dada ſobre a meſma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que ſe fórma ao meſmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de moſtrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de tres.

Depois de ſe terem ſeparado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buſcar-ſe-ha a raiz quadrada da parte que ficar á eſquerda, e eſſa raiz moſtrará as dezenas da raiz total que ſe buſca, e ſe aſſentará adiante do numero propoſto com a diſtinçaõ de huma riſca perpendicular, que a ſepare delle.

O quadrado exacto da letra achada ſe tirará da meſma parte, cuja raiz ſe buſcou, e o reſto ſe aſſentará debaixo, para junto do qual ſe abaixaráõ as duas letras, que ſe tinhaõ ſeparado no numero propoſto.

Neſtas letras ſe apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á eſquerda ſe dividiráõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual ſe aſſentará por baixo.

O quociente deſta diviſaõ ſe eſcreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do diviſor, enchendo a caſa correſpondente á letra ſeparada.

E finalmente multiplicar-ſe-há o diviſor aſſim aumentando pelo meſmo quociente, e o producto ſe tirará do numero que fica por ſima do dito diviſor. Moſtremos iſto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 7569.

75.6 9	87 Raiz.
11 6.9	
1 6.7	
0.0 0	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e buſquemos a raiz de 75, que acharemos ſer 8, e eſta letra aſſentaremos adiante da riſca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, aſſentando por baixo o reſto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69, que tinhamos ſeparado.

Depois no reſto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual eſcreveremos o diviſor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que aſſentaremos adiante da primeira letra da raiz 8, e adiante do diviſor 16, debaixo da letra ſeparada 9.

Finalmente multiplicaremos o diviſor aſſim aumentando 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero ſuperior 1169; e porque naõ ſobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a ſua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-ſe bem, que naõ ſe ha-de partir pelo dobro das dezenas ſenaõ a parte que ficar á eſquerda depois de ſeparada a ultima letra. De ſorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro, naõ poderá por iſſo uſar-ſe da letra ſepa-

rada, mas aſſentar-ſe-ha cifra no quociente. Ao contrario, ſe o meſmo dobro ſe contiver na parte, que conſtitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá por-ſe no quociente letra maior que 9, pela razaõ que ja diſſemos tratando da Diviſaõ (n. 66).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer ſobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais de quatro letras, he facil de entender o que ſe deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva conſtar a raiz, ſempre a podemos conſiderar como compoſta de duas partes, das quais huma ſeja de dezenas, e a outra de unidades, como v. gr. o numero 874 póde conſiderar-ſe compoſto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Iſto ſuppoſto, quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que acabamos de expor, pelo meſmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum ſó numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicamos á primeira para achar a ſegunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, ſe for neceſſario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas o meſmo, que praticámos com as duas primeiras para achar a ſegunda; e aſſim por diante.

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda, ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A

A razaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135 e ſeg.). E pela meſma razaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas; deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exemplo III.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 76807696.

```
76.8 0.76.96 | 8764
12 8.0       |
 1 6 7       |
--------------
 1 1 1 7.6
 1 7 4 6
--------------
   7 0 0 9.6
   1 7 5 2 4
--------------
   0 0 0 0 0
```

Tendo diſtribuido o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, buſcaremos a raiz da ultima claſſe á eſquerda 76, que acharemos ſer proximamenre 8, e aſſentaremos eſte algariſmo adiante da riſca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, eſcrevendo por baixo o reſto 12, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 80, ſeparando-lhe com hum ponto a ultima letra o. Debaixo da parte que fica 128 eſcreveremos o diviſor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que eſ-

escreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem adiante do divisor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo mesmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, escrevendo por baixo o resto 111, para junto do qual traremos a classe seguinte 76, separando nella a ultima letra. Por baixo da parte restante 1117 escreveremos o divisor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que assentaremos na raiz, e adiante do divisor; e multiplicando 1746 pelo mesmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e escreveremos debaixo o resto 700, ao qual ajuntaremos a ultima classe 96, separando-lhe a ultima letra. Assim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no divisor; e multiplicando 17524 pelo mesmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque nesta ultima operaçaõ naõ fica resto, será a raiz exacta do numero proposto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará necessariamente algum resto; e a raiz achada será a verdadeira raiz do maior quadrado que no dito numero se contem. Neste caso naõ he possivel extrahir-se a raiz exactamente, mas podemos approximar-nos ao seu justo valor quanto quizermos, de sorte que o erro seja menor que qualquer quantidade assignavel.

Esta approximaçaõ se faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-se ao numero dado duas vezes tantas cifras, quantas saõ as letras decimais que se querem na raiz; tira-se a raiz, como mo nos exemplos antecedentes ; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntáraõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54), o quadrado (cujos factores ſaõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, iſto he, na ſua raiz ſe contem.

Exemplo IV.

PEde-ſe a raiz quadrada de 87567 exacta até a caſa das milleſimas.

Para ter milleſimas requerem-ſe tres caſas de *dizima* ; ſerá logo neceſſario ajuntar ao numero dado ſeis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 8756700000.

8.75.67.00.00.00	295917
47.5	
49	
346.7	
585	
5420.0	
5909	
10190.0	
59181	
427190.0	
591827	
129111	

Fa-

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porem nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até á casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até á casa das millionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

§ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma definiçaõ da *raiz* (n. 130). Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultará o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se. v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo, tirando-se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraráõ os noves, e o resto final será o mesmo que deve ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim

no

no meſmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o reſto 4, que multiplicado por ſi meſmo faz 16, lançando fóra 9, ficaõ 7, que ſomados com o reſto da operaçaõ 2347, e tirando ao meſmo tempo os noves, finalmente daráõ o reſto 5; e eſte he o que deve ſobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como ſobra com effeito. A prova dos *onzes* ſe applica como a dos *noves*, e de ambos ſe entenderá aqui o meſmo que ja fica advertido (n. 75). ʃʃ

141 Temos viſto aſſima (n. 106), que para multiplicar hum quebrado por outro, he neceſſario multiplicar entre ſi os numeradores, e da meſma ſorte os denominadores. Por conſeguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os ſeus termos. Aſſim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, devemos tirar as raizes do numerador e denominador. Deſte modo a raiz de $\frac{9}{16}$ ſerá $\frac{3}{4}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde ſucceder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ ſejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador ſómente o naõ for, tirar-ſe-ha a ſua raiz approximada pelo methodo aſſima expoſto, á qual ſe dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz approximada do nu-

me-

merador 2, que ſerá 1,4, ou 1,41, ou 1,414, ou 1,4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,41}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porem, ſe o denominador naõ for quadrado, multiplicar-ſe-haõ ambos os termos do quebrado propoſto pelo meſmo denominador, e a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro eſte quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as milleſimas, no caſo de baſtar eſta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes eſpecies de fracções ao meſmo tempo, podemos converter o reſultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99).

145 Em fim, ſe vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros ſe reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86), e entaõ ſe praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos

v. gr.

v. gr. a raiz de 8 $\frac{3}{7}$, converteremos eſte numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada ſerá $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem ſe póde converter em *dizima* o quebrado, antes de ſe lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* ſe haõ-de buſcar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Applicando eſte methodo ao numero 8 $\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até á caſa das milleſimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n. 99), cuja raiz ſerá 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as caſas da dizima ſejaõ ſempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para iſſo lhe ajuntaremos as cifras neceſſarias (n. 30); e a raiz achada ſempre terá na dizima ametade das caſas da dita quantidade propoſta, para o que ſe aſſentaráõ as cifras que forem neceſſarias entre a virgula e a primeira letra da meſma raiz.

Aſſim querendo extrahir a raiz de 21,935 até a caſa das milleſimas, tira-la-hemos como de 21,935000, e ſerá 4,683. Do meſmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e aſſim das mais.

148 O methodo, que fica expoſto (n. 69 e ſeg.) para ſe abbreviar a Diviſaõ, tambem ſe póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo baſtante, que ella ſe ache exacta até á caſa das unidades, diſtribuir-ſe-ha primeiramente em claſſes

o

o numero dado, e depois ſe cortaráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as claſſes, e das que ficarem ſe extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo reſto que ficar ſe partirá pelo diviſor da operaçaõ precedente, no qual ſe naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o reſto que ficar deſta diviſaõ ſe tornará a partir pelo meſmo diviſor, deſpreſando-ſe nelle outra letra á direita; e aſſim por diante.

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das ſuas raizes.

149 SE qualquer numero ſe multiplicar pelo ſeu quadrado, o producto que reſultar he o que chamamos *cubo* do meſmo numero. Aſſim 27 he cubo do numero 3, porque reſulta da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9.

Donde ſe vê, que o numero que ſe eleva ao cubo he tres vezes *factor* do meſmo cubo; e por iſſo o cubo ſe chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro gráo* do meſmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero ſe eleva á ſegunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando ſe multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes conſecutivas por ſi meſmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz cubica* de qualquer numero he o numero que multiplicado pelo ſeu quadrado fórma o dito numero propoſto. Aſſim 3 he raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9 reſulta o numero 27.

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer nu-

numero dado naõ he neceſſaria outra regra ſenaõ a da multiplicaçaõ ; mas para extrahirmos a raiz cubica de qualquer numero he neceſſario hum methodo particular , o qual acharemos examinando a formaçaõ do meſmo cubo.

Obſervaremos porem , que naõ temos neceſſidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro , ſenaõ quando o numero propoſto tiver mais de tres letras. Porque ſendo 1000 o cubo de 10 , todo o numero menor que 1000, o qual por conſeguinte naõ terá mais de tres letras , terá a raiz cubica menor que 10. Deſtes numeros deveremos ſaber a raiz , para fazermos a operaçaõ , nos numeros maiores

Todo o numero pois , que naõ tiver mais do que tres letras , terá na raiz cubica , em numero inteiro , algum dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correſpondem os cubos ſeguintes

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Aſſim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7 ; porque cahindo 428 entre 343 e 512 , tambem a ſua raiz ſe achará entre as raizes delles 7, e 8 ; e por conſeguinte em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos uſar de tal approximaçaõ , que o defeito ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel, como abaixo moſtraremos , depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito,

154 Para bem ſe entender eſte methodo , veja-

jamos as partes de que deve constar o cubo de hum numero composto de dezenas e unidades.

Como pois resulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo seu quadrado (n. 149), he necessario trazer á lembrança que o quadrado de hum numero composto de dezenas e unidades consta de tres partes, a saber, *do quadradô das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.*

Logo para se formar o cubo deveráõ multiplicar-se estas tres partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, resultaráõ tres productos, convem a saber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades resultaráõ outros tres productos, que seráõ o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo ajuntando os productos semelhantes, he claro, que o cubo de hum numero composto de dezenas e unidades consta de quatro partes, a saber, *do cubo das dezenas, de tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio destas partes podemos formar o cubo de qualquer numero composto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve ſignificar *milhares*, porque o 4 moſtra dezenas, e o cubo de 10 he 10000; e aſſim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaõ multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas tres unidades, e teremos o producto 144, que deve moſtrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e aſſim ſerá a ſegunda parte do cubo que buſcamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e reſultará o producto 108, que devendo moſtrar dezenas dará a terceira parte do meſmo cubo 1080.

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, ſerá 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim eſtas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual ſem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por ſi meſmo, e depois pelo producto 1849; mas aqui naõ ſe trata tanto de formar o cubo, como de moſtrar o meio, por onde ſe póde voltar reciprocamente do cubo para a ſua raiz.

155 Iſto pois ſuppoſto, eis-aqui o methodo que havemos de ſeguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exem-

Exemplo I.

BUſquemos pois a raiz cubica de 79507.

Cubo	Raiz
79.507	43
155.07	
48	
79507	
00000	

Para diſtinguirmos a parte, em que ſe inclue o cubo das dezenas da raiz, deveremos ſeparar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado, nas quais temos viſto que naõ ſe contem o dito cubo, por quanto repreſenta milhares. Da parte 79 que fica á eſquerda tiraremos pois a raiz cubica, que ſerá 4, e a eſcreveremos adiante da riſca junto ao numero dado.

Deſta letra, que achamos, e que moſtra as dezenas da raiz, formaremos o cubo exacto 64, e o tiraremos da dita parte 79, aſſentando por baixo o reſto 15, para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos ſeparado, e ſerá o reſto total 15507, no qual eſtaráō incluidas as tres partes reſtantes do cubo total, a ſaber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira deſtas moſtra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito reſto, e nas que ficaõ 155 ſeráō incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual eſcreveremos debaixo; e achando que 48 ſe contem *tres* vezes em 155, aſſentaremos 3 na raiz, e eſta ſerá a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao meſmo tempo o reſto, ſe o houver, poderiamos formar as tres partes, que ſe devem achar no reſto 15507; mas ſerá igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-ſe o numero dado, ficaremos na certeza de que achamos a ſua raiz exactamente.

Se o numero propoſto tiver mais do que ſeis letras, diſcorreremos como no exemplo ſeguinte:

Exemplo II.

SE nos pedirem a raiz cubica de 596947688

```
596.947.688 | 842
 849.47     |------
  192       |
592704
-----------------
   42436.88
   21168
   596947688
-----------------
   000000000
```

Primeiramente conſideraremos a raiz, como compoſta de dezenas e unidades, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte reſtante 596947, que

que contem o cubo das dezenas, tem tambem mais do que tres letras, deverá a sua raiz ter mais do que huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma razaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca; e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita, e debaixo da parte 849 escreveremos o divisor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a divisaõ acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos esta raiz, e descobrirmos juntamente o resto, formaremos á parte o seu cubo 592704, e o tiraremos da parte correspondente do numero dado 596947, assentando por baixo o resto 4243. Para o lado direito deste resto abaixaremos a classe seguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as ultimas letras, e dividiremos a parte restante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que assentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e sabermos o resto, se o houver, eleva-la-hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica resto, entenderemos que o numero 842 he exactamente a raiz que buscamos.

 De-

Deve notar-ſe, que no decurſo deſta operaçaõ naõ ſe póde ja mais aſſentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubeſſe maior, ſeria ſinal de ſe ter tomado a letra precedente menor, do que devia ſer. Tambem ſerá facil de conhecer, quando ſe tem tomado na diviſaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que reſultar naõ poderá diminuir-ſe da parte correſpondente do numero propoſto. Neſte caſo diminuir-ſe-há a raiz de huma, duas &c. unidades ſucceſſivamente, até que o ſeu cubo ſe poſſa diminuir.

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito a raiz que ſe acha he approximada; e raras vezes baſtará ſabe-la até as unidades ſómente. Para iſto he muito vantajoſa a *dizima*, por meio da qual ſe póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, aindaque naõ he poſſivel que eſta ſe repreſente jamais por numero exactamente.

156 Para ſe approximar pois a raiz cubica, quanto for neceſſario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplos antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correſpondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

Pede-ſe a raiz cubica do numero 8755 até á caſa das milleſimas. Como as milleſimas eſtaõ na terceira caſa da dizima, deverá o cubo conſtar de nove decimais (n. 54); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero propoſto.

Pe-

Pelo que a queſtaõ ſe reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55             |
——————————————————————————
 12
 8000
————————
  75500.00
  1200
 8741816
————————————
  1318400.00
  127308
 8754552981
————————————————
     4470190.00
    127431 63
 8754552981000
————————————————
     4470 19000
```

E diſtribuindo o dito numero em claſſes, buſcaremos a raiz cubica da ultima claſſe 8 á eſquerda, que he 2, e a eſcreveremos adiante da riſca; e tirando o ſeu cubo 8 da meſma claſſe 8, aſſentaremos por baixo o reſto 0, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte reſtante 7 eſcreveremos o diviſor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quociente he 0, a qual aſſentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz já achada 20, que he 8000, diminuinuilo-hemos da parte correſpondente 8755, e eſcreveremos debaixo o reſto 755, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do meſmo modo.

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até á caſa das unidades he 20610; e por conſeguinte a raiz de 8755,000000000 ſerá 20,610 exacta até á caſa das milleſimas, por quanto a raiz deve ter tres vezes menos caſas na *dizima* do que he no ſeu cubo (n. 54).

Querendo-ſe levar mais adiante eſta approximaçaõ, ajuntar-ſe-haõ tres cifras ao ultimo reſto, e ſe continuará a operaçaõ da meſma maneira que ſe praticou por cada claſſe, que ſe ajuntou a cada reſto; e aſſim por diante.

55 Eſte methodo de extrahir a raiz cubica pode applicar-ſe ás raizes de mais alto gráo. Nellas obſervaremos em geral: 1.º Que o numero dado ſe ha-de diſtribuir em claſſes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima claſſe á eſquerda que poderá conſtar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as claſſes. 2.º Que da ultima claſſe á eſquerda ſe buſcará a raiz do gráo propoſto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual ſerá a primeira letra da raiz que ſe buſca. 3.º Que a dita raiz achada ſe elevará á potencia dada, a qual ſe diminuirá da meſma ultima claſſe á eſquerda, e ao reſto ſe ajuntará a primeira letra da claſſe ſeguinte. 4.º Que debaixo do reſto aſſim augmentado ſe aſſentará por diviſor a potencia da meſma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo propoſto, ſendo eſta multiplicada pelo numero

mero que moſtra o gráo da potencia da queſtaõ. 5.º Que fazendo-ſe a diviſaõ o quociente ſe ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada ſe elevará outra vez á potencia da queſtaõ, a qual ſe tirará da parte correſpondente do numero dado, ao reſto ſe ajuntará do meſmo modo a primeira letra da claſſe ſeguinte, e ſe lhe applicará por diviſor a potencia da raiz ja achada do gráo proximamente menor que o propoſto, multiplicada pelo expoente do meſmo gráo propoſto &c.

Deſte modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividilo-hemos em claſſes de 5 letras. Buſcaremos a raiz 5ª da ultima claſſe á eſquerda, que moſtrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della e a tiraremos da meſma claſſe, e ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte. Debaixo deſte reſto aſſim augmentado aſſentaremos por diviſor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela diviſaõ acharemos a ſegunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correſpondente do numero dado; ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte, e lhe applicaremos por diviſor o quintuplo da 4ª potencia da raiz ja achada, e aſſim por diante.

Para ſe conhecer facilmente a raiz da ultima claſſe á eſquerda ſerá neceſſario ter preſente huma taboa das potencias dos numeros digitos, como aqui ſe moſtraõ até á potencia nona.

PO-

RAIZES	POTENCIAS 2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	5561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz, todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſmefma raiz. O numero que refultar fe multiplicará pela mefma letra achada, e o producto fe affentará debaixo do divifor, começando da ultima cafa das duas letras que foraõ feparadas do dividendo. Efte producto fe fomará com o divifor, e a foma fe affentará por baixo, a qual fe tornará a multiplicar pela mefma letra achada, e o producto fe hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao refto a claffe feguinte teremos o novo dividendo. O divifor fe achará facilmente, fomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e fe affentará a foma debaixo do mefmo dividendo, chegando-a huma cafa mais para a direita. Feita a divifaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem efcreveremos em baixo, e atrás della feguidamente o triplo das letras precedentes da mefma raiz; depois multiplicaremos efte numero pela mefma letra que ultimamente achamos, e praticaremos tudo o mais como na operaçaõ antecedente; e affim por diante. Quando o divifor fahir maior que o dividendo, por-fe-ha cifra na raiz, ajuntar-fe-ha outra claffe ao dividendo, e o mefmo divifor fe adiantará huma cafa mais para a direita.

Exem-

Exemplo.

PEde-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
1132113090 2464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atrás della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multiplicaremos pelo mesmo 7, e assentaremos o producto 1939 debaixo do divisor 243, principiando porem da ultima casa do dividendo 187358; somando o dito producto com o divisor, teremos a

so-

ſoma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela meſma letra 7, e ao meſmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, aſſentando por baixo o reſto 3685, ao qual ajuntando a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo 3685751. E ſomando mentalmente o quadrado da meſma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 28227.

Pela diviſaõ acharemos o quociente 1, que aſſentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde reſultará o numero 2911, que multiplicaremos pela meſma letra achada 1, e ſomando o producto com o diviſor teremos a ſoma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela meſma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o reſto 860140, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte, e ſerá o novo dividendo 860140227; e ſomando o quadrado da meſma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual aſſentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo meſmo 3, e ſomaremos o producto 87399 com o diviſor, donde reſultará a ſoma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo meſmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o reſto 11321130, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte para termos o novo dividendo 11321130902. Como pela for-

ma-

maçaõ do divifor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo, ha-de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conseguintemente fazer-se a divisaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a classe seguinte, somaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, escrevendo a soma duas casas mais para a direita, teremos o novo divisor 283027107.

E tornando a dividir finalmente acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando este numero pelo mesmo 4, e ajuntando o producto com o divisor teremos a soma 2830282725616, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ sobra nada, será a raiz cubica do numero proposto exactamente 971304. ʃʃ

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106), he claro, que o cubo de hum quebrado se formará elevando ambos os seus termos ao cubo. E reciprocamente, para se tirar a raiz cubica de hum quebrado, será necessario tirar as raizes tanto do numerador como do denominador. Deste modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ será $\frac{3}{4}$, porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador sómente for cubo perfeito, tirar-se-há a raiz approximada do numerador,

dor, e por denominador se porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Assim v. gr. pedindo-se a raiz cubica de $\frac{143}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até á casa das centesimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7: pelo que a raiz pedida será proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n. 99).

159 Porem, se o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado se multiplicaraõ pelo quadrado do mesmo denominador (n. 88), e a operaçaõ se reduzirá ao caso precedente.

Assim v. gr. querendo saber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os seus termos por 49 quadrado do denominador 7, e se reduzirá a $\frac{147}{343}$ (n. 88), cuja raiz cubica será proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158), ou 0,75 (n. 99).

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros se reduzem aos quebrados (n. 86), e a questaõ entrará nos casos precedentes. Tambem podem reduzir-se os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas esta reducçaõ se continuará até achar tres vezes mais letras decimais do que se querem ter na raiz.

Deste modo, para tirar a raiz cubica de $7\frac{3}{11}$ até á casa das millesimas, reduziremos este numero a 7,272727272, cuja raiz será 1,937.

160 Quando se houver de tirar a raiz cubica

de

de huma fracçaõ decimal, procurar-se-há que ella tenha tres vezes mais casas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para isto forem necessarias. Entaõ tirar-se-ha a raiz, sem fazer caso da virgula, e nella se apartaraõ depois com a virgula as casas da dizima que lhe competem, isto he, o terço das que puzemos no numero proposto; e se as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-se-lhe-haõ á esquerda as cifras que forem necessarias.

V. g. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a casa das millesimas, ajuntar-lhe-hemos sete cifras, e buscaremos a raiz como se fosse do inteiro 654000000, a qual acharemos ser 1870. E separando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, será a raiz pedida 1,870, ou 1,87. Do mesmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até á casa das centesimas; e assim das mais.

161 O methodo abbreviado, que ensinamos para a Divisaõ (n. 69 e seg.), tambem se applica facilmente á extracçaõ da raiz cubica. Porque sendo bastante tira-la até a casa das unidades, dividir-se-ha o numero proposto em classes, e depois se lhe cortaraõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das mesmas classes. Das letras que ficarem á esquerda se extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo resto desprezaremos a ultima letra no divisor que lhe competir, e assim por diante; mas naõ tomaremos o divisor da operaçaõ precedente, senaõ quando elle tiver tantas letras constantes á esquerda quantas forem as do resto actual.

Das razões, proporções, e progreſsões; e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Razaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que reſulta da comparaçaõ de duas quantidades. Eſta he de dous modos.

163 Porque ſe compararmos duas quantidades procurando ſaber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o reſultado da comparaçaõ ſerá a differença das meſmas quantidades, e eſta ſe chama *Razaõ Arithmetica*.

Aſſim v. gr. comparando 15 com 8 para ſaber a ſua differença 7, eſte numero 7, que reſulta da comparaçaõ, he a razaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neſte ponto de viſta, coſtumamos ſeparal-las com hum ponto Aſſim por eſta expreſſaõ 15.8 entenderemos a razaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porem ſe compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contem, ou he contida na outra, o reſultado deſta comparaçaõ he a *Razaõ Geometrica*. E quando ſe diz *Razaõ* ſimpleſmente, ſempre ſe entende a *Geometria*.

Comparando v. gr. 12 com 3 para ſabermos quantas vezes o contem, o que reſulta deſta comparaçaõ, iſto he, o ſer 12 *quadruplo* de 3, he a razaõ geometrica de 12 para 3.

Para moſtrarmos, que comparamos duas quantidades neſte ſentido, coſtumamos ſepara-las com dous pontos. Eſta expreſſaõ 12:3 ſignifica a razaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que ſe comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que ſe profere ou eſcreve em primeiro lugar chama-ſe *antecedente*, e a outra *conſequente*. Aſſim na razaõ 12:3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 conſequente; e ambos elles em commum ſe chamaõ *termos* da razaõ.

166 Para conhecer a razaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he neceſſario mais do que diminuir huma da outra, e o reſto moſtrará a razaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167 Para avaliar porem a razaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividi-las huma pela outra, e o quociente moſtrará a razaõ dellas, iſto he, quantas vezes huma contem a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos ſempre a razaõ geometrica pela diviſaõ do antecedente pelo conſequente, aindaque aquelle ſeja mais pequeno. Aſſim a razaõ de 12 para 3 ſerá 4, e de 3 para 12 ſerá $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

§§ Deve notar-ſe, que naõ póde haver razaõ ſenaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem ſe excedem, nem ſe contem mutuamente. Aſſim 12 *toeſas* para 3 *libras* naõ tem razaõ alguma arithmetica nem geometrica. Porque ſem embargo de que o numero doze tem ſobre 3 o exceſſo de 9, he viſivel que 12 *toeſas* naõ tem ſobre 3 *libras* exceſſo algum aſſignavel nem de *libras*, nem de *toeſas*. E do meſmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toeſas* naõ contem de modo algum a 3 *libras*, porque ſaõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A

A differença dos termos na razaõ arithmetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores* e *expoentes* da razaõ.

A razaõ geometrica divide-se em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o expoente se póde exprimir por numero quer seja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o expoente naõ pode exprimir-se jamais por numero algum exactamente, como he a razaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem se divide em razaõ de *igualdade*, e *desigualdade*, conforme consta de termos iguais, ou desiguais; chama-se razaõ *de maior desigualdade*, quando o antecedente he maior que o consequente; e *de menor desigualdade*, quando he menor.

Os Mathematicos antigos fazem sinco differenças genericas da razaõ de maior desigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as suas obras) a saber: *Multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex-superparticularis*, *multiplex-superpartiens*; e da razaõ de menor desigualdade saõ outras tantas differenças, que se declaraõ com os mesmos nomes precedidos de hum *sub*, a saber: *submultiplex*, *subsuperparticularis* &c.

Razaõ *multiplex* he, quando o antecedente contém o consequente algumas vezes exactamente; e *submultiplex*, quando nelle he contido do mesmo modo. A primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c., e a segunda *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla* &c., conforme os expoentes. A razaõ 10:1 he *decupla*, e 1:10 *subdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao consequente, e além disso huma parte aliquota delle , como 3:2 ; e *ſubſuper-particularis* , quando o antecedente he contido do meſmo modo no conſequente , como 2:3. As eſpecies da primeira diſtinguem-ſe com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *ſesqui* ; e as eſpecies da ſegunda com os meſmos vocabulos precedidos de hum *ſub*. Deſte modo as razões 3:2, 4:3 , 5:4 , 6:5 &c. pela meſma ordem tem os nomes de *ſesquialtera* , *ſesquitertia* , *ſesquiquarta* , *ſesquiquinta* &c. ; e as razões 2:3, 3:4 , 4:5 , 5:6 &c. de *ſubſesquialtera* , *ſubſesquitertia* , *ſubſesquiquarta* , *ſubſesquiquinta* &c.

Superpartiens he , quando o antecedente contém huma vez o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle , como 5:3 ; e *Subſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo , como 3:5. As eſpecies deſte genero ſe denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas , e metendo depois do *ſuper* as vozes *bi* , *tri* , *quadri* &c. , pelas quais ſe moſtra quantas deſſas partes aliquotas ſe exprimem. Aſſim 5:3 he razaõ *ſuperbipartiens tertias* , 8:5 *ſupertripartiens quintas* &c. E reciprocamente , 3:5 he razaõ *ſubſuperbipartiens tertias* , 5:8 *ſubſupertripartiens quintas* &c.

Multiplex-ſuperparticularis he , quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente , e além diſſo huma parte aliquota delle ; e *ſubmultiplex-ſuperparticularis* , quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies da primeira ſaõ *dupla-ſesquialtera* 5:2 , *dupla-ſesquitertia* 7:3 &c. , *tripla-ſesquialtera* 7:2 , *tripla-ſesquitertia* 10:3 &c. &c. ; e da ſegunda *ſubdupla-ſesquialtera* 2:5 , *ſubdupla-ſesquitertia* 3:7 &c, *ſub-*

tri-

tripla-ſesquialtera 2:7, *ſubtripla-ſesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-ſuperpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *ſubmultiplex-ſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies de ambas facilmente ſe denominaõ pelo que aſſima fica declarado. A razaõ 8:3 he *dupla-ſuperbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c.; e reciprocamente, a razaõ 3:8 he *ſubdupla-ſuperbipartiens tertias*, 7:74 *ſubdecupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c. ʃʃ

169 A razaõ arithmetica fica ſendo a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe augmentaõ ou diminuem de huma meſma quantidade; porque aſſim naõ ſe altéra nada a differença, na qual conſiſte a razaõ. Aſſim 3.8 he o meſmo que 4.9, que 5.10 &c.

170 A razaõ geometrica tambem ſerá a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe multiplicarem, ou dividirem por huma meſma quantidade. Porque conſiſtindo a razaõ no quociente do antecedente dividido pelo conſequente (n. 168), he huma quantidade fraccionaria (n. 97), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos ſe multiplicaõ ou dividem por huma meſma quantidade (n. 88, 89). Aſſim a razaõ 3:12 vale o meſmo que 6:24, multiplicando ambos os termos por 2; e o meſmo que 1:4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Eſta propriedade ſerve de muito para reduzir huma razaõ aos termos mais ſimples. Tendo

v. gr. de examinar a razaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a mesma razaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao mesmo denominador, a mesma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e supprimindo o denominador commum 12 (que he o mesmo que multiplicar ambos os termos por 12) a razaõ proposta será a mesma que a de 81 para 128.

55 A mesma mudança, que se faz em huma razaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem se fará tirando ou ajuntando a mesma quantidade ao consequente; porque de ambos os modos resultaõ duas razões, das quais huma contém os termos da outra augmentados ou diminuidos da mesma quantidade. Na razaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9, como ajuntar 2 ao consequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, como tirar 2 ao consequente para ficar 5.7.

E a mesma mudança, que se faz em huma razaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, se fará tambem dividindo ou multiplicando o consequente pela mesma quantidade; porque por ambas as operações resultaõ duas razões, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma mesma quantidade. Na razaõ 4:9 vale o mesmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o consequente pelo mesmo 2, pois sahiráõ as razões iguais 2:9 e 4:18; do mesmo modo do multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o consequente pelo mesmo 3, resultaráõ as razões iguaes 12:9, e 4:3. ¶¶

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a mesma razaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e esta será arithmetica, ou geometrica, conforme forem as razões arithmeticas, ou geometricas.

Estas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetica, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a mesma razaõ de differença 2. Para denotar esta proporçaõ, assentaõ-se os quatro termos deste modo 7.9:12.14, ou tambem assim $7 - 9 = 12 - 14$; expressões, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9, *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Estas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 se contém em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para assim o darmos a entender, assentaremos os termos deste modo 3:15::4:20, ou $3:15 = 4:20$; expressões, que querem dizer, que 3 *he para* 15, *como* 4 *he para* 20.

¶¶ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto*; porque o producto contém tantas vezes hum dos factores, quantas o outro contém a unidade.

Do mesmo modo na divisaõ, *a unidade he para o quociente, como o divisor para o dividendo*; porque o dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente.

De-

Deve notar-se que todas as razões geometricas saõ homogeneas, pois consistem no quociente do antecedente dividido pelo consequente, o qual quociente he sempre numero abstracto. Por isso, aindaque naõ póde haver razaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes seja homogeneo com o seu consequente. Assim 12 *toesas* saõ para 3 *toesas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque sem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toesa* com a *libra*, póde com tudo comparar-se a razaõ de *toesas* a *toesas* com a razaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes se contém 3 *toesas* em 12 *toesas*, tantas se contém 2 *libras* em 8 *libras*, isto he, *quatro vezes*. ¶¶

173 O primeiro termo e o quarto de huma proporçaõ chamaõ-se *extremos*; o segundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas razões, e por conseguinte dous antecedentes e dous consequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente*, *e primeiro consequente*, e aos da segunda *segundo antecedente*, *e segundo consequente*.

174 Quando saõ iguais os meios de huma proporçaõ, esta se chama *continua*.

Assim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithmetico* entre 3 e 11. Esta proporçaõ se escreve por abbreviatura desta maneira $\div$ 3.7.11, denotando o sinal $\div$ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro consequente, e segundo antecedente.

Do mesmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Esta proporporçaõ ſe eſcreve deſta maneira $\div$ 5:20:80, denotando tambem o ſinal $\div$ que o termo 20 ſe ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito ſobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, ſe ſegue:

1.° Que ſe na proporçaõ arithmetica ſe ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os conſequentes, cada hum ficará ſendo igual ao ſeu conſequente; pois he evidente, que deſte modo ſe ajunta ao termo menor de cada razaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou ſe tira do maior o exceſſo que tem ſobre o menor. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ſe ao primeiro e terceiro termo ſe ajuntar a differença 4, teremos 7.7:12.12.

2.° Que ſe na proporçaõ geometrica ſe multiplicarem os conſequentes pelo expoente da razaõ, ficaráõ ambos iguais aos ſeus antecedentes; porque multiplicar o conſequente pelo expoente he toma-lo tantas vezes, quantas ſe contém no antecedente. Aſſim na proporçaõ 12:3::20:5, multiplicando 3 e 5 pelo expoente 4, teremos 12:12::20:20; e na proporçaõ 15:9::45:27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15:15::45:45.

Propriedades das proporções arithmeticas.

176 A Propriedade fundamental das proporções arithmeticas he, que a *ſoma dos extremos ſempre*

pre he igual á ſoma dos meios. Aſſim v. g. neſta proporçaõ 3.7:8.12 tanto os extremos 3 e 12, como os meios 7 e 8, fazem igualmente a ſoma de 15.

E com effeito ſe o primeiro termo for igual ao ſegundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7:12.12, he claro, que os extremos fazem huma ſoma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzir-ſe a eſta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175, 1°). Logo, como eſta addiçaõ ou ſubtracçaõ igualmente augmenta ou diminue a ſoma dos meios e dos extremos, e conſeguintemente naõ altéra a ſua igualdade ou deſigualdade, he evidente, que ſahindo as ſomas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177 Como na proporçaõ continua o meio ſe toma duas vezes, a ſoma dos extremos ſerá dupla do meſmo meio. Aſſim na proporçaõ ÷ 7.11.15 a ſoma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

§§ Reciprocamente: ſe quatro quantidades forem tais, que a ſoma das medias ſeja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para ſerem iguais as ditas ſomas he neceſſario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra deſtas ſeja excedida a outra daquellas; e conſequentemente entre a primeira e ſegunda haverá a meſma differença, que entre a terceira e quarta, como ſe requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde ſe ſegue, que tres quantidades eſtaráõ em em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da ſoma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quarto arithmetico ſomando o ſegundo com o terceiro, e diminuindo da ſoma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua tirando o primeiro do dobro do ſegundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico tomando ametade da ſoma delles.

Segue-ſe tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios paſſar para extremos, e os extremos para meios; e que tanto os extremos, como os meios, podem trocar entre ſi o lugar, ficando ſempre em proporçaõ. Deſte modo a proporçaõ 3.7:8.12 pela permutaçaõ dos termos produz as proporções ſeguintes:

3. 7: 8.12
3. 8: 7.12
7. 3:12. 8
7.12: 3. 8
8. 3:12. 7
8.12: 3. 7
12. 7: 8. 3
12. 8: 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes qualquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha á proporçaõ 9.16:14.21.

Do meſmo modo, ſe os termos correſpondentes de duas ou mais proporções arithmeticas ſe ſomarem, ou diminuirem, as ſomas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Aſſim ſomando as duas proporções 3.7:8.12 e 2.5:6.9 reſulta a proporçaõ 5.12:14.21; e diminuindo a ſegunda da primeira, a proporçaõ 1.2:2.3. ʃʃ

Propriedades das proporções geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporções geometricas he, que *o producto dos meios ſempre he igual ao producto dos extremos*; aſſim como na proporçaõ 3:15::7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ſer o meſmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao ſeu conſequente. Porém toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-ſe a eſta fórma, multiplicando ambos os conſequentes pelo expoente da razaõ (n. 175, 2°). Logo, como por eſta operaçaõ ambos os productos ſe multiplicaõ igualmente pelo expoente, he claro, que ſahindo iguais, tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio.* Porque ſendo os dous meios iguais, o ſeu producto he o quaquado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querrenrendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos estes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos $\div$ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-se-ha o quarto multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifesto, que teriamos o quarto termo dividindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74); porém o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-se v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros saõ 3:8::12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 será o quarto proporcional, de sorte que teremos 3:8::12:32; e com effeito a primeira razaõ he $\frac{3}{8}$, e a segunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-se ambos os termos por 4 (n. 89), se reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo mesmo raciocinio se vê claramente, que em geral se póde achar qualquer dos termos, dando-se os outros tres. *Buscando-se algum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo extremo dado; e buscando-se algum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo meio conhecido.*

180 Esta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir senaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ estando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os consequentes pela razaõ dos dous primeiros termos, só men-

mente o primeiro antecedente ficará igual ao ſeu conſequente, e por eſſa razaõ naõ poderá ſer o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *ſe quatro quantidades forem tais, que o producto das medias ſeja igual ao das extremas, eſtaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde ſe ſegue, *que a proporçaõ ſe conſervará entre quatro quantidades, paſſando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O meſmo ſuccederá, *ſe trocarmos o lugar das medias, ou tambem das extremas.* Porque de ambos os modos ſe conſervará a igualdade ſobredita dos productos.

Aſſim da proporçaõ 3:8::12:32 reſultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporções ſeguintes.

$$\begin{array}{l} 3 : 8 :: 12 : 32 \\ 3 : 12 :: 8 : 32 \\ 8 : 3 :: 32 : 12 \\ 8 : 32 :: 3 : 12 \\ 12 : 3 :: 32 : 8 \\ 12 : 32 :: 3 : 8 \\ 32 : 12 :: 8 : 3 \\ 32 : 8 :: 12 : 3 \end{array}$$

A ſegunda deſtas ſe diz reſultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando e invertendo*, a ſexta *tranſpondo*, a ſetima *tranſpondo e invertendo*, a oitava finalmente *tranſpondo invertendo e alternando.*

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde paſſar para o lugar do ſegundo, e reciprocamente; ſegue-ſe, *que a proporçaõ ſe hade*

con-

conservar, todas as vezes que ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes se multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma mesma quantidade.

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira razaõ, e os consequentes a segunda. Pelo que multiplicar, ou dividir ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por huma quantidade, vem a ser o mesmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma razaõ pela mesma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altera o valor (n. 170).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28, dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que 1:7 :: 4:28; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12 :: 7:28 (n. 182), e dividindo os termos da primeira razaõ por 3 (n. 170), teremos 1:4 :: 7:28; e *alternando* outra vez 1:7 :: 4:28 (n. 182).

184 *Se em qualquer proporçaõ geometrica a soma do antecedente e consequente, ou a sua differença, se comparar com o antecedente, ou com o consequente em ambas as razões do mesmo modo, o resultado formará huma proporcaõ.*

Porque se a soma, ou a differença referida, se comparar com o consequente, he visivel, que ajuntando ou tirando o consequente ao antecedente, este o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha; e como esta mudança se faz igualmente na segunda razaõ, que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira, seraõ necessariamente iguais as novas razões que assim resultaõ. O mesmo raciocinio terá lugar quando se comparar a dita soma ou differença com o antecedente, considerando primeiro os antecedentes muda-dados para o lugar dos conſequentes, e reciprocamente (n. 181).

Dando-ſe v. g. a proporçaõ 12:3::32:8, della poderemos inferir outras quatro proporçóes, como aqui ſe moſtraõ, nas quais o ſinal + quer dizer *mais*, e o ſinal — *menos*.

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$\begin{array}{c} 12 + 3 : 3 :: 32 + 8 : 8 \\ 12 + 3 : 12 :: 32 + 8 : 32 \\ 12 - 3 : 3 :: 32 - 8 : 8 \\ 12 - 3 : 12 :: 32 - 8 : 32 \end{array}$$

A primeira deſtas ſe diz reſultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *compoſiçaõ de razaõ*, a ſegunda *por compoſiçaõ inverſa de razaõ*, a terceira *dividindo*, ou *por diviſaõ de razaõ*, e a quarta *por diviſaõ inverſa*, ou *por converſaõ de razaõ*.

185 Donde ſe collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a ſoma ou differença dos antecedentes he para a ſoma ou differença dos conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente.*

Aſſim da proporçaõ 12:3::32:8 reſultaõ as duas proporçóes ſeguintes:

$$\begin{array}{c} 12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3 \\ 32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3 \end{array}$$

Porque *alternando* teremos 12:32 :: 3:8 (n. 182), e deſta pela *compoſiçaõ* e *diviſaõ inverſa da razaõ* reſultaráõ as duas proporçóes 12 + 32:12::3 + 8:3, e 32 — 12:12::8 — 3:3 (n. 184), as quais alternando outra vez ſe convertem em 12 + 32:3

+

+8::12:3, e 32 — 12:8 — 3::12:3 (n. 182).

186 Logo, *ſendo dado qualquer numero de razões iguaes, ſerá a ſoma de todos os antecedentes para a ſoma de todos os conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente.* Por exemplo, ſendo iguais as razões 4:12 :: 7:21 :: 2:6 teremos tambem 4 + 7 + 2:12 + 21 + 6 :: 4:12 :: 7:21 &c.

Porque tomando as duas primeiras 4:12 :: 7:21, teremos 4 + 7:12 + 21 :: 4:12 (n. 185), ou (pela razaõ de ſer 4:12 :: 2:6) 4 + 7:12 + 21 :: 2:6; eſta proporçaõ dará outra vez 4 + 7 + 2:12 + 21 + 6 :: 2:6 (n. 185), e aſſim por diante.

187 *Razaõ compoſta* he a que ſe fórma de duas ou mais razões, multiplicando entre ſi os antecedentes, e da meſma ſorte os conſequentes. Dando-ſe v. g. as razões 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes ſerá 300, e dos conſequentes 20; e aſſim 300:20 ſerá a razaõ compoſta das duas razões 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer razaõ ſe avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo conſequente, e conſeguintemente por huma fracçaõ que tenha o antecedente por numerador, e o conſequente por denominador (n. 168), he claro, que a razaõ compoſta ſe fórma pela multiplicaçaõ das fracções, que expõem o valor das razões componentes (n. 106). Aſſim exprimindo-ſe a razaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a razaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a razaõ compoſta dellas 300:20 ſe exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos expoentes das razões 12:4 e 25:5.

189 A razaõ compoſta de duas iguais chama-ſe *razaõ duplicada* de qualquer dellas; ſendo compoſta de tres, *triplicada*; de quatro, *quadruplicada &c.*; e qualquer das razões iguais componentes ſerá no primeiro caſo *ſubduplicada* da razaõ compoſta, no ſegundo *ſubtriplicada &c.* Dadas v. g. as razões iguais 2:3 e 4:6, a que dellas ſe compõe 8:18 ſerá razaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6; e qualquer deſtas razaõ ſubduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporções ſe multiplicarem ordenadamente, iſto he, ſe o primeiro termo de huma ſe multiplicar pelo primeiro da outra, o ſegundo pelo ſegundo &c., os quatro productos que reſultarem eſtaráõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporções deſta maneira, he multiplicar duas razões iguais por outras duas iguais (n. 172); logo as duas razões compoſtas que reſultaõ ſaõ iguais; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172).

191 Donde ſe ſegue, *que os quadrados, cubos, e* em geral *as potencias ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, ſaõ tambem entre ſi proporcionais*; porque para formar as ditas potencias naõ he neceſſario mais do que multiplicar a proporçaõ dada por ſi meſma huma, duas &c. vezes conſecutivamente.

192 Do meſmo modo, *as raizes quadradas, cubicas*, e geralmente *as raizes ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, tambem ſaõ proporcionais.* Porque deſte modo naõ ſe faz outra couſa, ſenaõ tirar raizes ſemelhantes de razões iguais (n. 142, 157, 168.); logo as novas razões que reſultaõ ſeraõ iguais; e por conſeguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172).

Uſo

Uſo das propoſições antecedentes.

193 AS propoſições que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das Proporções*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porém aqui ſómente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa, e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples* tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos auctores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtões a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta.

Chama-ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades, que nella ſe conſideraõ, ha duas principais homogeneas entre ſi, cada huma das quais determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contém ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificará todas as vezes que huma das quantidades principais com a que della depende occuparem juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes; o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inversa*, como depois mostraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conseguintemente a *regra de tres directa e simples*, já fica sufficientemente declarado (n. 179); falta mostrar o uso desta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toesas* de obra, quantas *toesas* faraõ 60 obreiros no mesmo tempo?

Pelo mesmo teor da questaõ se vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 saõ os termos principais, e que a obra de 268^T he relativa ao primeiro, e a que se busca relativa ao segundo. Tambem he manifesto, que a obra hade crescer na razaõ dos obreiros, de sorte que o duplo, triplo, quadruplo &c. numero delles, deve produzir huma obra, dupla, tripla, quadrupla &c. dentro do mesmo tempo; e conseguintemente, que o numero pedido de *toesas* deve conter o numero dado de 268 *toesas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toesas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos respectivos occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que mostra ser a proporçaõ directa. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - -

$$40:60::268^T:$$

ou, dividindo os termos da primeira razaõ por 20 (n. 170), aos tres seguintes - - - - -

2:

$2 : 3 :: 268^T :$

Por tanto (n. 179) multiplicaremos 268^T por 3, e partiremos o producto 804^T por 2; o quociente 402^T ſerá o quarto termo, iſto he, a obra que faráõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40 que fizeraõ 268^T.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias caminhará 2000 leguas, continuando o vento e todas as mais circunſtancias do meſmo modo?.

He claro, que neſta queſtaõ ſe requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que ſe haõ de andar; e conſeguintemente, que o tempo que ſe buſca deve conter tantas vezes 3 dias quantas o numero das leguas, que lhe ſaõ reſpectivas, contém as leguas reſpectivas aos 3 dias. Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - -

$275 : 2000 :: 3^d$.

Pelo que multiplicaremos 3^d por 2000; e dividindo o producto 6000^d por 275, teremos o quociente $21^d \frac{9}{11}$, que he o tempo que ſe requer para navegar 2000 leguas ſegundo as condições da queſtaõ.

Exemplo III.

PAgando-ſe $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^d$ por $52^T\ 4^P\ 5^P$ de obra, pergunta-ſe quanto ſe deve pagar por $77^T\ 1^P\ 8^P$?

Pela meſma queſtaõ ſe vê, que o preço relativo a $77^T\ 1^P\ 8^P$ deve conter tantas vezes o preço relativoa $52^T\ 4^P\ 5^P$, quantas o numero $77^T\ 1^P\ 8^P$ contém o numero $52^T\ 4^P\ 5^P$. Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - -

$$52^T\ 4^P\ 5^P : 77^T\ 1^P\ 8^P :: 168^{lb}\ 9ʃ\ 4^d :$$

Iſto ſe poderá fazer, multiplicando $168^{lb}\ 9ʃ\ 4^d$ por $77^T\ 1^P\ 8^P$, e dividindo o producto por $52^T\ 4^P\ 5^P$, conforme as regras dadas para o calculo deſtes numeros (n. 122, 128).

Porém ſerá mais facil o reduzir os dous termos da primeira razaõ á ſua infima eſpecie de *pollegadas*; e a queſtaõ ſe reduzirá a buſcar o quarto termo da proporçaõ ſeguinte - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9ʃ\ 4^d :$$

Entaõ multiplicando $168^{lb}\ 9ʃ\ 4^d$ por 5564 teremos o producto $937348^{lb}\ 10ʃ\ 8^d$; e dividindo eſte por 3797, o quociente $246^{lb}\ 17ʃ\ 3^d\ \frac{2789}{3797}$ ſerá o que deve pagar-ſe por $77^T\ 1^P\ 8^P$.

Havendo além diſſo fracções nos meſmos termos, depois de reduzidos á infima eſpecie como neſte exemplo, a ſua razaõ ſe ſimplificará do modo que aſſima moſtramos (n. 171).

Da Regra de tres inverſa e ſimples.

195 A Regra de tres ſimples e inverſa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo dado a meſma razaõ, que tem o relativo deſte para o relativo daquelle; e niſto conſiſte a ordem inverſa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo a meſma razaõ, que tem o relativo daquelle para o deſte.

deſte. Pelo que na regra inverſa ſendo os termos diſpoſtos como convém, huma das quantidades principais com a ſua relativa teráó o lugar dos meios, e a outra com a ſua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na fórma conveniente á natureza da queſtaó, a operaçaó ſe pratica como a precedente, buſcando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros ſaó neceſſarios para fazerem a meſma obra em 10 dias?

Reflectindo na queſtaó logo vemos que devem ſer tanto mais os obreiros, quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o ſeu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deſte (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - -

$$10^{d} : 25^{d} :: 30^{obr} :$$

E multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro acharemos 75, que he o numero dos obreiros da queſtaó.

Exemplo II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento para 15 dias, e reſtando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-ſe como ſe devem reduzir as rações por dia?

Tomando a raçaó coſtumada por unidade, he claro, que a raçaó que buſcamos deve ſer tanto me-

menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conſeguinte buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - -

$$20^d : 15^d :: 1 ;$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

N.

196 NA Regra de tres compoſta a razaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da razaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas razões ſimples, as quais ſe devem compôr (n. 187) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faráõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jorna-

lei-

leiros em hum dia; e do mesmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a questaõ se reduz a esta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toesas de obra, quantas toesas faraõ 1512 jornaleiros? e por conseguinte buscaremos o quarto termo desta proporçaõ - - - - - - - -

$$540 : 1512 :: 132^{T} :$$

E multiplicando o segundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, será o numero pedido $369^{T}\ 3^{P}\ 7^{P}\ 2^{d}\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 legoas em 30 dias. Pergunta-se, em quantos dias andará 600 leguas, caminhando 10 horas por dia com a mesma velocidade?

Se o numero das horas fosse o mesmo em ambos os casos, he visivel que o tempo pedido deveria ser tanto maior, quanto he maior a distancia relativa que se propõe; mas caminhando mais horas por dia no segundo caso, por esta razaõ deverá ser o tempo menor; e por conseguinte a questaõ depende da regra de tres directa e inversa simultaneamente. Reduzir-se-ha porém a huma regra simples, se reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Assim a questaõ se reduzirá a estes termos: Se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que satisfizer a esta questaõ, se par-

partirá por 10, visto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente será o numero dos dias que se pergunta. Assim buscaremos o quarto termo proporcional aos tres seguintes - - - -

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{b}$$

O qual acharemos ser $547^{b}\,\frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, será o numero dos dias $54\,\frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o seu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que tenhaõ entre si huma razaõ dada. O methodo, que para isto se dá, funda-se no principio que assima fica demonstrado (n. 186), como se verá no exemplo seguinte.

Exemplo I.

DA-se o numero 120 para ser distribuido em tres partes tais, que sejaõ entre si como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da questaõ se offerecem immediatamente estas duas proporções. Que 4 he para 3, como a 1ª parte que se busca he para a 2ª, e que 4 he para 2, como a 1ª parte he para a terceira; isto he (n. 182), que 4 he para a 1ª parte, como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª, como 2 para a 3ª; pelo que

que temos tres razões iguais, a ſaber: 4 para a 1ª parte, como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos moſtrado (n. 186), que em qualquer numero de razões iguais a ſoma dos antecedentes he para a dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente; logo no exemplo figurado ſerá a ſoma 9 das partes dadas para a ſoma 120 das partes que ſe pedem, como qualquer das partes dadas para a ſua relativa que ſe buſca.

Pelo que a Regra de Companhia em geral ſe reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas ſaõ as partes que ſe buſcaõ, tomando ſempre por primeiro termo a ſoma das partes dadas, por ſegundo o numero que ſe quer diſtribuir, e por terceiro a parte dada que he relativa á que actualmente ſe buſca. Aſſim na queſtaõ propoſta deveráõ completar-ſe as proporções ſeguintes - - -

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$, na ſegunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a ſoma de 120, e ſaõ entre ſi como as partes dadas 4, 3, 2.

ʃʃ Eſta Regra ſe executará com mais brevidade, *partindo o numero propoſto pela ſoma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das meſmas partes.* Porque em qualquer regra de tres tanto ſe acha o quarto termo, multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, como dividindo o ſegundo pelo primeiro, e multiplicando o quociente

pelo

pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e ſegundo termo ſaõ ſempre os meſmos, huma ſó diviſaõ baſta para reſolver todas as regras de tres, que nella forem neceſſarias.

Aſſim no meſmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando eſte ſucceſſivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correſpondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. ſſ

De qualquer modo que ſe pratique, naõ he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ſer diſtribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o ſegundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras.* Pergunta-ſe a parte de cada hum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ſer partido em tres partes, que guardem entre ſi a razaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cada hum deve ſer proporcional á ſua entrada. Aſſim com a ſoma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporções ſeguintes.

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do segundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres negociantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o segundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes: Quanto deve ter cada hum?

Este caso contém huma Regra de Sociedade composta, e esta se reduz facilmente á simples. Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o mesmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do mesmo modo as entradas do segundo, e terceiro, valem o mesmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo mesmo tempo de hum mez. Feita esta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}, e praticando como no exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro $1971^{lb}\ 16^{s}\ 4^{d}\ \frac{4}{11}$, o segundo $2190^{lb}\ 18^{s}\ 2^{d}\ \frac{2}{11}$, e o terceiro $7887^{lb}\ 5^{s}\ 5^{d}\ \frac{5}{11}$.

198 A' mesma Regra de Companhia se reduzem muitas outras questões, precedendo a preparaçaõ necessaria, como nos exemplos seguintes.

Dando-se o numero 650 para ser distribuido em tres partes tais, que a primeira seja para a segunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas razões dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa fórma se reduzirão, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo primeiro da outra (n. 170). Assim resultarão as razões equivalentes 35 : 28, e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de sorte que a primeira fosse para a segunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, estas razões se reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as razões equivalentes 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135, e a questaõ seria reduzida a partir o numero proposto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falsa Posiçaõ.

199 USa-se desta Regra, quando em lugar do numero, que buscamos, substituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teor da questaõ, comparamos o resultado com o que devia sahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que satisfaz á mesma questaõ. Chama-se simples, quando basta fazer huma só hypothese; composta, quando saõ necessarias duas.

A simples pratica-se por huma regra de tres, na qual *serve de primeiro termo o numero que resul-*

tou

teu da hypothese conforme as condições da questaõ, de segundo o numero que devia resultar, e de terceiro a mesma hypothese. E por isso só póde usar-se esta regra nas questões, em que o numero que se busca he para o numero dado que delle resulta, como qualquer outro para o que delle hade resultar da mesma maneira; circumstancias, que devem conhecer-se pela natureza da questaõ: e quando naõ, póde tentar-se a Regra, e depois fazendo experiencia do numero achado se conhecerá, se com effeito satisfaz á questaõ.

Exemplo.

Pergunta-se o numero, cujo terço, quinto, e tres septimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados, podemos escolher para hypothese hum numero que tenha as partes aliquotas 3, 5, 7, o qual acharemos multiplicando entre si estes tres numeros, que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypothese, buscaremos o seu terço 35, o seu quinto 21, e tres septimos 45. Se a soma destes fizesse 808, o mesmo numero da hypothese seria o que buscamos; porém como a soma faz 101, buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes - -

101 : 808 : : 105 :

E acharemos o numero 840, que satisfaz á questaõ.

A Regra de duas posições he mais geral, pois naõ sómente por ella se resolvem todas as questões da Regra simples, mas tambem muitas outras que estaõ fóra do alcance daquella. Pratica-se desta maneira.

Em lugar do numero que se busca toma-se arbibitrariamente qualquer por hypotheſe, e conforme a queſtaõ ſe examina o que delle reſulta; depois toma-ſe outro qualquer, e ſe nota tambem o que delle reſulta. Entaõ ſe faz eſta proporçaõ: *Como a differença dos reſultados das duas hypotheſes, para a differença entre o reſultado da primeira hypotheſe, e o verdadeiro reſultado que devia ſahir, aſſim a differença das hypotheſes para hum quarto.* Eſte ſe ajuntará ou tirará á primeira hypotheſe, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ſer, e iſto no caſo de que creſcendo a hypotheſe creſça tambem o reſultado; ſendo ao contrario, o numero achado ſe ajuntará ou diminuirá conforme a meſma hypotheſe tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheſes ſe póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes ſe póde achar o que ſe buſca.

Exemplo.

TRes negociantes ganháraõ 6954^{lb}. O ſegundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-ſe o lucro de cada hum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a queſtaõ ſeria o lucro do ſegundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb}, os quais ſomados daõ 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o ſegundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja ſoma dá 194^{lb}.

Aſſim das duas hypotheſes 1^{lb} e 2^{lb} temos os reſultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo ſahir 6954^{lb}. A dif-

differença entre os resultados das duas hypotheses he 4^{lb}, entre o resultado da primeira hypothese ao que devia resultar he 6764^{lb}, e entre as duas hypotheses he 1^{lb}. Pelo que buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos ser 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypothese 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por conseguinte o do segundo 1746^{lb}, e o do terceiro 3516^{lb}, que fazem com effeito a soma de 6954^{lb}, e satisfazem ás mais condições da questaõ.

He claro, que esta Regra naõ póde ter lugar senaõ nas questões, em que a differença das hypotheses he constantemente proporcional á differença dos resultados que ellas produzem, segundo o teor das mesmas questões. Quando porém as hypotheses se tomaõ proximas ao numero que se busca, em todas as questões tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por isso esta Regra tem grande uso na resoluçaõ das equações de gráo superior, e de muitas outras questões em toda a Mathematica.

Se fossem duas as quantidades que se perguntaõ, seriaõ necessarias tres hypotheses. Porque em primeiro lugar se deveriaõ suppôr duas quaisquer quantidades em lugar dellas, depois conservando a primeira se augmentaria ou diminuiria arbitrariamente a segunda, e finalmente conservando a segunda se faria mudança na primeira. Do mesmo modo se mostra, que seriaõ necessarias quatro posições, se fossem tres as quantidades, e assim por diante. Para estes casos seria cousa muito embaraçada o prescrever regras arithmeticas, quando por

ou-

outra parte ſe póde com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da Regra de Liga.

200 ESta regra tem por objecto a miſtura das couſas de differente valor; e he de dous modos: Directa, quando ſe daõ as quantidades, que ſe haõ de miſturar, com o valor de cada huma, e ſe pergunta o valor do miſto que reſulta: Inverſa, quando ſe dá o valor das couſas que ſe haõ de miſturar, e ſe pergunta a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar, para que o miſto ſeja de hum preço dado.

A primeira executa-ſe deſte modo: *Cada huma das quantidades ſe multiplica pelo ſeu valor, a ſoma dos productos ſe divide pelo numero das quantidades, e o quociente he o valor que ſe buſca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17; pergunta-ſe o quilate a que ſe reduz o compoſto.

Multipliquem-ſe os 5 marcos pelos ſeus reſpectivos quilates 24, e daraõ o producto 120; do meſmo modo multipliquem-ſe os 8 marcos por 21, e os 6 por 17, e daraõ os productos 168, e 102. A ſoma de todos tres faz 390, a qual ſendo dividida pela ſoma total dos marcos 19 dá no quociente $20\frac{10}{19}$; e eſtes ſaõ os quilates do compoſto.

Na Regra inverſa, quando ſómente duas couſas ſe haõ de ligar a hum preço dado entre os preços dellas, praticar-se-haõ estas duas proporções. *Como a differença entre os preços dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de menor valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve ter do simples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de maior valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve levar do simples de menor valor.*

Exemplo.

HUm Ourives quer fazer huma obra que tenha de peso 8 marcos, e seja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para isso quer ligar duas especies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-se quanto deve tomar de cada hum.

Tome-se a differença entre os quilates das especies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate proposto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que saõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e busque-se o quarto termo nas duas proporções seguintes - - -

$5 : 3\frac{1}{2} :: 8 :$ ou (n. 171) $10 : 7 :: 8 :$

$5 : 1\frac{1}{2} :: 8 :$ $10 : 3 :: 8 :$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, isto he 5 marc. 4 onç. 6 oitav. 1 scrop. 4 gr. e $\frac{4}{5}$, que he a parte do ouro de 22 quilates, e a ſegunda dará 2 $\frac{2}{5}$, ou 2 marc. 3 onç. 1 oitav. 1 ſcrop. 19 gr. e $\frac{1}{5}$, que he a parte que ſe deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando ſe haõ-de ligar mais do que duas eſpecies de diverſo valor, primeiramente ſe ligaráõ pela regra directa todas as que forem de maior valor que o compoſto que ſe pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que melhor parecer, e ſe buſcará o preço deſte compoſto. O meſmo ſe praticará com todas as eſpecies de menor valor que o intermedio dado. E deſte modo ficaraõ as eſpecies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o propoſto, as quais ſe ligaráõ como no caſo precedente, e achando-ſe a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar, tambem conſtaráõ as partes dos ſimplices, de que arbitrariamente as compuzemos.

Exemplo.

DAõ-ſe quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o ſegundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delle ſe quer fazer huma miſtura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente miſturaremos os dous de maior valor que o propoſto, tomando de cada hum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo aſſim compoſto valerá a razaõ de 102 a medida. Depois ſupporemos tambem

bem miſturados os outros dous, tomando igualmente de cada hum as partes que nos parecer, v. gr. duas partes do que vale a 60, e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do miſto ſerá a 54. Aſſim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para ſerem miſturados de ſorte que o compoſto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do ſegundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1, e do ſegundo como 2. Porem ambos elles ſaõ compoſtos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na razaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos ſeráõ como 2, 3, 4, 6; iſto he, por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do ſegundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Eſta queſtaõ ſe póde reſolver de muitas maneiras, conforme as partes qua arbitrariamente ſe tomarem para formar os dous compoſtos parciais, que finalmente ſe haõ-de ligar.

Outras regras relativas ás Proporções.

201 MUitas outras Regras ſe encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais ſe reduzem á pratica da Regra de tres, e ſendo bem entendida a natureza das queſtões naõ podem embaraçar a quem ſouber o que até agora temos dito.

202 Deſte genero he a *Regra dos juros*, na qual ſe buſca o intereſſe de qualquer quantia por

qualquer tempo, ſuppoſta a razaó do que vence 100 cada anno.

Pergunta-ſe v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a razaó de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráó $36\frac{1}{4}$, e por conſeguinte teremos a proporçaó: Como 100 para $36\frac{1}{4}$, aſſim o capital 449200 para o ſeu juro, que ſe achará ſer 162835.

Dando-ſe a quantia 612035 ſoma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, ſe quizermos ſaber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo $36\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaó: Como $136\frac{1}{4}$ para 100, aſſim a quantia dada 612035 para o capital que ſe pede, 449200.

Pergunta-ſe o capital, que em 7 annos e 3 mezes produza 162835 a razaó de 5 por 100, teremos: Como $36\frac{1}{4}$ para 100, aſſim o juro dado 162835 para o capital que ſe pergunta, 449200.

Pergunta-ſe o tempo, em que o capital 449200 ha-de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, aſſim 100 para hum quarto, que ſerá $36\frac{1}{4}$. Eſte he o juro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o

quo-

quociente $7 \frac{1}{4}$ moſtrará o dito tempo, iſto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando-ſe em fim a que razaõ por 100 ſe deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, aſſim 100 para $36 \frac{1}{4}$; e dividindo eſte numero pelo tempo $7 \frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que ſe pergunta.

Pelo que reſpeita ao *juro dos juros*, e outras queſtões mais complicadas ſobre intereſſes e uſuras, na Algebra ſe reſolveraõ com mais facilidade.

203 Nos *deſcontos*, e *abatimentos* ſe diſcorre do meſmo modo que nos juros, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Comprou certa peſſoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos; mas reſolvendo-ſe logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na razaõ de $4 \frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-ſe, quanto deve pagar?

He manifeſto, que neſte caſo naõ ſe buſca outra couſa ſenaõ o capital que com o ſeu juro de $4 \frac{1}{2}$ por 100 em 10 annos faça 4536^{lb}. Ora como 100 produzem $4 \frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produziráõ 45; e aſſim teremos: Como 145 para 100, aſſim 4536^{lb} para a quantia que ſe pede; a qual he $3128^{lb}\ 5^{ſ}\ 6^{d} \frac{6}{29}$.

Ten-

Tendo huma peſſoa paſſado a hum mercador hum credito de 2854^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remi-lo paſſados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na razaõ de 6 por 100; pergunta-ſe quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveráõ vencer $3\frac{1}{2}$. Aſſim o que o devedor havia de pagar do principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e paſſados 7 mezes ſómente o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conſeguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, aſſim 2854^{lb} para a quantia que ſe pergunta, a qual acharemos ſer 2786^{lb} $13^{ſ}$ $9^{d}\frac{15}{53}$.

Deſte modo uſando da regra de tres ſe reſolvem outras muitas queſtões pertencentes aos contratos mercantîs, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he neceſſario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progreſſões Arithmeticas.

204 A *Progreſſaõ Arithmetica* he huma ſerie de termos, que de tal forma ſe vaõ ſeguindo huns aos outros, que cada hum excede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quantidade conſtante. Por exemplo eſta ſerie

$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 &c.

he

he huma Progressaõ Arithmetica, porque cada termo tem de excesso sobre o que lhe fica atrás a mesma quantidade 3. Esta progressaõ se denota com o mesmo signal $\div$, que se usa na Proporçaõ Arithmetica contínua (n. 174), porque na realidade naõ he mais do que a mesma Proporçaõ continuada álem do terceiro termo.

A Progressaõ he *crescente*, *ascendente*, ou *divergente*, quando os termos saõ cada vez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cada vez menores. Como ambas tem as mesmas propriedades, somente com a differença de que o *somar* em huma deve ser *diminuir* na outra, naõ trataremos senaõ da ascendente: e o que della dissermos se applicará sem difficuldade á descendente.

205 He claro pois pela mesma noçaõ da Progressaõ, que com o primeiro termo e com a differença commum, a qual tambem se chama *razaõ* da Progressaõ, se pódem formar todos os mais, pela addiçaõ successiva da mesma *razaõ*. Porque o segundo se forma do primeiro somado com a razaõ; o terceiro he a soma do segundo e da mesma razaõ, ou do primeiro e do duplo da razaõ; o quarto contem o terceiro e mais a razaõ, ou o primeiro e mais o triplo da mesma razaõ; e assim por diante.

206 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma progressaõ Arithmetica he igual á soma do primeiro, e da razaõ tomada tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes.*

207 Por conseguinte quando o primeiro termo for o, qualquer dos outros será igual á razaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208

208 Por meio deſte principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progreſſaõ Arithmetica, ſem que nos ſeja para iſſo neceſſario calcular os precedentes.

Pergunta-ſe v. gr. qual ha-de ſer o centeſimo termo neſta Progreſſaõ $\div 4 . 9 . 14 . 19$ &c. Como o termo que ſe pede he o centeſimo, ſerá precedido de 99 termos. Conſtará pois do primeiro 4, e da razaõ 5 multiplicada por 99; e ſerá por conſeguinte 499.

209 Do meſmo principio ſe entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, iſto he, de aſſignar huma Progreſſaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Iſto ſe executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o reſto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente ſerá a razaõ da Progreſſaõ, a qual por conſeguinte ſe formará como aſſima diſſemos (n. 205).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o reſto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ ſerá a razaõ da Progreſſaõ, a qual ſerá por conſeguinte $\div 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9 . \frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Do meſmo modo, ſe entre o e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por $9 + 1$, ou por

por 10, e teremos a razaõ $\frac{1}{10}$, ou 0,1, e por conſeguinte a progreſſaõ que buſcamos ſerá ÷ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde ſe vê, que por menor e menor que ſeja a differença de dous numeros, ſempre entre elles ſe pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progreſsões Arithmeticas he o que baſta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos de tratar. Pelo que reſpeita ás mais propriedades das meſmas Progreſsões, em outro lugar as moſtraremos com mais commodidade.

Das Progreſsões Geometricas.

211 A *Progreſſaõ Geometrica* he huma ſerie de termos, cada hum dos quais contem o ſeu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Eſta ſerie v. g.

∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 &c.

he huma Progreſſaõ Geometrica, porque cada termo contem o ſeu antecedente o meſmo numero de vezes, iſto he, 2. Eſte numero de vezes, que cada termo contem, ou he contido no antecedente, chama-ſe *denominador*, ou *razaõ* da Progreſſaõ. E eſte ſe denota com o ſignal ∺, como a Proporçaõ Geometrica contínua, porque he a meſma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progreſſaõ Geometrica he *creſcente*, *aſcendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ ſendo cada vez maiores: *decreſcente*, *deſcendente*, ou

con-

convergente, quando ſaõ cada vez menores. Naõ he preciſo tratar de ambas ſeparadamente, porque tem as meſmas propriedades, mudando-ſe ſómente a multiplicaçaõ em diviſaõ, e reciprocamente, alem de que mudada a ordem dos termos huma ſe converte na outra.

212 Da meſma noçaõ da Progreſſaõ Geometrica ſe ſegue, que com a razaõ e o primeiro termo ſe podem formar todos os outros. Porque o ſegundo reſulta do primeiro multiplicado pela razaõ, o terceiro do ſegundo multiplicado tambem pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da razaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da razaõ &c.

Deſte modo na Progreſſaõ aſſima figurada o ſegundo termo 6 reſulta do primeiro 3 multiplicado pela razaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da razaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da razaõ 8 &c.

213 Donde ſe ſegue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica ſe fórma do primeiro multiplicado pela razaõ elevada a huma potencia que tem por expoente o numero dos termos precedentes.*

Pelo que ſe o primeiro termo for 1, qualquer outro termo ſerá igual á potencia da razaõ que correſponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ augmenta o producto.

214 Daqui ſe deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica, ſem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pe-

Pede-ſe v. g. o termo duodecimo deſta Progreſſaõ ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, ſerá o que buſcamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da razaõ 2. Eſta potencia ſe achará pela multiplicaçaõ contínua do numero 2, até elle ſer onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ podemos elevar 2 ao cubo 8, e eſte ao ſeu cubo 512, que ſerá a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do meſmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, ſerá o termo duodecimo que buſcamos 6144.

215 Do meſmo principio ſe deduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Iſto ſe faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade.* Eſta raiz ſerá a razaõ, com a qual ſe formaráõ os termos pedidos (n. 212).

Porque o maior dos numeros dados, que ſe póde tomar como ultimo termo da Progreſſaõ, ſerá igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela razaõ elevada á potencia correſpondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente ſerá a razaõ elevada ao gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade (n. 74); aſſim extrahindo do dito quociente a raiz do meſmo gráo, teremos a razaõ da Progreſſaõ.

Pe-

Pede-ſe v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, e teremos o quociente 1024. Depois buſcaremos a raiz decima de 1024 (pag. 168), que acharemos ſer 2; eſta ſerá a razaõ da Progreſſaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizermos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeiro 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porem o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he ſinal de que entre 6 e 48 naõ ſe podem aſſignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ aſſignar-ſe mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Aſſim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1,5157167 proximamente (pag. 151), e baſtando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais, teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros ſe podem ſempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for neceſſario. E iſto he o que neſte lugar baſta ſaber das Progreſsões.

Dos

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ-se *Logarithmos* os numeros de huma Progressaõ Arithmetica, em quanto se comparaõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progressaõ Geometrica. Postas v. g. estas duas Progressões

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correspondente, que na segunda occupa o mesmo lugar; assim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde se segue, que o mesmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á mesma Progressaõ Geometrica, em que elle se acha, podemos fazer corresponder infinitas Progressões Arithmeticas diversas.

Como porem attendemos presentemente ao uso actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progressões Arithmeticas e Geometricas, que se podiaõ combinar entre si, mas passaremos logo ás que se escolheraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que usamos.

218 Escolheo-se pois a Progressaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na razaõ decupla, as quais pareceraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Assim teremos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progressões seguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219

219 Pelo que neſte ſyſtema de Logarithmos ſerá ſempre muito facil ſaber o Logarithmo de todos os numeros, que ſe exprimirem pela unidade ſeguida de qualquer numero de cifras, pois ſempre o Logarithmo conſtará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progreſſaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os ſeus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que ſe podia ſeguir, ſe naõ houveſſe outros meios, ſenaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela meſma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-ſe na Progreſſaõ fundamental $\div\!\div$ 1 ; 10 ; 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n. 215) ſuccederá neceſſariamente de duas couſas huma, ou que algum delles coincidirá juſtamente com o numero 3, ou ao menos que hum ſerá proximamente menor e o conſecutivo proximamente maior que 3, ſendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de ſorte que augmentando quanto for neceſſario o numero dos meios, hum delles ſe poderá finalmente tomar pelo meſmo numero 3.

Entaõ metendo entre o e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos ſe calcularaõ entre 1 e 10, o termo deſta Progreſſaõ, que correſponder ao lugar do numero 3 na outra Progreſſaõ, ou do numero ſummamente proximo a 3, ſerá o Logarithmo delle; e aſſim dos mais.

221 Aſſim deveremos imaginar; Que tendo-ſe metido 10000000 meios arithmeticos entre 0 e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3 &c., ſe meteraõ outros tantos geometricos entre 1 e 10, entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c.; Que ordenando termo por termo eſtas Progreſsões, ſe buſcaraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica ſe notaráõ os termos, que lhes correſpondiaõ no meſmo lugar, e eraõ por conſeguinte os ſeus Logarithmos; E que finalmente tranſportando a huma columna vertical, como na Taboa ſeguinte, os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ao lado direito ſe aſſentaráõ os ſeus Logarithmos. A iſto ſe reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

TA-

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672008	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1.785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1.799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123859	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,130879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,127271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á efquerda chama-fe *Characteriftica*, porque por ella fe conhece a que década pertence o numero correfpondente ao mefmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. gr. a characteriftica 3, he fignal que o feu numero he de *milhares*; porque fendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teráõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por confeguinte ferá 3 a characteriftica, e as letras feguintes reprefentaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteriftica do feu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que affima ajuntamos para exemplo, tem depois da characteriftica feis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem fete. Mas efta differença naõ prejudica aos ufos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo moftraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui fenaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de moftrar, devem principalmente deduzir-fe das Progrefsões Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-fe pois quaisquer duas Pregrefsões com eftas circunftancias, por exemplo as duas feguintes.

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
$\div\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela

Pela natureza e correſpondencia deſtas Progreſsões he manifeſto, que qualquer termo da primeira conſta da razaõ tomada tantas vezes, quantas a razaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a razaõ da Progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207, 212); porem os termos correſpondentes de ambas as Progreſsões ſaõ precedidos de igual numero de termos: logo, &c.

Aſſim v. gr. no termo 28 da primeira a razaõ 4 ſe contem ſete vezes, e outras tantas a razaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo, *Somando dous quaisquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſtes e a ſoma daquelles ſeraõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſsões.*

Porque a ſoma conterá a razaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contem juntamente os termos ſomados; e o producto terá a razaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porem cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contem a razaõ tantas vezes, quantas a razaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a razaõ Arithmetica, quantas o producto terá por factor a razaõ Geometrica; e conſeguintemente ſeráõ termos correſpondentes nas ditas Progreſsões.

225 Somando pois dous termos quaisquer da

Progressaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correspondem na Geometrica, se para isso forem continuadas as mesmas Progresões quanto he necessario.

Somando v. gr. os termos 8 e 24, que correspondem a 9 e 729, teremos a soma 32, a qual corresponde na Progressaõ Geometrica ao numero 6561; e este será o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais 1, 2, 3 &c na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por 0, he manifesto, *que somando os Logarithmos de quaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostraremos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. gr. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber.

Log. de 13 - - -	1,113943
Log. de 14 - - -	1,146128
E a soma - - -	2,260071

E a soma - - - 2,260071 será o Log. do producto, que acharemos ser 182, numero que na Taboa compete ao dito Logarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he

he precifo mais que duplicar o feu Logarithmo. Porque para quadrar deve o numero multiplicar-fe por fi mefmo; e por confeguinte deve tomar-fe duas vezes, ou duplicar-fe o feu Logarithmo. Pela mefma razaõ triplicando o Log. de hum numero teremos o Log. do feu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-fe-ha o feu Log. tantas vezes quantas o numero entra por factor neffa potencia, ou multiplicar-fe-ha o Logarithmo pelo expoente della.*

Querendo v. gr. formar a potencia 7ª de 2, bufcaremos o feu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correfponde a 128, e efta he a potencia 7ª de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrahir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c. de qualquer numero, dividiremos o feu Log. por* 2, 3, 4, 5 *&c.* ou, geralmente, *pelo expoente da raiz; e o quociente ferá o Logarithmo della.*

Procurando v. gr. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o feu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2 teremos 1,079181, que na mefma Taboa achamos fer Log. de 12; e por confeguinte 12 ferá a raiz quadrada de 144.

Se bufcarmos a Raiz 7ª de 128, a Taboa nos dará o Log. defte numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e por iffo ferá 2 a raiz 7ª de 128; e affim das mais.

231 A Regra da Divifaõ por Logarithmos fe pratica, *diminuindo o Log. do divifor do Log. do dividendo; e o refto ferá o Log. do quociente.*

Querendo v. gr. dividir 187 por 17, bufcaremos os feus Logarithmos, e teremos . . . . . .

Log. do divid. 187 - - - 2,271842
Log. do divis. 17 - - - 1,230449

E o resto - - - - - - 1,041393 será o Log. do quociente, que consultando a Taboa acharemos ser 11.

Quando o Log. do quociente se naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he signal que a divisaõ naõ se póde fazer sem resto; mais abaixo diremos o que se deve fazer neste caso.

A razaõ desta Regra he, porque sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente (n. 74), deve o Log. do dividendo formar-se da soma dos Log. do divisor e do quociente (n. 227); e conseguintemente tirando o Log. do divisor do Log. do dividendo, o resto será o Log. do quociente (n. 39).

232 Pelo que temos visto se vê, que a Regra de tres se ha-de praticar por Logarithmos, *somando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º; e o resto será o Log. do 4º*; o qual por conseguinte se achará por meio das Taboas.

Buscando-se v. gr. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 :: 105 :, será a operaçaõ desta maneira:

Log. do 3º 105 - - - 2,021189
Log. do 2º 12 - - - 1,079181

Soma - - - - - - 3,100370
Log. do 1º 7 - - - 0,845098

Resto - - - - - - 2,255272, ou Log. do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-se, que se o Logarithmo, que resulta de alguma operaçaõ, coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ se deverá fazer caso desta differença. Porque sendo os Log. dos numeros intermedios da Progressaõ décupla approximados sómente até a metade de huma unidade da ultima casa da dizima, póde succeder, que pela addiçaõ de muitos Log., ajuntando-se os pequenos defeitos da ultima letra de cadahum, influaõ na ultima letra do resultado o defeito ou excesso de huma ou duas unidades; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle resultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo desta advertencia.

Dos Numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas segundo a serie natural dos numeros inteiros, he claro que nellas immediatamente se naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O mesmo se entenderá das raizes dos numeros, que naõ saõ potencias perfeitas &c.

Querendo-se pois o Log. de hum numero inteiro acompanhado de fracçaõ, reduzir-se-há tudo a quebrado (n. 86): e diminuindo entaõ o Log. do denominador do Log. do numerador, o resto será o Log. que se procura.

Se buscarmos v. g. o Log. de $8\frac{3}{11}$, reduzi-

re-

remos primeiro eſte numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O reſto 0,917648 ſerá o Log. do numero propoſto 8 $\frac{3}{11}$; porque 8 $\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o meſmo que 91 dividido por 11 (n. 96).

235 Pela meſma razaõ ſe moſtra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria ſe deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porem, como eſta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ſer o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deſte do Log. daquelle; e o reſto ſerá o Log. que buſcamos, ſendo porem precedido do ſignal —, para ſe moſtrar que a diminuiçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que devia ſer. Aſſim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he — 0,917648 &c.

236 O referido ſignal, aſſim como denota que a ſubtracçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que convinha, tambem ſerve para trazer á lembrança, que a fim de compenſar iſſo meſmo ſe devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma regra oppoſta á que temos eſtabellecido para os outros; iſto he: *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. deſta ſe deve diminuir; e que havendo de dividir, ſe deve ſomar* (*).

SS

(*) Os numeros, que ſaõ precedidos do ſignal —, chamaõ-ſe *negativos*. Na Algebra daremos huma idea mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ ſe haõ-de conceber, como numeros menores que o; porque abaixo do *nada* naõ póde haver couſa alguma

55 Em geral: *Se o Log. dos factores forem todos poſitivos, ou todos negativos, a ſoma delles com o meſmo ſignal; ſe huns poſitivos, outros negativos, a differença entre as duas ſomas de huns e dos outros com o ſignal da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á diviſaõ: *Muda-ſe o ſignal do diviſor, e pratica-ſe a meſma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracções de outra maneira, fazendo ſómente a characteriſtica negativa, e conſervando a dizima ſempre poſitiva. Eſta fórma de Logarithmos reſulta, ſubtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a eſquerda, e em chegando ás characteriſticas, toma-ſe por characteriſtica negativa o que ſeria neceſſario ajuntar á characteriſtica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador ſe pudeſſe della ſubtrahir ſem reſto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log. do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Para iſto ſerá neceſſario ajuntar 2 á characteriſtica do Log. do numerador, que ficará 2,301030, e ſerá o reſto 0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na ſua characteriſtica, por termos poſto outro tanto de mais no Log. do numerador, ſerá o Log. que buſcamos — 2,122053, entendendo-ſe porem que o ſignal negativo ſómente affecta a characteriſtica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, coſtumaõ notar-ſe os de que agora fallamos deſte modo $\bar{2}$,122053, ou tambem aſſim $\dashv$ 2,122053.

A razaõ disto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a este compete se multiplica realmente por 100. Logo tirando 2,178977 de 2,301030, o resto 0,122053 será o Log. de $\frac{200}{151}$. Para este quebrado se reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciso dividi-lo por 100, e por conseguinte tirar 2 á characteristica do seu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ será $-2+0,122053$ ou $\bar{2},122053$.

Quando entrarem no calculo estes Logarithmos, observar-se-haõ as Regras assima dadas em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ sempre se somaõ as letras decimais, porque saõ todas positivas; e se desta soma passarem algumas unidades para a casa das characteristicas ajuntaõ-se com as positivas, e a differença entre as somas das negativas e positivas com o signal da maior será a characteristica. Na divisaõ sempre se diminue o Log. do divisor do Log. do dividendo em quanto á dizima; em quanto ás characteristicas muda-se o signal do divisor, e pratica-se a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for necessario pedir huma unidade á casa da characteristica, e esta for 0, ou negativa, deverá esta ficar com huma unidade de menos, v. gr. sendo 0 ficará $\bar{1}$, sendo $\bar{1}$ ficará $\bar{2}$ &c.

Do mesmo modo: Quando se houver de multiplicar hum Log. destes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e se dellas houverem de passar algumas

uni-

unidades para a caſa da characteriſtica, guarda-las-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaráõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\bar{2}$,873245 ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\bar{6}$,366225; ſendo dividido por 7, o quociente $\bar{1}$,839035.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 9, exceptuando a derradeira, da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra fórma, ajuntando 1 á ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\bar{2}$,374972 ſe transforma em — 1,625028, o Log. $\bar{1}$,587430 em —0,412570, e reciprocamente. ∬

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000, ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe

ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſtica de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100 , 1000 &c. e ao contrario dividido , ſe tirarmos 1, 2, 3 &c., unidades á meſma characteriſtica ; porque niſſo naõ fazemos outra couſa , ſenaõ ajuntar , ou tirar ao dito Log. o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

239 Iſto ſuppoſto , ſe v. gr. buſcarmos o Log. de 357859 , delle cortaremos á direita tantas letras , quantas forem baſtantes , para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas , iſto he , duas neſte caſo , e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403 , e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579 , que he 1214. Entaõ diremos : Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579 , dá a differença dos Log. 1214 , a differença 0,59 entre os numeros 3578 e 3578,59 que differença dará nos ſeus Log. ? Como temos a unidade por primeiro termo , baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro , e o producto 716,26 , ou 716 , deixando as partes decimais , he a differença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente , como 3578,59 ſe deve multiplicar por 100 para fazer 357859 , reſta ajuntarmos 2 á characteriſtica de ſeu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero propoſto 357859.

Se as letras que ſe haõ-de cortar forem todas cifras , he claro , que buſcando nas Taboas o Log. do numero que ficar á eſquerda , naõ ſerá preciſo mais do que ajuntar-lhe á characteriſtica tantas unidades , quantas foraõ as cifras que ſe cortaraõ.

240 Quando o numero he ſeguido de dizima, buſca-ſe o Log. como ſe foſſe inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteriſtica ſe tiraõ tantas unidades, quantas ſaõ as letras decimais. Querendo v. gr. o Log. de 3,27 buſcaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 á characteriſtica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buſcaremos o de 357859 (n. 239), que he 5,5537119, e tirando 4 á characteriſtica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, ſe o numero conſtar ſómente de notas decimais, buſcaremos ſim o Log. delle como ſe foſſe inteiro, mas diminui-lo-hemos de tantas unidades, quantas forem as caſas da dizima, e o reſto com o ſignal — ſerá o Log. deſejado. Querendo v. gr. o Log. do numero 0,03, buſcaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos — 1,522879, Log. de 0,03.

¶¶ Se quizermos porem o Log. com a characteriſtica ſomente negativa, buſcaremos tambem o Log. das letras decimais, como ſe foſſem numero inteiro, e da characteriſtica tiraremos tantas unidades, quantas forem as caſas da meſma dizima. Aſſim acharemos, que $\bar{2}$,477121 he o Log. de 0,03; $\bar{3}$,514548 Log. de 0,00327, &c. ¶¶

Dos

Dos Logarithmos, cujos numeros ſe naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operações com mais facilidade ſubſtituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que ſaõ os ſeus Logarithmos, aſſim tendo acabado o calculo he neceſſario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes ſuccederá, que o Log. reſultante das operações correſponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he neceſſario, para que o meſmo Log. ſe ache nellas. Aſſim he preciſo, que tenhamos hum methodo para achar por meio das meſmas Taboas o numero correſpondente a qualquer Log. propoſto. O qual he deſta maneira.

243 Tirem-ſe da characteriſtica tantas unidades, quantas forem baſtantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. ſe achar nas Taboas, o numero que lhe correſponder, ſendo augmentado de tantas cifras á direita, quantas unidades ſe houverem tirado da characteriſtica, ſerá o numero que buſcamos. Tirando v. gr. 3 unidades á characteriſtica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas correſponde a 16879; e aſſim 16879000 ſerá o numero repreſentado pelo Log. 7,2273467 (n. 238).

Reduzida porem a characteriſtica aos limites das Taboas, ſe o Log. propoſto cahir entre dous Log. conſecutivos dellas, praticar-ſe-ha deſte modo: Supponhamos, que ſe pede o numero correſpondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades

á

á characteriſtica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conſeguinte o ſeu numero ſerá 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos eſta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. propoſto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos meſmos numeros? Como o ſegundo termo he ſempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente ſerá o quarto, que neſte exemplo acharemos 0,9625. Aſſim o Log. 3,2432768 correſponde ao numero 1750,9625, e conſeguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28, 238).

244 Quando a characteriſtica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ ſe lhe deve tirar unidade alguma; e por iſſo tendo achado o numero correſpondente, naõ ſe lhe ajuntaraõ cifras algumas, nem ſe mudará o lugar da virgula.

245 He porem muito de advertir, que a proporçaõ aſſima praticada ſuppõe, que as differenças dos Log. ſaõ proporcionais ás differenças dos numeros correſpondentes, como ſaõ com effeito proximamente, ſendo os numeros grandes, mas de nenhuma ſorte ſendo pequenos. Por iſſo, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ paſſaõ de 10000, ajuntaremos á characteriſtica as unidades que forem preciſas, para buſcarmos o numero na claſſe ſuprema das meſmas Taboas, no qual deveremos ſeparar para a dizima tantas letras, quantas foraõ as unidades

que

que ajuntamos á characteriſtica ; e ſe quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ aſſima indicada (n. 243).

Por exemplo, buſcando-ſe o numero correſpondente ao Log. 0,5432725, pela inſpecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomaſſemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c., que ſe aparta muito da verdade. Porem ajuntando 3 unidades á characteriſtica, acharemos que o Log. 3,5432725 moſtra hum numero entre 3493 e 3494 ; pelo que baſtando-nos a terceira caſa da dizima, diremos que o numero correſpondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porem mais letras decimais, pelo methodo aſſima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 correſponde ao numero 3493,594 (n. 143), e por conſeguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238).

Porem eſta approximaçaõ dos numeros tem ſeus limites. Porque ſendo, como aſſima diſſemos, exactos ſómente os Log. até huma meia unidade da ultima caſa decimal, he manifeſto, que as ſuas differenças participaõ deſte defeito. Por iſſo em chegando a ultima letra da differença dividida a influir ſobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle ſeraõ faltas de exactidaõ, e por iſſo he eſcuſado continuar a diviſaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ ſeguramente ſenaõ até os numeros de ſete letras ; e iſto he o que baſta quaſi ſempre. Sendo preciſo mais, recorrer-ſe-ha a Taboas de mais letras, ou naõ ſe uſará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-ſe-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, de ſorte que o reſto ſe

ache na ſuprema claſſe das Taboas, e do numero correſpondente ſe tomaráõ tantas caſas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais ſe diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buſcando-ſe a fracçaõ correſpondente ao Log. — 1,532732 diminuiremos eſte de 5 e o reſto 3,467268 moſtrará na Taboa hum numero entre 2932 e 1933; pelo que a fracçaõ pedida ſerá 0,02932. E com effeito tirar o Log. — 1,532732 de 5 he o meſmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe correſponde (n. 219, 236). Logo o numero correſpondente ao reſto deverá dividir-ſe por 100000, tomando 5 caſas decimais (n. 28).

ʃʃ Sendo os Log. ſómente negativos em quanto á characteriſtica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correſpondente. Buſcar-ſe-ha o numero que correſponde ao Log. com a characteriſtica que melhor parecer, e a primeira letra delle ſe aſſentará tantas caſas adiante da virgula, quantas ſaõ as unidades negativas da characteriſtica.

Aſſim v. gr. querendo até a quarta letra decimal a fracçaõ correſpondente ao Log. $\bar{2}$,235724, buſcaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ ſerá 0,0172. Querendo a fracçaõ correſpondente ao Logarithmo $\bar{1}$,732589 até a ſexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log. 5,732589, que acharemos ſer 540242, e por conſeguinte a fracçaõ deſejada 0,540242. ʃʃ

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicações na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui ſómente daremos,

Q por

por meio de exemplos tirados da mesma Arithmetica, alguma idea da vantagem que resulta dos Logarithmos em quanto á promptidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

PErgunta-se o quociente de 17954 dividido por 12836, approximado até as decimas-millesimas. Usando dos Log. obraremos desta maneira :

Log. de 17954	- -	4,254161
Log. de 12836	- -	4,108430
Resto	- - -	0,145731

o qual sendo procurado nas Taboas com a characteristica 4 corresponde a 13987 ; e conseguintemente será o quociente pedido 1,3987 (n. 238).

Exemplo II.

PEde-se a raiz cubica de 53 approximada até á casa das decimas-millesimas.

Busque-se o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-se por 3 (n. 230). O quociente 0,574759 será o Log. da raiz. Este com a characteristica 5 corresponde nas Taboas proximamente ao numero 375628 ; Logo a raiz será 3,75628 (n. 238).

Exemplo III.

QUerendo saber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buscaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o do-o por 3, teremos 11,275827 Log. do cubo do mesmo numero. Dividindo este por 5, teremos 2,255165 por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteristica augmentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 1799555; e assim será a raiz que buscamos 179,955.

Exemplo IV.

Querendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como seria necessario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215), para conhecer a razaõ da Progressaõ; por Logarithmos se obrará deste modo:

Tirar-se-ha 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n. 231), e o resto 0,333699 se dividirá por 5 (n. 230). O quociente 0,066740 será o Log. da razaõ; e entrando com elle nas Taboas com a characteristica 4, acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a razaõ he 1,1661 exacta até as decimas-millesimas. Assim naõ resta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela razaõ 1,1661, o producto outra vez pela razaõ &c. (n. 211).

Porem estas mesmas operaçoes se faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log. da razaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deste; e teremos

mos 0,492709 ; 0,559449 ; 0,626189 ; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais, que seraõ proximamente 3,109 ; 3,626 ; 4,228 ; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso.

248 QUando se praticaõ as operações por Logarithmos, e alguns destes se devem diminuir, póde simplificar-se o calculo, substituindo em lugar delles os seus complementos.

249 Para disto se formar huma idea clara, he necessario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conste da unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as letras do primeiro, a operaçaõ se reduz a escrever da esquerda para a direita a differença entre 9 e cada huma das letras do numero proposto, exceptuando a ultima, em lugar da qual se tomará o que lhe faltar para 10. Assim v. gr. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos successivamente as letras 5, 2, 6, 9, 2, de 9; e a ultima 7 de 10, e será o resto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero proposto se considerará como 004873 e praticando a mesma regra, teremos o resto 995127.

250 O resto formado desta maneira he o que se chama *Complemento Arithmetico* do numero proposto.

251 Como he taõ facil a substituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas se póde contar por operaçaõ, he manifesto, que

que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte:

		672736
		426452
Compl. de 432752	-	567248
Compl. de 18675	-	981325
Soma - - -	-	2)647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes 647761 daraõ o reſultado que ſe buſca.

A razaõ deſta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 ſomando o ſeu complemento, ou 1000000—432752, naõ ſómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao meſmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira letra da ſoma.

252 A applicaçaõ diſto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que ſe haõ-de ſubtrahir, ſubſtituiremos os ſeus complementos, que ſe deſignaõ com as letras CL, e na ſoma deixaremos de eſcrever tantas dezenas na characteriſtica quantos forem os complementos.

Exem-

Exemplo I.

SUpponhamos que ſe procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 :: 129 :

Como deveriamos ſomar os Log. de 1599 e 129, e da ſoma tirar o Log. de 1677 (n. 232), por huma ſoma unica praticaremos deſte modo:

CL. de 1677	- -	6,775467
Log. de 1599	- -	3,203848
Log. de 129	- -	2,110590

E a ſoma - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteriſtica ſerá o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$.

Já ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106, 109). Por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte:

Log. de 675	- -	2,829304
Log. de 952	- -	2,978637
Log. de 753	- -	2,876795
CL. de 527	- -	7,278189
CL. de 377	- -	7,423659
CL. de 631	- -	7,199971

E a Soma - - - - - 0,586555, lançando

fóra as 3 dezenas da characteriſtica, por entrarem nellã 3 complementos, moſtrará nas Taboas o numero que buſcamos 3,8597 proximamente.

253 Alem diſto, ſervem tambem os complementos com grande vantagem do calculo, para fazer poſitivos os Logarithmos das fracções. Para acharmos v. gr. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que repreſenta o numero 3 dividido por 4 (n. 96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a ſoma 9,875061 ſerá o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle ſe involve hum complemento, e conſeguintemente ſe deveria lançar fóra huma dezena da characteriſtica, ſe houveſſe. Mas eſta ſe ſubentende ſempre, e ſe lança fóra no fim das operações, em que entra o dito Logarithmo, ſe póde ſer.

§ Os Logarithmos deſta fórma realmente naõ differem dos que ſe exprimem por huma characteriſtica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual ſe ſubentende huma dezena ſubtractiva da characteriſtica, tem com effeito por characteriſtica $9-10$, e conſeguintemente vem a ſer o meſmo que $\bar{1},875061$. Se o meſmo Log. involveſſe dous complementos, teria realmente a characteriſtica $9-20$, e valeria o meſmo que $\overline{11},875061$.

Deve reparar-ſe, que os Logarithmos ſe ſervem mutuamente de complementos. Aſſim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do meſmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Eſtes Logarithmos, que ſaõ mutuamenmente complementos, correſpondem a numeros entre ſi *reciprocos*, os quais ſaõ todos aquelles que ſendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c. E por iſſo, como he o meſmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de ſubtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e aſſim nos outros caſos.

254 O meſmo ſe entenderá dos Log. das fracções decimais. Se quizermos v. g. o Log. de 0,575, que repreſenta o meſmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a ſoma 9,759668 ſerá o Log. que buſcamos. De outra ſorte: Buſque-ſe o Log. da fracçaõ decimal, como ſe foſſe numero inteiro, e em lugar da characteriſtica ſe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas ſaõ as caſas deſde o lugar das unidades até a primeira letra da fracçaõ. Aſſim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,00000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,000000000005621 o Log. 9,749812; ſubentendendo-ſe no primeiro e ſegundo hum ſó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos ſe houver de tornar aos numeros, ſe no reſultado de quaiſquer operações naõ ſe puderem lançar fóra da characteriſtica tantas dezenas, quantos forem os complementos que nellas entraraõ, he manifeſto, que elle deve moſtrar huma fracçaõ. Para determinar-

mos

mos esta, lançaremos da characteristica todas as dezenas que tiver, e considerando o resto como Log. de hum numero inteiro, buscaremos este nas Taboas (n. 242, e seg.), e nelle notaremos tantas dezenas de casas decimais da direita para a esquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. restaraõ.

Resultando v. gr. o Log. 8,732235 de varias operações em que tivesse entrado hum complemento, conheceremos que elle pertence a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fora da characteristica huma dezena que nella ha de mais. Assim buscando o numero inteiro que corresponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500, e fazendo nelle 10 casas de dizima, será a fracçaõ 0,0539802500.

Como porem raras vezes he necessario levar as fracções a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-se-ha a characteristica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que bastarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a sua primeira letra tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Log. proposto tiver de menos que 10, 20 &c. conforme o Log. contiver hum, dous &c. complementos.

Deste modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteristica 3, corresponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteristica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá estar na segunda casa depois da virgula, e será a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involvesse dous complementos, seria a fracçaõ correspondente 0,000000000005398.

256

256 Deve notar-se, que quando se multiplicaõ estes Logarithmos, como succede na formaçaõ das potencias das fracções, juntamente se multiplicaõ os complementos que nelles se contem. Por isso, lançando fóra as dezenas que tiver a characteristica do producto, se terá conta dos complementos que nella ficaõ, para se determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-se o Log. 7,924753 que sabemos involver hum complemento, e querendo-se elevar á quinta potencia a fracçaõ correspondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conseguintemente corresponderá á fracçaõ 0,0000000004205.

257 Pelo contrario, quando os mesmos Logarithmos se houverem de dividir, como succede na extracçaõ das raizes, deve procurar-se que ajuntando as dezenas necessarias á characteristica se ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no expoente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a divisaõ, o quociente conservará hum, dous, tres &c. complementos.

Por exemplo, se o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correspondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteristica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum só complemento, e mostrará a raiz que buscamos 0,7961. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a

raiz

raiz quadrada, dividi-lo-hemos por 2 (porque naõ he neceſſario ajuntar dezena alguma á characteriſtica neſte caſo) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,000000000857. Se da fracçaõ correſpondente ao Log. 9,887745, no qual ſe contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteriſtica e teremos 39,887745 com 8 complementos; entaõ dividindo por 4, o quociente 9,971936 conſervará dous complementos, e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,0000000009374; e aſſim dos mais.

O uſo dos Complementos ſerve de abbreviar vantajoſamente as operações Trignometricas; e por iſſo he de grande utilidade na Aſtronomia, e em todas as partes da Mathematica, onde ſe houver de praticar a reſoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

INraiz quadrada, dividi-lo-hemos por 2 (porque naõ he necessario ajuntar dezena alguma á characteristica neste caso), e o quociente 0,957771 involverá hum complemento, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,0000000085. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 9,8897451, no qual se consideraõ 8 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteristica e teremos 39,8897451 com 8 complementos: entaõ dividindo por 4, o quociente 9,9724363 conservará dous complementos, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,0000000000974, e assim dos mais.

O uso dos Complementos serve de abreviar muito as operações Trigonometricas, e por isso he de grande utilidade na Astronomia, e em todas as partes da Mathematica, onde se houver de praticar a resoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

citas

serva-se a mesma regra, sem attender á virgula dos factores, e no producto separaõ-se tantas letras de Dizima para a direita, quantas saõ as que tem os factores ambos juntos; para o que se meteráõ (quando for necessario) huma ou mais cifras, entre a virgula, e a primeira letra significativa do producto, n. 54.

Dividir he buscar quantas vezes hum numero contém outro numero dado, n. 59.

O numero que se divide, chama-se *partiçaõ*, ou *dividendo*; o outro, pelo qual se divide, *partidor*, ou *divisor*; e o resultado, *quociente*, n. 59.

A Divisaõ he equivalente a huma diminuiçaõ reiterada; e o quociente mostra, quantas vezes o divisor se póde tirar do dividendo, n. 59.

O dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente, n. 59.

A especie das unidades do quociente naõ póde determinar-se, senaõ pela natureza da questaõ, que der lugar á divisaõ, n. 59.

Para dividir hum numero composto por hum numero simples, procede-se por partes da esquerda para a direita, examinando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente, n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se torna a dividir do mesmo modo, e assim por diante, n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he signal que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he signal que a letra do quociente se assentou menor do que convinha, n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver, n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros, procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais, n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante, n. 68.

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores

deve

Para

Para multiplicar quebrados he necessario multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, n. 106.

A multiplicaçaõ de quebrado por inteiro, ou de inteiro por quebrado, reduz-se a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado, n. 107.

Os numeros mixtos de inteiro, e quebrado, reduzem-se a quebrados simples, e entraõ na regra geral, n. 108.

Para dividir hum quebrado por outro invertem-se os termos do divisor, e pratica-se a regra da multiplicaçaõ, n. 109.

A divisaõ de hum quebrado por hum inteiro reduz-se a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado; e na divisaõ de hum inteiro por hum quebrado pratica-se o mesmo, e depois invertem-se os termos, n. 110.

Os numeros mixtos reduzem-se a quebrados simples, e pratica-se a regra geral, n. 111.

Quebrado de quebrado he o que exprime as partes de outro quebrado, considerado como hum todo, e dividido em hum numero determinado de partes iguais, n. 114.

Hum quebrado de quebrado he igual ao producto de todos os quebrados que entraõ na sua expressaõ, reportando-se entaõ esse producto á unidade principal, n. 114.

Para somar numeros complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; se a soma dellas contém huma, ou mais unidades da especie seguinte, escreve-se sómente o resto, e essas levaõ-se para a columna seguinte; e assim por diante, n. 117.

Para diminuir complexos principia-se pelas unidades da infima especie: e quando naõ póde fazer-se a subtracçaõ, toma-se huma unidade da especie immediata, que se converte em unidades da especie actual, e se ajunta com as outras, e da soma se faz a diminuiçaõ, guardando-se huma analogia perfeita com a regra ordinaria, n. 118.

A multiplicaçaõ, e divisaõ de complexos, póde fazer-se pelas regras dos quebrados ordinarios; reduzindo as especies inferiores a huma fracçaõ da principal, antes de fazer as ditas operações, n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente, n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios, n. 121, 122, 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante, n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se-ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois

quadrado das unidades, *e o cubo das unidades*, n. 154.

Para extrahir a raiz cubica de hum numero, divide-se em classes de tres letras começando da direita para a esquerda: da ultima classe á esquerda (a qual póde ser de duas, e de huma letra) tira-se a raiz, e esta será a primeira letra da raiz procurada; o cubo desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto se ajunta a classe seguinte, que formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o triplo do quadrado da raiz achada, o qual se assentará da terceira letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, e formando o cubo da raiz total achada, se diminuirá das duas classes respectivas do numero proposto, e ao resto se ajuntará a terceira classe para formar outro dividendo, o qual se partirá do mesmo modo pelo triplo quadrado da raiz total já achada; e assim por diante, n. 155.

Querendo approximar a raiz de hum numero, que naõ he cubo perfeito, ajuntar-lhe-hemos tantas classes de tres cifras, quantas saõ as letras decimais, que queremos na raiz, e praticaremos a regra precedente, n. 156.

Para extrahir a raiz cubica de hum quebrado he necessario tirar as raizes tanto do numerador, como do denominador. Se estes naõ forem cubos perfeitos, reduz-se o quebrado a fracçaõ decimal, procurando que tenha tres vezes mais casas de dizima do que queremos na raiz, e pratica-se a regra precedente, n. 157 e seg.

Razaõ he a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades do mesmo genero, n. 162.

A razaõ he *Arithmetica*, quando se considera a differença de duas quantidades; *Geometrica*, quando se considera quantas vezes huma contém a outra. Quando se diz *Razaõ* simplesmente, sempre se entende a Geometrica, n. 163, 164.

As duas quantidades, que se comparaõ na *Razaõ*, chamaõ-se *termos*: o primeiro delles, *antecedente*; e o segundo, *consequente*, n. 165.

Huma razaõ arithmetica naõ muda de valor, quando se ajunta, ou se tira a ambos os termos della, huma mesma quantidade, n. 169.

Huma razaõ geometrica naõ muda de valor, quando ambos os termos se multiplicaõ, ou dividem por hum mesmo numero, n. 170.

Proporçaõ, ou *Analogia*, he a igualdade de duas razões; e esta he *Arithmetica*, ou *Geometrica*, conforme as razões, n. 172.

Proporçaõ *continua* he, quando os termos medios saõ iguais entre si, n. 174.

Em toda a proporçaõ arithmetica a soma dos meios he igual á dos extremos; e reciprocamente, n. 176.

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a soma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente, n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente, n. 178, 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos será igual

ao

que lhe he proporcional, numer. 197.

A *Regra de falsa posiçaõ* he simples, quando vimos no conhecimento de hum numero por meio de huma hypothese; e composta, quando saõ necessarias duas, n. 199.

Na simples, deve ser: Como o resultado da hypothese para o verdadeiro resultado, que devia sahir, assim a hypothese para o numero que se procura, numer. 199.

Na composta, deve fazer-se: Como a differença dos resultados das duas hypotheses para a differença entre o resultado da primeira, e o verdadeiro, que devia sahir; assim a differença das hypotheses para a differença entre a primeira, e o numero que se busca, n. 199.

A *Regra de Liga* tem por objecto a mistura de quantidades de valor diverso. He directa, quando se daõ as quantidades com o seu valor, e se procura o valor do misto; *inversa*, quando se dá o preço do misto com o dos simples, e se perguntaõ as partes que de cada hum delles se deve a tomar, n. 200.

Na directa, multiplicaõ-se as unidades de cada especie pelo seu valor respectivo; a soma dos productos divide-se pelo numero total das unidades do composto; e o quociente he o valor de cada unidade delle.

Na inversa, sendo duas especies sómente, as partes que dellas se devem tomar saõ na razaõ inversa das differenças entre o valor das ditas especies, e o preço proposto. Sendo mais de duas, todas as de maior valor que o misto proposto se ligaráõ arbitrariamente pela regra directa, e da mesma sorte todas as de menor valor: e reduzido o caso a duas especies, se praticará a regra precedente, n. 200.

A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que tem sempre a mesma differença entre si, n. 204.

Qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica compõe-se do primeiro, e da differença repetida tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes, n. 206.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios proporcionais arithmeticos, diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero dos meios augmentado de huma unidade; o quociente será a razaõ, ou differença da Progressaõ, com a qual se formaráõ os termos pedidos, n. 209.

A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos cada hum dos quais contém, ou he contido no seu antecedente igual numero de vezes, n. 211.

Qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica forma-se do primeiro, multiplicado pela razaõ elevada á potencia, que tem por expoente o numero dos termos precedentes, n. 213.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios geometricos, dividindo o maior pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão correspondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade; esta raiz será a razaõ da Progressaõ, com a qual se formaráõ os meios pedidos, n. 215.

Os

tei-

teiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimaes, e ao resto se póe o final —.

Para achar o numoro correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor, n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula para a direita tantas casas, quantas foraõ as unidades que se tiráraõ, ou para a esquerda, quantas foraõ as que se ajuntáraõ á characteristica, n. 243, 245.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo negativo, tira-se este de tantas unidades, quantas bastarem para que a characteristica do resto pertença á classe suprema das Taboas; e no numero correspondente se tomaráõ tantas casas decimais, quantas foraõ as unidades das quais se diminuio o Logarithmo, n. 246.

Complemento Arithmetico de hum numero he a differença entre elle, e a unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as casas do mesmo numero, n. 250.

Toma-se o complemento de hum numero, escrevendo da esquerda para a direita o que falta a cada huma das letras para 9, e na ultima o que lhe falta para 10, n. 249.

Por meio dos complementos se mudaõ as subtracções em addições, substituindo em lugar dos Logarithmos subtractivos os seus complementos, e deixando na soma de escrever tantas dezenas na characteristica, quantos forem os complementos, n. 252.

Ao Logarithmo de hum quebrado dá-se fórma positiva, ajuntando ao Logarithmo do numerador o complemento do Logarithmo do denominador; mas neste Logarithmo se entenderá que fica huma dezena de mais na characteristica, a qual se tirará no fim das operações em que elle entrar, podendo ser, n. 253.

Para dar fórma positiva ao Logarithmo de huma fracçaõ decimal, busca-se como se fosse numero inteiro, e dá-se-lhe huma characteristica que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas saõ as casas desde a virgula até a primeira letra significativa da fracçaõ, n. 254.

Para achar a fracçaõ decimal correspondente a hum Logarithmo, que sabemos involver complemento, dá-se-lhe a characteristica maior das Taboas, e a primeira letra do numero correspondente se escreve tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Logarithmo tiver de menos que 10, 20 &c., conforme elle tiver hum,

dous

ARITH.