpeciei proximè minoris reducatur (n. 57.), quibus addentur ejuſdem ordinis unitates quæ in dividendo fuerint; ſummaque ſimiliter dividatur. Tum etiam reſiduum hujuſce operationis ad unitates ordinis proximè minoris revocetur, quibus adjungantur quæ in dividendo habentur, ſummaque rurſus dividatur; & ita deinceps, quouſque ad infimam dividendi ſpeciem veniamus.

Exemplum.

PErſolutis 4783 *libris*, 3 *ſolidis*, & 9 *denariis*, pro 87 *hexapedarum* manupretio, quæritur quanti *hexapeda* ſteterit?

Dividendus igitur erit numerus $4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d}$ per 87^{T}, ad hunc modum:

$$
\begin{array}{r|l}
4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d} & 87^{T} \\ \cline{2-2}
433 & 54^{lb}\ 19^{ſ}\ 7^{d} \\
85 & \\ \cline{1-1}
1703^{ſ} & \\
833 & \\
50 & \\ \cline{1-1}
609^{d} & \\
000 &
\end{array}
$$

Et initio quidem a *libris* facto, dividemus 4783^{lb} per 87 (n. 65.), & quotum inveniemus 54^{lb}, reſiduum vero 85^{lb}. Hocce *librarum* reſiduum in *ſolidos* inde convertemus, iiſque 3, qui in dividendo ſunt, *ſolidos* adnumerabimus, ut fiat ſumma $1703^{ſ}$; qua ſimiliter diviſa per 87, quo-

quotus prodibit 19^{s}, residuum verò 50^{s}. Eodem modo 50^{s} ad *denarios* revocabimus, iisque addemus 9^{d}, qui in dividendo reperiuntur, fietque summa 609^{d}, qua tandem per 87 divisa, quotus erit 7^{d}; adeoque quotus totalis 54^{lb} 19^{s} 7^{d}.

125 At si dividendus ac divisor ad ejusdem generis unitates referantur, antequam divisionem ineamus, animadvertere oportet, debeatne quotus ad easdem illorum unitates revocari, an secus: id quod ex proposita quæstionis ratione facile dignoscitur.

126 Et quidem, si dividendo ac divisore inter se unitatum specie consentientibus, quotus easdem quoque unitates significare debeat; divisio prorsus instituetur, ut in priori casu traditum est.

Sit ex. gr. proposita quæstio: Ex 1243^{lb} ortum est lucrum 7254^{lb}, scire autem oportet, quid lucri ad singulas sortis *libras* pertineat. Perspicuum est, quotum ad dividendi ac divisoris unitates spectare, habendumque esse in *libris*, & *libræ* partibus. Quare 7254^{lb} per 1243 primùm dividemus, residuumque ad *solidos* revocabimus, quos similiter per 1243 dividemus, & ita porro. Qua operatione absoluta, quotum inveniemus quæsitum esse 5^{lb} 16^{s} 8^{d} $\frac{760}{1243}$.

127 Si autem, dividendo itidem ac divisore inter se circa unitatum speciem consentientibus, quotus unitates specie diversas referre debeat, priusquam divisionem aggrediamur, tam dividendus quam divisor reducendus erit ad unitates minoris speciei, quæ in dividendo reperiuntur (n. 57.). Tum divisio fiet, ut in exemplo superiori, & ipsius dividendi unitates perinde accipientur, quasi ad speciem unitatum pertinerent, quas in quotiente habendas esse dignoscimus.

Quæ-

Quæritur ex. gr. quot operis *hexapedæ* fieri debeant pretio 7954 *libr.* 11 *sol.* & 7 *den.*, conventione facta 72 *librarum* in singulas *hexapedas*? Ipsa quæstio manifestè ostendit, quotum habendum esse in *hexapedis*, & *hexapedæ* partibus. Quapropter dividendum 7954^{lb} 11 7^{d} ad *denarios* primùm revocabimus, fietque 1909099^{d}, deinde etiam divisorem 72^{lb}, fietque 17280^{d}. Mutata autem dividendi denominatione a *denariis* ad *hexapedas*, dividendum habebimus numerum --- 1909099^{T} per 17280, factaque operatione quotus prodibit 110^{T} 2^{P} 10^{p} 6^{l} $\frac{19}{25}$.

Divisio numeri complexi per complexum.

128 QUum divisor fuerit & ipse complexus, revocandus primùm erit ad infimam unitatum speciem (n. 57.), dividendus verò multiplicabitur per eum numerum, qui exprimit quot in divisore unitates infimæ speciei requirantur ad ejus unitatem principalem constituendam. Numeris vero ita præparatis, operatio redit ad regulam supra traditam pro divisore incomplexo.

Exemplum.

PErsolutis 854^{lb} 17^{f} 11^{d} pro 57^{T} 5^{P} 5^{p} operis, quæritur pretium *hexapedæ*. Dividendus igitur erit numerus 854^{lb} 17^{f} 11^{d} per 57^{T} 5^{P} 5^{p}. Sed antequam operationem aggrediamur, divisorem ad infimæ speciei unitates, *pollices* videlicet, revocabimus, fietque 4169^{p}; quia vero 72^{p} requiruntur, ut *hexapeda* fiat, quæ principalis est divisoris unitas, dividendum multiplicabimus per 72 (n. 121.), 121.), fietque 61552^{lb} 10ſ. Quare dividendus erit numerus 61552^{lb} 10ſ per 4169, ad hunc modum:

61552^{lb} 10ſ	4169	
19862	14^{lb} 15ſ 3^{d} $\frac{1833}{4169}$	
3186		
63730ſ		
22040		
1195		
14340^{d}		
1833		

Et primùm quidem ex divisione 61552 *librarum* per 4169 quotus habebitur 14^{lb}, residuum vero 3186^{lb}. Hoc deinde in *solidos* conversum, cum 10 insuper *solidis* ex dividendo assumptis conficiet 63730ſ, quibus similiter divisis per 4169, quotus prodibit 15ſ, & residuum 1195ſ. Hoc autem residuum ad *denarios* revocatum conficit 14340^{d}, quibus tandem divisis per 4169, quotus erit 3^{d}, & residuum 1833^{d}, adeoque is, qui inveniendus erat, quotus habebitur 14^{lb} 15ſ 3^{d} $\frac{1833}{4169}$.

Regulæ hujus ratio facile constat. Cum enim divisor 57^{T} 5^{P} 5^{P} idem sit atque 4169^{P}, cumque 1^{P} sit $\frac{1}{72}$ ipsius *hexapedæ*, idem divisor revocabitur ad hanc *hexapedæ* fractionem $\frac{4169}{72}$. Ut autem per fractionem divisio fiat, ipsius terminos invertere, & per divisorem ita inversum multiplicare oportet (n. 109.). Multiplicandum igitur erit in exemplo proposito per $\frac{72}{4169}$; quod

eo

rò redit, ut primùm per 72 multiplicemus, deinde per 4169 dividamus, quemadmodum regula præscribit.

Cum divisio per numerum complexum reducatur ad divisionem per numerum incomplexum, ut liquet ex iis quæ modò ostendimus, eadem hîc notata intelligantur, quæ paulo superius circa quotientis unitates expendimus (n. 126. 127.).

Hujus loci esset de multiplicatione etiam divisioneque Geometrica disserere, quibus *Geodeticæ*, *Stereometricæque* mensuræ ad numeros revocantur. Sed id genus operationes, quantum ad calculi rationem pertinet, nihil ab iis differunt, quas hactenus exposuimus. Unum modo reliquum esset, ut unitatum speciem factoribus & producto adtribuendam explicaremus. Verum id ad Geometriæ Elementa, ubi multo facilius intelligetur, differendum judicavimus.

De numerorum quadratorum genesi, & eorum radicibus extrahendis.

129 SI numerus quicunque per se ipsum multiplicetur, quod inde oritur productum ejus numeri *quadratum* nominatur. Sic 25 est quadratum numeri 5, quia ex numero 5 in se ipsum ducto producitur numerus 25.

130 *Radix* verò *quadrata* numeri cujuscunque dati is dicitur numerus, ex cujus per se ipsum multiplicatione ille producitur. Sic numerus 5 radix est quadrata numeri 25, & numerus 7 radix quadrata numeri 49 &c.

131 Numerus adeo, qui ad quadratum evehitur, multiplicandi simul ac multiplicatoris vices gerit; ac proinde bis *factor* producti habetur (n. 42.). Qua etiam de causa factum, sive qua-

quadratum, *secunda* ejus numeri *potentia* nominatur.

Ut numeri cujusvis quadratum habeatur, nihil aliud opus est quàm ut per se ipse multiplicetur, juxta vulgatas Multiplicationis regulas. Ut vero radix quadrata numeri cujuscunque propositi extrahatur, seu, ut a quadrato ad radicem revertamur, peculiari methodo opus est, idque tunc præsertim quum numerus propositus plures habuerit notas quàm duas.

Quum datus numerus una duabusve notis constat, ejus radix integra erit unus aliquis numerorum digitorum . . . .

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

quorum quadrata sunt

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Sic ex. gr. radix quadrata numeri 72 quoad unitates integra erit 8; cum enim numerus 72 inter 64 & 81 deprehendatur, ejus quoque radix inter illorum radices continebitur, id est, inter 8 & 9; adeoque erit 8 cum fractione. Hæc verò fractio accuratè quidem definiri non potest, sed ad verum ejus valorem propius accedere perpetuò possumus, ut paulo inferius demonstrabitur.

132 Radix quadrata ejus numeri, qui quadratus perfectè non est, numerus *surdus*, *irrationalis*, sive *incommensurabilis* nominatur.

ʃʃ Sunt autem quædam principia a Numerationis lege derivata, quibus sæpe dignoscere possumus, numerum propositum certò quadratum non esse, quæ ita se habent.

Numerus omnis, cujus postrema ad dextram nota fuerit 2, 3, 7, vel 8, quadratus esse nequit.

Qui numerus una, tribus, quinque cifris, aut generatim impare cifrarum numero ad dextram terminatur, quadratus esse non potest.

Si

Si novenarii a numero abjiciantur, & residuum fuerit 2, 3, 5, 6, vel 8, quadratus ipse perfectus certò non erit. Numerus autem, qui abjectis novenariis relinquit 3, vel 6, nullam cujusque gradus radicem rationalem habere potest.

Si undenarii similiter a numero abjiciantur, & residuum habeatur 2, 6, 7, 8, vel 10, ipse quadratus esse nequit.

Numeri autem, quicunque his non tenentur regulis, quadrati quidem esse poterunt, sed necessariò tamen idcirco non erunt. §§

133 Jam verò, ut ad numeros ex pluribus quàm duabus notis compositos veniamus, observandum est quid in quadratorum genesi fiat, ut inde methodus constet, qua ad radicem eorum detegendam vicissim revertamur.

Si autem numerum quemvis ex. gr. 54 ad quadratum evehere propositum sit;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primùm, notam superiorem 4 per inferiorem 4 multiplicabimus, juxta consuetam Multiplicationis regulam; id quod *quadratum unitatum* ejusdem numeri evidenter producit.

Deinde, notam superiorem 5 per inferiorem 4 similiter multiplicabimus; quod autem inde fit, nihil aliud est quàm *productum decadum per unitates*.

Tum, notam superiorem 4 per inferiorem 5 multiplicabimus, unde orietur productum unitatum

tum per decadas, five (n. 44.) *productum decadum per unitates.*

Postremò, notam superiorem 5 per inferiorem 5 itidem multiplicabimus, quod *quadratum decadum* conficiet.

His verò productis partialibus additis, numeri propositi quadratum habetur 2916, quod adeo videmus esse compositum *ex quadrato decadum, ex duplo producto decadum per unitates, & ex quadrato unitatum* radicis ejus 54.

134 Cum autem id, quod modò observavimus, a Multiplicationis regulis omnino pendeat, manifestum est non tantum ad numerum 54 pertinere, sed ad alium quemvis qui ex decadibus unitatibusque similiter constet. Proinde in universum dicendum est, quadratum numeri ex decadibus unitatibusque compositi tres illas, quas memoravimus, partes continere, quadratum scilicet decadum, duplum productum decadum per unitates, & quadratum unitatum ejusdem numeri propositi.

135 Quo posito, cum decadum quadratum centenas conficiat (siquidem decies 10 sunt 100), perspicuum est, decadum quadratum in duabus postremis ad dextram notis totius quadrati non contineri. Similiter, cum productum decadum per unitates decadas necessariò conficiat, facile liquet duplum ejus producti in postrema quadrati totius ad dextram nota minime contineri.

136 Ut igitur a quadrato 2916 ad ejus radicem detegendam regrediamur, ad hunc fere modum ratiocinari possumus.

Exem-

Exemplum I.

2916	54	Radix
416		
104		
000		

QUæramus primùm radicis inveniendæ notam, quæ ad decadum ſedem pertinet. Atqui geneſis ipſius quadrati oſtendit, decadum earum quadratum in toto quadrato 2916 contineri, & nihil ejus prætereà ad duas poſtremas notas 16 pertinere, adeoque & ipſum omnino contineri in 29. Cum autem radix quadrata numeri 29 maior eſſe nequeat quàm 5; maniſeſtò conſequitur radicis decadas nota 5 notandas eſſe, quam ad latus numeri propoſiti ſcribemus, uti in exemplo apparet.

Tum notæ inventæ 5 quadratum exactum conficiemus 25, quod a 29 ſubducemus, & reſiduum erit 4, cujus ad latus adſcribemus duas poſteriores propoſiti numeri notas 16.

Nunc, ut notam radicis unitatibus conſignandam inveniamus, conſiderandum eſt quid reſiduum 416 tandem contineat. Ex his vero, quæ ſupra oſtendimus, liquet duas tantum continere partes, duplum videlicet decadum per unitates productum, & unitatum radicis ejuſdem quadratum. Et harum quidem prior ſatis erit ad eam notam inveniendam, quam modo quærimus; cum enim conſtet ex duplo decadum per unitates multiplicato, ſi dividatur per duplum decadum, quas paulo ante invenimus, quotus unitates quæſitas oſtendet (n. 74.). Itaque id unum ſupereſt, ut videamus, quanam in parte reſidui 416 duplum illud decadum per unitates productum contineatur.

tur.

tur. Paulo autem ſuperius adnotavimus, nihil ejus in poſtrema nota contineri; igitur neceſſario continebitur in 41; adeoque dividemus 41 per duplum decadum 10, quem numerum infra partem dividendam ſcribemus, & quotus 4 unitates radicis oſtendet, quæ proinde erit 54.

Licet verò quotus 4 is ſit re ipſa inventus, quem invenire oportebat, notandum tamen eſt fieri quandoque poſſe, ut quotus hac ratione inventus juſto maior deprehendatur; ſiquidem 41 (pars nimirum reliqua poſt ſeparatam poſtremam notam) non ſolum continet duplum productum decadum per unitates, ſed etiam decadas quæ a quadrato unitatum aliquando proficiſcuntur. Quare, ne dubia relinquatur nota per hujuſmodi diviſionem inventa, eam hoc modo probabimus.

Poſtquam inventa eſt nota 4, & radici adſcripta, eam quoque ad latus dextrum diviſoris 10 adjungemus, ut fiat 104, quem numerum per eandem notam 4 multiplicabimus, productumque a membro ſuperiori 416 eadem opera ſubtrahemus, ut in diviſione peragenda præcepimus; cumque nihil ſuperſit, colligemus radicem eſſe re ipſa 54.

Si autem aliquid ſupereſſet, radix nihilominus vera eſſet ad unitates uſque, dummodo reſiduum non foret æquale, aut maius quàm duplum radicis inventæ unitate auctum, id quod neutiquam eveniet, cum illud pro operationis indole proclive tantum ſit erroris genus, ut quotus interdum prodeat juſto maior.

Hæc notæ inventæ probatio eidem quadrati geneſi innititur, quam ſupra oſtendimus. Quum enim 104 per 4 multiplicatur, quadratum ſimul unitatum atque duplum decadum per unitates productum conſit, quod nimirum deerat ad perfectum quadratum conſtituendum.

137 Ex his, quæ dicta ſunt hactenus, conſe-

ſequitur in univerſum methodus radicem quadratam extrahendi a numero quocunque, qui nec plures notas quàm quatuor, nec pauciores habeat quàm tres.

Duabus enim poſtremis ad dextram notis puncto adſcripto ſeparatis, quærenda eſt radix quadrata ejus membri quod ad ſiniſtram relinquitur. Quæ quidem decadas radicis inveniendæ oſtendet, & ad latus numeri propoſiti, lineola interjecta, adnotabitur.

Quadratum deinde notæ inventæ ab eodem membro ſubtrahetur, & reſiduum infra notabitur, ad cujus dextram adducentur quæ primum fuerunt notæ a numero propoſito ſeparatæ.

Tum reſiduum habebitur, cujus poſtrema nota puncto ſegregabitur; quod autem ad ſiniſtram reliquum fuerit membrum per duplum notæ inventæ dividetur, quod illi ſubſcribendum eſt.

Quotus deinde inventus ad prioris notæ dextram in radice, & ſimul ad dextram diviſoris adſcribetur, ſub ea nimirum ſede, quam nota paulo ante ſegregata occupat.

Diviſor tandem ita auctus per eundem quotum multiplicabitur, & ſingularum notarum producta a numero ſuperiori ſubtrahentur. Rem alio exemplo illuſtremus.

Exemplum II.

QUæritur radix quadrata numeri 7569.

75.69	87 Radix.
116.9	
167	
000	

Primùm duas poſtremas notas 69 puncto ſeparabimus, & radicem quadratam numeri 75 quæremus, quam inveniemus esse 8, & hanc notam post lineolam adnotabimus; quadratum verò ejus, nempe 64, a membro 75 subtrahemus, residuumque 11 infra scribemus, ad cujus dextram adducendæ sunt notæ 69, quas antea separavimus a numero proposito.

Deinde in residuo toto 1169 postremam ad dextram notam 9 puncto segregabimus, ut pars dividenda relinquatur 116, infra quam divisorem 16, duplum scilicet radicis inventæ 8, adnotabimus; & divisione instituta quotum inveniemus 7, quem & in radice post priorem notam 8, & juxta divisorem 16 infra notam puncto discriminatam adscribemus.

Divisorem tandem ita auctum 167 per eundem quotum 7 multiplicabimus, productaque singula, prout fuerint gradatim inventa, a notis numeri superioris 1169 subducemus; cumque nihil supersit, id argumento erit, & numerum 7569 perfectè quadratum, & ejus radicem accuratam esse 87.

138 Id autem apprimè notandum est, per decadum duplum partem dividendam tantummodo esse, quæ post separatam postremam notam relinquitur. Quapropter si pars reliqua illo duplo minor sit, adeoque illud non contineat, assumenda idcirco non erit nota ad dextram separata, sed cifra quotientis loco scribetur. Contrà, si idem decadum duplum in parte dividenda plusquam novies contineretur, nota maior ad quotum transferri non posset, quàm 9, idque ob eandem rationem, quam in Divisione tradidimus (n. 66.).

139 Jam verò iis penitùs intellectis, quæ circa radicem quadratam numerorum ex pluribus quàm quatuor notis non constantium extrahendam præce-

præcepimus, facile est animadvertere quid facto opus sit, quum pluribus ex notis compositus numerus quivis obvenerit. Quantus enim cumque sit notarum numerus, ex quibus radix debeat esse composita, eam nihilominus concipere licet duabus constantem partibus, quarum altera decadas, unitates altera semper exhibeat; quemadmodum ex. gr. numerus 874 concipi potest ex 87 decadibus, & 4 unitatibus omnino compositus.

Quare, duabus prioribus radicis notis per methodum hactenus traditam inventis, tertiam invenire licebit per eandem omnino methodum, si duas illas notas inventas simul assumamus quasi unum decadum numerum exhibentes, cui eandem ratiocinationem accomodabimus, qua circa priorem notam usi sumus, ut alteram inveniremus.

Eodem modo, ubi tres fuerint notæ inventæ, si quarta adhuc in radice desiderabitur, tres ipsas notas pro decadum numero accipiemus, iisque perinde utemur ad quartam, ut duabus prioribus ad tertiam detegendam usi paulo ante sumus; & ita deinceps.

Verum, ut operationem ordinatim aggrediamur, numerum propositum punctis interjectis in classes distinguere oportet, quarum singulæ binis a dextra versus sinistram notis constent, si postremam ad sinistram excipias, quæ una contenta erit nota, ubi impar earum numerus fuerit.

Hujus vero præparationis ratio est, quia radice ex decadibus & unitatibus composita, duæ ad dextram separandæ sunt notæ (n. 135. & seq.), ut in reliquis quadratum decadum inveniamus. Si autem radicis decades non unitates solum, sed etiam decadum decadas contineant, ob eandem rationem duas alias numeri propositi notas segregabimus, & ita deinceps.

Exemplum III.

Quaeritur radix quadrata numeri 76807696.

```
76.80.76.96 | 8764
  12 8.0    |
  167       |
 ---------
  1117.6
  1746
 ---------
   7009.6
   17524
 ---------
   00000
```

Numero in classes duarum notarum a dextra versus sinistram distributo, classis sinistimae 76 radicem deprehendemus proximam esse 8, quam notam post lineolam scribemus; ejus vero quadratum exactum 64 a 76 subtrahemus, & residuum 12 infra notabimus, ad cujus latus dexterum classem proximè sequentem 80 demittemus, cujus & postremam notam o puncto separabimus. Sub parte reliqua 128 duplum radicis inventae 8, nimirum 16, divisoris loco subjiciemus, & facta divisione reperiemus quotum esse 7, quam notam post priorem radicis 8, & ad divisoris 16 latus adscribemus. Tum numerum 167 per eundem quotum 7 multiplicabimus, productumque a 1280 auferemus, & residuum 111 infra lineolam notabimus, cui & classem sequentem 76 adjungemus, nota ejus dextima puncto segregata. Infra vero partem reliquam 1117 scribendus est numerus 174, duplum videlicet radicis hactenus inventae 87; & divisione facta partis 1117 per 174, quotus erit 6, quem ad radicem, atque ad divisoris latus transferemus; multi-

multiplicatoque numero 1746 per eundem quotum 6, ac producto a parte 11176 ſubducto, reſiduum 700 infra lineolam notabimus, cui & claſſem numeri propoſiti reliquam 96 adjungemus, dextima ejus nota puncto diſcreta. Sub ea quæ relinquitur parte 7009 numerum ſcribemus 1752, duplum nempe radicis jam inventæ 876; & diviſione facta quotum habebimus 4, quo ad radicem ſimul atque ad diviſorem appoſito, numerum 17524 per eundem quotum 4 multiplicabimus, productumque ſubducemus a numero 70096. Quia vero tandem nihil supereſt, numeri propoſiti radix exacta erit 8764.

140 Quum perfecte quadratus numerus non fuerit, reſiduum ad poſtremam operationis partem haberi neceſſe eſt; radix autem inventa erit radix quadrati maioris, qui in propoſito numero continetur. Tunc enimvero fieri nequit, ut radix quadrata exacta deprehendatur, ſed licebit tamen ad verum ejus valorem perpetuò accedere, ut error evadat data qualibet quantitate minor.

Id autem decimalium auxilio commodiſſime fit. Adduntur enim numero dato bis totidem cifræ, quot in radice decimalium ſedes exiguntur. Tum vero operatio inſtituitur, uti in exemplis ſuperioribus traditum eſt. Et tandem in radice inventa tot ad dextram notæ virgula diſcernuntur, quot cifrarum paria numero propoſito adjuncta ſunt. Etenim, cum multiplicationis productum tot notas decimales ferre debeat, quot in factoribus ſimul deprehenduntur (n. 54.), quadratum (cujus factores æquales habentur) duplo plures notas decimales habeat neceſſe eſt, quàm in factorum quolibet, id eſt, in ejus radice continentur.

Exem-

Exemplum IV.

QUæritur radix quadrata numeri 87567 ad millesimas usque accurata.

Ut millesimæ habeantur, tribus opus est decimalium sedibus; sex igitur cifræ numero proposito addendæ sunt; adeoque radix quadrata extrahetur à numero 8756700000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
 49
————————
 346.7
 585
————————
  5420.0
  5909
————————
   10190.0
   59181
————————
    427190.0
    591827
————————
     129111
```

Et operatione facta, ut in exemplis superioribus, radicem quadratam ad unitates usque accuratam inveniemus 295917. Radix isthæc ad numerum 87567000000 pertinet; nunc vero agitur de radice numeri 87567, sive 87567,000000. Idcirco tres postremas radicis ejus notas, dimidium videlicet numerum earum, quas numero dato cifras addidimus, virgula ad partes decimales separabimus, & radix quæsita erit 295,917 ad millesimas usque exacta.

Eo-

Eodem modo, ſi radix quadrata numeri 2 ad millioneſimas uſque exigatur, extrahenda erit radix a numero 2000000000000, quam inveniemus eſſe 1414213, & ſex ad dextram notis virgula diſcretis, radix quadrata numeri 2 ad partes uſque millioneſimas accurata erit 1,414213.

§§ Hujuſce operationis Examen ab ipſa radicis definitione manifeſte derivatur (n. 130.). Multiplicanda enim erit per ſeipſam radix, factoque addendum reſiduum, ſi quod fuit; ita enim reſtituetur numerus propoſitus, ſi operatio rectè proceſſerit. Si ex. gr. ex numero 12541028 radicem invenerimus 3541, & reſiduum 2347, ut operationis examen inſtituamus, radicem per ſe ipſam multiplicabimus, orieturque productum 12538681, cui reſiduum 2347 addemus, & numerus propoſitus cum redeat 12541028, errorem operationi nullum irrepſiſſe intelligemus.

Si cui novenaria probatione uti volupe fuerit, novenarios a radice ſubtrahat, reſiduumque per ſe ipſum multiplicet, & a facto novenarios ſimiliter abjiciat, ſi quidem habeat; quod autem ſupereſt reſiduo operationis addat, unaque novenarios abjiciat, & quod tandem reliquum fuerit id ipſum erit, quod abjectis a numero propoſito novenariis relinqui debet. Sic in eodem exemplo, abjectis novenariis a radice 3541 relinquitur 4, quod in ſe ipſum ductum conficit 16; abjectoque novenario, 7; hoc autem reſiduum, ſi operationis reſiduo 2347 addatur, unaque novenarii ſubtrahantur, tandem relinquetur 5, quod etiam ex numero 12541028 ſupereſſe debet, ut re ipſa ſupereſt. Ut novenaria, ita & undenaria probatio accommodatur, de quibus idem erit judicium, quod indicatum jam fuit (n. 75.). §§

141 Cum paulo ſuperius oſtenſum ſit (n. 106.) ad fractionem per fractionem multiplicandam oportere

tere numeratores invicem, ac denominatores multiplicare, sponte consequitur, fractionis quadratum habitum iri, si uterque ejus terminus ad quadratum evehatur. Sic quadratum fractionis $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, quadratum fractionis $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$ &c.

142 Igitur & viciſſim radix quadrata fractionis habebitur, si numeratoris, atque denominatoris radices extrahantur. Sic radix quadrata fractionis $\frac{9}{16}$ erit $\frac{3}{4}$, quia numeratoris 9 radix est 3, & denominatoris 16 radix est 4.

143 Fieri verò potest, ut numerator, aut denominator, aut uterque quadrati non sint. Si numerator tantummodo quadratus non fuerit, ejus radix quàm proxima per methodum supra traditam extrahatur, cui radix denominatoris exacta denominatoris loco subscribatur.

Sic ex. gr. si radix quæratur fractionis $\frac{2}{9}$, numeratoris 2 radicem quàm proximam extrahemus, eritque 1,4, vel 1,41, vel 1,414, vel 1,4142 &c, prout maior, vel minor accurationis fuerit habenda ratio; cui denominatoris 9 radicem 3 denominatoris loco donabimus, eritque fractionis datæ $\frac{2}{9}$ radix vero quàm proxima $\frac{1,4}{3}$, vel $\frac{1,41}{3}$, vel $\frac{1,414}{3}$, vel $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Quod si denominator fractionis propositæ quadratus non fuerit, uterque ejus terminus per denominatorem ipsum multiplicabitur, & res ad regulam præcedentem adducetur.

Sic ex. gr. si radix quadrata fractionis $\frac{3}{5}$ inve-

invenienda proponatur, fractionem revocabimus ad $\frac{15}{25}$, & radice numeratoris 15 ad millesimas usque extracta, si pro quæstionis ratione id sufficiat, fractionis $\frac{15}{25}$, sive $\frac{3}{5}$, radix quàm proxima erit $\frac{3,872}{5}$.

144 Ne pluribus fractionum generibus simul distrahamur, radicem hujus formæ $\frac{3,872}{5}$ ad fractionem merè decimalem reducere possumus, si nimirum 3, 872 per 5 dividamus, id quod radicem fractionis $\frac{3}{5}$ partibus tantum decimalibus expressam ostendet 0,774 (n. 99.).

145 Si denique integri fractionibus adhæreant, ipsi ad fractionum suarum nomen adducantur (n. 86.), & operatio fiat, quemadmodum in exemplis superioribus ostensum est. Ut ex. gr. radicem extrahamus a numero 8 $\frac{3}{7}$, hunc transmutabimus primùm in $\frac{59}{7}$ (n. 86.), deinde in $\frac{413}{49}$ (n. 143.), cujus radix quàm proxima est $\frac{20,322}{7}$, sive 2,903.

146 Fractio etiam, quæ integro adhæret, decimales in partes transmutari potest, antequam radicis extractionem aggrediamur; in quo illud observandum est, ut notarum decimalium numerum, & parem, & duplum earum, quas in radice habere propositum est, eliciamus. Ut hanc numero 8 $\frac{3}{7}$ methodum ita accomodemus, ut radix ad millesimas usque protrahatur, revocandus ipse erit ad 8,428571 (n. 99.), cujus radix quadrata

drata habebitur 2,903, ut paulo ante invenimus.

147 Ubi autem fractionis decimalis radix extrahenda proponitur, illud curandum est, ut sedes decimales pari numero constituantur, & duplo insuper earum, quæ in radice habendæ sunt, additis quot opus fuerint cifris (n. 30.); radix autem inventa dimidiatum sedium numerum feret, qui interjectis inter virgulam & priorem notam cifris supplebitur, si necesse fuerit.

Sic, ut radicem quadratam a 21,935 ad millesimas usque extrahamus, numerum constituemus 21,935000, & instituta operatione radix erit 4,683. Eodem modo inveniemus radicem hujus fractionis 0,542 ad millesimas productam esse 0,736, radicemque hujus 0,0054 ad millesimas itidem accuratam esse 0,073; & ita de reliquis.

148 Quod Divisioni peragendæ compendium supra traditum est (n. 69. & seq.), id & radicum extractioni facile accommodatur. Si enim radix ad unitates usque exacta sufficiat, numerus primùm in classes distribuetur, deinde tot ad ejus dextram notæ minus una rejicientur, quot classes fuerint, & ex iis quæ relinquentur radix per methodum hactenus traditam investigabitur. Quod verò postremum fuerit residuum per operationis præcedentis divisorem postrema ad dextram nota multatum dividetur; quod inde rursus reliquum fuerit per eundem divisorem alia nota multatum dividetur; & ita deinceps.

De numerorum cubicorum genesi, eorumque radicibus extrahendis.

149 SI quadratum numeri cujusque per numerum ipsum multiplicetur, qui inde gignitur numerus prioris illius *cubus* appellatur.

Sic

Sic numerus 27 cubus eſt numeri 3, quia ex ipſius 3 per quadratum 9 multiplicatione producitur.

Numerus adeo, qui ad cubum evehendus aſſumitur, ter ipſius cubi factor habetur; quapropter & cubus *tertia ejus numeri potentia*, ſeu *tertii gradus potentia* nominatur.

150 Numerus in univerſum ad ſecundam, tertiam, quartam, quintam &c potentiam elevari dicitur, quum per ſe ipſum ſemel, bis, ter, quater &c multiplicatur, ſeu, quod eodem redit, quum bis, ter, quater, quinquies &c factor adhibetur.

151 *Radix* autem *cubica* dicitur numerus, qui in quadratum ductus cubum producit. Sic 3 radix cubica eſt numeri 27, quia ex multiplicatione numeri 3 per ejus quadratum 9, numerus ipſe 27 producitur.

152 Ut igitur numerus quivis ad cubi potentiam evehatur, nulla alia quàm Multiplicationis regula opus eſt. Ut autem a cubo ad radicem viciſſim redeamus, peculiaris methodus adhibenda eſt, quam ex ipſius cubi formatione colligemus.

Obſervandum tamen eſt, eam methodum ad radicem integram eruendam neceſſariam non eſſe, niſi quum propoſitus fuerit numerus qui ex pluribus quàm tribus notis conſtet. Cum enim 1000 cubus ſit numeri 10, manifeſtum eſt, numerum minorem quàm 1000, qui adeo tres ultra notas non excurret, radicem habere minorem quàm 10. Horum autem radices ſcire oportet, ut operatio in grandioribus numeris inſtituatur.

Numerus igitur omnis, qui ex pluribus quàm tribus notis non conſtat, radicem cubicam integram habebit unum aliquem numerorum digitorum

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

quorum iſti ſunt cubi

1. 8. 27 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Sic

Sic radix cubica numeri 428 quoad unitates integra erit 7; cum enim numerus 428 inter 343, & 512 contineatur, ejus quoque radix inter illorum radices 7, & 8 existat necesse est, ac proinde quod ad unitates integras spectat, cum radice 7 numeri cubici proxime minoris 343 omnino consentiet.

153 Plures itaque sunt numeri, qui radicem accuratam non habent. Sed ad eam tamen tam proximè accedere supputando possumus, ut defectus data qualibet quantitate minor existat, quemadmodum paulo inferius demonstrabitur, postquam radicis a cubo perfecto extrahendæ methodus tradita fuerit.

154 Hæc autem ut probè intelligatur, videndum est quibus ex partibus constare debeat cubus ejus numeri, qui decadas tantum unitatesque complectitur.

Quoniam verò cubus ex multiplicatione quadrati per ejus radicem exoritur (n. 149.), illud recolendum est, quadratum numeri ex decadibus unitatibusque compositi (n. 134.) tribus ex partibus conflari, *quadrato* videlicet *decadum*, *duplo decadum per unitates producto*, & *unitatum quadrato*.

Ut igitur cubus formetur, tres illæ quadrati partes per decadas unitatesque radicis multiplicandæ sunt.

Et primùm quidem, si per decadas multiplicentur, tria exurgent producta, cubus scilicet decadum, duplum ex quadrato decadum unitatibusque productum, & productum ex quadrato unitatum per decadas multiplicato. Deinde, si per unitates multiplicentur, tria alia producta orientur, productum nimirum ex quadrato decadum per unitates multiplicato, duplum ex quadrato unitatum decadibusque productum, & cubus unitatum.

Si

Si ergo producta similia conjungamus, perspicuum fiet, cubum numeri ex decadibus unitatibusque compositi quatuor partes omnino continere, *cubum* nempe *decadum*, *triplum ex quadrato decadum unitatibusque productum*, *triplum ex decadibus quadratoque unitatum productum*, *&* *cubum unitatum*.

Harum vero partium ratione constituta, numeri cujusvis ex decadibus unitatibusque compositi cubum invenire licet. Sit exempli loco ad cubum evehendus numerus 43.

64000
14400
1080
27
79507

Primùm notæ 4 cubum investigabimus 64, qui *millia* exhibebit, quia nota 4 decadas significat, & 10 cubum habet 1000; adeoque prior cubi totius pars erit 64000.

Tum triplum quadratum ejusdem notæ 4, videlicet 48, per notam 3 quæ unitatum sedem occupat multiplicabimus, & productum erit 144, quod centenas ostendet, siquidem decadum quadratum centenas conficit, ac proinde pars altera cubi propositi erit 14400.

Deinde triplum ejusdem notæ 4 decadibus significandis consignatæ per quadratum 9 ipsius 3 multiplicabimus, & productum fiet 108, quod cum decadas exhibere debeat, partem tertiam cubi propositi ostendet 1080.

Postremò cubus unitatum erit 27, qui ultimam cubi totius partem constituet.

Quibus tandem partibus additis, cubum numeri

meri propoſiti 43 eſſe reperiemus 79507; qui quidem multo facilius inveniri poterat, ſi numerus datus 43 per ſe ipſe primùm, & rurſus per productum 1849 multiplicaretur; ſed iſthæc numeri cubici geneſis non eò ſpectat, ut is expeditiſſimo calculo formetur, ſed ut via oſtendatur, qua ad radicem inverſa operatione redire liceat.

155 His autem poſitis, cubicæ radicis extrahendæ methodus erit hujuſmodi.

Exemplum I.

Quæratur radix cubica ejuſdem numeri 79507.

Cubus	Radix
79.507	43
15 5.07	
48	
79507	
00000	

Ut partem in numero dato ſecernamus, in qua cubus decadum radicis inveniendæ continetur, poſteriores tres ad dextram notas 507 puncto ſeparabimus, in quibus cubum illum minime contineri ſupra oſtendimus, quippe qui millia ſignificat. Ejus verò partis 79, quæ ad ſiniſtram relinquitur, radicem cubicam eruemus, quam inveniemus eſſe 4, eamque poſt lineolam ad ipſius numeri latus adſcribemus.

Hujus notæ 4, quæ radicis decadas oſtendit, cubum accuratum conficiemus 64, eumque a parte ipſa 79 auferemus, & reſiduum 15 infra notabimus, ad cujus latus tres illas notas adſcribemus, quæ fuerant a numero propoſito ſeparatæ, eritque totum reſiduum 15507, quod tres reliquas

quas cubi totius partes continere debet, triplum videlicet productum ex quadrato decadum inventarum per unitates multiplicato, triplum productum ex iisdem decadibus per unitatum quadratum multiplicatis, & cubum unitatum.

Quoniam verò earum partium prior centenas exhibet, duas residui notas ad dextram c7 puncto separabimus, & quæ ad sinistram reliquæ sunt 155 productum ex triplo decadum quadrato per unitates multiplicato continebunt. Quare, ut unitates inveniamus (n. 74.), dividenda erit pars ipsa 155 per triplum quadratum 4 decadum, quas invenimus, nimirum per 48; quem numerum infra partem dividendam scribemus; cumque divisorem 48 *ter* inveniamus in 155 contineri, notam 3 in radice scribemus, quæ unitates ostendet.

Ut notam inventam probemus, & residuum si quod est inveniamus, tres illas partes supputare possumus, quæ in residuo 155c7 contineri debent; sed æque commodum erit radicem inventam 43 ad cubum evehere, quæ cum propositum numerum restituat, ejus radix exacta esse dignoscitur.

Si numerus proponatur, qui plures notas habeat quàm sex, in ejus radice extrahenda ratiocinabimur, ut in exemplo sequenti videre licet.

Exemplum II.

SI extrahenda proponatur radix cubica a numero 596947688.

596.947.688	842
849.47	
192	
592704	
42436.88	
21168	
5969476.88	
000 0 000 00	

Ejus primùm radicem ſpectabimus tanquam ex unitatibus decadibuſque compoſitam, adeoque tres poſtremas ad dextram notas puncto ſeparabimus. Deinde, cum reliqua pars 596947 quæ decadum cubum amplectitur plures & ipſa notas habeat quàm tres, ejus quoque radix plures habeat quàm unam neceſſe eſt, ac proinde ex unitatibus decadibuſque decadum conſtabit. Ut harum quoque decadum cubum inveniamus, tres alias ad dextam notas ob eandem rationem ſegregare oportet, & reliqua pars erit 596, in qua cubus earum continebitur.

Radicem igitur cubicam partis 596 inveſtigabimus, quam inveniemus eſſe 8, eamque notam poſt lineolam ſcribemus, cujus cubum exactum 512 a parte ipſa 596 ſubtrahemus, reſiduumque 84 infra notabimus. Ad ejus reſidui dextram claſſem alteram 947 adducemus, fietque 84947, cujus duas poſtremas ad dextram notas puncto ſeparabimus, & ſub parte reliqua 849 diviſorem ſcribemus 192, triplum ſcilicet quadratum radicis inventæ 8, factaque diviſione quotum inveniemus

4,

4, quem post priorem notam 8 radici adscribemus.

Ut radicem hanc probemus, unaque residuum inveniamus, eam ad cubum seorsum evehemus, fietque 592704, quem numerum a parte dati numeri respondente 596947 subtrahemus, residuumque 4243 infra notabimus. Ad hujus dextram classem reliquam 688 adnectemus, cujus duas postremas notas puncto discriminabimus, partem verò quæ superest 42436 dividendam accipiemus per triplum quadratum radicis hactenus inventæ 84, nimirum per 21168, & quotum inveniemus 2, quem radici adscribemus.

Rursus, ut radicem inventam 842 probemus, & residuum si quod est inveniamus, ejus cubum similiter investigabimus 596947688, quem a numero proposito subtrahemus; & quia nihil superest, numerum inventum 842 radicem cubicam numeri propositi, eamque exactam esse constabit.

Notandum verò est, in operationis hujusce ductu fieri nunquam posse, ut nota maior quàm 9 radici adscribenda habeatur; si autem maior interdum re ipsa obtingat, id argumento erit notam præcedentem fuisse justo minorem assumptam. Facile etiam erit dignoscere, an fuerit ex divisione nota justo maior assumpta, quia cubus orietur maior quàm ut subtrahi a parte numeri propositi respondente possit. Tunc radicem una, duabus &c unitatibus gradatim minuemus, quousque ejus cubus a numero superiori subduci queat.

Ubi numerus datur, qui cubus perfectus non sit, radix non invenitur, nisi veræ proxima. Vix autem est, ut eam ad unitates usque extrahere sufficiat. Huic profectò rei commodissimæ sunt fractiones decimales, quarum auxilio ad radicem accedere veram perpetuò licet, quanvis omnino accurata haberi nunquam possit.

156 Ut igitur ad radicem cubi imperfecti tantum, quantum opus fuerit, ſupputando accedamus, tot cifrarum triadas numero dato adjungemus, quot in radice notas decimales habere propoſitum eſt. Radice autem ut in exemplis ſuperioribus inventa, tot decimalium ſedes virgula ſeparabimus, quot adjectis cifrarum ternariis reſpondent.

Exemplum III.

Quæritur radix cubica numeri 8755 ad milleſimas uſque exacta. Quoniam milleſimæ tertiam decimalium ſedem occupant, neceſſe eſt ut cubus novem decimalibus conſtet (n. 54.); adeoque novem dato numero cifræ adjiciendæ ſunt.

Quæſtio proinde eò redit, ut radix cubica extrahatur a numero 8755000000000.

```
8.755.000.000.000  |  20610
07.55
--------------------------
12
8000
--------
 7550.00
 1200
8741816
------------
  131840.00
  127308
875455298I
------------------
   4470190.00
   12743163
8754552981000
------------------
   447019000
```

Et numero in claſſes diſtributo, ſiniſtimæ claſſis 8 radicem cubicam inveniemus 2, quam notam

tam poſt lineolam ſcribemus; ablatoque ejus cubo 8 ab ipſa claſſe 8, reſiduum o infra notabimus, cui adjicienda erit claſſis proxima 755. Hujus poſtremas duas ad dextram notas puncto ſeparabimus, & ſub parte reliqua 7 diviſorem ſcribemus 12, triplum videlicet quadratum notæ inventæ 2. Ex diviſione autem ipſius 7 per 12, nota quotientis erit o, quam radici adſcribemus, & cubum ipſius radicis 20 jam inventæ, nempe 8000 a parte reſpondente 8755 ſubducemus, reſiduumque 755 infra notabimus, ad cujus latus claſſem ſequentem 000 adducemus, & operationem eodem modo inſtaurabimus.

Ea tandem abſoluta, inveniemus radicem cubicam numeri 8755000000000 ad unitates uſque exactam eſſe 20610, adeoque & radicem numeri 8755,000000000 ad milleſimas uſque veram eſſe 20,610, ſiquidem radix triplo minorem ſedium decimalium numerum quàm cubus ipſe ferre debet (n. 54.).

Si quis ulterius radicem exigere vellet, tres alias poſtremo reſiduo cifras adjicere, eandemque calculi rationem perſequi deberet, quæ fuit in operationibus præcedentibus inſtituta, quoties ſingulæ claſſes ad reſidui latus adductæ ſunt, & ita deinceps.

55 Hæc radicis cubicæ extrahendæ methodus radicibus altioris gradus accommodari poteſt. In quibus id in univerſum notandum eſt: 1º Ut numerus datus in claſſes diſtribuatur a dextra verſus ſiniſtram, quarum ſingulæ tot notis conſtent, quot ſunt potentiæ datæ gradus, poſtrema ad ſiniſtram excepta, quæ paucioribus conſtare poterit, & radix tot notas habebit, quot claſſes fuerint. 2º Ut claſſis ſiniſtimæ radix quæratur gradus propoſiti, aut exacta, aut proximè minor, quæ maior eſſe non poterit quàm 9, eaque prior erit radicis inveniendæ

nota. 3º. Ut ejus radicis potentia exacta gradus propositi ab eadem classe sinistima subducatur, residuoque prior classis proximè sequentis nota adjiciatur. 4º. Ut residuo ita aucto divisoris loco subscribatur radicis inventæ potentia gradus proximè minoris per numerum multiplicata, qui gradum propositum exponit. 5º. Ut divisione instituta, quotus priori radicis notæ adjiciatur, totaque radix inventa rursus ad propositi gradus potentiam evehatur, quæ a parte numeri dati respondente subtrahetur, residuum vero infra notabitur, cui prior classis sequentis nota similiter adjicietur, potentiaque radicis jam inventæ uno gradu minor per numerum multiplicata, qui gradum propositum exponit, divisoris loco subscribetur; & ita deinceps.

Sic ad radicem 5am numeri cujusvis extrahendam, numerum ipsum in classes quinque notarum distribuemus. Classis sinistimæ radicem 5am investigabimus, quæ priorem radicis inveniendæ notam ostendet. Hujus potentiam 5am exactam ab eadem classe subtrahemus, residuoque priorem classis sequentis notam adjiciemus. Huic residuo ita aucto divisoris loco subscribemus quintuplum potentiæ 4æ ejusdem radicis inventæ, & divisione instituta notam alteram radicis inveniemus, cujus denuo potentiam 5am a parte numeri propositi respondente auferemus, residuoque priorem classis sequentis notam adplicabimus, cui & quintuplum potentiæ 4æ radicis jam inventæ divisoris loco subscribemus, ut tertiam radicis notam inveniamus, & ita deinceps.

Quo autem facilius radix sinistimæ classis extrahatur, tabellam consulere oportet, quæ numerorum digitorum potentias, sive *dignitates* exhibeat, quemadmodum in tabella sequenti ad nonam usque videre licet.

RADICES	POTENTIÆ							
	2^a	3^a	4^a	5^a	6^a	7^a	8^a	9^a
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	5561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

UT autem ad radicem cubicam redeamus, cujus est usus frequentior, diffitendum non est methodum superiorem id potissimum habere incommodi, quod divisores sint seorsum formandi, radixque toties ad cubum evehenda, quoties nova illi nota adcrescit, cujusmodi profecto calculus eo molestior evadit, quo plures habendæ in radice sunt notæ. Regula quidem alia radici cubicæ extrahendæ prostat in libris vulgaribus, sed illa tamen adeo implicata, ut satius fuerit methodum supra traditam amplecti. Ut igitur isthæc faciliori calculo operatio expediatur, peculiarem hic methodum subjungere operæ pretium erit. Est autem hujusmodi.

Facto operationis initio, ut supra traditum est, quousque altera radicis nota inveniatur, hæc etiam infra radicem scribatur, ad ejusque sinistram triplum prioris notæ ejusdem radicis. Numerus qui fiet per eandem notam inventam multiplicetur, productumque sub divisore scribatur, initio tamen facto a sede postrema notarum, quæ fuerunt antea a membro dividendo separatæ. Productum istud divi-

divisori addatur, summaque infra scribatur, quæ rursus per eandem notam inventam multiplicetur, & productum eadem opera a membro dividendo subtrahatur, residuoque classis proxime sequens adnectatur, ut novum fiat membrum dividendum. Divisor autem facili negotio habebitur, si quadratum notæ proxime inventæ mente addatur duobus numeris membrũ dividendum præcedentibus, eaque summa sub eodem dividendo scribatur una dextrorsum sede promota.. Divisione instituta, tertiam radicis notam inveniemus, quam & infra scribemus, & ad ejus sinistram triplum notarum in radice præcedentium: qui verò numerus fiet per eandem notam inventam multiplicandus est, cæteraque exequenda, ut in operatione præcedenti; & ita deinceps. Quum divisor prodit parte dividenda maior, cifra radici adscribitur, classis alia membro dividendo admovetur, ipse verò divisor unam dextrorsum sedem provehitur.

Excmi

Exemplum.

QUæritur radix cubica - - - - - - - - - - - - - - numeri - - - - - - - - 916358751227902464.

```
916.358.751.227.902.464. | 971304
-------------------------|--------
187358                   | 277
 243                     | 2911
  1939                   | 29133
 26239                   | 2913904
 -------
  3685751
  28227
    2911
  2825611
  ---------
   860140227
   2828523
       87399
   282939699
   -----------
    1132113090 2464
     283027107
          11655616
     2830282725616
     -------------
     0000000000000
```

Inventis duabus notis 97 juxta methodum vulgarem, earum alteram 7 infra radicem ſcribemus, & ad ejus ſiniſtram triplum prioris 9, nempe 27, ut fiat numerus 277, quem per eandem notam 7 multiplicabimus, productumque 1939 ſub diviſore 243 ſcribemus, initio tamen facto a ſede poſtrema dividendi 187358; additis verò diviſore & producto ſubjecto fiet ſumma 26239, quam rurſus per eandem notam 7 multiplicabimus, unaque produductum a dividendo 187358 ſubtrahemus, ut habeatur reſiduum 3685, cui claſſem ſequentem adjiciemus, fietque membrum rurſus dividendum 3685751. Tum quadratum notæ proximè inventæ 7, nempe 49, mente addemus duobus numeris dividendum præcedentibus 26239 & 1939, ſummaque unam dextrorſum ſedem promota diviſorem efficiet 28227.

Diviſione inſtituta quotus erit 1, quem radici adſcribemus, & infra præterea notabimus, ad cujus ſiniſtram triplum notarum in radice præcedentium 97 illico ſcribemus, ut fiat numerus 2911, quem per eandem notam inventam 1 multiplicabimus, productumque ſimiliter diviſori addemus, ut fiat ſumma 2825611, quam rurſus per eandem notam 1 multiplicabimus, productumque a membro dividendo ſubtrahemus, unde reſiduum erit 860140, cui claſſem ulteriorem adjungemus, ut novum habeatur membrum dividendum 860140227; quadratum vero notæ inventæ 1 duobus numeris dividendum præcedentibus additum, ſedeque una ad dextram promotum, novum diviſorem conſtituet 2828523.

Diviſione rurſus inſtituta, quotus deprehenditur 3, qui radici primum adſcribetur, deinde infra cum triplo notarum in radice præcedentium numerum efficiet 29133, quo per eandem notam 3 multiplicato, productoque 87399 diviſori addito, ſumma habebitur 282939699, qua rurſus per eandem notam 3 multiplicata productoque ſubducto a membro dividendo, reſiduum prodibit 11321130, cui claſſem aliam adjiciemus, ut novum exurgat membrum dividendum 11321130902. Cum verò ex formatione diviſoris videamus fore, ut nota 2 numeri dividendum præcedentis incidat ſub priore ipſius dividendi nota 1, adeoque diviſionem inſtitui neutiquam poſſe, cifram illico

radi-