2^

~~23 — 9 — 2~~

~~23~~
~~9~~
7 =
1

~~9 — 3 — 16~~

4A
16
17
7

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c &c.

Traduzidos do Francez.,

COIMBRA:
NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXIV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

D

ELEMEN-

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

NOÇOES PRELIMINARES

Sobre a natureza dos Numeros [illegible] *differentes eſpecie*[illegible]

I

DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo a quillo que he capaz de aumento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo a *extenſaõ*, *duraçaõ*, *pezo* &c. Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de contar*: Ella conſidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos numeros, he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade*.

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos

que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idéa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compoem qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compoem taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimpleſmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: Aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimpleſmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto*.

Há muitas outras eſpecies de numeros, dos quais daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Eſtes caracteres, que ſaõ as letras da eſcritura numerica, chamaõ-ſe *algariſmos*. Naõ he neceſſario dizer aqui os nomes dos numeros, por ſer conhecimento familiar a toda a ſorte de peſſoas. Quanto ao modo de os repreſentar por algariſmos, naõ podemos deixar de

ex-

explicar com toda a exactidaõ os ſeus principios.

8 Os caracteres, de que uſamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles repreſentaõ, ſaõ eſtes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*ſinco*	*ſeis*	*ſete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com eſtes meſmos caracteres, ſe aſſentou: Que de dés unidades ſe fizeſſe huma ſó, a qual ſe chamaſſe *dezena*, e que ſe contaſſe por dezenas da meſma ſorte, que ſe conta por unidades, iſto he, que ſe contaſſem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; E que para repreſentar eſtas novas unidades ſe uſaſſe dos meſmos algariſmos com que ſe repreſentaõ as unidades primitivas, diſtinguindo-as ſómente pelo lugar, que ſe lhes aſſinallou á eſquerda dellas.

Aſſim, para repreſentar *ſincoenta e quatro*, que contém *ſinco* dezenas, e *quatro* unidades, eſcreveremos 54. Para repreſentar *ſeſſenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, eſcreveremos 60; pondo huma cifra na caſa das unidades, para moſtrar que as naõ há neſte numero, e juntamente determinar a letra 6 a ſignificar dezenas. Deſte modo podemos contar até *noventa e nove* incluſivamente.

9 Pelo que, antes de paſſarmos a diante, notemos eſta propriedade da Numeraçaõ actual, a

A 2 ſa-

(*) Na Arithmetica vulgar uſamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual ſe eſcreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes deſta fórma U. O ſeu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e ſerve para ler com mais facilidade os numeros, diſtinguindo-ſe á primeira viſta a caſa dos *milhares*, como em 425U172. Tambem ſerve de abreviatura, quando os tres ultimos algariſmos ſaõ cifras. Aſſim 725U he o meſmo, que 725000.

ſaber : *Que huma letra poſta á eſquerda da outra ou ſeguida de huma cifra , repreſenta hum numero dés vezes maior , do que havia de repreſentar , ſe eſtiveſſe ſó.*

10 Por huma convençaõ ſemelhante contaremos de 99 até *novecentos e noventa e nove.* Porque de dés dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dés vezes dés fazem cem ; e contaremos as centenas deſde *huma* até *nove*, eſcrevendo-as com os meſmos algariſmos, ſómente com a differença de as pôrmos á eſquerda das dezenas.

Aſſim, para exprimir *oito centos e ſincoenta e nove*, que contém *oito* centenas, *ſinco* dezenas, e *nove* unidades, eſcreveremos 859. Se foſſem *oito centos e nove*, que contem *oito* centenas, e *nove* unidades, ſem dezena alguma, ſeria neceſſario eſcrever 809 ; pondo huma cifra na caſa das dezenas, que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras ; de ſorte que para aſſentar *oito centos*, eſcreveremos 800.

11 Peloque notaremos tambem, *Que em virtude da meſma convençaõ, qualquer letra ſeguida de outras duas, ou de duas cifras, moſtra hum numero cem vezes maior, de que moſtraria eſtando ſó.*

12 Com o meſmo artificio contaremos de 999 até *nove mil nove centos e noventa e nove* ; formando de dés centenas huma unidade, que ſe chama *milhar*, porque dés vezes cem fazem mil ; contando eſtas unidades pelo modo, que já diſſemos ; e repreſentando as com as meſmas letras, ſituadas porem á eſquerda das centenas.

Aſſim para aſſentar *ſete mil oito centos e ſincoenta e nove*, eſcreveremos 7859 ; para aſſentar *ſete mil e nove*, eſcreveremos 7009 ; e para aſſentar *ſete mil*, eſcreveremos 7000. Donde ſe vé, *Que huma letra ſendo ſeguida de outras tres, ou de tres* ci-

cifras, moſtra hum numero mil vezes maior, doque moſtraria eſtando ſó.

13 Continuando por diante do meſmo modo; fazendo ſempre de dés unidades de qualquer ordem huma ſó unidade, e eſcrevendo as novas unidades, que ſe vaõ formando, nas caſas conſecutivas, caminhando ſempre para a eſquerda; chegamos a exprimir, e aſſentar de hum modo uniforme, com os dés algariſmos propoſtos, todos os numeros inteiros, que ſe pódem imaginar.

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conſte de quantos algariſmos quizermos, dividillo hemos em claſſes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte eſquerda, que conforme a quantidade das letras de que o numero conſtar, poderá ſer tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais claſſes impares, principiando da direita para a eſquerda, daremos por ſua ordem os nomes ſeguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *ſextillioens* &c; e á ſegunda, quarta, e todas as mais claſſes pares, o nome de *milhares*. Feito iſto, advertiremos que a primeira letra de cada claſſe (principiando ſempre da parte direita) moſtra as unidades proprias da ſua claſſe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a ſegunda moſtra as dezenas, e a terceira as centenas das meſmas unidades reſpectivas.

Entaõ, principiando da parte eſquerda, leremos cada huma das claſſes, como ſe eſtiveſſe ſó, applicando-lhe no fim a denominaçaõ reſpectiva das ſuas unidades. Aſſim, por exemplo, para declararmos o valor do numero ſeguinte,

23'	456'	789'	234'	565'	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades*

Di-

Diremos: vinte e tres *mil*, quatroçentos e ſincoenta e ſeis *billioens*; ſetecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos etrinta e quatro *milhoens*; quinhentas e ſeſſenta e ſinco *mil*, quatrocentas e ſincoenta e ſeis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, ſe ſegue manifeſtamente; Que á medida que ſe vaõ ſeguindo os algariſmos de hum numero da direita para a eſquerda, repreſentaõ unidades conſecutivamente maiores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes maior que a precedente; e por conſeguinte, Que para fazer hum numero dés, cem, mil vezes maior &c. baſta pôr depois do algariſmo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela raſaõ contraria, quando em hum numero ſe caminha da eſquerda para a direita, os algariſmos conſecutivos moſtraõ unidades cada vez menores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: Ella ſerve de baſe a todos os outros modos de contar, aindaque em muitas artes naõ ſe guarde ſempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para aſſentar o valor das quantidades mais pequenas doque a unidade, que ſe tem eſcolhido, divide-ſe eſta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas ſe poſſaõ medir as quantidades, que queremos moſtrar. Porém o que mais ſe deve pro-

(*) Nas Contas pecuniarias uſamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhões*, ou de hum *billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis*, mas *hum conto de reis*, ou ſimplesmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos ſenaõ por *milhoes*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

procurar neſta ſorte de diviſoẽs, he que ſe façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior, que he poſſivel. Por eſta raſaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que ſejaõ ſufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, ſe divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quais ſe divide em outras, e eſtas em outras &c. E eſta he a raſaõ, porque nas moedas ſe divide a *libra* em 20 partes, que ſe chamaõ *ſoldos*; e o *ſoldo* em 12 partes, que ſe chamaõ *dinheiros*. Do meſmo modo nos pezos, divide-ſe a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*, de ſorte, que no primeiro caſo ſe faz a diviſaõ por *vintenas*, e por *duzias*; e no ſegundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero compoſto de partes, que ſe reportaõ do modo ſobredito a differente eſpecie de unidades, chama-ſe *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-ſe *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma ſó eſpecie de unidades. Aſſim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} 17^{s} 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o ſeu modo particular de dividir a unidade principal, de que ſe ſerve. As diviſoẽs da *toeſa* naõ ſaõ as meſmas que as da *libra*; as da *libra* ſaõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e eſtas differem tambem das do *marco*, e aſſim as mais. De todas ellas moſtraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Porém de todas as diviſoẽs, e ſubdiviſoẽs, que ſe pódem fazer da unidade, a que mais contribue ſem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *diviſaõ decimal*, na qual ſe ſuppoem a unidade dividida em dés partes, cada huma deſtas em outras dés, e aſſim por diante. Della

ſe

ſe faz hum uſo continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a vantagem de que a ſua numeraçaõ, e o ſeu calculo he do meſmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora ſe verá.

21 Para aſſentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-ſe a meſma unidade, qualquer que ella ſeja, v. gr. *libra*, *toeſa* &c. compoſta de dés partes iguais, aſſim como ſe imagina a *dezena* compoſta de dés *unidades*, ou a *libra* compoſta de vinte *ſoldos*. A estas novas unidades, em contrapoſiçaõ das *dezenas*, damos o nome de *decimas*; repreſentamo-las com os meſmos algariſmos; e porque ſaõ dés vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direita dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-ſe as *decimas* por unidades ſimples, aſſentou-ſe ao meſmo tempo fixar por huma vez a caſa das unidades principais, a que o numero todo ſe reporta, por meio de hum ſinal particular. Para iſſo ſe uſa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma riſca), a qual ſe poem ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ſer o meſmo. Aſſim, para aſſentarmos *vinte e quatro unidades* e *tres decimas* partes da unidade, eſcreveremos deſte modo 24,3.

22 Da meſma ſorte podemos actualmente conſiderar as *decimas*, como unidades formadas de outras dés, cada huma dés vezes mais pequena do que ellas; e pela meſma raſaõ de analogia, as aſſentaremos á direita das meſmas *decimas*. Eſtas novas unidades dés vezes mais pequenas que as decimas, vem a ſer cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por iſſo ſe chamaõ *centeſimas*. Aſſim, para notar *vinte e quatro unidades*, *tres decimas*, *e ſinco centeſimas*, eſcreveremos deſte modo 24,35.

23 Igual-

23 Igualmente podemos conceber as *centesimas*, como formadas de dés partes. Estas seraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por conseguinte se chamaráõ *millesimas*; e por serem dés vezes mais pequenas que as *centesimas*, se assentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do mesmo modo na rasaõ decupla, formaremos novas unidades consecutivas, ás quais daremos os nomes de *decimas-millesimas*, *centesimas-millesimas*, *millionesimas*, *decimas-millionesimas*, *centesimas-millionesimas*, *bimillionesimas* &c. e as assentaremos por sua ordem nas casas seguintes, caminhando sempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar saõ as *fracçoẽs decimais*, a que os nossos Authores daõ commumente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algarismos pertencentes á *Dizima*, he como nos outros numeros. Depois de se haverem lido as letras que estaõ á esquerda da virgula, lem-se as letras decimais da mesma sorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades respectivas, que competem á sua ultima casa. Assim, para declarar o valor deste numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e setenta e duas *millesimas*: Se, por exemplo, se tratasse de *toesas*, diriamos, trinta e quatro *toesas*, e quinhentas e setenta e duas *millesimas partes* de huma *toesa*.

A rasaõ disto he facil de perceber, em se advertindo que no numero 34,572 a letra 5 se póde tomar indifferentemente por sinco *decimas*, ou por quinhentas *millesimas*; porque valendo a *decima* 10 *centesimas* (n.22.), e a *centesima* 10 *millesimas* (n. 23.), cada *decima* valerá dés vezes dés *millesimas*, ou 100 *millesimas*; e assim as 5 *decimas* valeráõ 500 *millesimas*. Pela mesma rasaõ, a letra 7 mostrará 70 *millesimas*, porque cada *centesima* vale 10 *millesimas* (n. 23.)

26 Quan-

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõ ſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0, 125. Se quizeſſemos moſtrar 25.*milleſimas*, eſcreveriamos 0,025, aſſentando huma çifra na caſa das *decimas*, naõ ſómente para moſtrar que as naõ há no dito numero, mas tambem para ficarem os algariſmos ſeguintes no ſeu devido lugar. Pela meſma raſaõ, querendo declarar 6 *decimas-milleſimas*, eſcreveremos 0,0006 &c.

28 Suppoſta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que reſultaõ no valor de hum numero, quando a virgula ſe muda do ſeu lugar.

Como a virgula ſerve para marcar a caſa das unidades, e como o valor de cada hum dos algariſmos depende da ſua diſtancia local, e reſpectiva á meſma caſa das unidades, fica evidente, que mudando-ſe a virgula huma, duas, tres caſas &c. para a eſquerda, o numero ſe fará dés, cem, mil vezes &c. mais pequeno; e ao contrario dés, cem, mil vezes &c. maior, ſe a virgula ſe adiantar huma, duas, tres caſas &c. para a direita.

E com effeito, ſe tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a caſa ſeguinte á eſquerda, de ſorte que fique 432,75264; he manifeſto, que os *milhares* do primeiro numero, paſſaõ no ſegundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as

deze-

dezenas para *unidades*, as *unidades* para *decimas*, as *decimas* para *centesimas*, e assim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conseguinte todo elle, se tornou dés vezes menor, em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, se mudassemos a virgula huma casa para a direita, e escrevessemos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero se converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centesimas* em *decimas*, e assim por diante; mudança, de que manifestamente resulta hum numero dés vezes maior que o primeiro.

29 Discorrendo do mesmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres casas para a esquerda, resulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, se a virgula se mudar duas, ou tres casas para a direita.

30 A ultima observaçaõ que faremos sobre a *Dizima*, he que naõ se altéra o valor de hum numero, assentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Assim 43,25 he o mesmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000. &c.

Porque valendo cada *centesima* o mesmo que 10 *millesimas*, ou 100 *decimas-millesimas* &c., as 25 *centesimas* valeraõ 250 *millesimas*, ou 2500 *dcimas-millesimas* &c. Em huma palavra: He o mesmo, como se em lugar de 25 moedas de desaseis tostoẽs (25 *pistoles*) dissessemos 250 *libras de França*; ou em lugar de 25 *quintais*, dissessemos 2500 *arrateis*. (*)

Das

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* cōmum tem 128 arrateis, e o *quintal* da casa da India 112.

Das Operaçoẽs da Arithmetica.

31 S*Omar*, *Diminuir*, *Multiplicar*, *e Repartir*, ſaõ as quatro operaçoẽs fundamentais da Arithmetica, a que os noſſos Eſcritores daõ o nome de *Eſpecies.* Todas as queſtoẽs, que ſe pódem propôr ſobre os numeros, ſe reduzem finalmente a praticar alguma deſtas Eſpecies, ou todas ellas. E por iſſo convem muito adquirir o habito de as executar com prontidaõ, e facilidade, procurando alcançar a raſaõ em que ellas ſe fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já diſſemos, he enſinar os meios de calcular facilmente os numeros. Eſtes meios conſiſtem em reduzir o calculo dos numeros compoſtos ao dos numeros ſimples, que ſe exprimem pelo menor numero de letras que he poſſivel, fazendo por partes todas as operaçoẽs, como logo moſtraremos.

DA ESPECIE DE SOMAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 S*Omar* naõ he outra couſa mais, do que moſtrar o valor total de muitos numeros por meio de hum ſó, que ſeja igual a todos juntos. Eſte numero, que ſe buſca por meio da operaçaõ chama-ſe *Soma*; e os numeros que ſe ajuntaõ, (os quais devem ſignificar todos a meſma eſpecie de unidades) chamaõ-ſe *Addiçoẽs*, ou *Parcellas.*

Quando os numeros, que ſe haõ de ſomar, ſaõ *digitos*, iſto he, quando naõ ſe eſcrevem com mais doque huma letra, naõ há neceſſidade de regra alguma para achar a ſua ſoma. Quando porém forem

rem numeros compoſtos, iſto he, quando ſe eſcrevem com muitas letras, uſarembs da regra ſeguinte.

Eſcreveremos as *addiçoẽs* humas debaixo das outras, de ſorte que fiquem unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas &c., e por baixo de todas paſſaremos huma riſca, que as ſepare e diſtinga da ſoma.

Entaõ ſomaremos primeiramente todos os algariſmos, que eſtaõ na colunna das unidades; ſe a ſoma naõ paſſar de 9, eſcrevella-hemos por baixo; ſe paſſar de 9, como entaõ comprehende dezenas, ſó poremos por baixo o que excede do numero das dezenas, e contaremos eſtas dezenas por outras tantas unidades, e ſomallas-hemos juntamente com os algariſmos da colunna ſeguinte. Nella obſervaremos a meſma regra, como na primeira; e aſſim por diante de colunna em colunna, até chegar á ultima, debaixo da qual eſcreveremos a ſua ſoma inteira, ou conſte de hum, ou de mais algariſmos. Eſta regra ſe entenderá melhor por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE nos derem para ſomar eſtas duas addiçoens 54925 ... e 2023, eſcrevellas-hemos do modo que aqui ſe vè:

54925	
2023	
56948	Soma

E tendo paſſado huma riſca por baixo dellas; começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e eſcreveremos 8 debaixo deſta meſma colunna. Paſſando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e eſcreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e 0 fazem 9, e eſcreveremos 9 por bai-

baixo. Nos milhares diremos: 4 e 2 ſaõ 6, e eſcreveremos 6 por baixo da riſca. E na columna ſeguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e eſcreveremos 5 na meſma columna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a ſoma dos dous numeros propoſtos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na meſma operaçaõ.

Exemplo II.

SE nos perguntarem a ſoma dos quatro numeros ſeguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 . . . 7327, aſſentallos hemos do modo que aqui ſe moſtra.

$$\begin{array}{rl} 6903 & \\ 7854 & \\ 953 & \\ 7327 & \\ \hline 23037 & \text{Soma} \end{array}$$

E começando, como no exemplo precedente, pela columna das unidades, diremos: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17; e como neſta ſoma parcial a letra 7 pertence á caſa das unidades onde eſtamos, e a letra 1 á caſa das dezenas, eſcreveremos 7 debaixo da riſca na columna das unidades, e guardaremos 1 para o ſomar com os algariſmos da columna ſeguinte, que he das dezenas.

Paſſando a ella, diremos: 1, que vem da columna precedente, e 5 (porque naõ he neceſſario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela meſma raſaõ eſcreveremos 3 debaixo deſta columna, e levaremos 1 para a ſeguinte, dizendo: 1 e 9 ſaõ 10, e 8, ſaõ 18, e 9 ſaõ 27, e 3

ſaõ

ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta columna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da columna que temos ſomado; e porque naõ há mais columna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda; e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addiçoẽs propoſtas 23037.

34 Se as addiçoẽs forem acompanhadas de *Dizima*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma, tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma columna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto a baixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 . . . 12,8 . . . 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

$$\begin{array}{r} 72,957 \\ 12,8 \\ 124,03 \\ \hline 209,787 \end{array} \quad \text{Soma}$$

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

DA

DA ESPECIE DE DIMINUIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais

25 *DIminuir*, he huma operaçaõ, pela qual ſe tira hum numero de outro numero. O que della reſulta chama-ſe *reſto*, *exceſſo*, ou *differença*.

Para fazer eſta operaçaõ, aſſentaremos o numero que queremos tirar por baixo do outro (que ſempre deve ſer o maior) do meſmo modo que aſſentamos as addiçoẽs na regra de ſomar. E paſſando huma riſca por baixo delles, iremos tirando da direita para a eſquerda cada numero inferior do ſuperior, que lhe ficar correſpondente, a ſaber, as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, &c. e eſcreveremos cada reſto debaixo da riſca pela meſma ordem, pondo cifra todas as vezes que naõ reſtar nada.

Quando o algariſmo debaixo ſe achar maior que o de ſima, eſte ſe aumentará com dés unidades, tomando para iſſo mentalmente empreſtada huma das unidades do algariſmo vezinho da parte eſquerda, o qual por eſta raſaõ ſe deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ ſeguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954, aſſentaremos ambos os numeros deſta maneira.

$$\begin{array}{rl} 8954 & \\ 5432 & \\ \hline 3522 & \text{Reſto.} \end{array}$$

E principiando pela casa das unidades, diremos: quem de 4 tira 2, ficaõ 2, que assentaremos debaixo da risca na mesma casa das unidades. Depois passando ás dezenas, diremos: quem de 5 tira 3, ficaõ 2, que assentaremos debaixo dellas. Na terceira colunna: quem de 9 tira 4, ficaõ 5, que poremos em direitura della. E na quarta finalmente: quem de 8 tira 5, ficaõ 3, que escreveremos debaixo do 5; e feita a conta, achámos que tirando 5432 de 8954 fica o resto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646, assentaremos os numeros desta maneira - - 27646

7989

1965 9 Resto.

E como de 6 naõ se pódem tirar 7, ajuntaremos a 6 dés unidades, que se formaráõ de huma unidade tirada na casa seguinte ao algarismo 4, e diremos: tirando 7 de 16, ficaõ 9, que escreveremos debaixo do 7. Passando ás dezenas, naõ diremos, tirando 8 de 4; mas tirando 8 de 3 sómente, porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente; e porque tambem de 3 naõ se pódem tirar 8, ajuntaremos da mesma sorte a 3 dés unidades, tomando para isso 1 á letra 6 da esquerda, e diremos: tirando 8 de 13, ficaõ 5, que assentaremos debaixo do 8. Passando á terceira colunna, diremos do mesmo modo: tirando 9 de 5 naõ póde ser; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algarismo 7, como nas operaçoens precedentes) ficaõ 6, que escreveremos debaixo do 9. Na quarta colunna: tirando 7 de 6, naõ póde ſer, mas tirando 7 de 16, ficaõ 9, que poremos debaixo do 7. E como naõ há nada, que tirar na quinta colunna, eſcreveremos debaixo della, naõ 2, porque delle já tiramos 1 para a operaçaõ precedente, mas ſómente 1, que lhe ficou; e aſſim o reſto total ſerá 19659.

36 Eſtando cifra na caſa, donde havemos de tomar a unidade de empreſtimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algariſmo ſignificativo, que depois della ſe ſeguir. Neſte caſo, aindaque realmente ſe pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c, conforme houver huma, duas, ou tres cifras conſecutivas &c: cómtudo obraremos ſempre, como no exemplo precedente, ajuntando ſómente 10, ou 1 da caſa vezinha, ao algariſmo neceſſitado. E porque eſtes 10 ſaõ huma parte dos 100, ou 1000 &c, tomados do primeiro algariſmo ſignificativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c que reſtaõ, tomaremos as cifras ſeguintes, como ſe cada huma foſſe hum nove. Iſto ſe entenderá melhor por meio do exemplo ſeguinte.

Exemplo III.

	99	
SE de - - - - - - - - -	20064	
quizermos tirar - -	17489	
	2575	Reſto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1) naõ ſe pódem tirar 8, e como naõ podemos tomar 1 da letra ſeguinte que he o, tomallo-hemos do 2, e valerá 1000 a reſpeito da caſa, onde fazemos a operaçaõ. Deſtes 1000 naõ tomaremos ſe-

naõ

naõ 10 para ajuntar-mos a 5, e diremos, de 15 tirando 8, ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos só temos usado de 10, ou de 100 só temos usado de 1, usaremos do resto 99, para delle tirarmos os dous algarismos seguintes, que vem a ser o mesmo que tomar cada huma das cifras, como se fosse hum 9. Assim diremos: quem de 9 tira 4, ficaõ 5; quem de 9 tira 7, ficaõ 2; e finalmente, quem de 1 tira 1, fica 0, que naõ he necessario assentar-se, por ser no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros, seguiremos absolutamente a mesma regra. Porém, para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della, faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais, ajuntando as cifras que *forem* necessarias ao que menos tiver; preparaçaõ, que lhe naõ altera o valor (n. 30.)

Exemplo IV.

DE - - - - - - - - - - - - - - - - - 5403, 25
Querendo tirar - - - - - - - - 385, 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero superior. Depois obraremos sobre os numeros assim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403, 2500	
385, 6532	
5017, 5968	Resto

E feita a operaçaõ, acharemos o resto 5017, 5968.

PROVA
Do Somar, e Diminuir.

38 *A Prova* de huma operaçaõ Arithmetica he huma nova operaçaõ, pela qual nos certificamos do reſultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar*, ſomar-ſe-haõ de novo todas as colunnas, mudada porém a ordem, isto he, começando da eſquerda para a direita. O que ſomar a primeira colunna diminuir-ſe-há do membro que lhe correſponde na Soma total, e ſe aſſentará o reſto por baixo, ſe o houver: eſte como em lugar de dezena ſe tomará com a letra ſeguinte da meſma ſoma para fazer hum novo membro, do qual ſe há de diminuir o que ſomar a ſegunda colunna; e aſſim por diante até a ultima, onde feita a diminuiçaõ, naõ deve ficar reſto algum.

Aſſim, tendo achado aſſima que eſtes quatro

numeros - - - - - - - - - - - - - -	6903
	7854
	953
	7327
Somaõ - - - - - - - -	23037
	03110
	000

Para verificar eſte reſultado, ſomaremos os meſmos numeros, principiando pela eſquerda, deſte modo: 6 e 7 ſaõ 13, e 7 ſaõ 20, os quais tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na ſoma ſe ſegue, fazem 30. Na ſegunda colunna: 9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira colunna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados

rados de 13, fica 1, que com a letra seguinte 7 faz 17. E na ultima colunna: 3 e 4 saõ 7, e 3 saõ 10, e 7 saõ 17, e tirados de 17, naõ fiça nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A rasaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem sido bem feita todas as vezes que depois desta prova naõ resta nada, he porque tendo tirado successivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella deve constar, he necessario, que naõ reste cousa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, soma-se o resto achado por meio da operaçaõ com o numero que se diminuio; e se a operaçaõ foi bem feita, ha de vir na soma o mesmo numero, do qual se fez a diminuiçaõ. Assim vemos, que no terceiro exemplo assima posto, a operaçaõ foi exacta; porque somando 17489 (que he o numero que se diminuio) com o resto 2565, se acha reproduzido na soma o numero 20054, do qual aquelle se diminuio.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

§§ A prova vulgar de ambas as operaçoẽs precedentes costuma fazer-se pela regra dos *noves fóra*, a qual tem o partido de ser muito expedita na practica.

Tiraõ-se os *noves* de qualquer numero com summa facilidade, somando os seus algarismos successivamente; e chegando a soma a 9, lança-se fóra, passando de nove, somaõ-se tambem mentalmente as suas letras, e com o que fica se continûa por diante. Deste modo, para tirar os *noves* do numero

86097546 diremos, 8 e 6, 14, nove fóra, 5; e 7 (porque naõ he neceſſario fallar com a o, nem com o 9) ſaõ 12, nove fóra 3; e 5 ſaõ 8, e 4 ſaõ 12, nove fóra, 3; e 6 ſaõ 9, nove fóra, o.

A raſaõ diſto ſerá facil de entender a quem reflectir ſobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes 6*, iſto he, *novecentas e noventa e nove vezes*, e mais *huma vez 6*; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 ſaõ *noves* juſtos; logo ſendo lançados fóra, fica *huma vez 6*. Do meſmo modo a letra 7 moſtra *cem vezes 7*, iſto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez 7*; e por conſeguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes 7*, fica *huma vez 7*. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez 4*, lançando fóra *nove vezes 4*, fica *huma vez 4*. Logo ſomando-ſe todas as letras, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, a ſoma 22 ſerá o reſto que fica depois de lançados fóra os *noves* que ſe contem nas dezenas, centenas, e milhares do numero propoſto. E porque eſte reſto ainda comprehende *noves*, pela meſma raſaõ ſe ſomaráõ as ſuas letras, e ſerá 4 o reſto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Iſto ſuppoſto: para prova da conta de *Somar*, tiraõ-ſe os *noves* a todas as addiçoens conſecutivamente, como ſe ellas formaſſem hum ſó numero, e aſſenta-ſe o reſto á margem dellas; e o meſmo ſe faz na ſoma. Se o reſto naõ for o meſmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta eſtá errada (ſuppondo ſempre que o erro naõ eſteja na operaçaõ da meſma prova); pois naõ he poſſivel, que a ſoma ſeja igual ás addiçoẽs, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ reſtos deſiguais. Porém ſe ficarem de ambas as partes reſtos iguais, naõ he prova infallivel de que a conta eſtá certa, mas muito provavel: convem a ſaber, eſtará certa a conta, ſalvo ſe a ſoma tiver de erro *nove*; ou algum dos multiplos de *nove*; e a raſaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, ſem haver reſpeito ſe lançamos igual numero delles de ambas as partes; e por iſſo naõ he inteiramente ſegura eſta prova. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ ſuccede quaſi nunca na practica, ſe naõ ſe errar de propoſito deſſa maneira, por eſſa raſaõ ſe dá a conta por certa, quando na prova ſe achaõ reſtos iguais. Aſſim no exemplo aſſima, tirando os *noves* das addiçoẽs 6903 - - 7854 - - 953 . . 7327, fica de reſto 6; e como ſe acha o meſmo na ſoma 23037, julga-ſe com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta eſtá bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo aſſima dado, o qual ſe chama *prova real*, tem certeza abſoluta, e infallivel; pois he poſſivel, e ainda factivel, que ao tirar da prova ſe commetta na ſoma de huma colunna hum erro igual e ſemilhante ao que ſe commetteu na primeira operaçaõ; e neſſe caſo ſahirá na prova a conta certa, eſtando errada.

Na conta de *Diminuir*, tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E conforme ficarem de ambas as partes reſtos iguais, ou deſiguais, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo aſſima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2: e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa. ʃʃ

DA ESPECIE DE MULTIPLICAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

40 MUltiplicar hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas saõ as unidades do segundo. Assim por exemplo, multiplicar 4 por 3, naõ he outra cousa, senaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero, que se ha de multiplicar, chama-se *multiplicando*; o numero, pelo qual se há de multiplicar, chama-se *multiplicador*; e o numero que resulta da operaçaõ, chama-se *producto*. Os nossos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ*. Mas hoje usamos deste termo para significar a mesma operaçaõ do multiplicar.

42 O termo *producto* tem commumente hum sentido muito mais amplo, e geral. Porém neste tratado sómente usaremos delle para significar o resultado da multiplicaçaõ.

O multiplicador, e o multiplicando chamaõ-se tambem *factores* do producto. Assim 3 e 4 saõ factores de 12, porque 3 vezes 4 saõ 12.

43 Pela idéa que temos dado da multiplicaçaõ se vê, que ella se póde absolutamente fazer escrevendo o multiplicando tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador, e somando ao depois. Assim, por exemplo, para multiplicar 7 por 3 podiamos escrever deste modo:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E a ſoma 21, que reſulta das tres addiçoẽs, ſeria o producto.

Como porém eſte modo de multiplicar ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ enſina o methodo de chegar ao meſmo reſultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros ſe conſideraõ *abſtractamente*, ſem attender ás unidades que elles repreſentaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto ſempre ſerá 12. E com effeito 3 vezes 4 moſtra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O meſmo raciocinio ſe póde applicar a quaiſquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he precizo diſtinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Eſta diſtinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a meſma queſtaõ moſtra ſempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira ſerá o *multiplicando*, a ſegunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador ſerve de marcar as vezes que ſe ha de repetir o multiplicando, ſerá ſempre hum numero *abſtracto*. Perguntando-ſe v.gr. quanto haõ de cuſtar 52 *toeſas* de obra de carpinteiro, á taſaõ de 36 *libras* a *toeſa*: facilmente ſe vê, que o *multiplicando* he 36 *libras* que ſe haõ de tomar 52 *vezes*: preſcindindo de que o numero 52 ſignifique *toeſas* na queſtaõ, ou qualquer outra couſa.

47 Don-

47 Donde ſe ſegue, que ſendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve moſtrar ſempre unidades da meſma natureza que elle. (*)

Tendo feito eſta reflexaõ ſobre as unidades do *producto* e ſeus *factores*, paſſemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compoſtos reduzem-ſe á multiplicaçaõ dos numeros ſimples, que conſtaõ de hum ſó algariſmo. Por iſſo he neceſſario ſaber primeiro o producto delles, o qual ſe acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes conſecutivas a ſi meſmo. Tambem ſe póde uſar da *Taboada* ſeguinte, cuja invençaõ ſe attribue a *Pythagoras*.

(*) Deſta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ Geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* ſe devem tomar como *abſtractas*, e o *multiplicando* e *producto* devem moſtrar unidades da meſma eſpecie, como havemos de declarar na Geometria.

TA-

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A primeira colunna desta *Taboada*, tanto vertical, como transversal, fórma-se da addiçaõ successiva da unidade 1; a segunda do numero 2; a terceira do numero 3; e assim por diante.

49 Para achar nelle o *producto* de dous numeros simples, busca-se hum delles v. gr. o *multiplicando* no alto da *Taboada*, e delle se desce pela colunna vertical até chegar á casa fronteira ao multiplicador, que se busca na primeira colunna vertical da parte esquerda; e o numero que na dita casa se achar será o *producto*. Querendo v. gr. saber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buscaremos

mos o 9 no alto da *Taboada*, e descendo até á casa fronteira ao 6, nelle acharemos 54, que he o producto delles.

Eisaqui quanto se requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compostos.

MULTIPLICAÇAÕ

De hum numero composto por hum numero simples.

50 ESCreva-se o *multiplicador*, que aqui supponmos ser de hum só algarismo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas costuma assentar-se na casa das unidades.

E passando por baixo delles huma risca, que distingua os *factores* do *producto*, multipliquem-se as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e se o producto constar sómente de unidades, escreva-se na casa das unidades, debaixo da risca; se constar porém de unidades e dezenas, escrevaõ-se sómente as unidades, e guardem-se mentalmente as dezenas para se ajuntarem ao producto da operaçaõ seguinte.

Depois multipliquem-se as dezenas do multiplicando pelo mesmo multiplicador; ajuntem-se ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, se as houver; e escreva-se a soma na casa das dezenas, podendo ser com huma só letra; quando naõ, escrevaõ-se sómente as unidades, e guardem-se as dezenas (que saõ realmente centenas) para se ajuntarem ao producto seguinte, o qual tambem ha de constar de centenas.

Continuando deste modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algarismos do multi-

multiplicando, o numero que tivermos escrito será o producto total.

Exemplo.

PErgunta-se quantos *pés* fazem 2864 *toesas*. (Cada *toesa* tem 6 *pés*). A questaõ se reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ser o mesmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Escreveremos pois - - - 2864 Multiplicando.
6 Multiplicador.

17184 - - - Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6. vezes 4, saõ 24; e escrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ seguinte. 2º 6 vezes 6 saõ 36, e 2 que vem saõ 38; assentemos 8, e vaõ 3. 3º 6 vezes 8 saõ 48, 3 que vem saõ 51; assentemos 1, e vaõ 5: 4º 6 vezes 2 saõ 12, e 5 que vem saõ 17; que escreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que se pede, ou o numero de *pés*, de que constaõ 2864 *toesas*. Porque nelle se contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes 2 mil; e por conseguinte, 6 vezes todo o numero 2864.

MULTIPLICAÇAÕ

De hum numero composto por outro composto.

51 QUando o multiplicador constar de muitos algarismos, por cada hum delles se praticará huma operaçaõ, como no primeiro caso,

caſo, principiando da direita para a eſquerda.

Primeiramente pois ſe multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador, e depois pelas dezenas. Eſte producto ſe eſcreverá por baixo do primeiro; e porque deve moſtrar dezenas, pois por ellas ſe fez a multiplicaçaõ, a ſua primeira letra ſe aſſentará em direitura das dezenas do primeiro, e as outras nas caſas ſeguintes para a eſquerda.

Pela meſma raſaõ o terceiro producto, que ſe fizer muitiplicando pelas centenas, ſe porá da meſma ſorte debaixo do ſegundo, adiantando-ſe mais huma caſa para a eſquerda, e o meſmo ſe fará com os outros.

Feitas todas eſtas multiplicaçoens, ſomar-ſe-haõ os productos parciais que ellas deraõ, e a ſoma ſerá o producto total que ſe buſca.

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - - 65487
por - - - - - - - - - - - 6958

523896	
327435	
589383	
392922	
455658546	Producto.

Primeiramente multiplico 65487 pelo algariſmo 8, que eſtá na caſa das unidades do multiplicador, e aſſento o producto 523896 debaixo da riſca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caſo (n. 50.)

Depois multiplico o meſmo numero 65487 pela ſegunda letra 5 do multiplicador, e eſcrevo

o

o producto 327435 debaixo do precedente, porém de forte que a primeira letra 5 fique correspondente ás dezenas delle.

Do mesmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, assento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correspondendo á casa das centenas, porque a letra do multiplicador representa centenas.

Multiplicando finalmente o mesmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, assento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma casa para a esquerda, para que a sua primeira letra 2 fique na casa dos *milhares*, em que está a letra do multiplicador.

Em fim, de todos estes productos faço a soma 455658546, que será o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito se tomou 8 vezes na primeira operaçaõ, 50 vezes na segunda, 900 vezes na terceira, 6000 na quarta; e por conseguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicano, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras abbrevia-se a operaçaõ, multiplicando sem fazer caso dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

HAvendo de multiplicar - - 6500
por - - - - - - - - - - - - 350

325
195

2275000 Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao pro-

producto 2275 ajunto as tres cifras que se achaõ em ambos os factores.

A rasaõ he, porque o multiplicando 6500 representa 65 centenas; e por isso quando se multiplica 65, o producto se entende ser de centenas. Do mesmo modo o multiplicador 350 mostra 35 dezenas, e por essa rasaõ quando se multiplica por 35, o producto deve significar dezenas. Logo multiplicando-se 65 por 35, o producto mostrará dezenas de centenas, ou milhares; e por conseguinte deve acabar em tres cifras, quantas saõ as dos factores; e o mesmo raciocinio se applicará a todos os outros casos.

53 Quando se encontraõ cifras entre os algarismos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he escusado assentallo. Immediatamente se passa ao primeiro algarismo significativo, tendo advertencia de assentar sempre a primeira letra do producto na casa correspondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando nessa mesma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - 42052
por - - - - - - - - - - - 3006

	252312
	126156
	126408312 Producto.

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e assentado o producto 252312 no seu lugar competente, passaremos logo a multiplicar por 3, mas assentaremos o producto 126156 de sorte que represente milhares, como a letra do multiplicador, o que se consegue ficando a primeira letra 6 na mesma casa della.

MUL-

MULTIPLICAÇAÕ

Das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-há a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factóres ambos juntos.

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - - -	54, 2 3
por - - - - - - - - - - -	8,3
	162 69
	433 84
	.450,109

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer.

A raſaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23 que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3; iſto he, hum numero déz vezes menor (n. 28.) que 83, o producto moſtrará unidades déz vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n.23.); e por conſeguinte deverá ter tres algariſmos de dizima, quantos ſe achaõ em ambos os factores juntamente.

E o mesmo raciocinio se póde applicar a qualquer outro caso.

Exemplo II.

SE tivessemos de multiplicar - - 0, 1 2
por - - - - - - - - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar se-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e sahirá o producto 36. Como porém a regra neste caso ordena, que se separem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais doque duas. Mas applicando a este caso o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que se deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que se multiplicassemos 0,12 por 3, o producto devia ser 0,36; logo multiplicando por 0,3 que he dés vezes menor que 3, o producto será dés vezes menor que 0,36; e por conseguinte (n. 27.28.) será 0,036 supprindo-se o lugar com huma cifra, para haver tantas casas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* se intenta ordinariamente a facilidade das operaçoēs, substituindo em lugar de hum calculo rigoroso huma *approximaçaõ* sufficiente, e de menos trabalho; naõ será fóra de proposito, que expliquemos aqui hum meio de abbreviar a multiplicaçaõ, quando nos bastar saber o producto até hum gráo determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. gr. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos basta hum producto exacto até a casa das millesimas. Primeiramente assentaremos os numeros, como aqui abaixo se mostra; isto he, inverteremos a ordem dos algarismos de hum delles, e o assentaremos debai-

debaixo do outro de ſorte, que o algariſmo que era das unidades fique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior que eſtiver duas caſas mais para a direita doque aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos que ſe forem achando ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade à ultima que ficar, ſe as duas que ſe riſcaõ paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima, que queremos no producto.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - - - - 45,625957
por - - - - - - - - - - - - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas; eſcreveremos os numeros deſta maneira - - - - - - - - - - - 45,625957

53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499(13

E ſerá o producto - - - - - - - - 1306,499

Se fizeſſemos a operaçaõ por extenſo, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual ſe ajuſta o precedente até a caſa das milleſimas, como ſe intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas ſaõ precizas para que a letra das unidades do multiplicador correſponda á caſa que deve, conforme a regra, ſupprir-ſe-há ajuntando ao multiplicando as cifras neceſſarias.

Exemplo IV.

HAvendo de multiplicar - - - - 54,236
por - - - - - - - - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a caſa das centeſimas, aſſentaremos os numeros deſte modo:

```
 54,236000
     72235
 ---------
 271180000
  16270800
   1084720
    108472
     37961
 ---------
2886819(53
```

E o producto ſerá . . . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas ſupprimidas 53 excedem 50.

Exemplo V.

QUerendo multiplicar - - - - 0,227538917
por - - - - - - - - - - - - 0,5664178

de ſorte, que o producto venha exacto até o ſetimo algariſmo da dizima, aſſentaremos os numeros deſte modo - - - - - - - - - - 0,227538917

87146650
.....0
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176
1288820(69

E o producto ſerá - - - - - - 0,1288821

§§ Para quem naõ eſtá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente do *ſomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira ſeguinte.

Forme-ſe á parte huma colunna, na qual primeiramente ſe aſſentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois ſomar-ſe-há comſigo meſmo, tomando cada algariſmo duas vezes, e a ſoma ſe eſcreverá por baixo defronte do numero 2; eſta ſoma ſe ajuntará outra vez com o meſmo multiplicando, e a nova ſoma ſe aſſentará por baixo da precedente defronte do numero 3, e aſſim por diante até 10: e ſe defronte de 10 vier huma ſoma que ſeja o meſmo multiplicando augmentado de huma cifra, ſervirá de prova que todas

as

as ſomas da colunna eſtaõ certas. Pela conſtrucçaõ deſta colunna ſe vê, que nella, ſe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros ſimples de 1 até 9.

Preparada deſte modo a colunna, paſſar-ſe-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* ſe tomará o producto que na dita colunna lhe correſponde, o qual ſe aſſentará de forma que a primeira letra á direita fique na caſa que compete á letra do meſmo multiplicador; e a ſoma de todos eſtes productos, dará o producto total que ſe buſca. O exemplo ſeguinte moſtrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, aſſentallos-hemos ao modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

79856345	1 79856345
9605843	2 159712690
	3 239569035
239569035	4 319425380
319425380	5 399281725
638850760	6 479138070
399281725	7 558994415
479138070	8 638850760
718707105	9 718707105
767087512623835	10 .... 79856345(0

Depois, transferindo o multiplicando para o lado direito defronte de 1, o ſomaremos comſigo meſmo, e aſſentaremos a ſoma por baixo defronte do 2; do meſmo modo ajuntaremos eſta ſoma com o multiplicando, e eſcreveremos a nova ſoma por baixo defronte do 3; e aſſim por diante.

Feita a colunna como ſe vê no exemplo, paſſaremos

mos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da colunna o numero que lhe corresponde, e o assentaremos no seu lugar. O mesmo faremos a respeito das letras seguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a soma acharemos o producto 767087512623835.

Este methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a ventagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ sujeito ao erro. Quando porém tivermos, como succede muitas vezes, de multiplicar successivamente hum mesmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a colunna serve para todas as operaçoens, he este methodo naõ sómente o mais expedito, e seguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. ʃʃ

Uso da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he nossa tençaõ mostrar aqui todos os usos que se pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que serviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o valor total de muitas unidades, quando se conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1º *Quanto devem custar* 5842 *toesas de obra, a rasaõ de* 54^{lb} *a toesa?* Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que se pede. 2º *Quanto pezaõ* 5954 *pés cubicos* (*) *de agua; supponde que cada pé tem* 72 *libras?* Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72; e teremos 428688 libr. pelo pezo total que se pergunta.

57 Ser-

(*) O *pé cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual se avalia a capacidade dos corpos, como se verà na Geometria.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer efpecie em unidades de outra efpecie menor; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *foldos*, e eftes em *dinheiros*; as *toefas* em *pés*, eftes em *pollegadas*, e eftas em *linhas*; os *dias* em *horas*, eftas em *minutos*, e eftes em *fegundos* &c. Muitas vezes hà neceffidade defta forte de reducçoens; e por iffo as moftraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} 17^{f} 7^{d}; como a *libra* vale 20^{f}, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52.) e teremos 160^{f}, aos quais ajuntando os 17^{f} teremos 177; depois multiplicaremos eftes por 12 (porque cada *foldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} 17^{f} 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o anno commum, a faber 365^{d} 5^{h} 48^{m}, ou 365 dias 5 horas, e 48 minutos; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^{h} por 365, e ao producto 8760^{h} ajuntaremos 5^{h}; depois multiplicaremos (n. 52.) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^{m} ajuntaremos os 48^{m}, e o total 525948^{m} ferá o numero de minutos, que no anno commum fe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que affima explicámos (n. 52.), póde fervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* péza 2000 *libras*, fe tivermos v. gr. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceffario mais doque duplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pézaõ 854 *tonnelladas*. Obfervem os principiantes, que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o mefmo que multiplicar por 2, 3, 4, &c.

DA ESPECIE DE REPARTIR
Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

59 REpartir ou *Dividir* hum numero por outro, em geral, naõ he outra coufa mais do que bufcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o fegundo; e a operaçaõ com que fe bufca chama-fe *Repartiçaõ*, ou *Divifaõ*. Affim, repartir 12 por 4 he o mefmo que bufcar em 12 quantas vezes há 4; que faõ 3 vezes.

O numero que fe toma para fe dividir, chama-fe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero pelo qual fe divide, chama-fe *Divifor*, ou *Partidor*; e o numero, que moftra as vezes que o dividendo contém o divifor, chama-fe *Quociente*.

A Divifaõ naõ fe faz fempre com a tençaõ de faber quantas vezes hum numero contém outro, mas a operaçaõ procede em todos os cafos, como fe unicamente fe dirigiffe a effe fim; e por efta rafaõ he, que ella fe póde confiderar em geral, como huma operaçaõ pela qual fe acha quantas vezes o dividendo contém o divifor (*).

55 Pela noçaõ precedente da *Divifaõ* fe entenderá facilmente, que ella fe póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando fucceffivamente o divifor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes

---

(*) Na pratica vulgar confidera-fe o dividendo como huma quantia que fe ha de repartir em partes iguais por tantos *companheiros* quantas faõ as unidades do partidor, ás quais fe coftuma dar o mefmo nome de *companheiros*; e no quociente fe procura faber quanto cabe a cada hum delles.

zes delle ſe poder tirar, tantas nelle ſe contém. Aſſim para dividir 21 por 7 podemos obrar deſte modo:

$$
\begin{array}{rl}
21 & \\
\underline{7} & \\
14 & \text{- - - 1º resto.} \\
\underline{7} & \\
7 & \text{- - - 2º resto.} \\
\underline{7} & \\
0 & \text{- - - 3º resto.}
\end{array}
$$

E tendo achado, que tirando-ſe 3 vezes conſecutivas o diviſor 7 do dividendo 21, naõ ſobrou nada, conheceremos que 7 ſe contém *tres vezes* exactamente em 21, e por conſeguinte, que o quociente he 3.

Porém como eſte methodo ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o quociente, pela regra particular da *Diviſaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade a alcançar o meſmo reſultado. ⁋

Da meſma noçaõ ſe ſegue evidentemente; *Que multiplicando-ſe o diviſor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque niſſo ſe naõ faz outra couſa mais do que tomar o diviſor tantas vezes quantas elle ſe contém no meſmo dividendo; e iſto he geral, quer ſeja o quociente numerò inteiro, quer fraccionario.

Quanto á eſpecie das unidades que o *quociente* deve moſtrar, he de advertir que naõ póde determinar-ſe nem pela eſpecie das unidades do dividendo, nem do diviſor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o diviſor ſempre os meſmos, o quociente, que ſerà tambem

ſem-

ſempre o meſmo numericamente, póde ſer muito differente em quanto á eſpecie das ſuas unidades, conforme a natureza da queſtaõ o determinar.

Por exemplo: Se procurarmos ſaber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente ſerá hum numero *abſtracto*, que moſtrará 2 *vezes*. Porém ſe quizermos ſaber quanta obra ſe ha de fazer por 8^{lb}, a raſaõ de 4^{lb} a *toeſa*, o quociente ſerá hum numero *concreto*, que moſtrará 2 *toeſas*, cuja eſpecie naõ diz reſpeito algum às unidades do dividendo, nem do diviſor. Por onde ſe vê, que ſómente a queſtaõ que conduz á diviſaõ actual de que ſe trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve moſtrar o quociente.

DIVISAÕ

De hum numero compoſto por hum numero ſimples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a moſtrar, ſuppoem que cada hum ſabe achar por ſi meſmo quantas vezes ſe contém hum numero ſimples em outro ſimples, ou compoſto taõ ſómente de dois algariſmos. Eſte conhecimento ſe adquire ao meſmo tempo que ſe apprendem os productos dos numeros ſimples; faltando o qual, póde fazer-ſe uſo da *Taboada*, que aſſima temos propoſto (n. 48.). Se v. gr. quizermos ſaber em 74 quantas vezes há 9, buſcaremos o diviſor 9 no alto da *Taboada*, e pela ſua colunna vertical deſceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neſte caſo he o numero 72; e á caſa delle correſponderá na primeira colunna vertical á eſquerda o quociente, que he neſte exemplo o numero 8.

Iſto ſuppoſto, eis-aqui o methodo de executar

a

a *Divisaõ* de hum numero composto por hum numero simples, á qual se dá vulgarmente o nome de *meio partir*.

Assenta-se o divisor ao lado direito do dividendo, separando-os por meio de huma risca perpendicular. Por baixo do divisor se passe tambem huma risca, debaixo da qual se escreveráõ os algarismos do quociente á medida que se forem achando.

Entaõ tomar-se-há o primeiro algarismo á esquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro só for menor que o divisor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buscar-se-há quantas vezes o divisor nelle se contém, e o numero das vezes se assentará no lugar do quociente. O quociente achado se multiplicará pelo divisor, e o producto se assentará debaixo do respectivo dividendo, do qual se diminuirá; e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, e se formará outro dividendo parcial. Neste se praticará a mesma operaçaõ. A letra, que se achar para o quociente, se assentará á direita da primeira; depois se multiplicará pelo divisor, e o producto se escreverá debaixo do respectivo dividendo parcial, do qual se diminuirá; e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, e se formará de novo outro dividendo parcial, com o qual se praticará a mesma operaçaõ; e assim por diante, até se acabarem as letras do dividendo.

Esta Regra se entenderá mais claramente por meio dos exemplos seguintes.

Exem-

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, aſſentaremos eſtes dous numeros como aqui ſe moſtra:

Dividendo	Diviſor
8769	7
7	$1252\frac{5}{7}$ Quociente.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela eſquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes há 7; mas baſta que digamos em 8 quantas vezes há 7? há 1; e aſſentaremos 1 no quociente. Eſte 1 he realmente *mil*; mas naõ he neceſſario attender ao ſeu valor local, pois que elle ſerá determinado pelas letras ſeguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo diviſor 7, e aſſentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Eſte reſto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a reſpeito da letra 7 que ſe ſegue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito reſto, e teremos outro dividendo parcial 17.

Entaõ diremos do meſmo modo; em 17 que vezes há 7? ha 2; e eſcreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1, que achamos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quocienciente 2 pelo diviſor 7, e eſcreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17; e feita a diminuiçaõ, teremos o reſto 3, que he a parte do dividendo que naõ foi repartida: pelo que lhe ajuntaremos a letra ſeguinte 6, e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a meſma operaçaõ, diremos: em 36 que vezes há 7? há 5; e aſſentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo diviſor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36, e ficará o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he a ultima 9, e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos: em 19 que vezes há 7? há 2; e eſcreveremos 2 no quociente.

Depois multiplicaremos o meſmo 2 pelo diviſor 7, e diminuindo o producto 14 do dividendo 19, ficará por ultimo o reſto 5.

Aſſim achamos pois, que 8769 contém a 7 tantas vezes, quantas moſtra o quociente, iſto he, 1252 vezes, e que álem diſſo ainda reſtaõ 5.

Pelo que reſpeita a eſte reſto, baſtará por ora dizer, que ſe aſſenta á direita do quociente, aſſim como ſe vê no exemplo; iſto he, que ſe eſcreve em ſima de huma riſca, ficando-lhe o diviſor por baixo; expreſſaõ, que quer dizer *ſinco ſetimas* partes da unidade, como adiante moſtraremos, quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurſo da operaçaõ ſe achar algum dividendo parcial menor que o diviſor, o qual por conſeguinte o naõ chegará a conter 1 vez, pôr-ſe-há cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exem-

Exemplo III.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

```
14464 | 8
8     |-----
----- | 1808
64
64
-----
064
64
-----
0
```

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o diviſor, aſſentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra ſeguinte do dividendo 4, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 64. Entaõ partindo 64 por 8, cabem 8, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica reſto algum. E por iſſo entenderemos, que 8 ſe contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

DIVI-

DIVISAÕ

De hum numero composto por outro composto.

62 QUando o divisor constar de muitos algarismos, que he o caso a que vulgarmente se dá o nome de *partir por inteiro*, praticar-se-há a Divisaõ desta maneira.

Tomem-se da parte esquerda do dividendo tantas letras, quantas bastarem para fazer hum dividendo parcial, que naõ seja menor que o divisor. E porque seria muito difficultoso buscar, quantas vezes o dito dividendo contém o divisor inteiro, como no primeiro caso; bastará achar quantas vezes a primeira letra do divisor á esquerda se contém na parte superior do mesmo dividendo, que lhe corresponde; e o quociente assim achado se assentará no seu lugar.

Entaõ multiplicar-se-há o mesmo quociente por todo o divisor; e conforme se forem achando as letras do producto, se iraõ assentando debaixo do dividendo parcial da direita para a esquerda. Depois tirar-se-há este producto do mesmo dividendo respectivo, e ao resto se ajuntará a letra seguinte do dividendo principal, com a qual se formará outro dividendo parcial, que se repartirá da mesma maneira; e assim por diante.

Passemos a illustrar esta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os casos, em que pode haver algum embaraço.

Exem

Exemplo I.

QUerendo repartir 75347 por 53.

75347	53
53	1421 $\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Faremos o noſſo primeiro dividendo parcial dos dous algariſmos 75, porque eſtes baſtaõ para elle naõ ſer menor que o diviſor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes há 53, diremos ſómente em 7 que vezes há 5? há 1, que eſcreveremos no quociente.

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o diviſor 53, e aſſentaremos o producto debaixo do dividendo reſpectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o reſto 22, que com a letra ſeguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neſte tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes há 53, diremos ſómente, em 22 que vezes há 5? há 4, que aſſentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo diviſor, eſcreveremos o producto 212 debaixo do dividendo reſpectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao reſto 11 ajuntaremos a letra ſeguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2, que aſſentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo divisor; tiraremos o producto 106 do dividendo respectivo 114; ao resto 8 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 7; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a mesma operaçaõ, acharemos 1 para o quociente; e feita a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, ficará o resto 34, que assentaremos á direita do quociente do modo que assima indicámos (n. 60.).

63 Na operaçaõ precedente devia, em rigor, buscar-se quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha o divisor inteiro. Porém como esta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ, contentamo-nos, do modo que se tem visto, com buscar quantas vezes a parte maior do dividendo contém a maior parte do divisor. He verdade, que deste modo naõ acertamos sempre com o verdadeiro algarismo, que deve assentar-se no quociente, pois procedemos meramente por huma tentativa. Mas, alem de que esta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente, e quando naõ, sempre nos indica hum algarismo pouco distante delle; a multiplicaçaõ, que immediatamente se faz, logo mostra o defeito que se tem commettido, e serve para o corrigir.

E com effeito, se o dividendo contivesse realmente o divisor *tres vezes*, e nós, julgando pelas primeiras letras de ambos elles, entendessemos que o continha *quatro*; he facil de ver, que multiplicando o divisor por 4 achariamos hum producto maior que o dividendo, por quanto se tomaria o divisor mais vezes do que realmente se continha no mesmo dividendo, e por conseguinte naõ póderia fazer-se a subtracçaõ. Neste caso se diminuirá o quociente supposto de huma, duas unidades &c., até que venha hum producto que possa diminuir-se do respectivo dividendo. Ao contrario, se no mesmo caso figurado puzessemos 2 no

quo-

quociente, poderia ſim diminuir-ſe o producto do dividendo, mas ficaria hum reſto maior do que o diviſor, por onde ſe conheceria que elle ſe continha no dividendo mais vezes, do que ſe tinha julgado: e por conſeguinte, que o quociente 2 ſe tinha tomado menor, do que devia ſer. Com o exercicio ſe adquire em pouco tempo o habito de prever quanto ſe deve aumentar, ou diminuir o algariſmo achado pela primeira prova, no caſo de ſe achar defeituoſo.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375:

$$
\begin{array}{r|l}
189492 & 375 \\
1875 & \overline{\phantom{505\ \tfrac{117}{375}}} \\
\hline
1992 & 505\ \tfrac{117}{375} \\
1875 & \\
\hline
117 &
\end{array}
$$

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes há 3? há 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ há vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela raſaõ ja declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraràõ 117.

64 Eisaqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim aumentada ſe contêm na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daõ para repartir 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \\ \hline 104 & 6\frac{104}{288} \end{array}$$

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes há 2, diremos: em 18 que vezes há 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que há 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Mo-

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora eſcrever ſempre os productos, que reſultavaõ da multiplicaçaõ do diviſor pelos algariſmos do quociente que ſe hiaõ achando, debaixo dos dividendos reſpectivos, dos quais ſe haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica ſe deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operaçoens, quanto he poſſivel; devemos notar, que podemos deixar de eſcrever os ditos productos, fazendo a ſubtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo ſeguinte baſtará, para moſtrar como iſto ſe executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

756984	932
1138	
2064	$812 \frac{200}{932}$
200	

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o diviſor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais aſſentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e eſcrever o producto debaixo do membro 7569, para delle ſer diminuido; faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 ſaõ 16, que tirados de 9, naõ póde ſer, mas tirados de 19, ficaõ 3, que eſcreveremos debaixo do 9.

Para deſcontar a dezena, que tomámos da letra 6, a fim de que o 9 valeſſe 19, em lugar de tra-

tratarmos a meſma letra 6 como diminuida de huma unidade, da maneira que praticámos na conta de *Diminuir*, guardaremos eſſa unidade para a juntarmos ao producto ſeguinte. Aſſim continuando a operaçaõ, diremos: 8 vezes 3 ſaõ 24, e 1 que guardámos ſaõ 25, que tirados de 6, naõ póde ſer, mas tirados de 26, fica 1, que aſſentaremos debaixo do 6. Deſte modo fica deſcontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tirámos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do meſmo modo deſcontaremos os 2 que agora tomámos do 5 para que o 6 valeſſe 26. Aſſim diremos: 8 vezes 9 ſaõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) ſaõ 74, que tirados de 75, fica 1, que eſcreveremos debaixo do 5.

Ao reſto 113 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 8, e continuaremos do meſmo modo, dizendo: em 11 que vezes há 9? há 1, que aſſentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que aſſentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e por iſſo poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2, que aſſentaremos por baixo. Ao reſto 206 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes há 9? há 2, que aſſentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 ſaõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 ſaõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 ſaõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde ſucceder no decurſo das diviſões parciais, de que conſta eſta operaçaõ, que o dividendo contenha o diviſor mais de 9 vezes. Neſte caſo entenderemos, que na operaçaõ precedente ſe tomou para o quociente huma letra menor do que devia ſer, pois que a ella certamente pertence-

rá

rá a dezena, que ſe achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo, e o diviſor, acabarem ambos em cifras, antes de fazer a diviſaõ pódem cortar-ſe em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos ſômente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contem a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

DIVISAŎ
Das partes decimais.

PAra que nos naõ demoremos com diſtinçoẽs eſcuſadas, reduziremos a diviſaõ dos numeros accompanhados de *dizima* a huma ſó regra, que he deſta maneira:

Preparem-ſe os numeros propoſtos de ſorte que tenhaõ ambos igual numero de algariſmos decimais, ajuntando as cifras neceſſarias ao que menos tiver, o qual por iſſo naõ muda de valor (n. 30.); ſupprima-ſe a virgula, e pratique-ſe a diviſaõ como ſe os numeros foſſem inteiros: e o quociente ſerá o que ſe buſca, ſem haver nelle algariſmos decimais.

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12,52 por 4,3;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ 392 & \\ \hline & 2\,\frac{392}{430} \end{array}$$

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra

ao

ao divisor, que ficará 4,30. Depois supprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o resto 392; e por conseguinte o quociente total $2 \frac{392}{430}$.

Porém, como usamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracçoēs ordinarias, em lugar de assentarmos o resto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo II.

$$
\begin{array}{r|l}
1252 & 430 \\
\cline{2-2}
3920 & 2,9116 \text{ \&c.} \\
500 & \\
700 & \\
2700 & \\
120 &
\end{array}
$$

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao resto 392 ajuntaremos huma cifra, que realmente o tornará déz vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimas*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dèz vezes maior, pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente déz vezes menor, isto he, 0,9, Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tiveſſemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, ſe há de aſſentar á direita do 9 na caſa das *centeſimas*, com iſſo desfaremos a ſuppoſiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deſte modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo ſempre reſpeito á natureza da queſtaõ, a qual moſtrará quantos algariſmos de *dizima* ſaõ baſtantes. Bem entendido: que ſe pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centeſima* parte da unidade; nem a huma *milleſima*, ſe pararmos no terceiro algariſmo decimal; e aſſim por diante: pois he manifeſto, que naõ póde accreſcentar-ſe, nem diminuir-ſe huma unidade ao ultimo algariſmo achado, ſem que o quociente ſe faça maior, ou menor, do que deve ſer.

Da meſma maneira ſe pódem converter em dizima todos os reſtos da Diviſaõ, quando ella ſe pratica em numeros inteiros.

Reſta moſtrar a raſaõ porque ſupprimindo a virgula tanto no dividendo, como no diviſor, naõ ſe altéra nada o quociente, no caſo de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Iſto ſerá facil de entender, advertindo que no exemplo aſſima o dividendo 12,52 vale o meſmo que 1252 *centeſimas*, e o diviſor 4,30 o meſmo que 430 *centeſimas*, porque as unidades principais contém cem *centeſimas* (n. 22.); e he claro, que 1252 *centeſimas* contém 430 *centeſimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he eſcuſado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na meſma caſa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da queſtaõ, baſta achar o quociente até hum gráo determinado de exactidaõ. Neſtes caſos podemos abre-

breviar muito a operaçaõ, uſando do methodo, que agora moſtraremos.

Primeiramente ſupponhamos, que nos he baſtante o quociente exacto até a caſa das unidades (porque depois moſtraremos como ſe deve applicar o meſmo methodo a outros caſos). Eisaqui a regra.

Supprimaõ-ſe no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas ſaõ as do diviſor; e depois pratique-ſe a diviſaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar reſto, ajuntem-ſe ao quociente tantas cifras, quantas ſaõ as letras ſupprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum reſto, eſte ſe partirá pelo diviſor, no qual para iſſo ſe ſupprimirá o ultimo algariſmo á direita. Feita eſta diviſaõ, o reſto que ficar ſe tornará a partir pelo diviſor da operaçaõ precedente, ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 8789236487 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

878923	64423
234693	136430
41424...	6442
2772...	644
196...	64
4...	6

E tendo achado pela regra or dinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423 teremos o quociente 136430 exacto até á caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo achariamos $136430\frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, confórme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe-há cifra no quociente; ficarà o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirá outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſe-há outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 55106054 por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos as duas ultimas letras do di-

dividendo, e partiremos ao modo ordinario 551060 por 643.

$$\begin{array}{r|l} 551060 & 643 \\ \cline{2-2} 3666 & 85701 \\ 4510 & \\ 009...64 & \\ 9...6 & \\ 3 & \end{array}$$

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o resto 9, o qual, confórme a regra presente, devia repartir-se por 64 Porém, como se acha o dito resto menor que o seu competente divisor, assentaremos cifra no quociente, e conservaremos o mesmo resto 9, o qual dividiremos pelo novo divisor 6, e assim teremos o quociente 85701 exacto até á casa das unidades, conforme se buscava.

71 Quando no principio da operaçaõ se supprimem no dividendo as letras, que a regra ordena, se as que ficarem naõ forem bastantes para constituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao divisor; entaõ cortar-se-haõ neste tantas letras á direita, quantas forem precisas, paraque as restantes possaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

HAvendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-se o quociente exacto até á casa das unidades.

Primeiramente devemos supprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o resto 161 faz hum numero menor que o divisor primitivo 64524, nelle tambem supprimiremos as tres ultimas letras 524, que saõ as que bastaõ paraque o resto 64 possa caber em 161. Entaõ, fazendo a ope-

operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

$$\begin{array}{r|l} 161 & 64 \\ \hline & 25 \\ 33\ldots 6 & \\ 3 & \end{array}$$

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 resulta o quociente 25, sem defeito de huma só unidade. E na verdade o quociente exacto he $24\frac{62951}{64524}$, o qual se chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que se vaõ supprimindo as letras do divisor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, se a letra supprimida for 5, ou maior que 5. E do mesmo modo se ajuntará huma unidade á ultima letra, que ficar no dividendo, quando as letras nelle supprimidas passarem de 5, ou 50, ou 500 &c, conforme se supprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

SUpponhamos, que se pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a condiçaõ de ter a mesma exactidaõ, que se tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui se mostra:

$$\begin{array}{r|l} 8658 & 1987 \\ \hline & 4357 \\ 710\ldots 199 & \\ 113\ldots 20 & \\ 13\ldots 2 & \end{array}$$

On-

Onde, em lugar de partir o resto 710 por 198, partiremos por 199, por quanto a letra 7 supprimida no divisor he maior que 5. Do mesmo modo na operaçaõ seguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para divisor, porque se supprime hum 9. E finalmente na operaçaõ seguinte, como o divisor 2 he hum pouco maior do que devia ser, e este se contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no resto 13, assentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos, que o quociente pedido he 4357.

73 Agora será facil de entender o que se deve praticar, quando se requer o quociente com maior exactidaõ, do que até á casa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até á casa das *decimas-millesimas*, naõ he necessario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas saõ as casas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo proposto. Entaõ se fará a divisaõ, segundo o methodo presente; e tendo achado o quociente exacto até á casa das unidades, nelle se cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas se determináraõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-se o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ser exacto até a casa das *decimas-millesimas*.

Como as *decimas-millesimas* pertencem á quarta casa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a questaõ será reduzida a buscar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até á casa das unidades, como nos exemplos precedentes. Assim fazendo a applicaçaõ do me-

methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4532, da maneira ſeguinte:

$$\begin{array}{r|l} 69270 & 4532 \\ \hline & 15285 \end{array}$$

23950
1290 . - . 453
384 . . . 45
24 : . . 5

E achando o quociente 15285, nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntámos ao dividendo; e ſerá o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no diviſor, ou em ambos, deveráõ primeiro preparar-ſe de ſorte, que ſe poſſa deſprezar a virgula, como aſſima fica declarado (n. 68.), e depois ſe procederá á operaçaõ, como neſte ultimo exemplo.

Pelo methodo preſente póde reduzir-ſe facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo reſpeito ao que aſſima diſſemos (n. 71.).

Querendo v. gr. reduzir á dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de ſorte que ſe repreſente o ſeu valor exactamente até á caſa das milleſimas; deveremos partir (n. 73.) o numero 4253000 por 9678; que vem a ſer o meſmo que dividir (n. 69.) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71.) o numero 4253 por 968, conſórme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439: e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ propoſta, com a exactidaõ que ſe intentava.

§§ O methodo que aſſima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para ſe fazer eſta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem ſe póde applicar a *Diviſaõ* de ſorte, que alem do *Somar* naõ ſe care-

ça

ça de outra couſa mais que do *Diminuir*. A ſua praxe he deſta maneira.

Primeiramente forma-ſe huma colunna da addiçaõ ſucceſſiva do *diviſor*, do meſmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37.).

Depois toma-ſe no dividendo á eſquerda hum membro de tantas letras quantas baſtarem, paraque na colunna ſe ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algariſmo, que eſte tiver defronte, ſe aſſenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual ſe diminue, e ao reſto ſe ajunta a letra ſeguinte do dividendo principal; e aſſim reſulta outro dividendo parcial, o qual ſe buſca na colunna, e na ſua falta o numero proximamente menor; e aſſim por diante. Quando na colunna ſe naõ achár o dividendo parcial, nem algum numero proximamente menor, aſſentar-ſe-há cifra no quociente, e ſe ajuntará ao dito dividendo a letra ſeguinte do dividendo total, para ſe continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743, primeiramente aſſentaremos eſtes numeros do modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

	236743	1 ... 236743
220188745725		2 ... 473486
2130687	930075	3 ... 710229
		4 ... 946972
712004		5 ... 1183715
710229		6 ... 1420458
		7 ... 1657201
1775572		8 ... 1893944
1657201		9 ... 2130687
1183715		10.. 2367430
1183715		
0000000		

po

Depois faremos a columna ſubſidiaria por meio da addiçaõ ſucceſſiva do diviſor, como ſe vê no exemplo; e com ella entraremos a executar a diviſaõ, que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo parcial as primeiras ſete letras 2201887, porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor, acharemos que na columna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Peloque aſſentaremos 9 no quociente, e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo, do qual o diminuiremos, e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he 4, e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na columna, tomaremos o que ſe acha proximamente menor, defronte da letra 3, a qual ſe aſſentará no quociente, e o dito numero ſe diminuirá do dividendo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5, de ſorte que ficará para partir 17755.

Como porém eſte numero ſe naõ acha na columna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da columna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na columna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na columna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e porque feita a diminuiçaõ, naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entenderſe o meſmo, que já declarámos a reſpeito da multiplicaçaõ (pag. 39.) (pag. 39.) II E PRO-

PROVA
Da Multiplicaçaõ, e Divisaõ.

74 DA mesma definiçaõ, que temos dado destas duas operaçoẽs, se póde conhecer a *prova* dellas, que vulgarmente se chama *real*.

Como na Multiplicaçaõ se toma o multiplicando tantas vezes quantas saõ as unidades do multiplicador, he evidente, que se procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, isto he (n. 59.), se dividirmos o producto pelo multiplicando, deve sahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), segue-se em geral, *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve sahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado assima (n. 50.) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; se dividirmos este por 2864, teremos no quociente 6; e se o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do mesmo modo: Por quanto o quociente de qualquer divisaõ denota quantas vezes o divisor se contêm no dividendo, manifestamente se segue, que se o divisor se tomar tantas vezes quantas denota o quociente, isto he (n. 40.), se o divisor se multiplicar pelo quociente, deve sahir no producto o dividendo, no caso de ter sido feita a divisaõ, sem ficar resto algum; e que tendo havido resto, se o divisor se multiplicar pelo quociente, e ao producto se ajuntar o resto, deve resultar o mesmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado assima (n. 63.), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o resto 117. E multiplicando 375

por

por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-se o resto 117, resultará o mesmo dividendo 189492.

Donde se vê, que a *prova real* da Divisaõ se faz pela Multiplicaçaõ, e a da Multiplicaçaõ pela Divisaõ.

Porém estas operaçoẽs pódem verificar-se por hum meio muito mais facil e expedito, que agora mostraremos; advertindo, que naõ devem por isso desprezar-se as reflexoẽs, que acabamos de fazer, por quanto serviráõ para muitas outras cousas.

PROVA

Pela regra dos noves.

75 PAra mostrarmos o uso desta regra por meio de hum exemplo, supponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar este resultado. Eisaqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6,5,4,9,8, sem attender ao seu valor local, como se todas estivessem na casa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle se achar na soma. Por fim teremos hum resto, que neste exemplo he 5, o qual assentaremos ao lado do mesmo multiplicando.

Do mesmo modo somaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fóra os *noves*, e teremos o resto 4, que assentaremos ao lado do mesmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous restos hum pelo outro, e do producto, que neste exemplo he 20, lançaremos fóra os *noves* que elle tiver; e ficará hum resto, que no caso presente he 2.

Ora se o producto assima dito he exacto, he

ne-

neceſſario que ſomando do meſmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem ſenaõ 2, como ſe acha com effeito.

Eſta regra ſuppoem, que para haver o reſto da ſubtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero ſe contém, naõ he neceſſario mais do que ſomar todas as ſuas letras, e lançar fóra na ſoma dellas os *noves* que ſe acharem, como ſe demonſtra facilmente reflectindo ſobre os principios da Numeraçaõ (n. 39 §§). Iſto ſuppoſto eiſaqui a razaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 5, e como o multiplicador 454 he tambem compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 4, he manifeſto que ſómente pelo producto de 4 por 5 ou por 20, ha de deixar o producto total de ſer diviſivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que ſómente por 2 ha de deixar de ſer diviſivel por 9. Logo eſtando o dito producto exacto deve ficar nelle o meſmo numero, que fica no producto dos dous reſtos, depois de ſerem lançados fóra os *noves*, que elle contém.

A prova da Multiplicaçaõ ſe applica facilmente á Diviſaõ. Como o producto do diviſor pelo quociente com o reſto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74.), naõ he neceſſario mais do que tirar os noves ao diviſor, e ao quociente; multiplicar os dous reſtos; do producto lançar fóra os noves, ſe os tiver; ſomar o reſto com o que ficar depois de tirados os noves ao reſto da diviſaõ; e da ſoma lançar fóra os noves, ſe os tiver; e o reſto ſerá o que ſe deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo: Tendo achado o quociente 812, e o reſto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tira-

tiraremos os noves ao divisor 932, e ficará o resto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous restos, e do producto 10 lançando fóra 9, fica 1; e tirando tambem os noves ao resto da divisaõ 200, ficaõ 2, que somados com o resto precedente 1 fazem 3; e isto he o que deve restar no dividendo depois de se tirarem os noves, estando a operaçaõ exacta, como se acha com effeito.

Tomando a cousa em rigor, esta verificaçaõ naõ he infallivel. Porque se na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganassemos de sorte, que fizessemos qualquer algarismo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzessemos outras tantas de menos em qualquer outro: como isto naõ influiria sobre o resto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro, que hum erro semelhante naõ será descuberto pela prova. Porém como para isso saõ necessarios dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente se destruaõ, que vem a ser o mesmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os casos em que a prova póde faltar, haõ de ser rarissimos na pratica.

ℑℑ A prova, que se faz por meio dos *noves*, igualmente podia fazer-se por meio de qualquer outro numero: mas escolheu-se o nove, por ser mais facil de se lançar fóra. Como porém temos notado, que os *onzes* se pódem tirar de qualquer numero quasi com a mesma facilidade, e como isto mostra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte póde servir de utilidade, será conveniente que a ajuntemos neste lugar, e he da maneira seguinte.

Se o primeiro algarismo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas casas impares da direita para a esquerda se ajuntarem, lançando fóra

da

da ſoma o numero onze quando nella vier, e notando o reſto final que reſultar; e ſe depois ſe ajuntar do meſmo modo o ſegundo algariſmo, o quarto, e os mais pelas caſas pares; e ſe o reſto ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, menos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; e tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto que ſobra, tirados os onzes do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17, do qual tirando 9, ficaõ 8: e eſte he o reſto que fica, tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade, com igual raſaõ póde ſervir de prova ás quatro operaçoẽs da Arithmetica; prova, que ſómente faltará, quando o erro comettido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ¶¶

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém outro, mas tambem para partir qualquer numero em

em partes iguais. Tomar a ametade, a terça, quarta, quinta, vigeſima, trigeſima parte &c. de hum numero, he o meſmo que dividillo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou partillo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Diviſaõ ſerve tambem para converter as unidades de qualquer eſpecie em outras de eſpecie ſuperior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *ſoldos*, e eſtes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *ſoldos*, notaremos que como ſaõ neceſſarios 12 *dinheiros* para fazer hum *ſoldo*, quantas vezes houver 12^d em 5864^d, tantos *ſoldos* haverá na dita quantia. He neceſſario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488^s, e 8^d de reſto. Para reduzir a *libras* os 488^s, dividiremos 488 por 20, porque ſaõ neceſſarios 20^s para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de reſto 8^s; e aſſim a quantia propoſta ſerá reduzida a 24 *libras*, 8 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occaſiaõ deſta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, ſeparando no dividendo da parte direita tantas letras quantas ſaõ as cifras do diviſor, e dividindo as que ficarem á eſquerda pelas letras ſignificativas do meſmo diviſor; ſe houver algum reſto, á direita delle ſe ajuntaráõ as letras ſeparadas no dividendo, para ter o reſto total da diviſaõ; e naõ havendo reſto, as meſmas letras ſeparadas ſeraõ o unico reſto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, ſeparemos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeparada 4, e ſerá o

reſto

resto total 14, de sorte que o quociente completo será $291 \frac{14}{20}$.

Esta abbreviaçaõ póde applicar-se á reducçaõ da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, isto he, para a dividir por 2000, deveremos separar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e assim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O mesmo se applicará a muitos outros casos, conforme a natureza da questaõ o permittir.

DOS QUEBRADOS.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracçoẽs*, aos numeros, pelos quais se exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para se formar huma idéa clara delles, he necessario conceber a mesma quantidade, que se tem escolhido para unidade, como composta de outras unidades mais pequenas; assim como se concebe, por exemplo, a *libra* composta de 20 partes, ou unidades, que se chamaõ *soldos*.

Huma, ou muitas destas partes, nas quais se divide a unidade, ou das quais se entende composta, formaõ o que se chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o mesmo nome se dá aos numeros, com que ellas se representaõ.

79 Ha duas differenças na expressaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira consiste em representar as partes da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra especie, e dandolhes hum nome particular.

Assim, para mostrar *sete* partes, das quais entraõ

traõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *ſoldos*, e preſcindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades abſolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que ſignifica, deſte modo 7^s; expreſſaõ, que em ſi meſma he inteira e abſoluta, mas a reſpeito da *libra* he huma fracçaõ.

Eſta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante falaremos.

80 Como porém naõ he poſſivel dar nomes em particular a todas as diviſoẽs que ſe pódem fazer da unidade, faz-ſe neceſſaria a ſegunda differença de quebrados, em cuja expreſſaõ ſe uſa de dous numeros, o primeiro dos quais ſe aſſenta em ſima de huma riſca, e moſtra as partes da unidade de que ſe compoem a quantidade, que queremos ſignificar; e o ſegundo debaixo da riſca, para denotar quantas deſſas partes formaõ a unidade. Aſſim, para pôr em figura as *ſete* partes da *libra*, de que ha pouco fallamos, deveremos aſſentar os dous numeros deſta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente ſe lê o numero que eſtá em ſima da riſca, o qual ſe chama *Numerador*, e depois o que eſtá por baixo, o qual ſe chama *Denominador*; e a eſte ſe ajunta a addiçaõ *avos* (*). Aſſim para declarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *ſete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$,

(*) Eſta addiçaõ *avos* naõ ſignifica couſa alguma per ſi meſma. He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os noſſos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por arrecearem uſar dos *ordinais* da lingoa Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, uſáraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do meſmo nome *oitavos*, para os fazerem ſer equivalentes aos *ordinais*. Deſte modo *onze-avos* tem o lugar de hum nome que ſe formaria de *onze*, aſſim como *oitavos* ſe forma de *oito*, que ſeria *onzavos*. Aſſim dous *onze-avos* he como ſe diſſeſſemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o meſmo que tres *centavos* &c.

diremos *onze cem-avos* &c.; advertindo, que *onze cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas sejaõ necessarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ se usa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, e *oitavos*; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para sima se usa hoje dos nomes ordinais da lingua Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres millesimas* partes da unidade.

82 Mostra pois o numerador de quantas partes da unidade se compoem a quantidade, que se declara pelo quebrado; e o denominador determina a grandeza e valor dessas partes, mostrando quantas dellas formaõ a unidade. Por isso se chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. nestes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro sejaõ *quintas*, e as do segundo *setimas*.

83 Tanto o numerador como o denominador se chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles se representa. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-se termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros considerados em fórma de quebrados.

84 AS operaçoẽs, que se fazem sobre os quebrados, conduzem muitas vezes a resultados fraccionarios, cujo numerador se acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As

As expressoẽs desta sorte naõ saõ fracçoẽs propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, representados em fórma de fracçoẽs.

85 Para extrahir os inteiros, que se achaõ incluidos nellas, he necessario dividir o numerador pelo denominador. O quociente mostrará os inteiros, e o resto da divisaõ, se o houver, será o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que se ha de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o mesmo denominador. Assim $\frac{27}{5}$ se reduzem a $5\ \frac{2}{5}$, isto he, sinco unidades, e dous quintos da unidade.

A rasaõ he, porque na expressaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 mostra que a unidade se tem dividido em 5 partes: logo quantas vezes houver 5 em 27, tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicaçoẽs, e divisoẽs dos numeros inteiros acompanhados de fracçoẽs requerem, ao menos para maior facilidade das operaçoẽs, que os ditos inteiros se reduzaõ á fórma de quebrados. Isto se faz, multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual se quer reduzir, e o producto será o numerador.

Por exemplo: Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ, que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 será o numerador; donde teremos $\frac{40}{5}$. A rasaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade se considéra composta de 5 partes: logo 8 unidades se converteráõ em 40 das ditas partes.

Do

Do meſmo modo o numero miſto $7\frac{4}{9}$ convertido todo em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando ſe ha de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais ſimples de tudo he tomar para iſſo a unidade, a qual ſe ſubentende ſempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque aſſim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, aſſim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*.

Das mudanças, que ſe pódem fazer nos termos de hum quebrado, ſem lhe alterar o valor.

87 HE manifeſto, que em quantas mais partes ſe conceber a unidade dividida, tantas mais ſeraõ neceſſarias para repreſentar huma meſma quantidade.

88 Donde ſe vê, que póde fazer-ſe o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., ſem lhe mudar o valor, com tanto que ao meſmo tempo ſe faça tambem o ſeu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo póde dizer-ſe em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando ſe multiplicaõ ambos os ſeus termos por hum meſmo numero.*

Aſſim $\frac{3}{4}$ he o meſmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a meſma couſa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por

89 Por huma rasaõ semelhante se entende, que quanto menos partes se suppuzerem na unidade, tanto menos seraõ precisas para formar huma mesma quantidade.

Pelo que he manifesto, que sem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o seu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral se póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os seus termos se dividem por hum mesmo numero.*

Para se ver distintamente a verdade destas duas proposiçoẽs, basta reflectir sobre as noçoẽs que temos dado do numerador, e denominador.

Pelo que devemos notar, que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum mesmo numero, he cousa muito diversa de multiplicar ou dividir o mesmo quebrado; porque as ditas operaçoẽs se fazem sem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios, que acabamos de expôr, servem de base ás duas Reducçoẽs seguintes, que saõ de grande uso na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao mesmo denominador.

90 1º PAra reduzir duas fracçoẽs ao mesmo denominador, multiplicar-se-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da segunda, e os dous termos desta pelo denominador daquella.

Supponhamos, por exemplo, que temos para reduzir ao mesmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Pri-

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2, e 3 pelo denominador da segunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$ que (n. 88.) he do mesmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da segunda 3 e 4 pelo denominador da primeira 3, e resultará $\frac{9}{12}$ do mesmo valor que $\frac{3}{4}$. E assim as fracçoẽs $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ seraõ mudadas em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem respectivamente o mesmo valor, e se achaõ reduzidas ao mesmo denominador.

He facil de ver, que por este methodo teraõ sempre as novas fracçoẽs o mesmo denominador, porque em cada huma das operaçoẽs se fórma este da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91 2º Sendo mais de duas as fracçoẽs, reduzir-se-haõ ao mesmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao mesmo denominador estas quatro fracçoẽs $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$;

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto, que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o seu producto 20 por 7, que dá 140. Assim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais resultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88.) he do mesmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da segunda 3 e 4 pelo producto dos denominadores

dores das outras 3, 5, e 7, isto he, por 105, e teremos a fracçaõ $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Passando á terceira multiplicaremos os seus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres denominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracçaõ $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multiplicaremos ambos os seus termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deste modo temos convertido as quatro fracçoẽs $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{7}$ nestas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos simples na verdade, mas do mesmo valor que ellas, e pela rasaõ de serem reduzidas ao mesmo denominador, mais susceptiveis das operaçoẽs da Addiçaõ, e Subtracçaõ, como adiante mostraremos.

He manifesto pela mesma operaçaõ da reducçaõ, que as fracçoẽs que resultaõ saõ respectivamente iguaes ás fracçoẽs dadas, porque em cada huma destas se multiplicaõ ambos os termos por hum mesmo numero (n. 88.). E como o denominador de cada huma das novas fracçoẽs he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o mesmo commum denominador.

55 Como pelo methodo antecedente se reduzem fim os quebrados ao mesmo commum denominador, mas nem sempre ao mais simples que elles pódem ter, pela qual rasaõ seria necessaria outra reducçaõ, e essa muito trabalhosa, para os trazer á maior simplicidade, que permitte a condiçaõ de ficarem com a mesma denominaçaõ; será muito conveniente procurar, que logo se reduzaõ

zaõ ao mais pequeno denominador commum, que he poſſivel. Iſto ſe conſeguirá, praticando da maneira ſeguinte.

Se os denominadores dos quebrados que ſe haõ de reduzir á meſma denominaçaõ, cada hum dos quais ſe ſuppoem abbreviado aos ſeus menores termos, naõ tiverem diviſor commum, a reducçaõ ſe praticará ſimpleſmente da maneira aſſima declarada; e o denominador commum, que ſe achar ſerá o menor, que os ditos quebrados pódem ter.

Porém ſe os denominadores tiverem diviſor commum, dividir-ſe-haõ todos por elle, ou pelo maior delles, quando forem muitos; e os quebrados ſe converteráõ em outros tantos, que ſeraõ de differente valor, mas depois ſe reſtituiráõ ao meſmo. Eſtes ſe reduziráõ á meſma denominaçaõ, conforme a regra aſſima dada; e o denominador commum delles ſe multiplicará pelo meſmo diviſor, pelo qual foraõ divididos os denominadores primitivos. Deſte modo ſe tornaráõ a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da queſtaõ, e ficaráõ álem diſſo com o menor denominador commum que he poſſivel.

Quando ſómente alguns dos denominadores tiverem diviſor commum, por elle ſe dividiráõ os ditos denominadores, e ſe multiplicaráõ tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle ſe naõ pódem dividir, e aſſim ſe formaráõ os novos quebrados ſubſidiarios, que ſe haõ de reduzir ao meſmo denominador, o qual ſe multiplicará pelo dito diviſor, para ſe reſtituirem ao valor dos quebrados propoſtos. Do meſmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem diviſor commum, e feita a diviſaõ reſultaõ quebrados, nos quais alguns donominadores ainda tem diviſor entre ſi, ſobre elles ſe praticará o meſmo que no caſo antecedente, e

aſſim

assim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos se multiplicará pelo producto de todos os divisores, que successivamente se empregáraõ. Os exemplos seguintes mostraráõ claramente a praxe destas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á mesma denominaçaõ os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 e 27 tem o maior divisor commum 9, partillos-hemos ambos por 9, e resultaráõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais sendo reduzidos ao mesmo denominador, daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo divisor 9, se mudaráõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da questaõ, e os mais simples que saõ possiveis. Se a reducçaõ se fizesse ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o divisor commum 13, por elle os dividiremos todos, e resultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita esta, acharemos que se reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo divisor 13, ficaráõ os quebrados propostos reduzidos a $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$, com o menor denominador commum que he possivel. Se praticassemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

F Exem-

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á mesma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem divisor commum, mas taõ sómente os dous ultimos, estes se dividiráõ pelo seu maior divisor 15, e pelo mesmo se multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Assim resultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que se reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo divisor 15, ficaráõ os quebrados da questaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obrassemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-se, que reduzamos ao mesmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores saõ divisiveis por 11, feita a divisaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como nestes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o divisor commum 7, por elle os dividiremos, e pelo mesmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores se naõ poderaõ dividir; e assim resultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que se reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominominador commum 10 por 77, que he o producto dos diviſores 7, e 11, teremos os quebrados da queſtaõ reduzidos reſpectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais ſimples que he poſſivel. Se neſte caſo uſaſſemos da regra ordinaria, achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compoſtos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhoſa, para ſe reduzirem á ſimplicidade da primeira fórma, ſendo para iſſo neceſſario procurar primeiro o maior diviſor commum entre o denominador, e os quatro numeradores, como abaixo ſe moſtrará.

Reducçaõ dos Quebrados á expreſſaõ mais ſimples que he poſſivel.

92 HUma fracçaõ he tanto mais ſimples, quanto os ſeus termos ſaõ menores. Muitas vezes he poſſivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e iſto ſuccede todas as vezes que o numerador, e denominador ſe podem dividir ambos por hum meſmo numero. Como eſta operaçaõ naõ lhe altéra o valor (n. 89.), he huma ſimplificaçaõ que ſe naõ deve omittir, pois naõ ſómente contribue para a elegancia da expreſſaõ, mas tambem para ſe formar melhor conceito do ſeu valor. Porque ſem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o meſmo valor que $\frac{3}{7}$, por eſta ſegunda com tudo ſe fórma huma idêa mais clara da quantidade que por ambas ellas ſe repreſenta, naõ ſe diſtrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para ſe fazer pois a reſoluçaõ preſente, ou para *abbreviar quebrados*, eiſaqui o methodo que ſe ha de ſeguir.

93 Primeiramente dividir-ſe-haõ ambos os termos por 2, e eſta operaçaõ ſe continuará em quanto ſe puder fazer ſem reſto. Depois ſe paſſará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17 &c., iſto he, por todos os numeros *primos*, que ſaõ aquelles que naõ tem diviſor exacto, ſenaõ a ſi meſmos, ou a unidade.

A unica difficuldade que ſe offerece neſte methodo, he ſaber quando ſe póde dividir ſem reſto por 2, 3, 5, &c. para naõ fazer de balde a diviſaõ. Para iſſo ajudaráõ muito os principios ſeguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra a direita ſignifica numero par, he diviſivel por 2.

Todo o numero, cujos algariſmos ſomados fizerem 3, ou hum numero multiplo de 3, he diviſivel por 3. Aſſim v. gr. o numero 54231 póde dividir-ſe exactamente por 3, porque a ſoma dos ſeus algariſmos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contem 5 vezes 3 exactamente.

Do meſmo modo, ſe a ſoma dos algariſmos fizer 9, ou hum multiplo de 9, ſerá o numero diviſivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, ſerá diviſivel exactamente por 5.

95 E todo o numero, cujos algariſmos das caſas impares da direita para a eſquerda fizerem huma ſoma igual á dos algariſmos das caſas pares; ou tambem deſigual, com tanto que a differença das duas ſomas ſeja 11, ou hum multiplo de 11, ſerá diviſivel por 11. Aſſim ſerá diviſivel por 11 o numero 89452, porque as letras das caſas impares 2, 4, 8, fazem a meſma ſoma que as letras das caſas pares 5, e 9. Do meſmo modo o numero

mero 8452719 ſerá diviſivel por 11, porque as letras das caſas pares 9, 7, 5, 8, fazem a ſoma 29, e as das pares 1, 2, 4, a ſoma 7; ſendo a diffe-rença das duas ſomas 22, que he multiplo de 11.

ſſ

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*, aindaque ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſuppoem ſeria mais traba-lhoſo que a meſma diviſaõ, melhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E porque naõ póde mais fazer-ſe a diviſaõ por 2, e pelo que fica dito ſe vê que póde fezer-ſe por 3, dividiremos or 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, reſultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a diviſaõ por 3, experimentaremos por 7, e como ſuccede ſem reſto, ficará o quebrado propoſto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A raſaõ porque neſta operaçaõ naõ experimentamos a diviſaõ, ſenaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a diviſaõ por 2, he eſcuſado tentar fazella por 4, por quanto ſe eſta pudeſſe fazer-ſe ſem reſto, muito melhor ſe poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que ſe pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os ſeus termos pelo maior divi-

ſor

ſor commum, que elles pódem ter. Eiſaqui a regra para o achar.

Divida-ſe o termo maior pelo menor. Se eſta diviſaõ ſe fizer ſem reſto, o termo menor ſerá o maior diviſor commum de ambos elles. Ficando porém algum reſto, por elle ſe dividirá o termo menor, que ſervio de diviſor na operaçaõ antecedente. Entaõ, ſe naõ houver reſto, o reſto precedente que ſervio de diviſor ſerà o maior diviſor que ſe buſca; e ſe houver reſto, por elle ſe dividirá o que foi diviſor na operaçaõ antecedente; e aſſim por diante, até chegar a huma diviſaõ exacta; e o diviſor della ſerá o que ſe buſca. Se o diviſor da ultima operaçaõ for a unidade, he ſinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-ſe a menores termos.

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o reſto 1504. Por eſte reſto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o reſto 752; pelo qual dividiremos o reſto precedente 1504. E como eſta diviſaõ ſe faz exactamente, ſerá o diviſor della 752 o maior diviſor commum dos termos do quebrado propoſto; o qual por conſeguinte, feita a diviſaõ, ſe reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he diviſor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que ſe compoem de 2 vezes 1504, e 1 vez 752; e por conſeguinte o deve ſer igualmente de 9024, que ſe compoem de 2 vezes 3760, e 1 vez 1504.

Além diſto he facil de ver, que 752 he o maior diviſor commum, que podem ter os numeros 9024

e

e 3760. Porque naõ póde haver diviſor commum entre 9024 e 3760, que o naõ ſeja ao meſmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre eſtes dous, ſem que o ſeja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre eſtes dous ultimos numeros naõ póde haver maior diviſor commum do que 752: Logo &c.

§§ Se forem mais que dous os numeros, entre os quais devemos achar o maior diviſor commum, uſaremos do methodo ſeguinte.

Buſque-ſe o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro, entre eſte e o quarto &c., de qualquer ſorte que os numeros eſtiverem diſpoſtos. Pratique-ſe o meſmo ſobre os diviſores achados, e aſſim por diante, até chegar a hum ſó diviſor, o qual ſerà finalmente o maior diviſor commum dos numeros propoſtos. Se em alguma parte da operaçaõ ſahirem dous ou mais diviſores iguais, hum delles ſómente ſe tomará para a operaçaõ ſeguinte; e ſe todos alguma vez ſahirem iguais, ſerá eſcuſado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum diviſor igual a elles, ſe ſe levar ao fim conforme a regra, e por conſeguinte qualquer delles ſerá o maior diviſor que intentamos achar. Encontrando-ſe na operaçaõ dous numeros, quaiſquer que ſejaõ, os quais naõ tenhaõ diviſor commum ſenaõ a unidade, tambem os numeros propoſtos o naõ teraõ.

Exemplo. Pede-ſe o diviſor maior commum dos numeros . . . . 7174090 . . . . 1956570 . . . . 913066 . . . . 465850 . . . . 46585. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros . . . . 652190 . . . . 130438 . . . . 18634 . . . . 46585; depois ſobre eſtes faremos a meſma operaçaõ, e ſahiráõ

os

os diviſores . . . . 130438 . . . . 18634 . . . . 9317; ſobre eſtes praticaremos do meſmo modo, e ſahiráõ os diviſores . . . . 18634 . . . . 9317; e finalmente achando o maior diviſor commum deſtes dous ultimos, que he 9317, eſte ſerá o maior diviſor commum dos ſinco numeros propoſtos.

Outro modo de conſiderar os quebrados, e conſequencias que delle reſultaõ.

96 A Idêa, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador moſtra de quantas partes ſe ſuppoem compoſta a unidade; e o numerador, de quantas deſſas partes conſta a quantidade, que pelo quebrado ſe repreſenta.

Agora moſtraremos, como ſe podem tomar em outro ponto de viſta. Póde o numerador conſiderar-ſe, como repreſentando huma certa quantidade, que ſe ha de repartir em tantas partes quantas ſaõ as unidades do denominador, para ſe tomar huma dellas.

Aſſim v. gr no quebrado $\frac{4}{5}$ póde conſiderar-ſe o numerador 4, como repreſentando *quatro* couſas v. gr. *libras*, que ſe haõ de repartir em *ſinco* partes, para ſe ſignificar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas, como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde conſiderar-ſe o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *diviſor*. E por iſto ſe vê o que querem dizer os reſtos da diviſaõ reduzidos ao modo fraccionario, que aſſima lhes démos (n. 60.).

98

98 Donde ſe ſegue, que hum numero inteiro póde ſempre reduzir-ſe a huma expreſſaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Aſſim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ repreſentaõ huma meſma couſa.

99 Segue-ſe tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he neceſſario mais do que conſiderar o numerador como hum reſto de diviſaõ, em que o denominador tenha ſervido de diviſor, e obrar como aſſima fica declarado (pag. 56.), tendo a advertencia de pôr huma cifra primeiro na caſa das unidades. Deſte modo ſe achará, que $\frac{3}{5}$ vale 0,6, que $\frac{5}{9}$ vale 0,5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale 0,04, e aſſim dos mais.

Deſta maneira ſe pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir $3^T\ 5^P\ 8^P\ 7^l$ a partes decimais da *toeſa*, de modo que ſe naõ deſpreze ametade de huma *linha*, obſervaremos que a *toeſa* contém 864 *linhas*, e por conſeguinte 1728 *meias-linhas*. Peloque, para naõ deſprezar ametade de huma *linha*, ſerá neceſſario que a *dizima* paſſe da caſa das milleſimas, ou que chegue até as decimas-milleſimas.

Iſto ſuppoſto, converteremos $5^P\ 8^P\ 7^l$ tudo em *linhas* (n. 57.), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toeſa*. E reduzindo eſte quebrado á *dizima*, como aſſima diſſemos, reſultará 0,9525, e por conſeguinte o numero propoſto ficará reduzido a $3^T,9525$.

§§ As fracçoẽs particulares da *dizima* pódem reduzir-ſe ás ordinarias de dous modos diverſos.

Porque em primeiro lugar, ſe as quizermos conſervar na fórma decimal, reduzir-ſe-haõ à maneira

neira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86. 98.). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado esta expressaõ 0,23, bastará escrever $\frac{0,23}{1}$; e se a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86.).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* serviráõ de numerador, e para denominador se tomará a unidade com tantas cifras adiante, quantas eraõ as casas da dizima. Assim 0,23 he o mesmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o mesmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde álem disto reduzir-se facilmente a hum quebrado ordinario a mesma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as mesmas letras, e pela mesma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deste modo he a expressaõ 0,321321321 &c., na qual se suppoem o periodo dos tres algarismos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, se os periodos começarem logo desde a virgula, tomar-se-ha hum delles para numerador, e o denominador será hum numero composto de tantos 9, quantas forem as casas de cada periodo. Assim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamente $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c. fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos constaõ de huma só letra, se reduz a $\frac{7}{9}$.

Porém, se os periodos naõ começarem logo des-

desde a virgula, será sempre o denominador composto de tantos 9 como saõ as casas de cada periodo, mas esses seguidos de tantas cifras quantas saõ as casas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador, multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que se lhe ajuntáraõ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario esta expressaõ 1,357121212 &c., como cada periodo consta de duas letras, e antes do primeiro se achaõ tres casas de *dizima*, será o denominador 99000. E multiplicando os algarismos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, será o numerador 134355; e por conseguinte o quebrado que se busca $\frac{134355}{99000}$. Do mesmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. se reduz a $\frac{463}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; assim dos mais.

Das operaçoẽs Arithmeticas sobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados se pratica por meio das mesmas quatro operaçoẽs, que já temos mostrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma

De:

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a meſma denominaçaõ, para ſaber a ſua ſoma naõ he neceſſario mais doque ſomar os numeradores, e dar á ſoma delles o meſmo denominador.

Por exemplo: Havendo de ſomar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos ſaõ da meſma denominaçaõ, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a ſoma 10 ſerá o numerador, que com o meſmo denominador 7 dará a ſoma total que ſe buſca $\frac{10}{7}$, a qual ſe reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85.).

102 Se os quebrados propoſtos forem de differente denominaçaõ, primeiramente ſe reduziráõ ao meſmo denominador como aſſima moſtrámos (n. 90. 91.); e depois ſe ſomaráõ como no primeiro caſo.

Tendo de ſomar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; depois buſcaremos a ſua ſoma, que he $\frac{133}{60}$, ou $2\frac{13}{60}$ (n. 85.).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da meſma denominaçaõ, diminuir-ſe-ha o numerador de hum do numerador do outro, e ao reſto ſe dará o meſmo denominador.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e ao reſto 3 daremos

remos o meſmo denominador 9; donde ſerá o reſto que buſcamos $\frac{3}{9}$, que ſe reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93.).

104 Se de 9 $\frac{5}{8}$ quizermos tirar 4 $\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ podem diminuir-ſe de $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e ſomada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86.). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-ſe á unidade já tirada do numero 9) ficaraõ 4. E aſſim ſerá o reſto total 4 $\frac{6}{8}$, ou 4 $\frac{3}{4}$ (n. 93.).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro ſe reduziráõ ao meſmo denominador (n. 90.); e feita eſta preparaçaõ, ſe obrará como no primeiro caſo.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos eſtes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, reſultará o reſto $\frac{1}{12}$.

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados ſe executa por meio da regra ſeguinte: *Multipliquem-ſe os dous numeradores hum pelo outro, e da meſma ſorte os denominadores; o producto dos primeiros ſerá o numerador, e o dos ſegundos o denominador do producto que ſe buſca.*

Querendo, por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por

$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo numerador 2, e acharemos 8 para numerador; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto, o qual por conseguinte será $\frac{8}{15}$.

Para se entender a rasaõ desta regra, he necessario trazer á lembrança, que multiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas saõ as unidades do outro. Em virtude desta mesma difiniçaõ, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vêm a ser o mesmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar 2 vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$. Multiplicando pois 5 por 3, os *quintos* de $\frac{4}{5}$ se mudaõ em 15 *avos*, isto he, em partes *tres vezes* menores; e multiplicando 4 por 2, tomaõ se *duas vezes* essas novas partes: logo toma-se duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conseguinte se multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral assima dada.

Por exemplo: Se quizer-mos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á fórma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$ acharemos o proo producto $\frac{36}{7}$, o qual se reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Donde se vê, que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ se reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que se haõ de multiplicar, isto he, se forem compostos de inteiro e quebrado, cadahum dos inteiros se reduzirá á denominaçaõ do seu quebrado, e se somará com elle (n. 86.); e assim entraráõ na mesma regra assima dada (n. 106.).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, e teremos o producto $\frac{2457}{20}$, o qual se reduz a $122\frac{17}{30}$ (n. 85.).

§ Na multiplicaçaõ dos quebrados póde logo attender-se a que o producto se ache já reduzido aos termos mais simples.

Para isso he primeiramente necessario, que os mesmos quebrados, que se haõ de multiplicar, se reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-se se os termos *heterogeneos*, isto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum divisor commum, e por elle se partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deste modo resultarem, se multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto será o mesmo, que o dos quebrados propostos, abbreviado aos seus menores termos.

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectirectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do ſegundo podem ambos partir-ſe por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e aſſim conheceremos logo, ſem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, obſervaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do ſegundo tem ambos o diviſor maior commum 9, ſendo pelo qual divididos ſe reduzem a 2, e 7; e que o denominador do primeiro com o numerador do ſegundo tambem tem o diviſor commum 13, pelo que ſe reduzem a 1, e 2. Deſte modo ſe tornaráõ os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á fórma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{684}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles.

De Repartir Quebrados

109 Para ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira: *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual

qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e o producto $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$ (n. 75. 93.), ferá o quociente que bufcamos.

Para fe entender a rafaõ defta regra, deve obfervar-fe que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he bufcar quantas vezes fe contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Ifto fuppofto, he facil de ver que 2 *terços* fe devem conter em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais doque 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contém a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por confeguinte contém 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-fe primeiro por 2, e depois multiplicar-fe por 3, ou tomar-fe tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a fer o mefmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverfo do divifor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-fe quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro fe reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a divifaõ fe praticará conforme a mefma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ fe reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n.

109.) a multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente será $\frac{84}{5}$ ou 16 $\frac{4}{5}$. Do mesmo modo, se quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e será o quociente $\frac{3}{20}$.

Donde se vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ se reduz simplesmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem acompanhados de quebrados, cadahum se reduzirá á denominaçaõ do seu quebrado (n. 86.), e a operaçaõ se fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir 54 $\frac{3}{5}$ por 12 $\frac{2}{3}$, o dividendo se reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o divisor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-se há $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109.) multiplicar-se-há por $\frac{3}{38}$; e será o quociente $\frac{819}{190}$, ou 4 $\frac{59}{190}$ (n. 85.).

¶¶ Na divisaõ dos quebrados, será tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos possiveis.

Isto se conseguirá: Primeiramente, reduzindo os mesmos quebrados propostos aos seus menores termos, se o naõ estiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, isto he, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores, pelo seu maior divisor commum, quando o tiverem.

Deste

Deste modo resultaráõ outros dous quebrados; que daráõ o mesmo quociente dos primeiros, e e já reduzido aos termos mais simples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores saõ divisiveis por 5, e se reduzem a 1; e por tanto veremos, sem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do mesmo modo, se houvessemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores se reduzem a 1, logo conheceriamos sem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores se pódem ambos dividir por 11, e se reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, se reduzem tambem a 3, e 1. Por conseguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$, e será o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria se acharia em termos muito compostos $\frac{286}{429}$. ¶¶

Uso dos Quebrados.

112 PElo que assima dissemos (n. 96.), he facil de ver, como se ha de mostrar o valor de huma fracçaõ por meio das divisoens estabelecidas da unidade da questaõ.

Pergunta-se v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma ma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o mesmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96.), reduziremos 5 *libras* a *soldos* (n. 57.), e teremos 100 *soldos*, dividindo estes por 7, sahiráõ no quociente 14^{s}, e sobraráõ 2^{s}. Reduzindo tambem estes a *dinheiros*, teremos 24^{d}, que repartidos por 7 daráõ $3^{d}\frac{3}{7}$. E deste modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *soldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntassem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he visivel que podiamos buscar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra* como acabamos de mostrar, e multiplicallo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libr.* por $\frac{5}{7}$, e sahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107.), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de hũa *libra*. Este ultimo quebrado reduzido a *soldos* e *dinheiros* dará $2^{s}\,10^{d}\frac{2}{7}$; e por conseguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ de 24 *libr.* será $17^{lb}\,2^{s}\,10^{d}\frac{2}{7}$.

113 As fracçoens decimais, como naõ tem denominador, ainda saõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, estabelecidas pelo uso ordinario.

Querendo saber, por exemplo, quanto valem 0,532 de huma *toesa* em partes da divisaõ vulgar da mesma *toesa*; como esta consta de 6 *pés*, multiplitiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 mostrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. Depois, como o *pé* contém 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* se compoem de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 mostrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Peloque diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toesa* he 3 *pés*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*; e assim se procederá em outros casos semelhantes.

114 A avaliaçaõ dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por este nome entendemos huma serie de fracçoẽs separadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado naõ sómente póde reportar-se á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor se póde conceber como hum todo, e dividir em qualquer numero de partes, para significar algumas dellas. Assim de $\frac{3}{4}$ podemos mostrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividillo em *seis* partes, e dellas tomar *sinco*, donde resultaõ $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Estes quebrados successivamente relativos huns aos outros podem converter-se em hum só, que unicamente se reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros

tros, e da mesma sorte os denominadores. Assim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ vale o mesmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o mesmo que $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do mesmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que temos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ se reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, reduziremos o inteiro 5 á denominaçaõ do seu quebrado (n.86.), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que se reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto consideraveis, e naõ póde abbreviarse pelo methodo assima dado (n. 95.), se a natureza da questaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais simples, poderemos usar do methodo seguinte, pelo qual acharemos alternadamente valores ora maiores, ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na mesma fracçaõ proposta.

Tome-

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como se mostrará na Geometria, representa proximamente a *rasaõ* entre o *diametro*, e a *circunferencia* do circulo, e supponhamos que a queremos transformar em outras fracçoẽs menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais simples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a esta forma $\frac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$; a qual, desprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, se reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor approximado da fracçaõ dada, o mais exacto que he possivel em termos taõ simples, mas maior doque o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a esta forma $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{885145}{14159265}}}$; a qual, desprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, se reduz a $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (n. 26.) a $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (n. 109.) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto, que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a esta fórma $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{882090}{885145}}}}$; a qual, desprezando a fracçaõ que accompanha o denominador 15, se reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porém se aqui houvermos de suspender a operaçaõ, naõ desprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella vale quasi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}}$; expressaõ, que se reduz a $\frac{113}{355}$. Este he hum valor da fracçaõ proposta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma cousa menor que o verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ proposta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{1}{36506232}$.

§§ Os quebrados reduzidos á fórma, que se tem dado á fracçaõ proposta pela divisaõ successiva das fracçoẽs juntas aos denominadores inteiros, chamaõ se *quebrados continuos*.

E deve notar-se, que a divisaõ que fazemos nesta operaçaõ he a mesma que praticamos, quando buscamos o maior divisor commum dos ter-

termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervirnos logo dos quocientes achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ, que buſcamos.

Por exemplo; Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, achamos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porém como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles formaremos a expreſſaõ $\cfrac{1}{5\;\cfrac{1}{3\;\cfrac{1}{321}}}$, q̃ he exactamẽte igual ao quebrado propoſto; e deſprezando a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais raſaõ ſe deſpreza quanto he mais pequena, ficará $\cfrac{1}{5\;\cfrac{1}{3}}$, que ſe reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais doque $\frac{1}{82256}$ para igualar o quebrado propoſto.

Dos numeros complexos.

116 Aindaque as regras, que até agora temos dado, ſe pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com tudo de ſer conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a diviſaõ da unidade nelles eſtabelecida ſerve de facilitar as operaçoens.

Há

Há muitas eſpecies deſtes numeros, em que ſe uſaõ differentes diviſoens, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he neceſſario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas ſe applicaõ a todas as mais, em ſe ſabendo a natureza das ſuas diviſoens. Eiſaqui as mais uſadas entre nós.

§§ O dinheiro de França pela maior parte ſe conta por *libras*. A *libra* conſta de 20 *ſoldos*, e o *ſoldo* de 12 *dinheiros*. Eſtas differentes eſpecies ſe diſtinguem com as letras iniciais dos ſeus nomes. Aſſim 32^{lb} $15^{ſ}$ 7^{d} quer dizer 32 *libras*, 15 *ſoldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de pezo, ou *arratel*, quaſi em toda a parte ſe divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *ſcropulos*, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os pezos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couſas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire* de 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi, conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza, conforme os lugares.

As diſtancias locais, ſendo maiores, medemſe por *Eſtadios*, *Milhas*, *Legoas* &c. Nas menores ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o *pé* 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12 *pontos*; eſpecies, que por ſua ordem ſe aſſentaõ deſta maneira: 72^{T} 3^{P} 7^{P} 10^{l} 5^{pts}. A *braça* Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o *palmo* 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada *dia*

dia ſe divide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c., e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: 223^d 13^h $40'$ $53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, o *ſigno* em 30 *grâos*, o *grâo* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com a letra s, os grâos com a letra o, os minutos primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſcas &c., deſta maneira: 11^s 23^o $43'$ $52''$ $23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſoẽs particulares para avaliar a qualidade de algumas couſas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na ſua maior pureza, ſem liga alguma de outro metal, ſuppoem-ſe conſtar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *graõs*, e o *graõ* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deſte metal v. gr. hum *marco*, ſendo puro, vale como de 24 *quilates*; ſendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; ſendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve diſtinguir-ſe o *graõ* do *quilate*, do *graõ* de pezo. Ao *graõ* do *quilate* damos o nome de *graõ de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *graõ* de pezo tem differente valor, conforme he mais ou menos puro o ouro, que nelle ſe contém.

Pela Lei de 4 de Agoſto de 1688 ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e eſta he a Lei da noſſa moeda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *graõ* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conſeguintemente, que o márco de 24 quilates

vale

vale 104U727 $\frac{5}{11}$ reis. Pela meſma Lei ſe ordenou, que os Bate-folhas uſaſſem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizeſſem as ſuas obras de 20 quilates e meio. Neſtas, ſuppoſto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria ſahir o marco a raſaõ de 89U454 $\frac{6}{11}$ reis, a onça a raſaõ de 11U181 $\frac{9}{11}$, e a oitava a raſaõ de 1U397 $\frac{8}{11}$. Porêm para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, ſem liga alguma, ſuppoem-ſe conſtar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *graõ* de 4 *quartas*. E por eſta diviſaõ ſe regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual ſendo pura valerá como de 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela meſma Lei já citada ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moeda, em 6U000 reis. Em conſequencia deſte valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco U545 $\frac{5}{11}$; e o marco de 12 *dinheiros*, que he a Lei dos Bate-folhas, vale 6U545 $\frac{5}{11}$. Pela meſma raſaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente 5U590 $\frac{10}{11}$. Porém, para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro, e prata alem do valor da Lei, que chamamos intrinſeco, tem tambem hum valor de ſinal, pro-

cedido

cedido dos direitos da caſa da moeda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de pezo 6U000 reis, e pelo cunho vale 6U400; e o cruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, péza U375 reis, e corre por U480 reis. §§

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer eſta operaçaõ, eſcrevem-ſe todas as addiçoẽs, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da meſma eſpecie fiquem diſpoſtas em huma columna vertical; e tendo paſſado huma riſca por baixo, principia-ſe a operaçaõ pelas unidades da infima eſpecie da direita para a eſquerda. Se a ſoma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da eſpecie proximamente maior, eſcrever-ſe-há debaixo da riſca; e ſe chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, eſcrever-ſe-há ſómente o que ficar, tiradas eſſas unidades, ou cifra, naõ ficando reſto; e as tais unidades ſe levaraõ para a columna ſeguinte, na qual ſe praticará o meſmo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

QUerendo ſomar - - -	227^{lb}	$14^{ſ}$	8^{d}	
	2549	18	5	
	184	11	11	
	17	10	7	
	2979^{lb}	$15^{ſ}$	7^{d}	Soma

Ordenadas as addiçoẽs, como ſe vê no exemplo, principiaremos pelos *dinheiros*, cuja ſoma faz 31^{d}, nos quais ſe contém 2 vezes 12^{d}, iſto he, $2^{ſ}$, e além diſſo ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na columna reſpectiva, e levaremos

mos 2^{s} para a columna dos *ſoldos*. Neſta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero aſſentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades reſpectivas, e levaremos a dezena 1 para a ſomar com as dezenas dos meſmos *ſoldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *ſoldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o reſto 1, que he 1 dezena de *ſoldos*; peloque aſſentaremos eſta dezena no ſeu lugar, e levando 2^{lb} para a columna ſeguinte, acharemos finalmente que a ſoma total he $2979^{lb}\ 15^{s}\ 7^{d}$

Exemplo II.

SE quizermos ſomar as quatro addiçoẽs ſeguintes - - - - - -

54^{T}	2^{P}	3^{P}	9^{l}
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^{T}	3^{P}	6^{P}	5^{l}

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^{l}, ou $3^{P}\ 5^{l}$; e por conſeguinte aſſentaremos ſómente as 5^{l}, e levaremos as 3^{P} para a columna ſeguinte. Eſta dará a ſoma 30^{P}, ou $2^{P}\ 6^{P}$; e por iſſo aſſentaremos nella as 6^{P}, e levaremos os 2^{P} para a columna ſeguinte; cuja ſoma acharemos ſer 15^{P}, ou $2^{T}\ 3^{P}$. Peloque aſſentando nella 3^{P}, e levando 2^{T} para a columna ſeguinte, teremos a ſoma total $85^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}\ 5^{l}$.

Exem-

Exemplo III.

55 HAvendo de ſomar -

23^d	13^h	$43'$	$52''$
35	0	12	41
0	23	0	24
12	14	23	5
72^d	3^h	$20'$	$2''$ Som.

Na columna dos *ſegundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo eſcreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 12. E como 6 dezenas de *ſegundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmente 12 por 6, e o quociente moſtrará $2'$, os quais levaremos para a columna ſeguinte, e como naõ ficou reſto algum da dita diviſaõ, naõ eſcreveremos nada nas dezenas dos *ſegundos*. Na columna ſeguinte as unidades daõ 10, e logo aſſentaremos a 0, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente ſerá 1^h que guardaremos para a columna das *horas*, e ficaráõ 2, que aſſentaremos na caſa das dezenas dos minutos. Na columna das *horas* acharemos a ſoma total 51^h, que ſaõ 2^d 3^h; e por conſeguinte aſſentando as 3^h, e levando os 2^d para a ſua reſpectiva columna, acharemos que as addiçoẽs propoſtas ſomaõ 72^d, 3^h $20'$ $2''$.

Exemplo IV.

SE tivermos para ſomar -

11^s	23^o	$43'$	$53''$
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10^s	27^o	$34'$	$46''$ Soma.

Soma-

Somaremos os *segundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *grâos*, logo assentaremos a soma dellas 7° na mesma casa, e passaremos ás dezenas, cuja soma he 5; e porque 3 dezenas de *grâos* fazem hum *signo*, na casa das dezenas assentaremos 2, e levaremos huma unidade para a colunna dos *signos*. Esta dá a soma 22; mas porque no calculo destes numeros se lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^s, todas as vezes que os houver na soma; de 22^s tiraremos 12^s, e assentaremos o resto 10^s; donde a soma que buscamos será $10^s\ 27^\circ\ 34'\ 46''$. §§

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos se assentaõ, como no Somar, e a operaçaõ se principia tambem pela menor especie. Se o numero inferior se póde tirar do superior, feita a subtracçaõ, o resto se escreve por baixo da risca. Porém naõ se podendo tirar, o numero superior se aumentará com o que produzir huma unidade da especie immediatamente maior reduzida ás unidades da colunna em que estamos. Entaõ feita a subtracçaõ, se escreverá o resto em baixo; e o numero de quem se tomou a unidade se tratará mentalmente sem ella na operaçaõ seguinte, na qual se procederá do mesmo modo, e assim por diante.

Exemplo I.

SE do numero - - - - - - 143^{lb} 17^{s} 6^{d}
quizermos tirar - - - 75 12 9

68^{lb} 4^{s} 9^{d} Resto.

Como de 6^{d} naõ se pódem tirar 9^{d}, de 17^{s} tomaremos mentalmente 1^{s}, que vale 12^{d}, e a juntando estes com os 6^{d} teremos 18^{d}, dos quais tirando 9^{d}, ficaõ 9^{d}, que assentaremos por baixo. E no lugar seguinte naõ tiraremos 12^{s} de 17^{s}, mas de 16^{s}, por causa da unidade que já tirámos dos 17^{s}; e escreveremos o resto 4^{s}. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conseguinte o resto total será 68^{lb} 4^{s} 9^{d}.

Exemplo II.

SE de - - - - - - - - - - 163^{lb} 0^{s} 5^{d}
houvermos de tirar - - 84 18 9

78^{lb} 1^{s} 8^{d}. Resto.

Naõ podendo tirar 8^{d} de 5^{d}, e naõ havendo na casa dos *soldos* numero, do qual tomemos huma unidade, tomalla-hemos de 163^{lb}, a qual valerá 20^{s}. Destes deixaremos mentalmente 19^{s} no lugar vazio dos *soldos*, e converteremos sómente 1^{s} em *dinheiros*, os quais ajuntaremos com os 5^{d}; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o resto 78^{lb} 1^{s} 8^{d}.

Exemplo III.

55 SE do numero - 7^{s} 12^{o} $20'$ $42''$
quizermos tirar 4 23 36 23

2^{s} 18^{o} $44'$ $19''$ Resto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos*, acharemos para diminuir 3 de 1; e como isto naõ póde ser, tomaremos huma unidade dos 12°, a qual vale 6 dezenas de *minutos*, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do mesmo modo nas dezenas dos *gráos*, acharemos 2 para tirar de o, e por isso tomaremos huma unidade dos 7^s, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *gráos*; e acabando a operaçaõ, teremos o resto 2^s 18° 44′ 19″.

No calculo destes numeros muitas vezes se diminue hum numero maior de outro menor, porque a este se póde ajuntar para esse effeito hum circulo inteiro, ou 12^s.

Exemplo IV.

SE de - - - - - - - - - - -	3^s	0°	12′	27″
houvermos de tirar	9	15	27	22
	5^s	14°	45′	5″ *Resto.*

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, sendo necessario tomar huma unidade da casa dos *gráos*, que a naõ tem, tomálla-hemos dos 3^s, a qual valerá 30°, e destes deixaremos 29° na mesma casa dos *gráos*, e tomaremos sómente 1°, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a subtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^s de 2^s, pelo que ajuntaremos 12^s a 2^s, e feita a subtracçaõ será o resto que buscamos 5^s 14° 45′ 5″.

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A praxe desta operaçaõ póde reduzir-se em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que assima temos dado (n. 106). Por-

Porque v. gr. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por $54^T\ 3^P$ de obra, tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a raſaõ de $42^{lb}\ 17^{ſ}\ 8^{d}$; podemos converter o multiplicando $42^{lb}\ 17^{ſ}\ 8^{d}$ todo em *dinheiros* (n. 57.), que dará 10292^{d}. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzir-ſe-há o multiplidando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador $54^T\ 3^P$ convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma *libra* por $\frac{327}{6}$ (n. 106.); donde reſulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da meſma *libra*, o qual ſe reduz finalmente (n. 112.) a $2337^{lb}\ 2^{ſ}\ 10^{d}$.

Eſte methodo ſe extende a toda a ſorte de numeros complexos. Porém, como o que agora moſtraremos ſe executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que ſe contém em outro algumas vezes exactamente, chama-ſe parte *aliquota* delle; e o que ſe naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Aſſim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, como já diſſemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. g. qualquer numero ſe houver de multiplicar por $8\frac{3}{4}$, deveremos tomallo 8 vezes, e além diſſo $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero; ou buſcando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes; ou tomando primeiramente a ſua ametade, e depois ametade da meſma ametade. Aſſim v. gr.

Se tiveſſemos de multiplicar 84

por - - - - - - - - - - - - - - 8 $\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ Producto.

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois, para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, reſolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$. E aſſim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade deſta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

121 Para iſto ſe applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles ſe compoem, ſaõ quebrados tanto entre ſi, como a reſpeito da unidade principal; e que para ſe multiplicarem com mais facilidade, he por conſeguinte muito conveniente reſolvellas em partes aliquotas tanto da unidade principal, como humas das outras. Quando por eſta reſoluçaõ naõ ſe pudérem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, ſupprir-ſe-há com productos ſubſidiarios; da maneira, que moſtraremos nos exemplos ſeguintes.

Ex-

Exemplo I.

PErgunta-se, quanto devem custar $54^T\ 3^P$ de obra, a rasaõ de 72^{lb} por *toesa*?

Deveremos pois multiplicar - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - - - - $54^T\ 3^P$

$$\begin{array}{rlll} & 288^{lb} & 0^s & 0^d \\ 360 & & & \\ & 36 & & \\ \hline & 3924^{lb} & 0^s & 0^d \end{array}$$
Prod.

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra costumada da multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^P, reflectiremos que este numero representa meia *toesa*, e por conseguinte deve custar ametade do preço della; pelo que assentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e somando os tres productos parciais, teremos o producto que se pede 3924^{lb}.

Exemplo II.

PEde-se o producto de - - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - $54^T\ 5^P$

$$\begin{array}{rlll} & 288^{lb} & 0^s & 0^d \\ 360 & & & \\ & 36 & & \\ & 24 & & \\ \hline & 3948^{lb} & 0^s & 0^d \end{array}$$
Producto

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^P saõ $\frac{5}{6}$ de huma *toesa*, resolveremos este quebrado

brado em $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E assim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e somando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

Querendo-se multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - 5^{T} 4^{P} 8^{p}

360^{lb}	0^{s}	0^{d}
36		
12		
4		
4		
416^{lb}	0^{s}	0^{d} Producto.

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^{T}, multiplicaremos depois por 4^{P}, e para isso resolveremos este numero em 3^{P} e 1^{P}. Por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^{P}, observaremos que elle he hum terço de 3^{P}, e por conseguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^{p}, em lugar de compararmos as *polegadas* com a *toesa*, será melhor que as comparemos com o *pé*; e resolvendo 8^{p} em 4^{p} e 4^{p}, veremos que cada huma destas partes he hum terço do *pé*, e por isso dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^{P}. Reunindo finalmente todas estas partes, será o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-se-há a operaçaõ, como se mostra no exemplo seguinte.

Exem-

Exemplo IV.

PAra multiplicar - - - 72^{lb} 6^{s} 6^{d}
por - - - - - - - - 27^{T} 4^{p} 8^{p}

504^{lb}	0^{s}	0^{d}	
144			
6	15	0	
1	7	0	
0	13	6	
36	3	3	
12	1	1	
4	0	4	$\frac{1}{3}$
4	0	4	$\frac{1}{3}$
2009^{lb}	0^{s}	6^{d}	$\frac{2}{3}$. Producto.

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27, passaremos tambem a multiplicar 6^{s}, para o que resolveremos este numero em 5^{s} e 1^{s}. E porque 5^{s} fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar 5^{s} por 27 será o mesmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he 6^{lb} 15^{s}. E para multiplicarmos 1^{s} por 27, como 1^{s} he hum *quinto* de 5^{s}, tomaremos hum *quinto* do producto antecedente 6^{lb} 15^{s}, que he 1^{lb} 7^{s}. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo mesmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de 1^{s}, e conseguintemente tomaremos ametade do producto 1^{lb} 7^{s}, que achamos competir a 1^{s}, a qual será 13^{s} 6^{d}.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora para o multiplicarmos tambem por 4^{p}, praticaremos como no exemplo antecedente.

te. E resolvendo 4^P em 3^P e 1^P, por 3^P tomaremos ametade do multiplicando, a saber 36^{lb} 3^{s} e 3^d, e por 1^P tomaremos hum terço dadita ametade, que he 12^{lb} 1^{s} 1^d. Do mesmo modo resolveremos 8^P em 4^P e 4^P, e por cada huma destas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^P, a saber 4^{lb} 0^{s} 4^d $\frac{1}{3}$. E reunindo todas as ditas partes, teremos o producto total 2009^{lb} 0^{s} 6^d $\frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem sido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por causa da sua simplicidade. Quando forem mais compostas, usaremos do artificio que se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo V.

PErgunta-se, quanto devem custar 17^T de obra, a rasaõ de 34^{lb} 10^{s} 2^d a *toesa*?

Será pois o multiplicando	34^{lb}	10^{s}	2^d
e o multiplicador - - - - -	17^T		
	238^{lb}	0^{s}	0^d
	34		
	8	10	
	0	17	
	0	2	10
	586^{lb}	12	10^d Product.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois 10^{s}, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} 10^{s}. Entaõ para multiplicarmos 2 por 17, observaremos que 2^d fazem huma sexta parte te de 1ſ, e conſeguintemente huma ſexta de huma decima, ou (n. 114.) huma ſexageſima parte de 10ſ. Pelo que por 2^d deveriamos tomar huma ſexageſima parte do producto 8^{lb} 10ſ, que temos achado competir a 10ſ. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} 17ſ, e a marcaremos com pontos, ou riſcas, para denotar que he hum producto ſubſidiario, que ao depois naõ havemos de ſomar. Delle porem tomaremos a ſexta parte 2ſ 10^d, que vem a ſer a ſexageſima parte de 8^{lb} 10ſ, e ſomando todos os productos parciais, ſerá o producto que ſe pergunta 586^{lb} 12ſ 10^d.

Exemplo VI.

PErgunta-ſe, quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} 10ſ 2^d, a raſaõ de 17^T por 1^{lb}?

Multiplicaremos pois -	17^T					
por - - - - - - - - -	34^{lb}	10ſ	2^d			
	68^T	0^P	ro	0^l	0^{pts}	
	51					
	8	3				
	0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
	0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
	586^T	3^P	10^P	2^l	4^{pts}	$\frac{4}{5}$ Producto.

E tendo multiplicado 17^T por 34^{lb}, paſſaremos a multiplicar por 10ſ; e porque 10ſ fazem meia *libra*, pelo producto correſpondente tomaremos ametade de 17^T, que he 8^T 3^P. Para multiplicarmos por 2^d, buſcaremos o producto que deveria dar 1ſ, tomando a decima parte do producto ante-

antecedente, a ſaber $0^T\ 5^P\ 1^P\ 2^l\ 4^{Pts}\ \frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos, para delle tomarmos a ſexta parte $0^T\ 0^P\ 10^P\ 2^l\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais acharemos, que o producto pedido he $586^T\ 3^P\ 10^P\ 2^l\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$.

Temos dado eſte exemplo, para confirmar o que aſſima diſſemos (n. 45.); que era neceſſario diſtinguir o *multiplicando* do *multiplicador*, quando ambos foſſem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os meſmos *factores* 17^T, e $34^{lb}\ 10^f\ 2^d$: e com tudo reſultaõ productos differentes.

§§ He porém de advertir, que a dita differença he ſómente na expreſſaõ; e que na realidade ſe declara pelo primeiro producto o meſmo numero de *libras*, que de *toeſas* pelo ſegundo; ſendo ſómente diverſos os algariſmos, porque ſaõ diverſas as diviſoens da *toeſa*, e da *libra*. Para iſto ſe provar, baſta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toeſa* no ſegundo, a huma fracçaõ da unidade principal, e ambos ſe acharaõ concordes, ſendo hum $586^{lb}\ \frac{77}{120}$, e o outro $586^T\ \frac{77}{120}$.

Advirta-ſe tambem, que nos exemplos aſſima dados ſe ſuppoem ſempre que a unidade principal he a da maior eſpecie, mas que póde ſervir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. gr. perguntar-ſe quanta obra ſe deve fazer por $34^{lb}\ 10^f\ 2^d$, a raſaõ de 17^T por 1^f. Neſte caſo, por 2^d teriamos o producto $2^T\ 5^P$, por 10^f te-

teriamos 170^T, e por 34^{lb} finalmente $1156o^T$; donde feria o producto total $11732^T\ 5^p$. §§

Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo fómente for complexo, e fe ao mefmo tempo o dividendo, e o divifor moftrarem unidades de diverfa fpecie, a operaçaõ fe praticará da maneira feguinte.

Dividir-fe-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar defta divifaõ reduzir-fe-há ás unidades da efpecie immediatamente inferior (n. 57.), e fe ajuntará com as unidades femelhantes que no dividendo houver, e o total fe partirá do mefmo modo. O refto defta divifaõ fe tornará a reduzir ás unidades da efpecie feguinte, e fe ajuntará com as do dividendo, e a foma fe tornará a repartir; e affim por diante, até chegar á infima efpecie.

Exemplo.

PAgando-fe 4783 *libras*, 3 *foldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal 87 de *toefas* de obra, queremos faber a quanto fahe cada *toefa*.

Para iffo repartiremos $4783^{lb}\ 3^{f}\ 9^{d}$ por 87^T, da maneira feguinte:

$4783^{lb}\ 3^{f}\ 9^{d}$	87^T
433	$54^{lb}\ 19^{f}\ 7^{d}$
85	
1703^{f}	
833	
50	
609^{d}	
000	

Prin-

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65.), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de resto 85^{lb}. Este resto convertido em *soldos* com os 3^{s} do dividendo primitivo faz 1703^{s}; e partindo esta soma por 87, sahiráõ no quociente 19^{s}, e sobraráõ 50^{s}. Do mesmo modo reduzindo este resto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^{d} do dividendo, teremos 609^{d}; os quaes sendo finalmente repartidos por 87, daraõ no quociente 7^{d}, sem resto algum; e conseguintemente será o quociente total que buscamos $54^{lb}\ 19^{s}\ 7^{d}$.

125 No caso porém de mostrarem unidades da mesma especie tanto o dividendo, como o divisor; antes de fazer a divisaõ he necessario examinar, se o quociente deve, ou naõ deve ser da mesma especie que elles; exame, que facilmente se decide pelo estado da questaõ.

126 Mostrando pois o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo ao mesmo tempo conformar-se o quociente com as unidades de ambos elles, a divisaõ se praticará inteiramente como no primeiro caso.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-se quanto cabe a cada *libra*. He claro nesta questaõ, que o quociente deve mostrar unidades da mesma especie que as do dividendo, e do divisor, isto he que se deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o resto em *soldos* tornaremos a dividir por 1243, e assim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he $5^{lb}\ 16^{s}\ 8^{d}\ \frac{760}{1243}$.

127 Mostrando porém o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo o quociente mostrar unidades de differente especie que as de ambos elles, antes de fazer a divisaõ

será

ſerá neceſſario reduzir tanto o dividendo como o diviſor ás unidades da infima eſpecie que no meſmo dividendo ſe contém (n. 57.). Depois diſſo praticar-ſe-há, como no exemplo precedente, tratando as unidades do dividendo aſſim reduzido, como ſe foſſem da meſma eſpecie das que devem ſahir do quociente.

Pergunta-ſe v. gr. quantas *toeſas* de obra ſe devem fazer por 7954 *libr.* 11. *ſold.* e 7. *dinh.* a razaõ de 72 *libras* a *toeſa*? Pela meſma queſtaõ entenderemos, que o quociente deve ſahir em *toeſas*, e partes da *toeſa*. E por iſſo reduziremos 7954^{lb} $11^{ſ}$ 7^{d} tudo em *dinheiros* e teremos 1909099^{d}; o meſmo faremos ao diviſor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toeſas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde reſultará o quociente 110^{T} 2^{p} 10^{P} $6^{lh}\frac{13}{20}$.

Diviſaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o diviſor, reduzillo-hemos primeiro ás unidades da ſua infima eſpecie (n. 57.), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima eſpecie na unidade principal do meſmo diviſor. Deſte modo a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente de hum diviſor incomplexo.

Exemplo.

TEndo cuſtado 854^{lb} $17^{ſ}$ 11^{d} huma obra de 57^{T} 5^{P} 5^{P}, perguta-ſe a como ſahe a *toeſa*? Deveremos pois dividir 854^{lb} $17^{ſ}$ 11^{d} por 57^{T} 5^{P} 5^{P}. Para iſſo reduziremos o diviſor a *pollegadas*, que fa-

fará 4169p; e como saõ necessarias 72p para fazer huma *toesa*, que he a unidade principal do divisor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n. 121.), e teremos $61552^{lb}\ 10^{s}$. Por tanto partiremos o numero $61552^{lb}\ 10^{s}$ por 4169, da maneira seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 61552^{lb}\ 10^{s} & 4169 \\ \cline{2-2} 19862 & 14^{lb}\ 15^{s}\ 3^{d}\ \frac{1833}{4169} \\ 3186 & \\ \cline{1-1} 63730^{s} & \\ 22040 & \\ 1195 & \\ \cline{1-1} 14340^{d} & \\ 1833 & \end{array}$$

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, e 3186^{lb} de resto. Este reduzido a *soldos* com os 10^{s} do dividendo faz 63730^{s}, os quais sendo partidos por 4169 daõ no quociente 15^{s}, ficando de resto 1195^{s}. Este reduzido a *dinheiros* faz 14340^{d}, os quais sendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^{d}, e sobraõ 1833^{d}; peloque será o quociente pedido $14^{lb}\ 15^{s}\ 3^{d}\ \frac{1833}{4169}$.

He clara a rasaõ desta regra. Porque reduzindo-se o divisor $57^{T}\ 5^{P}\ 5^{p}$ a 4169p, e sendo 1p hum *72-avo* da *toesa*, o mesmo divisor se reduzirá a esta fracçaõ da *toesa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ, he necessario inverter-lhe primeiro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109.) Logo no exemplo proposto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem a ser o mesmo que multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra prescreve.

Co-

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto: sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126. 127.).

Aqui se poderia fallar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as mediçoens *Geodesicas* e *Stereometricas*. Mas estas operaçoens pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; Porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 Chama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5 por que resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Raiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadra* multiplicando e multiplicador ao mesmo tempo; e por conseguinte he duas vezes factor do producto (n. 42.) Donde vem, que o dito producto, ou quadrado se chama tambem *segunda potencia* do mesmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero, naõ he necessario mais doque multiplicallo por si mesmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimen-

to

to da raiz, he neceſſario hum methodo particular, principalmente quando o numero conſtar de mais que dous algariſmos.

*S*e o numero propoſto conſtar de hum ou dous algariſmos, a ſua raiz, em numero inteiro, ſerá algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados ſaõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Aſſim v. gr. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, ſerá 8; porque eſtando 72 entre 64 e 81, a ſua raiz tambem ſe achará entre as raizes dos ditos numeros, que ſaõ 8, e 9; e por conſeguinte ſerá 8 com hum quebrado. Eſte quebrado porem nunca ſe póde determinar exactamente, mas póde approximar-ſe continuamente, como mais abaixo ſe moſtrará.

132 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-ſe numero *ſurdo irracional*, ou *incommenſuravel*.

¶¶ Temos alguns principios derivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero propoſto certamente naõ he quadrado, e ſaõ os ſeguintes.

Todo o numero cuja ultima letra à direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ſer quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, ſinco, ou geralmente, em numero impar de cifras, naõ ſerá quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no reſto 2, 3, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de reſto 3, ou 6, naõ ſómente naõ ſerá quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer grão que ella ſeja.

Do meſmo modo, ſe de hum numero tirarmos os *onzes*, e tivermos de reſto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ſer quadrado.

Os

Os numeros, que naõ forem incluidos nestas regras poderáõ ser quadrados, mas naõ se segue por isso que o sejaõ necessariamente. §§

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, observando o que se passa na formaçaõ do quadrado, acharemos o methodo inverso de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primeiramente, multiplicaremos o 4 superior pelo 4 inferior, e o producto será evidentemente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois, multiplicaremos o 5 superior pelo 4 inferior, e teremos nesta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ, multiplicaremos o 4 superior pelo 5 inferior, donde resultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44.) o *producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente, multiplicaremos o 5 superior pelo 5 inferior, e teremos por esta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando estes productos parciais, achamos que o numero proposto produz o quadrado 2916, o qual vemos que se compoem *Do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da sua raiz 54.

134 Sendo isto que acabamos de observar huma consequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifesto que naõ pertence sómente ao

numero 54, mas a todo o numero composto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero composto de dezenas e unidades contém as tres sobreditas partes a saber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Isto supposto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ se contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he necessariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deste producto se naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a sua raiz, podemos discorrer desta maneira.

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da mesma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem mostrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle se acha nas duas ultimas letras 16; logo estará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ser maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o assentaremos á direita do numero proposto, como se mostra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o seu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o resto 4, para ta junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero propofto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, refectiremos no que contém finalmente o refto 416. Pelo que affima moftramos fe vê que naõ contém mais que duas partes, a faber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da mefma raiz. A primeira deftas nos baftará para acharmos a letra que agora bufcamos; pois fendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas unidades, fe a dividirmos pelo dobro das dezenas que ja conhecemos, o quociente moftrará as unidades (n. 74.). Falta pois faber, em que parte do refto 416 fe contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades; e como, pelo que affima notamos, nada delle fe contém na ultima letra do dito refto, neceffariamente fe achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual efcreveremos debaixo, e o quociente 4 moftrará as unidades da raiz, que por confeguinte ferá 54.

He porém de advertir, que, fem embargo de termos nefte exemplo achado o quociente 4 juftamente como convinha, póde algumas vezes fucceder que o quociente achado defta maneira feja maior do que convem; porque 41 (ifto he, a parte reftante depois de feparada a ultima letra) naõ fómente contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem refultar do quadrado das unidades. Por efta rafaõ, para naõ haver duvida fobre a letra que temos achado, ufaremos da verificaçaõ feguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter efcrito na raiz, tambem a affentaremos á direita do divifor 10, que ficará 104, e multiplicaremos efte numero pela mefma letra 4,

 tiran-

tirando os productos ſucceſſivos das partes correſpondentes de 416, como praticamos na Diviſaõ; e como naõ reſta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se ficaſſe porém algum reſto, naõ deixaria por iſſo a raiz de ſer exacta até a caſa das unidades, com tanto que o dito reſto naõ foſſe igual, ou maior que o dobro da raiz achada augmentado de huma unidade; mas iſto he o que ſe naõ póde recear, pois pelo methodo aſſima expoſto ſómente podemos errar tomando o quociente maior do que convem.

A verificaçaõ, que temos enſinado, he fundada ſobre a meſma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que ſe fórma ao meſmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de moſtrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de trez.

Depois de ſe terem ſeparado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buſcar-ſe-há a raiz quadrada da parte que ficar á eſquerda, e eſſa raiz moſtrará as dezenas da raiz total que ſe buſca, e ſe aſſentará adiante do numero propoſto com a diſtinçaõ de huma riſca perpendicular, que a ſepare delle.

O quadrado exacto da letra achada ſe tirará da meſma parte, cuja raiz ſe buſcou, e o reſto ſe aſſentará debaixo, para junto do qual ſe abaixaráõ as duas letras, que ſe tinhaõ ſeparado no numero propoſto.

Neſtas letras ſe apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á eſquerda ſe dividiráõ raõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual se assentará por baixo.

O quociente desta divisaõ se escreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do divisor, enchendo a casa correspondente á letra separada.

E finalmente multiplicar-se-há o divisor assim aumentado pelo mesmo quociente, e o producto se tirará do numero que fica por sima do dito divisor. Mostremos isto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-se a raiz quadrada do numero 7569.

75.69 116.9 167	87 Raiz.
000	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e busquemos a raiz de 75, que acharemos ser 8, e esta letra assentaremos adiante da risca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, assentando por baixo o resto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69 que tinhamos separado.

Depois no resto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual escreveremos o divisor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a divisaõ, acharemos o quociente 7, que assentaremos adiante da primeira letra da raiz 8, e adiante do divisor 16, debaixo da letra separada 9.

Finalmente multiplicaremos o divisor assim aumentado 167 pelo mesmo quociente 7, e diminuirenuiremos o producto do numero superior 1169; e porque naõ sobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a sua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-se bem, que naõ se ha de partir pelo dobro das dezenas senaõ a parte que ficar á esquerda depois de separada a ultima letra. De sorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro, naõ poderá por isso usar-se da letra separada, mas assentar-se-ha cifra no quociente. Ao contrario, se o mesmo dobro se contiver na parte, que constitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá pór-se no quociente letra maior que 9, pela rasaõ que já dissemos tratando da Divisaõ (n. 66.).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer sobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais de quatro letras, he facil de entender o que se deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva constar a raiz, sempre a podemos considerar como composta de duas partes, das quais huma seja de dezenas, e a outra de unidades; como v. gr. o numero 874 póde considerar-se composto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Isto supposto quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que acabamos de expór, pelo mesmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum só numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicámos á primeira para achar a segunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, se for necessario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas, o mesmo que praticámos com as duas primeiras para achar a segunda; e assim por diante.

Mas

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A raſaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas, e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135. e ſeg.). E pela meſma raſaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas, deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exemplo III.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 76807696.

```
76.80.76.96 | 8764
 12 8.0     |
 1 6 7      |
-----------
 1 1 1 7.6
 1 7 4 6
-----------
  7 0 0 9.6
  1 7 5 2 4
-----------
  0 0 0 0 0
```

Tendo diſtribuido o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, buſcaremos a raiz da ultima claſſe á eſquerda 76, que acharemos ſer proximamente 8, e aſſentaremos eſte algariſmo adiante da riſca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, eſcrevendo por baixo o reſto 12 para jun-

to

to do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 80, ſeparando-lhe com hum ponto a ultima letra o. Debaixo da parte que fica 128 eſcreveremos o diviſor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que eſcreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem adiante do diviſor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, eſcrevendo por baixo o reſto 111, para junto do qual traremos a claſſe ſeguinte 76, ſeparando nella a ultima letra. Por baixo da parte reſtante 1117 eſcreveremos o diviſor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que aſſentaremos na raiz, e adiante do diviſor; e multiplicando 1746 pelo meſmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e eſcreveremos debaixo o reſto 700, ao qual ajuntaremos a ultima claſſe 96, ſeparando-lhe a ultima letra. Aſſim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no diviſor; e multiplicando 17524 pelo meſmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque neſta ultima operaçaõ naõ fica reſto, ſerá a raiz exacta do numero propoſto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará neceſſariamente algum reſto; e a raiz achada ſerá a verdadeira raiz do maior quadrado que no dito numero ſe contém. Neſte caſo naõ he poſſivel extrair-ſe a raiz exactamente, mas podemos approximár-nos ao ſeu juſto valor quanto quizermos, de ſorte que o erro ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel.

Eſta approximaçaõ ſe faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-ſe ao numero dado duas ve-

vezes tantas cifras, quantas ſaõ as letras decimais que ſe querem na raiz; tira-ſe a raiz, como nos exemplos antecedentes; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntaráõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54.), o quadrado (cujos factores ſaõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, iſto he, na ſua raiz ſe contem.

Exemplo IV.

PEde-ſe a raiz quadrada de 87567 exacta até a caſa das milleſimas.

Para ter milleſimas requerem-ſe tres caſas de *dizima*; ſerá logo neceſſario ajuntar ao numero dado ſeis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 87567000000

```
8.75.67.00.00,00 | 295917
47.5             |
49               |
-----
 346.7
 585
-----
  5420.0
  5909
-------
  10190.0
  59181
--------
  427190.0
  591827
---------
  329111
```

Fa-

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porém nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até a casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até a casa das millionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

§§ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma definiçaõ da *raiz* (n. 130.). Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultarà o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo, tirando-se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraràõ os noves; e o resto final será o mesmo que deve ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim no mesmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o resto 4, que multiplicado por si mesmo faz 16, lançando fóra 9, ficaõ

caõ 7, que ſomados com o reſto da operaçaõ 2347, e tirando ao meſmo tempo os noves, finalmente daráõ o reſto 5; e eſte he o que deve ſobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como ſobra com effeito. A prova dos *onzes* ſe applica como a dos *noves*, e de ambas ſe entenderá aqui o meſmo que ja fica advertido (n. 75.)

141 Temos viſto aſſima (n.106.), que para multiplicar hum quebrado por outro, he neceſſario multiplicar entre ſi os numeradores, e da meſma ſorte os denominadores. Por conſeguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os ſeus termos. Aſſim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, deveremos tirar as raizes do numerador, e denominador. Deſte modo a raiz de $\frac{9}{16}$ ſerá $\frac{2}{3}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde ſucceder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ ſejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador ſómente o naõ for, tirar-ſe-há a ſua raiz approximada pelo methodo aſſima expoſto, à qual ſe dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz aproximada do numerador 2, que ſerá 1, 4, ou 1, 41, ou 1, 414, ou 1,4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e

acha-

acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,41}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porém, ſe o denominador naõ for quadrado, multiplicar-ſe-haõ ambos os termos do quebrado propoſto pelo meſmo denominador, e a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro eſte quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as milleſimas, no caſo de baſtar eſta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes eſpecies de fracçoens ao meſmo tempo, podemos converter o reſultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99.).

145 Em fim, ſe vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros ſe reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86.), e entaõ ſe praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos v. gr. a raiz de $8\frac{3}{7}$, converteremos eſte numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86.), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada ſerá $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem ſe póde converter em *dizima* o quebrado, antes de ſe lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* ſe haõ de buſcar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Appli-

can-

cando este methodo ao numero $8\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até á casa das millesimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n.99.), cuja raiz será 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as casas da dizima sejaõ sempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para isso lhe ajuntaremos as cifras necessarias (n. 30.); e a raiz achada sempre terá na dizima ametade das casas da dita quantidade proposta, para o que se assentaráõ as cifras que forem necessarias entre a virgula e a primeira letra da mesma raiz.

Assim querendo extrair a raiz de 21,935 até a casa das millesimas, tiralla-hemos como de 21,935000, e será 4,683. Do mesmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e assim das mais.

148 O methodo, que fica exposto (n.69. e seg.) para se abbreviar a Divisaõ, tambem se póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo bastante, que ella se ache exacta até a casa das unidades, distribuir-se-há primeiramente em classes o numero dado, e depois se cortaráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as classes, e das que ficarem se extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo resto que ficar se partirá pelo divisor da operaçaõ precedente, no qual se naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o resto que ficar desta divisaõ se tornará a partir pelo mesmo divisor, desprezando-se nelle outra letra á direita; e assim por diante.

Da-

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das ſuas raizes.

149 SE qualquer numero ſe multiplicar pelo ſeu quadrado, o producto que reſultar he o que chamamos *cubo* do meſmo numero. Aſſim 27 he cubo do numero 3, porque reſulta da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9.

Donde ſe vê, que o numero que ſe eleva ao cubo he tres vezes *factor* do meſmo cubo; e por iſſo o cubo ſe chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro grào* do meſmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero ſe eleva á ſegunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando ſe multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes conſecutivas por ſi meſmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz cubica* de qualquer numero he o numero que multiplicado pelo ſeu quadrado forma o dito numero propoſto. Aſſim 3 he raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo ſeu quadrado 9 reſulta o numero 27.

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer numero dado naõ he neceſſaria outra regra ſenaõ a da multiplicaçaõ; mas para extrairmos a raiz cubica de qualquer numero he neceſſario hum methodo particular, o qual acharemos examinando a formaçaõ do meſmo cubo.

Obſervaremos porem, que naõ temos neceſſidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro, ſenaõ quando o numero propoſto tiver mais de trez letras. Porque ſendo 1000 o cubo de 10, todo o numero menor que 1000, o qual por conſeguinte naõ terá mais de trez letras, terá a raiz cubica menor que 10. Deſtes numeros deveremos ſaber a raiz, para fazermos a operaçaõ nos numeros maiores.

Todo o numero pois, que naõ tiver mais do que trez letras, terá na raiz cubica, em numero inteiro, algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correſpondem os cubos ſeguintes

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Aſſim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7; porque cahindo 428 entre 343 e 512, tambem a ſua raiz ſe achará entre as raizes delles 7, e 8; e por conſeguinte em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos uſar de tal approximaçaõ, que o defeito ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel, como abaixo moſtraremos, depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito.

154 Para bem ſe entender eſte methodo, vejamos as partes de que deve conſtar o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades.

Como pois reſulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo ſeu quadrado (n. 149.), he neceſſario trazer á lembrança que o quadrado de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de trez partes, a ſaber, *do quadrado das dezenas*, *de dous productos das dezenas pelas unidades*, *e do quadrado das unidades*.

Logo para ſe formar o cubo deveráõ multiplicar-ſe eſtas trez partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, reſultaráõ trez productos, convem a ſaber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades reſultaráõ outros trez productos, que feráõ, o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo ajuntando os productos femelhantes, he claro, que o cubo de hum numero compofto de dezenas e unidades confta de quatro partes, a faber, *do cubo das dezenas, de trez productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de trez productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio deftas partes podemos formar o cubo de qualquer numero compofto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

64000
14400
1080
27
79507

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve fignificar *milhares*, porque o 4 moftra dezenas, e ocubo de 10 he 1000; e affim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaõ multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas trez unidades, e teremos o producto 144, que deve moftrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e affim ferá a fegunda parte do cubo que bufcamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e refultará o producto 108, que devendo moftrar dezenas dará a terceira parte do mefmo cubo 1080.

Fi-

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, que ferá 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim eftas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual fem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por fi mefmo, e depois pelo producto 1849; mas aqui naõ fe trata tanto de formar o cubo, como de moftrar o meio, por onde fe póde voltar reciprocamente do cubo para a fua raiz.

155 Ifto pois fuppofto, eifaqui o methodo que havemos de feguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exemplo I.

Bufquemos pois a raiz cubica de 79507

Cubo	Raiz
79.507	43
155.07	
48	
79507	
00000	

Para diftinguirmos a parte, em que fe inclue o cubo das dezenas da raiz, deveremos feparar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado, nas quais temos vifto que naõ fe contém o dito cubo, por quanto reprefenta milhares. Da parte 79 que fica á efquerda tiraremos pois a raiz cubica, que ferá 4, e a efcreveremos adiante da rifca junto ao numero dado.

Defta letra, que achamos, e que moftra as dezenas da raiz, formaremos o cubo exacto 64, e o tiraremos da dita parte 79, affentando por baixo o refto 15, para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos feparado, e ferá o refto total 15507, no qual eftaráõ incluidas as tres partes reſtantes do cubo total, a ſaber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira deſtas moſtra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito reſto, e nas que ficaõ 155 ſeráõ incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual eſcreveremos debaixo; e achando que 48 ſe contém *tres* vezes em 155, aſſentaremos 3 na raiz, e eſta ſerá a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao meſmo tempo o reſto, ſe o houver, poderiamos formar as tres partes, que ſe devem achar no reſto 15507; mas ſerá igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-ſe o numero dado, ficaremos na certeza de que achàmos a ſua raiz exactamente.

Se o numero propoſto tiver mais do que ſeis letras, diſ. orreremos como no exemplo ſeguinte:

Exemplo II.

SE nos pedirem a raiz cubica de 596947688

```
596.947.688 | 842
 84947      |-----
 192        |
592704
----------------
   42436.88
   21168
596947688
----------------
000000000
```

Primeiramente confideraremos a raiz, como composta de dezenas e unidádes, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte restante 596947, que contém o cubo das dezenas, tem tambem mais do que tres letras, deverá a sua raiz ter mais do que huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma rasaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca; e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita, e debaixo da parte 849 escreveremos o divisor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a divisaõ acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos esta raiz, e descobrirmos juntamente o resto, formaremos á parte o seu cubo 592704, e o tiraremos da parte correspondente do numero dado 596947, assentando por baixo o resto 4243. Para o lado direito deste resto abaixaremos a classe seguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras, e dividiremos a parte restante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que assentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e sabermos o resto, se o houver, elevalla hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica resto, entendere-

 mos

mos que o numero 842 he exactamente a raiz que buscamos.

Deve notar-se, que no decurso desta operaçaõ naõ se póde jámais assentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubesse maior, seria final de se ter tomado a letra precedente menor, do que devia ser. Tambem será facil de conhecer, quando se tem tomado na divisaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que resultar naõ poderá diminuir-se da parte correspondente do numero proposto. Neste caso diminuir-se-há a raiz de huma, duas &c. unidades successivamente, até que o seu cubo se possa diminuir.

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito, a raiz que se acha he approximada; e raras vezes bastará sabella até as unidades sómente. Para isto he muito vantajosa a *dizima*, por meio da qual se póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, ainda que naõ he possivel que esta se reprezente jamais por numero exactamente.

156 Para se approximar pois a raiz cubica, quanto for necessario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplos antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correspondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

PEde-se a raiz cubica do numero 8755 até a casa das millesimas. Como as millesimas estaõ na terceira casa da dizima, deverá o cubo constar de nove decimais (n. 54.); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero proposto.

Po-

Pelo que a questaõ se reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55
-----------------------
 12
8000
-------
  7550.00
  1200
8741816
-----------
   131840.00
   127308
87545552981
---------------------
      4470190.00
      12743163
8754555298100
---------------------
      447019000
```

E distribuindo o dito numero em classes, buscaremos a raiz cubica da ultima classe 8 á esquerda, que he 2, e a escreveremos adiante da risca; e tirando o seu cubo 8 da mesma classe 8, assentaremos por baixo o resto 0, para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte restante 7 escreveremos o divisor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quociente he 0, a qual assentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz já achada 20, que he 8000, diminuilo-hemos da parte correspondente 8755, e escreveremos debaixo o resto 755, para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do mesmo modo.

Aca-

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até a casa das unidades he 20610; e por conseguinte a raiz de 8755,000000000 será 20, 610 exacta até a casa das millesimas, porquanto a raiz deve ter tres vezes menos casas na *dizima* do que ha no seu cubo (n. 54.).

Querendo-se levar mais adiante esta approximaçaõ, ajuntar-se-haõ tres cifras ao ultimo resto, e se continuará a operaçaõ da mesma maneira que se praticou por cada classe, que se ajuntou a cada resto; e assim por diante.

55 Este methodo de extrahir a raiz cubica póde applicar-se ás raizes de mais alto gráo. Nellas observaremos em geral: 1.º Que o numero dado se ha de distribuir em classes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima classe á esquerda que poderá constar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as classes. 2.º Que da ultima classe á esquerda se buscará a raiz do gráo proposto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual será a primeira letra da raiz que se busca. 3.º Que a dita raiz achada se elevará á potencia dada, a qual se diminuirá da mesma ultima classe á esquerda, e ao resto se ajuntará a primeira letra da classe seguinte. 4.º Que debaixo do resto assim aumentado se assentará por divisor a potencia da mesma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo proposto, sendo esta multiplicada pelo numero que mostra o gráo da potencia da questaõ. 5.º Que fazendo-se a divisaõ o quociente se ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada se elevará outra vez á potencia da questaõ, a qual se tirará da parte correspondente do numero dado, ao resto se ajuntará do mesmo modo a primeira letra da classe seguinte, e se lhe aplicará por divisor a potencia da raiz já achada do gráo pro-

ximamente menor que o propoſto, multiplicada pelo expoente do meſmo gráo propoſto &c.

Deſte modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividilo-hemos em claſſes de 5 letras. Buſcaremos a raiz 5ª da ultima claſſe á eſquerda, que moſtrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della e a tiraremos da meſma claſſe, e ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte. Debaixo deſte reſto aſſim aumentado aſſentaremos por diviſor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela diviſaõ acharemos a ſegunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correſpondente do numero dado; ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte, e lhe applicaremos por diviſor o quintuplo da 4ª potencia da raiz já achada, e aſſim por diante.

Para ſe conhecer facilmente a raiz da ultima claſſe á eſquerda ſerá neceſſario ter preſente huma taboa das potencias dos numeros digitos, como aqui ſe moſtraõ até á potencia nona.

RAIZES	POTENCIAS							
	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679516	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tor-

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multiplicará pela meſma letra achada, e o producto ſe aſſentará debaixo do diviſor, começando da ultima caſa das duas letras que foraõ ſeparadas do dividendo. Eſte producto ſe ſomará com o diviſor, e a ſoma ſe aſſentará por baixo, a qual ſe tornará a multiplicar pela meſma letra achada, e o producto ſe hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao reſto a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo. O diviſor ſe achará facilmente, ſomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e ſe aſſentará a ſoma debaixo do meſmo dividendo, chegando-a huma caſa mais para a direita. Feita a diviſaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem eſcreveremos em baixo, e atraz della ſeguidamente o triplo das letras precedentes da meſma raiz; depois multiplicaremos eſte numero pela meſma letra que ultimamente achamos, e praticaremos tudo mais como na operaçaõ antecedente; e assim por diante. Quando o divisor sahir maior que o dividendo, pôr-se-ha cifra na raiz, ajuntar-se-ha outra classe ao dividendo, e o mesmo divisor se adiantará huma casa mais para a direita.

Exemplo.

Pede-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multitiplicaremos pelo mefmo 7, e affentaremos o producto 1939 debaixo do divifor 243, principiando porém da ultima cafa do dividendo 187358; fomando o dito producto com o divifor, teremos a foma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela mefma letra 7, e ao mefmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, affentando por baixo o refto 3685, ao qual ajuntando a claffe feguinte teremos o novo dividendo 3685751. E fomando mentalmente o quadrado da mefma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e efcrevendo a foma huma cafa mais para a direita, teremos o novo divifor 28227.

Pela divifaõ acharemos o quociente 1, que affentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde refultará o numero 2911, que multiplicaremos pela mefma letra achada 1, e fomando o producto com o divifor teremos a foma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela mefma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o refto 860140, ao qual ajuntaremos a claffe feguinte, e ferá o novo dividendo 860140227; e fomando o quadrado da mefma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e efcrevendo a foma huma cafa mais para a direita, teremos o novo divifor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual affentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo mefmo 3, e fomarémos o producto 87399 com o divifor, donde refultará a foma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo mefmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o refto 11321130; ao qual ajuntaremos a claffe feguinte para teremos

mos o novo dividendo 11321130902. Como pela formação do divisor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo, ha de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conseguintemente fazer-se a divisaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a classe seguinte, somaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, e escrevendo a soma duas casas mais para a direita teremos o novo divisor 283027107.

E tornando a dividir finalmente acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando este numero pelo mesmo 4, e ajuntando o producto com o divisor teremos a soma 2830282725616, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ sobra nada, será a raiz cubica do numero proposto exactamente 971304. §§

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106.), he claro, que o cubo de hum quebrado se formará elevando ambos os seus termos ao cubo. E reciprocamente, para se tirar a raiz cubica de hum quebrado, será necessario tirar as raizes tanto do numerador como do denominador. Deste modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ será $\frac{3}{4}$ porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador sómente for cubo perfeito, tirar-se ha a raiz approximada do numerador; e por denominador se porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Assim

Aſſim v. gr. pedindo-ſe a raiz cubica $\frac{14?}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até á caſa das centeſimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7: pelo que a raiz pedida ſerá proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n.99.).

159 Porém, ſe o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado ſe multiplicaráõ pelo quadrado do meſmo denominador (n. 88.), e a operaçaõ ſe reduzirá ao caſo precedente.

Aſſim v. gr. querendo ſaber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os ſeus termos por 49 quadrado do denominador 7, e ſe reduzirá á $\frac{147}{343}$ (n. 88.), cuja raiz cubica ſerá proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158.), ou 0,75 (n. 99.)

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros ſe reduzem aos quebrados (n. 86.), e a queſtaõ entrará nos caſos precedentes. Tambem podem reduzir-ſe os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas eſta reducçaõ ſe continuará até achar tres vezes mais letras decimais do que ſe querem ter na raiz.

Deſte modo, para tirar a raiz cubica de $7\frac{3}{11}$ até a caſa das milleſimas, reduziremos eſte numero a 7,272727272, cuja raiz ſerá 1,937.

160 Quando ſe houver de tirar a raiz cubica de huma fracçaõ decimal, procurar-ſe-há que ella tenha tres vezes mais caſas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para iſſo forem neceſſarias. Entaõ tirar-ſe-há a raiz ſem fazer caſo da virgula, e nella ſe apartaráõ depois com a virgula as caſas da dizima que lhe com-

competem, isto he, o terço das que puzemos no numero proposto; e se as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-selhe-haõ á esquerda as cifras que forem necessarias.

V. g. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a casa das millesimas, ajuntar-lhe-hemos sete cifras, e buscaremos a raiz como se fosse do inteiro 6540000000, a qual acharemos ser 1870. E separando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, será a raiz pedida 1,870, ou 1,87. Do mesmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até á casa das centesimas; e assim das mais.

161 O methodo abbreviado, que ensinámos para a Divisaõ (n. 69. e seg.), tambem se applica facilmente á extrácçaõ da raiz cubica. Porque sendo bastante tiralla até a casa das unidades, dividir-se-ha o numero proposto em classes, e depois se lhe cortaráõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das mesmas classes. Das letras que ficarem á esquerda se extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo resto desprezaremos a ultima letra no divisor que lhe competir, e assim por diante; mas naõ tomaremos o divisor da operaçaõ precedente, senaõ quando elle tiver tantas letras constantes á esquerda quantas forem as do resto actual.

Das rasoens, proporçoens, e progressoens; e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Rasaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades. Esta he de dous modos.

163 Porque se compararmos duas quantidades r, po-

procurando ſaber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o reſultado da comparaçaõ ſerá a differença das meſmas quantidades, e eſta ſe chama *Raſaõ Arithmetica.*

Aſſim v. gr. comparando 15 com 8 para ſaber a ſua differença 7, eſte numero 7 que reſulta da comparaçaõ he a raſaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neſte ponto de viſta, coſtumamos ſeparallas com hum ponto Aſſim por eſta expreſſaõ 15.8 entenderemos a raſaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porém ſe compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contém, ou he contida na outra, o reſultado deſta comparaçaõ he a *Raſaõ, Geometrica.* E quando ſe diz *Raſaõ* ſimpleſmente, ſempre ſe entende a *Geometrica.*

Comparando v. gr. 12 com 3 para ſabermos quantas vezes o contém, o que reſulta deſta comparaçaõ, iſto he, o ſer 12 *quadruplo* de 3, he a raſaõ geometrica de 12 para 3.

Para moſtrarmos, que comparamos duas quantidades neſte ſentido, coſtumamos ſeparallas com dous pontos. Eſta expreſſaõ 12:3 ſignifica a raſaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que ſe comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que ſe profere ou eſcreve em primeiro lugar chama-ſe *antecedente*, e a outra *conſequente.* Aſſim na raſaõ 12:3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 conſequente; e ambos elles em commum ſe chamaõ *termos* da raſaõ.

166 Para conhecer a raſaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he neceſſario mais do que diminuir huma da outra, e o reſto moſtrará a raſaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167

167 Para avaliar porém a raſaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividillas huma pela outra, e o quociente moſtrará a raſaõ dellas, iſto he, quantas vezes huma contém a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos ſempre a raſaõ geometrica pela diviſaõ do antecedente pelo conſequente, aindaque aquelle ſeja mais pequeno. Aſſim a raſaõ de 12 para 3 ſerá 4, e de 3 para 12 ſerá $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

ʃʃ Deve notar-ſe, que naõ póde haver raſaõ ſenaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem ſe excedem, nem ſe contém mutuamente. Aſſim 12 *toeſas* para 3 *libras* naõ tem raſaõ alguma arithmetica, nem geometrica. Porque ſem embargo de que o numero 12 tem ſobre 3 o exceſſo de 9, he vizivel que 12 *toeſas* naõ tem ſobre 3 *libras* exceſſo algum aſſinavel nem de *libras*, nem de *toeſas*. E do meſmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toeſas* naõ contem de modo algum a 3 *libras*, porque ſaõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A differença dos termos na raſaõ arithmetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores*, e *expoentes* da raſaõ.

A raſaõ geometrica divide-ſe em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o expoente ſe póde exprimir por numero quer ſeja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o expoente naõ póde exprimir-ſe jámais por numero algum exactamente, como he a raſaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem ſe divide em raſaõ de *igualdade*, e *deſigualdade*, conforme conſta de termos iguais, ou deſiguais; chama-ſe raſaõ *de maior deſigualdade*, quando o antecedente he maior que o conſequente; e *de menor deſigualdade*, quando he menor.

Os

Os Mathematicos antigos fazem ſinco differenças genericas da raſaõ de maior deſigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as ſuas obras), a ſaber: *Multiplex*, *ſuperparticularis*, *ſuperpartiens*, *multiplex-ſuperparticularis*, *multiplex-ſuperpartiens*; e da raſaõ de menor deſigualdade ſaõ outras tantas differenças, que ſe declaraõ com os meſmos nomes precedidos de hum *ſub*, a ſaber: *ſubmultiplex*, *ſubſuperparticularis* &c.

Raſaõ multiplex he, quando o antecedente contém o conſequente algumas vezes exactamente; e *ſubmultiplex*, quando nelle he contido do meſmo modo. A Primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c., e a ſegunda *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubquadrupla* &c, confórme os expoentes. A raſaõ 10:1 he *decupla*, e 1:10 *ſubdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao conſequente, e além diſſo huma parte aliquota delle, como 3:2; e *ſubſuperparticularis*, quando o antecedente he contido do meſmo modo no conſequente, como 2 : 3. As eſpecies da primeira diſtinguem-ſe com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *ſeſqui*; e as eſpecies da ſegunda com os meſmos vocabulos precedidos de hum *ſub*. Deſte modo as raſoens 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 &c. pela meſma ordem tem os nomes de *ſeſquialtera*, *ſeſquitertia*, *ſeſquiquarta*, *ſeſquiquinta* &c.; e as raſoens 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 &c. de *ſubſeſquialtera*, *ſubſeſquitertia*, *ſubſeſquiquarta*, *ſubſeſquiquinta*. &c.

Superpartiens he, quando o antecedente contém huma vez o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle, como 5:3; e *Subſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo, como 3:5. As eſpecies deſte genero ſe denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas, e metendo depois do *ſuper* as vo-

zes

zes *bi*, *tri*, *quadri* &c, pelas quais se mostra quantas dessas partes aliquotas se exprimem. Assim 5 : 3 he rasaõ *superbi partiens tertias*, 8:5 *supertripartiens quintas* &c. E reciprocamente, 3:5 he rasaõ *subsuperbipartiens tertias*, 5:8 *subsupertripartiens quintas* &c,

Multiplex-superparticularis he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente, e alem disso huma parte aliquota delle; e *submultiplex-superparticularis*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies da primeira saõ *dupla-sesquialtera* 5:2, *dupla-sesquitertia* 7:3 &c, *tripla-sesquialtera* 7:2, *tripla-sesquitertia* 10:3 &c. &c; e da segunda *subdupla sesquialtera* 2:5, *subdupla sesquitertia* 3:7 &c. *subtripla-sesquialtera* 2:7, *subtripla-sesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-superpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *submultiplex superpartiens*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies de ambas facilmente se denominaõ pelo que assima fica declarado. A rasaõ 8:3 he *dupla-superbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-superquadripartiens septimas* &c. e reciprocamente, a rasaõ 3:8 he *subdupla-superbipartiens tertias*, 7:74 *subdecupla-superquadripartiens septimas* &c. §§

169 A rasaõ arithmetica fica sendo a mesma, todas as vezes que ambos os termos se aumentaõ ou diminuem de huma mesma quantidade; porque assim naõ se altéra nada a differença, na qual consiste a rasaõ. Assim 3.8 he o mesmo que 4.9, que 5. 10 &c.

170 A rasaõ geometrica tambem será a mesma, todas as vezes que ambos os termos se multiplicarem, ou dividirem por huma mesma qanti-

dade. Porque consistindo a rasaõ no quociente do antecedente dividido pelo consequente (n. 168.), he huma quantidade fraccionaria (n. 97.), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos se multiplicaõ ou dividem por huma mesma quantidade (n.88. 89). Assim a rasaõ 3:12 vale o mesmo que 6:24, multiplicando ambos os termos por 2; e o mesmo que 1:4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Esta propriedade serve de muito para reduzir huma rasaõ aos termos mais simples. Tendo v. gr. de examinar a rasaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a mesma rasaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao mesmo denominador, a mesma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e supprimindo o denominador commum 12 (que he o mesmo que multiplicar ambos os termos por 12) a rasaõ proposta será a mesma que a de 81 para 128.

§§ A mesma mudança, que se faz em huma rasaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem se fará tirando ou ajuntando a mesma quantidade ao consequente; porque de ambos os modos resultaõ duas rasoens, das quais huma contem os termos da outra aumentados ou diminuidos da mesma quantidade. Na rasaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9, como ajuntar 2 ao consequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, como tirar 2 ao consequente para ficar 5.7.

E a mesma mudança, que se faz em huma rasaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, se fará tambem

bem dividindo ou multiplicando o consequente pela mesma quantidade; porque por ambas as operaçoens resultaõ duas rasoens, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma mesma quantidade. Na rasaõ 4:9 vale o mesmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o consequente pelo mesmo 2, pois sahiráõ as rasoens iguais 2:9 e 4:18; do mesmo modo multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o consequente pelo mesmo 3, resultaráõ as rasoens iguais 12:9, e 4:3. ʃʃ

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a mesma rasaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e esta será arithmetica, ou geometrica, conforme forem as rasoens arithmeticas, ou geometricas.

Estas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetica, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a mesma rasaõ de differença 2. Para denotar esta proporçaõ, assentaõ-se os quatro termos deste modo 7.9:12.14, ou tambem assim $7-9=12-14$; expressoens, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9 *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Estas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 se contem em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para assim o darmos a entender, assentaremos os termos deste modo 3:15::4:20, ou $3:15=4:20$; expressoens, que querem dizer, que 3 *he para* 15 *como* 4 *he para* 20.

ʃʃ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto*; porque o producto contém tantas vezes hum dos

 fa-

factores, quantas o outro contém a unidade.

Do mesmo modo na divisaõ, *a unidade he para o quociente, como o divisor para o dividendo*; porque o dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente.

Deve notar-se que todas as rasoens geometricas saõ homogeneas, pois consistem no quociente do antecedente dividido pelo consequente, o qual quociente he sempre numero abstracto. Por isso, aindaque naõ póde haver rasaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes seja homogeneo com o seu consequente. Assim 12 *toesas* saõ para 3 *toesas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque sem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toesa* com a *libra*, póde com tudo comparar-se a rasaõ de *toesas* a *toesas* com a rasaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes se contém 3 *toesas* em 12 *toesas*, tantas se contém 2 *libras* em 8 *libras*, isto he, *quatro vezes*.

173 O primeiro termo, e o quarto de huma proporçaõ, chamaõ-se *extremos*; o segundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas rasoens, e por conseguinte dous antecedentes e dous consequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente*, e *primeiro consequente*, e aos da segunda *segundo antecedente*, e *segundo consequente*.

174 Quando saõ iguais os meios de huma proporçaõ, esta se chama *continua*.

Assim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithmetico* entre 3 e 11. Esta proporçaõ se escreve por abbreviatura desta maneira ÷ 3.7.11, denotando o final ÷ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro consequente, e segundo antecedente.

Do mesmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Esta proporçaõ se escreve desta maneira ÷÷ 5:20:80, denotando tambem o sinal ÷÷ que o termo 20 se ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito sobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, se segue:

1° Que se na proporçaõ arithmetica se ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os consequentes, cadahum ficará sendo igual ao seu consequente; pois he evidente, que deste modo se ajunta ao termo menor de cada rasaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou se tira do maior o excesso que tem sobre o menor. Assim na proporçaõ 3.7:8.12, se ao primeiro e terceiro termo se ajuntar a differença 4, teremos 7.7:12.12.

2° Que se na proporçaõ geometrica se multiplicarem os consequentes pelo expoente da rasaõ, ficaráõ ambos iguaes aos seus antecedentes; porque multiplicar o consequente pelo expoente he tomallo tantas vezes, quantas se contém no antecedente. Assim na proporçaõ 12:3::20:5, multiplicando 3 e 5 pelo expoente 4, teremos 12:12::20:20; e na proporçaõ 15:9::45:27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15:15::45:45.

Propriedades das proporçoens arithmeticas.

176 A propriedade fundamental das proporçoens arithmeticas he, que *a soma dos extremos sempre he igual á soma dos meios.* Assim v. g. nesta

neſta proporçaõ 3.7:8.12 tanto os extremos 3 e 12 como os meios 7 e 8, fazem igualmente a ſoma de 15.

E com effeito ſe o primeiro termo for igual ao ſegundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7:12.12, he claro, que os extremos fazém huma ſoma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzir-ſe a eſta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175. 1°.). Logo, como eſta addiçaõ ou ſubtracçaõ igualmente aumenta ou diminue a ſoma dos meios e dos extremos, e conſeguintemente naõ altéra a ſua igualdade ou deſigualdade, he evidente que ſahindo as ſomas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177 Como na proporçaõ continua o meio ſe toma duas vezes, a ſoma dos extremos ſerá dupla do meſmo meio. Aſſim na proporçaõ ÷ 7.11.15 a ſoma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

ʃʃ Reciprocamente: ſe quatro quantidades forem tais, que a ſoma das medias ſeja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para ſerem iguais as ditas ſomas, he neceſſario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra deſtas ſeja excedida a outra daquellas; e conſequentemente entre a primeira e ſegunda haverá a meſma differença que entre a terceira e quarta, como ſe requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde ſe ſegue, que tres quantidades eſtaráõ em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da ſoma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quar-

quarto arithmetico, ſomando o ſegundo com o terceiro, e diminuindo da ſoma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua, tirando o primeiro do dobro do ſegundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico, tomando ametade da ſoma delles.

Segue-ſe tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios paſſar para extremos, e os extremos para meios; e que tantó os extremos, como os meios, podem trocar entre ſi o lugar, ficando ſempre em proporçaõ. Deſte modo a proporçaõ 3.7:8.12 pela permutaçaõ dos termos produz as proporçoens ſeguintes:

3. 7: 8.12
3. 8: 7.12
7. 3:12. 8
7.12: 3. 8
8. 3:12. 7
8.12: 3. 7
12. 7: 8. 3
12. 8: 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará, ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes qualquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha a proporçaõ 9.16:14.21.

Do meſmo modo, ſe os termos correſpondentes de duas ou mais proporçoens arithmeticas ſe ſomarem, ou diminuirem, as ſomas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Aſſim ſomando as duas proporçoens 3.7:8.12 e 2.5:6.9 reſulta a proporporçaõ 5.12::14.21 ; e diminuindo a ſegunda da primeira, a proporçaõ 1.2::2.3. ʃʃ

Propriedades das proporçoens geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporçoens geometricas he, que *o producto dos meios ſempre he igual ao producto dos extremos*; aſſim como na proporçaõ 3:15::7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ſer o meſmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao ſeu conſequente. Porém toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-ſe a eſta fórma, multiplicando ambos os conſequentes pelo expoente da raſaõ (n. 175. 2°.). Logo, como por eſta operaçaõ ambos os productos ſe multiplicaõ igualmente pelo expoente, he claro, que ſahindo iguais tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio*. Porque ſendo os dous meios iguais, o ſeu producto he o quadrado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos eſtes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos $\div$ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-ſe-ha o quarto, multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifeſto, que

que teriamos o quarto termo divdindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74.); porém o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178.): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-se v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros saõ 3:8::12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 será o quarto proporcional, de sorte que teremos 3:8::12:32; e com effeito a primeira rasaõ he $\frac{3}{8}$, e a segunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-se ambos os termos por 4 (n. 89.), se reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo mesmo raciocinio se vê claramente, que em geral se póde achar qualquer dos termos, dando-se os outros tres. *Buscando-se algum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo extremo dado; e buscando-se algum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo meio conhecido.*

180 Esta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir senaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ estando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os consequentes pela rasaõ dos dous primeiros termos, somente o primeiro antecedente ficará igual ao seu consequente, e por essa rasaõ naõ poderá ser o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *se quatro quantidades forem tais, que o producto das medias seja igual ao das extremas, estaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde se segue, *que a proporçaõ se conservará entre quatro quantidades, passando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O meſmo ſuccederá, *ſe trocarmos o lugar das medias, ou tambem das extremas.* Porque de ambos os modos ſe conſervará a igualdade ſobredita dos productos.

Aſſim da proporçaõ 3:8::12:32 reſultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporçoens ſeguintes.

3: 8 :: 12:32
3:12 :: 8:32
8: 3 :: 32:12
8:32 :: 3:12
12: 3 :: 32: 8
12:32 :: 3: 8
32:12 :: 8: 3
32: 8 :: 12: 3

A ſegunda deſtas ſe diz reſultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando, e invertendo*, a ſexta *tranſpondo*, a ſetima *tranſpondo e invertendo*, a oitava finalmente *tranſpondo invertendo e alternando.*

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde paſſar para o lugar do ſegundo, e reciprocamente; ſegue-ſe, *que a proporçaõ ſe ha de conſervar, todas as vezes que ambos os antecedentes, ou ambos os conſequentes ſe multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma meſma quantidade.*

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira raſaõ, e os conſequentes a ſegunda. Peloque multiplicar, ou dividir ambos os antecedentes, ou ambos os conſequentes por huma quantidade, vem a ſer o meſmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma raſaõ pela meſma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altéra o valor (n. 170.).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28, dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que

1:7::

1:7::4:28; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12::7:28 (n. 182.), e dividindo os termos da primeira raſaõ por 3 (n. 170.) teremos 1:4::7:28; e *alternando* outra vez 1:7::4:28 (n. 182)

184 *Se em qualquer proporçaõ geometrica a ſoma do antecedente e conſequente, ou a ſua differença, ſe comparar com o antecedente, ou com o conſequente em ambas as raſoens do meſmo modo, o reſultado formará huma proporçaõ.*

Porque ſe a ſoma, ou a differença referida, ſe comparar com o conſequente, he vizivel, que ajuntando ou tirando o conſequente ao antecedente, eſte o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha; e como eſta mudança ſe faz igualmente na ſegunda raſaõ, que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira, ſeráõ neceſſariamente iguais as novas raſoens que aſſim reſultaõ. O meſmo raciocinio terá lugar, quando ſe comparar a dita ſoma ou differença com o antecedente, conſiderando primeiro os antecedentes mudados para o lugar dos conſequentes, e reciprocamente (n. 181.).

Dando-ſe v. g. a proporçaõ 12:3::32:8, della poderemos inferir outras quatro proporçoens, como aqui ſe moſtraõ, nas quais o ſinal + quer dizer *mais*, e o ſinal — *menos*.

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$\begin{aligned}
12+3 &: 3 :: 32+8 : 8\\
12+3 &: 12 :: 32+8 : 32\\
12-3 &: 3 :: 32-8 : 8\\
12-3 &: 12 :: 32-8 : 32
\end{aligned}$$

A primeira deſtas ſe diz reſultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *compoſiçaõ de raſaõ*, a ſegunda *por compoſiçaõ inverſa de raſaõ*, a terceira *dividindo* ou *por divisaõ de rasaõ*, e a quarta *por divisaõ inversa*, ou *por conversaõ de rasaõ*.

185 Donde se collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a soma ou differença dos antecedentes he para a soma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Assim da proporçaõ 12:3::32:8 resultaõ as duas proporçoens seguintes:

$$12+32:3+8::12:3$$
$$32-12:8-3::12:3$$

Porque *alternando* teremos 12:32::3:8 (n. 182), e desta pela *composiçaõ* e *divisaõ inversa de rasaõ* resultaráõ as duas proporçoens 12+32:12::3+8:3, e 32−12:12::8−3:3 (n. 184.), as quais alternando outra vez se convertem em 12+32:3+8::12:3, e 32−12:8−3::12:3 (n. 182.).

186 Logo, *Sendo dado qualquer numero de rasoens iguais, será a soma de todos os antecedentes para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.* Por exemplo, sendo iguais as rasoens 4:12::7:21::2:6 teremos tambem 4+7+2:12+21+6::4:12::7:21 &c.

Porque tomando as duas primeiras 4:12::7:21, teremos 4+7:12+21::4:12 (n. 185.), ou (pela rasaõ de ser 4:12::2:6) 4+7:12+21::2:6; esta proproçaõ dará outra vez 4+7+2:12+21+6::2:6 (n. 185.), e assim por diante.

187 *Rasaõ composta* he a que se forma de duas ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. Dando-se v. g. as rasoens 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes será 300, e dos consequentes 20; e assim 300:20 será a rasaõ composta das duas rasoens 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer rasaõ se avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo consequente,

e

è conſeguintemente por huma fracçaõ que tenha o antecedente por numerador, e o conſequente por denominador (n. 168.,) he claro, que a raſaõ compoſta ſe fórma pela multiplicaçaõ das fracçoens, que expoem o valor das raſoens componentes (n. 106.). Aſſim exprimindo-ſe a raſaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a raſaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a raſaõ compoſta dellas 300:20 ſe exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos exponentes das raſoens 12:4 e 25:5.

189 A raſaõ compoſta de duas iguais chama-ſe *raſaõ duplicada* de qualquer dellas; ſendo compoſta de tres, *triplicada*; de quatro *quadruplicada &c*; e qualquer das raſoens iguais componentes ſerá no primeiro caſo *ſubduplicada* da raſaõ compoſta, no ſegundo *ſubtriplicada &c*. Dadas v. g. as raſoens iguais 2:3 e 4:6, a que dellas ſe compoem 8:18 ſerá raſaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6; e qualquer deſtas raſaõ ſubduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporçoens ſe multiplicarem ordenadamente, iſto he, ſe o primeiro termo de huma ſe multiplicar pelo primeiro da outra, o ſegundo pelo ſegundo &c, os quatro productos que reſultarem eſtaraõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporçoens deſta maneira, he multiplicar duas raſoens iguais por outras duas iguais (n. 172.); logo as duas raſoens compoſtas que reſultaõ ſaõ iguais; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172.).

191 Donde ſe ſegue, *que os quadrados, cubos, e em geral as potencias ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, ſaõ tambem entre ſi proporcionais*; porque para formar as ditas potencias, naõ he neceſſario mais do que multiplicar a pro-

por-

porçaõ dada por ſi meſma huma, duas &c vezes conſecutivamente.

192 Do meſmo modo, *as raizes quadradas, cubicas*, e geralmente *as raizes ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, tambem ſaõ proporcionais.* Porque deſte modo naõ ſe faz outra couſa, ſenaõ tirar raizes ſemelhantes de raſoens iguais (n. 142. 157. 168.); logo as novas raſoens que reſultaõ ſeráõ iguais; e por conſeguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172.).

Uſo das propoſiçoens antecedentes.

193 AS propoſiçoens que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das proporçoens*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porém aqui ſomente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179.), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa, e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples*, tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos autores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtoens a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta,

Chama-ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades que nella ſe conſideraõ ha duas principais homogeneas entre ſi, cadahuma das quais de-

determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contem ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificarà todas as vezes que huma das quantidades principais com a que della depende occuparem juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes; o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inverſa*, como depois moſtraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conſeguintemente a *regra de tres directa e ſimples*, ja fica ſufficientemente declarado (n. 179.); falta moſtrar o uſo deſta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toeſas* de obra, quantas *toeſas* faraõ 60 obreiros no meſmo tempo?

Pelo meſmo teor da queſtaõ ſe vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 ſaõ os termos principais, e que a obra de 268T he relativa ao primeiro, e a que ſe buſca relativa ao ſegundo. Tambem he manifeſto, que a obra ha de creſcer na raſaõ dos obreiros, de ſorte que o duplo, triplo, quadruplo &c numero delles, deve produzir huma obra, dupla, tripla, quadrupla &c. dentro do meſmo tempo; e conſeguintemente, que o numero pedido de *toeſas* deve conter o numero dado de 268 *toeſas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toeſas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos reſpectivos occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes, o que moſtra ſer a proporçaõ direc-

cta

cta. Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes -

$$40:60::268^T:$$

ou, dividindo os termos da primeira raſaõ por 20 (n. 170.), aos tres ſeguintes - - - - - - - - - - - -

$$2:3::268^T:$$

Por tanto (n. 179.) multiplicaremos 268^T por 3, e partiremos o producto 804^T por 2; o quociente 402^T ſerá o quarto termo, iſto he, a obra que faráõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40 que fizeraõ 268^T.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias caminhará 2000 legoas, continuando o vento e todas as mais circunſtancias do meſmo modo?

He claro, que neſta queſtaõ ſe requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que ſe haõ de andar; e conſeguintemente, que o tempo que ſe buſca deve conter tantas vezes 3 dias quantas o numero das leguas que lhe ſaõ reſpectivas contém as leguas reſpectivas aos 3 dias. Buſcar-ſe-ha pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$275:2000::3^d.$$

Pelo que multiplicaremos 3d por 2000; e dividindo o producto 6000^d por 275, teremos o quociente $21^d\ \frac{9}{11}$, que he o tempo que ſe requer para navegar 2000 leguas ſegundo as condiçoens da queſtaõ.

Exemplo III.

PAgando-ſe $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^d$ por $52^T\ 4^P\ 5^p$ de obra; pergunta-ſe quanto ſe deve pagar por $77^T\ 1^P\ 8^p$?

Pe-

Pela meſma queſtaõ ſe vê, que o preço relativo a 77^T 1^P 8^P deve conter tantas vezes o preço relativo a 52^T 4^P 5^P, quantas o numero 77^T 1^P 8^P contém o numero 52^T 4^P 5^P. Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes -

$$52^T\ 4^P\ 5^P : 77^T\ 1^P\ 8^P :: 168^{lb}\ 9^ſ\ 4^d :$$

Iſto ſe poderá fazer, multiplicando $168^{lb}\ 9^ſ\ 4^d$ por 77^T 1^P 8^P, e dividindo o producto por 52^T 4^P 5^P, conforme as regras dadas para o calculo deſtes numeros (n. 122. 128.).

Porém ſerá mais facil o reduzir os dous termos da primeira raſaõ á ſua infima eſpecie de *pollegadas*; e a queſtaõ ſe reduzirá a buſcar o quarto termo da proporçaõ ſeguinte - - - - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^ſ\ 4^d :$$

Entaõ multiplicando $168^{lb}\ 9^ſ\ 4^d$ por 5564 teremos o producto $93734^{lb}\ 10^ſ\ 8^d$; e dividindo eſte por 3797, o quociente $246^{lb}\ 17^ſ\ 3^d\ \frac{2789}{3797}$ ſerá o que deve pagar-ſe por 77^T 1^P 8^P.

Havendo além diſſo fracçoens nos meſmos termos, depois de reduzidos á infima eſpecie como neſte exemplo, a ſua raſaõ ſe ſimplificará do modo que aſſima moſtramos (n. 171.).

Da Regra de tres inverſa e ſimples.

195 A Regra de tres ſimples e inverſa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo dado a meſma raſaõ que tem o relativo deſte para o relativo daquelle; e niſto conſiſte a ordem inverſa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo a meſma raſaõ que tem o relativo daquelle para o deſte. Pelo que na regra inverſa ſendo os termos diſpoſtos como convem, hu-

ma das quantidades principais com a ſua relativa teráõ o lugar dos meios, e a outra com a ſua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na fórma conveniente á natureza da queſtaõ, a operaçaõ ſe pratica como a precedente, buſcando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros ſaõ neceſſarios para fazerem a meſma obra em 10 dias?

Reflectindo na queſtaõ logo vemos que devem ſer tanto mais os obreiros quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o ſeu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deſte (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes ------------------------

$$10^d : 25^d :: 30^{obr} :$$

E multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro acharemos 75, que he o numero dos obreiros da queſtaõ.

Exemplo II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento para 15 dias, e reſtando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-ſe como ſe devem reduzir as raçoens por dia?

Tomando a raçaõ coſtumada por unidade, he claro, que a raçaõ que buſcamos deve ſer tanto menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conſeguinte buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſe-

ſeguintes -

$$20^d : 15^d :: 1 :$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

196 NA Regra de tres compoſta a raſaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da raſaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas raſoens ſimples, as quais ſe devem compôr (n. 187) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faráõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jornaleiros em hum dia; e do meſmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a queſtaõ ſe reduz a eſta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toeſas de obra, quantas toeſas faraõ 1512 jornaleiros? e por conſeguinte buſcaremos o quarto termo deſta proporçaõ -

$540 : 1512 :: 132^T :$.

E multiplicando o segundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, será o numero pedido $369^T\ 3^P\ 7^p\ 2^d\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 legoas em 30 dias. Pergunta-se, em quantos dias andará 600 legoas, caminhando 10 horas por dia com a mesma velocidade?

Se o numero das horas fosse o mesmo em ambos os casos, he visivel, que o tempo pedido deveria ser tanto maior, quanto he maior a distancia relativa que se propoem; mas caminhando mais horas por dia no segundo caso, por esta rasaõ deverá ser o tempo menor; e por conseguinte a questaõ depende da regra de tres directa e inversa simultaneamente. Reduzir-se-ha porém a huma regra simples, se reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Assim a questaõ se reduzirá a estes termos: Se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que satisfizer a esta questaõ se partirá por 10, visto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente será o numero dos dias que se pergunta. Assim buscaremos o quarto termo proporcional aos tres seguintes -

$$230^l : 600^l :: 210^h$$

O qual acharemos ser $547^h\ \frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, será o numero dos dias $54\ \frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uſo, quando ſe trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o ſeu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que tenhaõ entre ſi huma raſaõ dada. O methodo, que para iſto ſe dá, funda-ſe no principio que aſſima fica demonſtrado (n. 186.), como ſe verá no exemplo ſeguinte.

Exemplo I.

DA-ſe o numero 120 para ſer diſtribuido em tres partes tais, que ſejaõ entre ſi como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da queſtaõ ſe offerecem immediatamente eſtas duas proporçoens. Que 4 he para 3 como a 1ª parte que ſe buſca he para a 2ª, e que 4 he para 2 como a 1ª parte he para a terceira; iſto he (n. 182.), Que 4 he para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª como 2 para a 3ª; pelo que temos tres raſoens iguais, a ſaber: 4 para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos moſtrado (n. 186.), que em qualquer numero de raſoens iguais á ſoma dos antecedentes he para a dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente; logo no exemplo figurado ſerá a ſoma 9 das partes dadas para a ſoma 120 das partes que ſe pedem, como qualquer das partes dadas para a ſua relativa que ſe buſca.

Pelo que a Regra de Companhia em geral ſe reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas ſaõ as partes que ſe buſcaõ, tomando ſempre por primeiro termo a ſoma das partes dadas, por ſe-

gun-

gundo o numero que ſe quer diſtribuir, e por terceiro a parte dada que he relativa á que actualmente ſe buſca. Aſſim na queſtaõ propoſta deveráõ completar ſe as proporçoens ſeguintes - - - - - - - - - - -

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$, na ſegunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a ſoma de 120, e ſaõ entre ſi como as partes dadas 4, 3, 2.

¶¶ Eſta Regra ſe executará com mais brevidade, *partindo o numero propoſto pela ſoma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das meſmas partes.* Porque em qualquer regra de tres tanto ſe acha o quarto termo, multiplicando o ſegundo pelo terceiro e dividindo o producto pelo primeiro, como dividindo o ſegundo pelo primeiro e multiplicando o quociente pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e ſegundo termo ſaõ ſempre os meſmos, huma ſó diviſaõ baſta para reſolver todas as regras de tres, que nella forem neceſſarias.

Aſſim no meſmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando eſte ſucceſſivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correſpondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. ¶¶

De qualquer modo que ſe pratique, naõ he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Ex-

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ser distribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o segundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras*. Pergunta-se a parte de cadahum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ser partido em tres partes, que guardem entre si a rasaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170.) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cadahum deve ser proporcional á sua entrada. Assim com a soma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporçoens seguintes.

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do segundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres nogociantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o segundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes; Quanto deve ter cada hum?

Este caso contém huma Regra de Sociedade composta, e esta se reduz facilmente á simples. Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o mesmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do mesmo modo as entradas do segundo, e terceiro, valem o mesmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo mesmo tempo de hum mez. Feita esta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}; e praticando como no

ex-

exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro 1971^{lb} 16^{s} 4^{d} $\frac{4}{11}$, o segundo 2190^{lb} 18^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$, e o terceiro 7887^{lb} 5^{s} 5^{d} $\frac{5}{11}$.

198 A' mesma Regra de Companhia se reduzem muitas outras questoens, precedendo a preparaçaõ necessaria, como nos exemplos seguintes.

Dando se o numero 650 para ser distribuido em tres partes tais, que a primeira seja para a segunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas rasoens dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa fórma se reduziráõ, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo primeiro da outra (n. 170.). Assim resultaráõ as rasoens equivalentes 35 : 28 e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de sorte que a primeira fosse para a segunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, estas rasoens se reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as rasoens equivalentes 315 : 252, 315:175, 315: 135, e a questaõ seria reduzida a partir o numero proposto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falsa Posiçaõ.

199 USa-se desta Regra, quando em lugar do numero, que buscamos, substituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teór da

da queſtaõ, comparamos o reſultado com o que devia ſahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que ſatisfaz à meſma queſtaõ. Chama-ſe ſimples, quando baſta fazer huma ſó hypotheſe; compoſta, quando ſaõ neceſſarias duas.

A ſimples pratica-ſe por huma regra de tres, na qual *ſerve de primeiro termo o numero que reſultou da hypotheſe conforme as condiçoens da queſtaõ, de ſegundo o numero que devia reſultar, e de terceiro a meſma hypotheſe.* E por iſſo ſó póde uſar-ſe eſta regra nas queſtoens, em que o numero que ſe buſca he para o numero dado que delle reſulta, como qualquer outro para o que delle ha de reſultar da meſma maneira; circunſtancias, que devem conhecer-ſe pela natureza da queſtaõ: e quando naõ, póde tentar-ſe a Regra, e depois fazendo experiencia do numero achado ſe conhecerá, ſe com effeito ſatisfaz á queſtaõ.

Exemplo.

PErgunta-ſe o numero, cujo terço, quinto, e tres ſeptimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados, podemos eſcolher para hypotheſe hum numero que tenha as partes aliquotas 3,5,7, o qual acharemos multiplicando entre ſi eſtes tres numeros, que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypotheſe, buſcaremos o ſeu terço 35, o ſeu quinto 21, e tres ſeptimos 45. Se a ſoma deſtes fizeſſe 808, o meſmo numero da hypotheſe ſeria o que buſcamos; porém como a ſoma faz 101, buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes -

101 : 808 : : 105 :

E acharemos o numero 840, que ſatisfaz á queſtaõ.

A Regra de duas poſiçoens he mais geral, pois naõ ſómente por ella ſe reſolvem todas as queſ-

to-

toens da Regra ſimples, mas tambem muitas outras que eſtaõ fóra do alcance daquella. Pratica-ſe deſta maneira.

Em lugar do numero que ſe buſca toma-ſe arbitrariamente qualquer por hypotheſe, e conforme a queſtaõ ſe examina o que delle reſulta; depois toma-ſe outro qualquer, e ſe nota tambem o que delle reſulta. Entaõ ſe faz eſta proporçaõ: *Como a differença dos reſultados das duas hypotheſes, para a differença entre o reſultado da primeira hypotheſe e o verdadeiro reſultado que devia ſahir, aſſim a differença das hypotheſes para hum quarto.* Eſte ſe ajuntará ou tirará á primeira hypotheſe, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ſer, e iſto no caſo de que creſcendo a hypotheſe creſça tambem o reſultado; ſendo ao contrario, o numero achado ſe ajuntará ou diminuirá conforme a meſma hypotheſe tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheſes ſe póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes ſe póde achar o que ſe buſca.

Exemplo.

TRes negociantes ganharaõ 6954^{lb}. O ſegundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-ſe o lucro de cadahum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a queſtaõ ſeria o lucro do ſegundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb}, os quais ſomados daõ 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o ſegundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja ſoma dá 194^{lb}.

Aſſim das duas hypotheſes 1^{lb} e 2^{lb} temos os reſulſultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo ſahir 6954^{lb}. A differença entre os reſultados das duas hypotheſes he 4^{lb} entre o reſultado da primeira hypotheſe ao que devia reſultar he 6764^{lb}, e entre as duas hypotheſes he 1^{lb}. Pelo que buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos ſer 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypotheſe 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por conſeguinte o do ſegundo 1746^{lb}, e o do terceiro 3516^{lb} que fazem com effeito a ſoma de 6954^{lb}, e ſatisfazem ás mais condiçoens da queſtaõ.

He claro, que eſta Règra naõ póde ter lugar ſenaõ nas queſtoens, em que a differença das hypotheſes he conſtantemente proporcional á differença dos reſultados que ellas produzem, ſegundo o teor das meſmas queſtoens. Quando porém as hypotheſes ſe tomaõ proximas ao numero que ſe buſca, em todas as queſtoens tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por iſſo eſta Regra tem grande uſo na reſoluçaõ das equaçoens de gráo ſuperior, e de muitas outras queſtoens em toda a Mathematica.

Se foſſem duas as quantidades que ſe perguntaõ, ſeriaõ neceſſarias tres hypotheſes. Porque em primeiro lugar ſe deveriaõ ſuppôr duas quaiſquer quantidades em lugar dellas, depois conſervando a primeira ſe aumentaria ou diminuiria arbitrariamente a ſegunda, e finalmente conſervando a ſegunda ſe faria mudança na primeira. Do meſmo modo ſe moſtra, que ſeriaõ neceſſarias quatro poſiçoens, ſe foſſem tres as quantidades, e aſſim por diante. Para eſtes caſos ſeria couza muito embaraçada o preſcrever regras arithmeticas, quando por outra parte ſe póde com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da Regra de Liga.

200 ESta regra tem por objecto a miſtura das couſas de differente valor; e he de dous modos: Directa, quando ſe daõ as quantidades que ſe haõ de miſturar, com o valor de cadahuma, e ſe pergunta o valor do miſto que reſulta; Inverſa, quando ſe dá o valor das couſas que ſe haõ de miſturar, e ſe pergunta a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar, para que o miſto ſeja de hum preço dado.

A primeira executa-ſe deſte modo: *Cada huma das quantidades ſe multiplica pelo ſeu valor, a ſoma dos productos ſe divide pelo numero das quantidades, e o quociente he o valor que ſe buſca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17; pergunta-ſe o quilate a que ſe reduz o compoſto.

Multipliquem-ſe os 5 marcos pelos ſeus reſpectivos quilates 24, e daraõ o producto 120; do meſmo modo multipliquem ſe os 8 marcos por 21, e os 6 por 17, e daraõ os productos 168, e 102. A ſoma de todos tres faz 390, a qual ſendo dividida pela ſoma total dos marcos 19 dá no quociente $20\frac{10}{19}$; e eſtes ſaõ os quilates do compoſto.

Na Regra inverſa, quando ſómente duas couſas ſe haõ de ligar a hum preço dado entre os preços dellas, praticar-ſe-haõ eſtas duas proporçoens. *Como a differença entre os preços dos ſimplices para a differença entre os preços do compoſto e do ſimples de menor valor, aſſim a quantidade do compoſto para a parte que deve ter do ſimples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos*

dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de maior valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve levar do simples de menor valor.

Exemplo.

HUm Ourives quer fazer huma obra que tenha de pezo 8 marcos, e seja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para isso quer ligar duas especies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-se quanto deve tomar de cada hum.

Tome-se a differença entre os quilates das especies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate proposto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que saõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e busque-se o quarto termo nas duas proporçoens seguintes - - -

$$\begin{array}{lcl} 5 : 3\frac{1}{2} :: 8 : & & 10 : 7 :: 8 : \\ & \text{ou (n. 171.)} & \\ 5 : 1\frac{1}{2} :: 8 : & & 10 : 3 :: 8 : \end{array}$$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, isto he 5 marc. 4 onç. 6 oitav. 1 escrup. 4 gr. e $\frac{4}{5}$, que he a parte do ouro de 22 quilates, e a segunda dará 2 $\frac{2}{5}$, ou 2 marc. 3 onç. 1 oitav. 1 escrup. 19 gr. e $\frac{1}{5}$, que he a parte que se deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando se haõ de ligar mais do que duas especies de diverso valor, primeiramente se ligaráõ pela Regra directa todas as que forem de maior valor que o composto que se pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que

que melhor parecer, e se buscará o preço deste composto. O mesmo se praticará com todas as especies de menor valor que o intermedio dado. E deste modo ficaraõ as especies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o proposto, as quais se ligaraõ como no caso precedente, e achando-se a porçaõ que de cadahuma se deve tomar, tambem constaraõ as partes dos simplices, de que arbitrariamente as compuzémos.

Exemplo.

DAõ-se quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o segundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delle se quer fazer huma mistura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente misturaremos os dous de maior valor que o proposto, tomando de cadahum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo assim composto valerá a rasaõ de 102 a medida Depois supporemos tambem misturados os outros dous, tomando igualmente de cadahum as partes que nos parecer, v. gr duas partes do que vale a 60 e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do misto será a 54. Assim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para serem misturados de sorte que o composto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do segundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1; e do segundo como 2. Porém ambos elles saõ compostos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na rasaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos se-

ſeráõ como 2, 3, 4, 6; iſto he por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do ſegundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Eſta queſtaõ ſe póde reſolver de muitas maneiras, conforme as partes que arbitrariamente ſe tomarem para formar os dous compoſtos parciais, que finalmente ſe haõ de ligar.

Outras Regras Relativas ás Proporçoens.

201 MUitas outras Regras ſe encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais ſe reduzem á pratica da Regra de tres, e ſendo bem entendida a natureza das queſtoens naõ podem embaraçar a quem ſouber o que até agora temos dito.

202 Deſte genero he a *Regra dos juros*, na qual ſe buſca o intereſſe de qualquer quantia por qualquer tempo, ſuppoſta a raſaõ do que vence 100 cada anno.

Pergunta ſe v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a raſaõ de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráõ 36 $\frac{1}{4}$, e por conſeguinte teremos a proporçaõ: Como 100 para 36 $\frac{1}{4}$, aſſim o capital 449200 para o ſeu juro, que ſe achará ſer 162835.

Dando-ſe a quantia 612035 ſoma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, ſe quizermos ſaber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo 36 $\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaõ: Como 136 $\frac{1}{4}$ para 100, aſſim a quantia dada 612035 para o capital que ſe pede, 449200.

Perguntando-ſe o capital, que em 7 annos e 3 me-

mezes produza 162835 a rasaõ de 5 por 100, teremos: Como $36\frac{1}{4}$ para 100, assim o juro dado 162835 para o capital que se pergunta, 449200.

Perguntando-se o tempo, em que o capital 449200 ha de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para hum quarto, que será $36\frac{1}{4}$. Este he o juro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o quociente $7\frac{1}{4}$ mostrará o dito tempo, isto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando-se em fim a que rasaõ por 100 se deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para $36\frac{1}{4}$; e dividindo este numero pelo tempo $7\frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que se pergunta.

Pelo que respeita ao *juro dos juros*, e outras questoens mais complicadas sobre interesses e usuras, na Algebra se resolveráõ com mais facilidade.

203 Nos *descontos*, e *abatimentos* se discorre do mesmo modo que nos juros, como se mostra nos exemplos seguintes.

Comprou certa pessoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos: mas resolvendo-se logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na *rasaõ* de $4\frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-se, quanto deve pagar?

He manifesto, que neste caso naõ se busca outra cousa senaõ o capital que com o seu juro de $4\frac{1}{2}$ por 100 em dés annos faça 4536^{lb}. Ora como 100 produzem $4\frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produziráõ 45; e assim teremos: Como 145 para 100, assim 4536^{lb} para a quantia que se pede, a qual he 3128^{lb} 5^{s} 6^{d} $\frac{6}{29}$.

Tendo huma pessoa passado a hum mercador hum credito de 2854^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remillo passados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na rasaõ de 6 por 100; pergunta-se quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveráõ vencer $3\frac{1}{2}$. Assim o que o devedor havia de pagar do principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e passados 7 mezes sómente, o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conseguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, assim 2854^{lb} para a quantia que se pergunta, a qual acharemos ser 2786^{lb} 13^{s} 9^{d} $\frac{15}{53}$.

Deste modo usando da regra de tres, se resolvem outras muitas questoens pertencentes aos contratos mercantîs, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he necessario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progressoens Arithmeticas.

204 A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que de tal forma se vaõ seguindo huns aos outros, que cada hum excede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quantidade constante. Por exemplo esta serie

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 \ \&c.$$

he huma Progressaõ Arithmetica, porque cada termo tem de excesso sobre o que lhe fica atraz a mesma ma quantidade 3. Esta Progressaõ se denota com o mesmo sinal ÷, que se usa na Proporçaõ Arithmetica continua (n. 174), porque na realidade naõ he mais do que a mesma Proporçaõ continuada além do terceiro termo.

A Progressaõ he *crescente*, *ascendente*, ou *divergente*, quando os termos saõ cadavez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cadavez menores. Como ambas tem as mesmas propriedades, sómente com a differença de que o *somar* em huma deve ser *diminuir* na outra, naõ trataremos senaõ da ascendente: e o que della dissermos se applicará sem difficuldade á descendente.

205 He claro pois pela mesma noçaõ da Progressaõ, que com o primeiro termo e com a differença commua, a qual tambem se chama *razaõ* da Progressaõ, se podem formar todos os mais, pela addiçaõ successiva da mesma *razaõ*. Porque o segundo se forma do primeiro somado com a razaõ; o terceiro he a soma do segundo e da mesma razaõ, ou do primeiro e do duplo da razaõ; o quarto contém o terceiro e mais a razaõ, ou o primeiro e mais o triplo da mesma razaõ; e assim por diante.

206 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica he igual á soma do primeiro, e da razaõ tomada tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes.*

207 Por conseguinte, quando o primeiro termo for 0, qualquer dos outros será igual á razaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208 Por meio deste principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica, sem que nos seja para isso necessario calcular os precedentes.

Pergunta-se v. g. qual ha de ser o centesimo termo nesta Progressaõ ÷ 4. 9. 14. 19 &c. Como o ter-

termo que se pede he o centesimo., será precedido de 99 termos. Constará pois do primeiro 4, e da razaõ 5 multiplicada por 99; e será por conseguinte 499.

209 Do mesmo principio se entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, isto he, de assignar huma Progressaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Isto se executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente será a razaõ da Progressaõ, a qual por conseguinte se formará como assima dissemos (n. 205.).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o resto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ será a razaõ da Progressaõ, a qual será por conseguinte $\div 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9 . \frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Do mesmo modo, se entre 0 e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por $9 + 1$, ou por 10, e teremos a razaõ $\frac{1}{10}$, ou 0, 1, e por conseguinte a Progressaõ que buscamos será $\div$ 0 . 0, 1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0, 5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde se vê, que por menor e menor que seja a differença de dous numeros, sempre entre elles se pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progressoens Arithmeticas he o que basta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos de tratar. Pelo que respeita ás mais propriedades das mesmas Progressoens, em outro lugar as mostraremos com mais commodidade.

Das Progressoens Geometricas.

211 A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos, cadahum dos quais contém o seu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Esta serie v. g.

$\div\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 &c. he huma Progressaõ Geometrica, porque cada termo contém o seu antecedente o mesmo numero de vezes, isto he, 2. Este numero de vezes, que cada termo contém, ou he contido no antecedente, chama-se *denominador*, ou *rasaõ* da Progressaõ. E esta se denota com o sinal $\div\!\div$, como a Proporçaõ Geometrica continua, porque he a mesma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progressaõ Geometrica he *crescente*, *ascendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ sendo cadavez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cadavez menores. Naõ he preciso tratar de ambas separadamente, porque tem as mesmas propriedades, mudando-se sómente a multiplicaçaõ em divisaõ, e reciprocamente, além de que mudada a ordem dos termos huma se converte na outra.

212 Da mesma noçaõ da Progressaõ Geometrica se segue, que com a razaõ e o primeiro termo se podem formar todos os outros. Porque o segundo resulta do primeiro multiplicado pela razaõ; o terceiro do segundo multiplicado tambem pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da razaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da razaõ &c.

Deste modo na Progressaõ assima figurada o segundo termo 6 resulta do primeiro 3 multiplicado pela razaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da razaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da razaõ 8 &c.

213 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica se forma do primeiro multiplicado pela rasaõ elevada a huma potencia, que tem por expoente o numero dos termos precedentes.*

Peloque se o primeiro termo for 1, qualquer outro termo será igual á potencia da rasaõ que corresponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ aumenta o producto.

214 Daqui se deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica, sem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pede-se v. g. o termo duodecimo desta Progressaõ ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, será o que buscamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da rasaõ 2. Esta potencia se achará pela multiplicaçaõ continua do numero 2, até elle ser onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ, podémos elevar 2 ao cubo 8, e este ao seu cubo 512 que será a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do mesmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, será o termo duodecimo que buscamos 6144.

215 Do mesmo principio se reduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Isto se faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão correspondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade.* Esta raiz será a rasaõ, com a qual se formaráõ os termos pedidos (n. 212.).

Porque o maior dos numeros dados, que se póde tomar como ultimo termo da Progressaõ, será igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela rasaõ elevada á potencia correspondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213,). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente ferá a razaõ elevada ao gráo correfpondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade (n.74.); affim extrahindo do dito quociente a raiz do mefmo gráo, teremos a razaõ da Progreffaõ.

Pede-fe v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, e teremos o quociente 1024. Depois bufcaremos a raiz decima de 1024 (pag. 150.), que acharemos fer 2; e efta ferá a razaõ da Progreffaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizermos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeiro 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porém o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he final de que entre 6 e 48 naõ fe podem affignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ affignar-fe mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Affim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1, 5157167 proximamente (pag. 151.), e baftando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais, teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros fe podem fempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for neceffario. E ifto he o que nefte lugar bafta faber das Progreffoens.

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ fe *Logarithmos* os numeros de huma Progreffaõ Arithmetica, em quanto fe

compáraõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progressaõ Geometrica. Postas v. g. estas duas Progressoens

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.
∺ 2 . 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correspondente, que na segunda occupa o mesmo lugar; assim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde se segue, que o mesmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á mesma Progressaõ Geometrica, em que elle se acha, podemos fazer corresponder infinitas Progressoens Arithmeticas diversas.

Como porém attendemos presentemente ao uso actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progressoens Arithmeticas e Geometricas, que se podiaõ combinar entre si, mas passaremos logo ás que se escolhêraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que usamos.

218 Escolheu-se pois a Progressaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na rasaõ decupla, as quais parecêraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Assim temos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progressoens seguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.
∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Peloque neste systema de Logarithmos será sempre muito facil saber o Logarithmo de todos os numeros, que se exprimirem pela unidade seguida de qualquer numero de cifras, pois sempre o Logarithmo constará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progressaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os seus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que se podia seguir, se naõ houvesse outros meios, senaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela mesma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-se na Progressaõ fundamental ∺ 1; 10; 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n. 215.) succederá necessariamente de duas cousas huma, ou que algum delles coincidirá justamente com o numero 3, ou ao menos que hum será proximamente menor e o consecutivo proximamente maior que 3, sendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de sorte que aumentando quanto for necessario o numero dos meios, hum delles se poderá finalmente tomar pelo mesmo numero 3.

Entaõ metendo entre 0 e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos se calcularaõ entre 1 e 10, o termo desta Progressaõ que corresponder ao lugar do numero 3 na outra Progressaõ, ou do numero summamente proximo a 3, será o Logarithmo delle; e assim dos mais.

221 Assim deveremos imaginar; Que tendo-se metido 1000000 meios arithmeticos entre 0 e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3 &c., se metêraõ outros tantos geometricos entre 1 e 10, entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c; Que ordenando termo por termo estas Progressoens, se buscáraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c, ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica se notáraõ os termos, que lhes correspondiaõ no mesmo lugar, e eraõ por conseguinte os seus Logarithmos; E que finalmente transportando a huma columna vertical, como na Taboa seguinte, os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c, ao lado direito se assentaraõ os seus Logarithmos. A isto se reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

T A-

TABOA
DOS LOGARITHMOS
Dos Numeros naturais de 1 até 200.

Num	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Int. negat.	33	1, 518514	66	1, 819544
1	0, 000000	34	1, 531479	67	1, 826075
2	0, 301030	35	1, 544068	68	1, 832509
3	0, 477121	30	1, 550303	69	1, 838849
4	0, 602060	37	1, 568202	70	1, 845098
5	0, 698970	38	1, 579784	71	1, 851258
6	0, 778151	39	1, 591065	72	1, 857332
7	0, 845098	40	1, 602060	73	1, 863323
8	0, 903090	41	1, 612784	74	1, 869232
9	0, 954243	42	1, 623249	75	1, 875061
10	1, 000000	43	1, 633468	76	1, 880014
11	1, 041393	44	1, 643453	77	1, 886491
12	1, 079181	45	1, 653213	78	1, 892095
13	1, 113943	46	1, 662758	79	1, 897627
14	1, 146128	47	1, 672008	80	1, 903090
15	1, 170091	48	1, 681241	81	1, 908485
16	1, 204120	49	1, 690196	82	1, 913814
17	1, 230449	50	1, 698070	83	1, 919078
18	1, 255273	51	1, 707570	84	1, 924279
19	1, 278754	52	1, 716003	85	1, 929419
20	1, 301030	53	1, 724276	86	1, 934408
21	1, 322219	54	1, 732394	87	1, 939519
22	1, 342423	55	1, 740363	88	1, 944483
23	1, 361728	56	1, 748188	89	1, 040390
24	1, 380211	57	1, 755875	90	1, 954243
25	1, 397940	58	1, 763428	91	1, 959041
26	1, 414973	59	1, 770852	92	1, 962788
27	1, 431364	60	1, 778151	93	1, 968483
28	1, 447158	61	1, 785330	94	1, 973128
29	1, 462398	62	1, 792392	95	1, 977724
30	1, 477121	63	1, 799341	96	1, 982271
31	1, 491362	64	1, 806180	97	1, 986772
32	1, 505150	65	1, 812913	98	1, 991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,139879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á esquerda chama-se *Characteristica*, porque por ella se conhece a que década pertence o numero correspondente ao mesmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. g. a characteristica 3, he sinal que o seu numero he de *milbares*; porque sendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teráõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por conseguinte será 3 a characteristica, e as letras seguintes representaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteristica do seu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que assima ajuntámos para exemplo, tem depois da characteristica seis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem sete. Mas esta differença naõ prejudica aos usos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo mostraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui senaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de mostrar, devem principalmente deduzir-se das Progressoens Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-se pois quaisquer duas Progressoens com estas circunstancias, por exemplo, as duas seguintes.

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
$\dot{\dot{\div}}$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela natureza e correspondencia destas Progressoens he manifesto, que qualquer termo da primeira consta da razaõ tomada tantas vezes, quantas a ra-

raſaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a raſaõ da progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207. 212.); porém os termos correſpondentes de ambas as Progreſſoens ſaõ, procedidos de igual numero de termos: logo &c.

Aſſim v. g. no termo 28 da primeira a raſaõ 4 ſe contém ſete vezes, e outras tantas a raſaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo, *Somando dous quaiſquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſtes e a ſoma daquelles ſeráõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſſoens.*

Porque a ſoma conterá a raſaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contém juntamente os termos ſomados; e o producto terá a raſaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porém cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contém a raſaõ tantas vezes, quantas a raſaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a raſaõ Arithmetica, quantas o producto terá por factor a raſaõ Geometrica; e conſeguintemente ſeráõ termos correſpondentes nas ditas Progreſſoens.

225 Somando pois dous termos quaiſquer da Progreſſaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correſpondem na Geometrica, ſe para iſſo forem continuadas as meſmas Progreſſoens, quanto he neceſſario.

Somando v. g. os termos 8 e 24, que correſpondem a 9 e 729, teremos a ſoma 32, a qual correſponde na Progreſſaõ Geometrica ao numero 6561; e eſte ſerà o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais 1, 2, 3 &c na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por 0, he manifesto, *que somando os Logarithmos de quaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostraremos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. g. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber.

Log. de 13 - - - - 1,113943
Log. de 14 - - - - 1,146128

E a soma - - - - 2,260071 será o Log. do producto, que acharemos ser 182, numero que na Taboa compete ao dito Logarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he preciso mais que duplicar o seu Logarithmo. Porque para quadrar, deve o numero multiplicar-se por si mesmo; e por conseguinte deve tomar-se duas vezes, ou duplicar-se o seu Logarithmo. Pela mesma rasaõ triplicando o Log. de hum numero, teremos o Log. do seu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-se-há o seu Log. tantas vezes, quantas o numero entra por factor nessa potencia, ou multiplicar-se-há o Log. pelo expoente della.*

Querendo v. g. formar a potencia 7ª de 2, busca-caremos o ſeu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correſponde a 128, e eſta he a potencia 7^a de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrahir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c de qualquer numero, dividiremos o ſeu Log. por 2, 3, 4, 5 &c. ou geralmente, pelo expoente da raiz; e o quociente ſerá o Logarithmo della.*

Procurando v. g. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o ſeu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2, teremos 1,079181 que na meſma Taboa acharamos ſer Log. de 12; e por conſeguinte 12 ſerá a raiz quadrada de 144.

Se buſcarmos a Raiz 7^a de 128, a Taboa nos dará o Log. deſte numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e por iſſo ſerá 2 a raiz 7^a de 128; e aſſim das mais.

231 A Regra da Diviſaõ por Logarithmos ſe pratica, *diminuindo o Log. do diviſor do Log. do dividendo; e o reſto ſerá o Log. do quociente.*

Querendo v. g. dividir 187 por 17, buſcaremos os ſeus Logarithmos, e teremos

Log. do divid. 187 - - - - 2,271842
Log. do diviſ. 17 - - - - 1,230449

E o reſto - - - - - - - - - - - 1,041393 ſerá o Log. do quociente, que conſultando a Taboa acharemos ſer 11.

Quando o Log. do quociente ſe naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he ſinal, que a diviſaõ naõ ſe póde fazer ſem reſto; mais abaixo diremos, o que ſe deve fazer neſſe caſo.

A raſaõ deſta Regra he, porque ſendo o dividendo igual ao producto do diviſor pelo quociente (n. 74.) deve o Log. do dividendo formar-ſe da ſoma dos Log. do diviſor e do quociente (n. 227.) ; e conſeguintemente tirando o Log. do diviſor do Log. do dividendo, o reſto ſerá o Log. do quociente (n. 39.)-

232 Pelo que temos viſto ſe vê, que a Regra de tres ſe ha de praticar por Logarithmos, *ſomando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º ; e o reſto ſerá o Log. do 4º* ; o qual por conſeguinte ſe achará por meio das Taboas.

Buſcando-ſe v. g. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 : : 105 : , ſerá a operaçaõ deſta maneira:

Log. do 3º . 105 - - - - 2,021189
Log. do 2º . 12 - - . - 1,079181

Soma - - - - - - - - - - 3,100370
Log. do 1º . 7 - - - - - - 0,845098

Reſto - - - - - - - - - - 2,255272, ou Log. do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-ſe, que ſe o Logarithmo que reſulta de alguma operaçaõ coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ ſe deverá fazer caſo deſta differença. Porque ſendo os Log. dos numeros intermedios da Progreſſaõ decupla approximados ſómente até a metade de huma unidade da ultima caſa da dizima, póde ſucceder, que pela addiçaõ de muitos Log. ajuntando-ſe os pequenos defeitos da ultima letra de cadahum, influaõ na ultima letra do reſultado o defeito ou exceſſo de huma ou duas unidades ; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle reſultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo deſta advertencia.

Dos

Dos Numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas ſegundo a ſerie natural dos numeros inteiros, he claro, que nellas immediatamente ſe naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O meſmo ſe entenderá das raizes dos numeros, que naõ ſaõ potencias perfeitas &c.

Querendo-ſe pois o Log. de hum numero inteiro accompanhado de fracçaõ, reduzir-ſe-há tudo a quebrado (n. 86.); e deminuindo éntaõ o Log. do denominador do Log. do numerador, o reſto ſerá o Log. que ſe procura.

Se buſcarmos v. g. o Log. de 8 $\frac{3}{11}$, reduziremos primeiro eſte numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O reſto 0,917648 ſerá o Log. do numero propoſto 8 $\frac{3}{11}$; porque 8 $\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o meſmo que 91 dividido por 11 (n. 96.).

235 Pela meſma raſaõ ſe moſtra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria ſe deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porém, como eſta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ſer o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deſte do Log. daquelle. E o reſto ſerá o Log. que buſcamos, ſendo porém precedido do ſinal $-$, para ſe moſtrar que a diminuiçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que devia ſer. Aſſim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he $-0,917648$ &c.

236 O referido final, aſſim como denota que a ſubtracçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que convinha, tambem ſerve para trazer á lembrança, que a fim de compenſar iſſo meſmo ſe devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma Regra oppoſta á que temos eſtabelecido para os outros; iſto he: *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. deſta ſe deve diminuir; e que havendo de dividir, ſe deve ſomar* (*).

§§ Em geral: *Se os Log. dos factores forem todos poſitivos, ou todos negativos, a ſoma delles com o meſmo final; ſe huns poſitivos, outros negativos, a differença entre as duas ſomas de huns e dos outros com o final da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á diviſaõ: *Muda-ſe o final do diviſor, e pratica-ſe a meſma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracçoens de outra maneira, fazendo ſómente a characteriſtica negativa, e conſervando a dizima ſempre poſitiva. Eſta fórma de Logarithmos reſulta, ſubtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a eſquerda, e em chegando ás characteriſticas, toma-ſe por characteriſtica negativa o que ſeria neceſſario ajuntar á characteriſtica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador ſe pudeſſe della ſubtrahir ſem reſto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Para iſto ſerá neceſſario ajuntar 2 á characteriſtica do Log. do numerador, que ficará 2,301030, e ſerá o reſto

O o,

(*) Os numeros, que ſaõ precedidos do final —, chamaõ-ſe *negativos*. Na Algebra, daremos huma idéa mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ ſe haõ de conceber, como numeros menores que 0; porque abaixo do *nada* naõ pode haver couſa alguma.

0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na ſua characteriſtica, por termos poſto outro tanto de mais no Log. do numerador, ſerá o Log. que buſcamos $-2{,}122053$, entendendo-ſe porém que o final negativo ſómente affecta a characteriſtica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, coſtumaõ notar-ſe os de que agora fallamos deſte modo $\overline{2},122053$, ou tambem aſſim ⊣ 2,122053.

A raſaõ diſto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a eſte compete ſe multiplica realmente por 100. Logo tirando 2,178977 de 2,301030, o reſto 0,122053 ſerá o Log. de $\frac{200}{151}$. Para eſte quebrado ſe reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciſo dividillo por 100, e por conſeguinte tirar 2 á characteriſtica do ſeu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ ſerá $-2+0{,}122053$, ou $\overline{2}$, 122053.

Quando entrarem no calculo eſtes Logarithmos, obſervar-ſe-haõ as Regras aſſima dadas, em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ ſempre ſe ſomaõ as letras decimais, porque ſaõ todas poſitivas; e ſe deſta ſoma paſſarem algumas unidades para a caſa das characteriſticas ajuntaõ-ſe com as poſitivas, e a differença entre as ſomas das negativas, e poſitivas com o final da maior ſerá a characteriſtica. Na diviſaõ, ſempre ſe diminue o Log. do diviſor do Log. do dividendo em quanto á dizima; em quanto ás characteriſticas muda-ſe o final do diviſor, e pratica-ſe a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for neceſſario pedir huma unidade á caſa da characteriſtica, e eſta for 0, ou negativa, deverá eſta ficar com huma unidade de menos, v. g. ſendo o ficará $\overline{1}$, ſendo $\overline{1}$, ficará $\overline{2}$ &c.

Do

Do meſmo modo: Quando ſe houver de multiplicar hum Log. deſtes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e ſe dellas houverem de paſſar algumas unidades para a caſa da caracteriſtica, guardallas-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaráõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\bar{2},873245$ ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\bar{6},366225$; ſendo dividido por 7, o quociente $\bar{1},839035$ &c.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 9, exceptuando a derradeira da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra fórma, ajuntando 1 á ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\bar{2},374972$ ſe transforma em $-1,625028$, o Log. $\bar{1},587430$ em $-0,412570$, e reciprocamente. ʃʃ

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000. ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſtica

de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100, 1000 &c. e ao contrario dividido, ſe tirarmos 1, 2, 3 &c. unidades á meſma characteriſtica; porque niſſo naõ fazemos outra couſa, ſenaõ ajuntar, ou tirar ao dito Log. o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

139 Iſto ſuppoſto, ſe v. g. buſcarmos o Log. de 357859, delle cortaremos á direita tantas letras, quantas forem baſtantes, para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas, iſto he, duas neſte caſo, e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28.). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403, e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579, que he 1214. Entaõ diremos: Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579, dá a differença dos Log. 1214, a differença 0,59 entre os numeros 3578, e 3578,59, que differença dará nos ſeus Log.? Como temos a unidade por primeiro termo, baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro, e o producto 716,26, ou 716, deixando as partes decimais, he a diferença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente, como 3578,59 ſe deve multiplicar por 100 para fazer 357859, reſta ajuntarmos 2 á characteriſtica de ſeu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero propoſto 357859.

Se as letras que ſe haõ de cortar forem todas cifras, he claro, que buſcando nas Taboas o Log. do numero que ficar á eſquerda, naõ ſerá preciſo mais do que ajuntar-lhe á characteriſtica tantas unidades, quantas foraõ as cifras q̃ ſe cortáraõ.

240 Quando o numero he ſeguido de dizima, buſca-ſe o Log. como ſe foſſe inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteriſtica

ca ſe tiraõ tantas unidades, quantas ſaõ as letras decimais. Querendo v. g. o Log. de 3,27 buſcaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 á characteriſtica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buſcaremos o de 357859 (n. 239.), que he 5 5537119, e tirando 4 á characteriſtica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, ſe o numero conſtar ſómente de notas decimais, buſcaremos ſim o Log. delle como ſe foſſe inteiro, mas diminuillo-hemos de tantas unidades, quantas forem as caſas da dizima, e o reſto com o ſinal − ſerá o Log. dezejado. Querendo v. g. o Log. do numero 0,03, buſcaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos − 1,522879 Log. de 0,03.

¶¶ Se quizermos porém o Log. com a characteriſtica ſómente negativa, buſcaremos tambem o Log. das letras decimais, como ſe foſſem numero inteiro, e da characteriſtica tiraremos tantas unidades, quantas forem as caſas da meſma dizima. Aſſim acharemos, que $\bar{2},477121$ he o Log. de 0,03; $\bar{3},514548$ Log. de 0,00327 &c. ¶¶

Dos Logarithmos, cujos numeros ſe naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operaçoens com mais facilidade ſubſtituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que ſaõ os ſeus Logarithmos, aſſim tendo acabado o calculo he neceſſario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes ſuccederá, que o Log. reſultante das operaçoens correſponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he neceſſario, para que o meſmo Log. ſe ache nellas. Aſſim he preciſo, que tenhamos hum metho-

thodo para achar por meio das mesmas Taboas o numero correspondente a qualquer Log. proposto. O qual he desta maneira.

243 Tirem-se da characteristica tantas unidades, quantas forem bastantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. se achar nas Taboas, o numero que lhe corresponder, sendo aumentado de tantas cifras á direita, quantas unidades se ouverem tirado da characteristica, será o numero que buscamos. Tirando v. g, 3 unidades á characteristica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas corresponde a 16879; e assim 16879000 será o numero representado pelo Log. 7,2273467 (n. 238.)

Reduzida porém a characteristica aos limites das Taboas, se o Log. proposto cahir entre dous Log. consecutivos dellas, praticar-se-ha deste modo: Supponhamos, que se pede o numero correspondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades á characteristica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conseguinte o seu numero será 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos esta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. proposto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos mesmos numeros? Como o segundo termo he sempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente será o quarto, que neste exemplo acharemos 0,9625. Assim o Log. 3,2432768 corresponde ao numero 1750,9625, e conseguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28. 238.)

244 Quando a characteristica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ se lhe deve tirar unidade alguma; e por isso tendo acha-

do o numero correſpondente, naõ ſe lhe ajuntaráõ cifras algumas, nem ſe mudará o lugar da virgula.

245 He porém muito de advertir, que a proporçaõ aſſima praticada ſuppoem, que as differenças dos Log. ſaõ proporcionais ás differenças dos numeros correſpondentes, como ſaõ com effeito proximamente, ſendo os numeros grandes, mas de nenhuma ſorte, ſendo pequenos. Por iſſo, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ paſſaõ de 10000, ajuntaremos á characteriſtica as unidades que forem preciſas, para buſcarmos o numero na claſſe ſuprema das meſmas Taboas, no qual deveremos ſeparar para a dizima tantas letras, quantas foram as unidades que ajuntámos á characteriſtica; e ſe quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ aſſima indicada (n. 243.).

Por exemplo, buſcando-ſe o numero correſpondente ao Log. 0,5432725, pela inſpecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomaſſemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c. que ſe aparta muito da verdade. Porém ajuntando 3 unidades á characteriſtica, acharemos que o Log. 3,5482725 moſtra hum numero entre 3493 e 3494; pelo que baſtandonos a terceira caſa da dizima, diremos que o numero correſpondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porém mais letras decimais, pelo methodo aſſima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 correſponde ao numero 3493,594 (n. 243.), e por conſeguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238.).

Porém eſta aproximaçaõ dos numeros tem ſeus limites. Porque ſendo, como aſſima diſſemos, exactos ſómente os Log. até huma meia unidade da ultima caſa decimal, he manifeſto, que as ſuas differenças participaõ deſte defeito. Por iſſo em chegando a ultima letra da differença dividida a influir ſobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle ſeráõ faltas de exactidaõ, e por iſſo he eſcuſado continuar a diviſaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ ſeguramente ſenaõ até os numeros de ſete letras; e iſto he o que baſta quaſi ſempre. Sendo preciſo mais, recorrer-ſe-ha a Taboas de mais letras, ou naõ ſe uſará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-ſe-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, deſorte que o reſto ſe ache na ſuprema claſſe das Taboas, e do numero correſpondente ſe tomaráõ tantas caſas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais ſe diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buſcando-ſe a fracçaõ correſpondente ao Log. −1,532732 diminuiremos eſte de 5 e o reſto 3,467268 moſtrará na Taboa hum numero entre 2932 e 2933; pelo que a fracçaõ pedida ſerá 0,02932. E com effeito tirar o Log. −1,532732 de 5 he o meſmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe correſponde (n. 219. 236.). Logo o numero correſpondente ao reſto deverá dividir-ſe por 100000, tomando 5 caſas decimais (n. 28.).

ſſ Sendo os Log. ſómente negativos em quanto á characteriſtica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correſpondente. Buſcar-ſe-ha o numero que correſponde ao Log. com a characteriſtica que melhor parecer, e a primeira letra delle ſe aſſentará tantas caſas adiante da virgula, quantas ſaõ as unidades negativas da characteriſtica.

Aſſim v. g. querendo até a quarta letra decimal a fracçaõ correſpondente ao Log. $\bar{2}$,235724, buſcaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ ſerá 0,0172. Querendo a fracçaõ correſpondente ao Logarithmo $\bar{1}$,732589 até a ſexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log. 5,732589, que acharemos ſer 540242, e por conſeguinte a fracçaõ dezejada 0,540242. SS

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicaçoens na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui ſómente daremos, por meio de exemplos tirados da meſma Arithmetica, alguma idéa da ventagem que reſulta dos Logarithmos, em quanto á prontidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

PErgunta-ſe o quociente de 17954 dividido por 12836, aproximado até as decimas-milleſimas. Uſando dos Log. obraremos deſta maneira:

Log. de 17954 - - - 4,254161
Log. de 12836 - - - 4,108430

Reſto - - - - - 0,145731, o qual ſendo procurado nas Taboas com a characteriſtica 4 correſponde a 13987; e conſeguintemente ſerá o quociente pedido 1,3987 (n. 238.).

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz cubica de 53 aproximada até a caſa das decimas-milleſimas.

Buſque-ſe o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-ſe por 3. (n. 230.). O quociente 0,574759 ſerá o Log. da raiz. Eſte com a characteriſtica 5 correſponde nas Taboas proximamente ao numero 375628; Logo a raiz ſerá 3,75628 (n. 238.).

Exemplo III.

QUerendo ſaber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buſcaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o por 3 teremos 11,275827 Log. do cubo do meſmo numero. Dividindo eſte por 5, teremos 2,255165, por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteriſtica aumentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 1799555;

e assim será a raiz que buscamos 179,955.

Exemplo IV.

QUerendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como seria necessario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215.), para conhecer a rasaõ da Progressaõ; por Logarithmos se obrará deste modo:

Tirar-se-ha 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n 231.), e o resto 0,333699 se dividirá por 5 (n. 230.). O quociente 0,066740 será o Log. da rasaõ; e entrando com elle nas Taboas com a characteristica 4 acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a rasaõ he 1,1661 exacta até as decimas-millesimas. Assim naõ resta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela rasaõ 1,1661, o producto outra vez pela rasaõ &c. (n. 211.).

Porêm estas mesmas operaçoens se faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log da rasaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deste; e teremos 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais; que seráõ proximamente 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso.

248 QUando se praticaõ as operaçoens por Logarithmos, e alguns destes se devem diminuir, póde simplificar-se o calculo, substituindo em lugar delles os seus complementos.

249 Para disto se formar huma idéa clara, he necessario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conste da unidade

ſeguida de tantas cifras, quantas ſaõ as letras do primeiro, a operaçaõ ſe reduz a eſcrever da eſquerda para a direita a differença entre 9 e cadahuma das letras do numero propoſto, exceptuando a ultima, em lugar da qual ſe tomará o que lhe faltar para 10. Aſſim v. g. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos ſucceſſivamente as letras 5,2,6,9,2, de 9; e a ultima 7 de 10, e ſerá o reſto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero propoſto ſe conſiderará como 004873 e praticando a meſma regra, teremos o reſto 995127.

250 O reſto formádo deſta maneira he o que ſe chama *Complemento Arithmetico* do numero propoſto.

251 Como he taõ facil a ſubſtituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas ſe póde contar por operaçaõ he manifeſto, que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte :

	672736
	426452
Compl. de 432752 - - -	567248
Compl de 18675 - - -	981325
Soma - - - - - - - -	2)647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes 647761 daráõ o reſultado que ſe buſca.

A raſaõ deſta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 ſomando o ſeu complemento, ou 1000000—432752, naõ ſómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao meſmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira Letra da ſoma.

252 A applicaçaõ diſto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que ſe haõ de ſubtrahir, ſubſtituiremos os ſeus complementos, que ſe deſignaõ com as letras CL, e na ſoma deixaremos de eſcrever tantas dezenas na characteriſtica quantos forem os complementos.

Exemplo. I.

SUpponhamos que ſe procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 : : 129 :
Como deveriamos ſomar os Log. de 1599 e 129, e da ſoma tirar o Log. de 1677 (n 232.), por huma ſoma unica praticaremos deſte modo :

CL. de 1677 - - - - 6,775467
Log. de 1599 - - - - 3,203848
Log. de 129 - - - - 2,110590

E a ſoma - - - - - - - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteriſtica ſerá o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$

Já ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106. 109.) Por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte :

Log. de 675 - - - - 2,829304
Log. de 952 - - - - 2,978637
Log. de 753 - - - - 2,876795
CL. de 527 - - - - 7,278189
CL. de 377 - - - - 7,423659
CL. de 631 - - - - 7,199971

E a Soma - - - - - - - - - 0,586555, lançando fóra as 3 dezenas da characteristica, por entrarem nella 3 complementos, mostrarà nas Taboas o numero que buscamos 3,8597 proximamente.

253 Além disto, servem tambem os complementos com grande ventagem do calculo, para fazer positivos os Logarithmos das fracçoens. Para acharmos v. g. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que representa o numero 3 dividido por 4 (n.96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a soma 9,875061 serà o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle se involve hum complemento, e conseguintemente se deveria lançar fóra huma dezena da characteristica, se houvesse. Mas esta se subentende sempre, e se lança fóra no fim das operaçoens, em que entra o dito Logarithmo, se póde ser.

§ Os Logarithmos desta fórma realmente naõ differem dos que se exprimem por huma characteristica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual se subentende huma dezena subtractiva da characteristica; tem com effeito por characteristica $9-10$, e conseguintemente vem a ser o mesmo que $\bar{1},875061$. Se o mesmo Log. involvesse dous complementos, teria realmente a characteristica $9-20$, e valeria o mesmo que $\overline{11},875061$.

Deve reparar-se, que os Logarithmos se servem mutuamente de complementos. Assim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do mesmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Estes Logarithmos, que saõ mutuamente complementos, correspondem a numeros entre si *reciprocos*, os quais saõ todos aquelles, que sendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c. E por isso, como he o mesmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de ſubtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e aſſim nos outros caſos. ∬

254 O meſmo ſe entenderá dos Log. das fracçoens decimais. Se quizermos v. g o Log. de 0,575 que repreſenta o meſmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a ſoma 9,759668 ſerá o Log. que buſcamos. De outra ſorte :- Buſque-ſe o Log. da fracçaõ decimal, como ſe foſſe numero inteiro, e em lugar da characteriſtica ſe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas ſaõ as caſas deſde o lugar das unidades atè a primeira letra da fracçaõ. Aſſim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,0000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,00000000005621 o Log. 9,749812; ſubentendendo-ſe no primeiro e ſegundo hum ſó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos ſe houver de tornar aos numeros, ſe no reſultado de quaiſquer operaçoens naõ ſe puderem lançar fóra da characteriſtica tantas dezenas, quantos forem os complementos que nellas entráraõ, he manifeſto, que elle deve moſtrar huma fracçaõ. Para determinarmos eſta, lançaremos da characteriſtica todas as dezenas que tiver, e conſiderando o reſto como Log. de hum numero inteiro, buſcaremos eſte nas Taboas (n. 242 e ſeg.), e nelle notaremos tantas dezenas de caſas decimais da direita para a eſquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. reſtáraõ.

Reſultando v. g. o Log. 8,732235 de varias operaçoens em que tiveſſe entrado hum complemento, conheceremos que elle pertence a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fóra da characteriſtica huma dezena que nella ha de mais. Aſſim buſcando o numero inteiro que correſponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500; e fazendo nelle 10 caſas de dizima, ſerá a fracçaõ 0,0539802500.

Como porém raras vezes he neceſſario levar as fracçoens a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-ſe-ha a characteriſtica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que baſtarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a ſua primeira letra tantas caſas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteriſtica do Log. propoſto tiver de menos que 10, 20 &c. conforme o Log. contiver hum, dous &c. complementos.

Deſte modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteriſtica 3, correſponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteriſtica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá eſtar na ſegunda caſa depois da virgula, e ſerá a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involveſſe dous complementos, ſeria a fracçaõ correſpondente 0,000000000005398.

256 Deve notar-ſe, que quando ſe multiplicaõ eſtes Logarithmos, como ſuccede na formaçaõ das potencias das fracçoens, juntamente ſe multiplicaõ os complementos que nelles ſe contém. Por iſſo, lançando fora as dezenas que tiver a characteriſtica do producto, ſe terá conta dos complementos que nella ficaõ, para ſe determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-ſe o Log. 7,924753 que ſabemos involver hum complemento, e querendo-ſe elevar á quinta potencia a fracçaõ correſpondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conſeguintemente correſponderá á fracçaõ 0,0000000004205.

257 Pelo contrario, quando os meſmos Logarithmos ſe houverem de dividir, como ſuccede na extracçaõ das raizes, deve procurar-ſe que ajuntando as dezenas neceſſarias á characteriſtica ſe ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no expoente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a diviſaõ, o quociente conſervará hum, dous, tres &c complementos.

Por exemplo, ſe o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correſpondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteriſtica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum ſó complemento, e moſtrará a raiz que buſcamos 0,7961. Se da fracçaõ correſpondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a raiz quadrada, dividillo-hemos por 2 (porque naõ he neceſſario ajuntar dezena alguma á characteriſtica neſte caſo) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,0000000857. Se da fracçaõ correſpondente ao Log. 9,887745, no qual ſe contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteriſtica e teremos 39,887745 com 8 complementos; entaõ dividindo por 4, o quociente 9,971936 conſervará dous complementos, e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,00000000009374; e aſſim dos mais.

O uſo dos Complementos ſerve de abbreviar ventajoſamente as opperaçoens Trignometricas; e por iſſo he de grande utilidade na Aſtronomia, e em todas as Partes da Mathematica, onde ſe houver de praticar a reſoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

INDICE

Dos Principios que ſe contém neſtes Elementos.

nando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro; se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se toma a dividir do mesmo modo, e assim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he final que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he final que a letra do quociente se assentou menor do que convinha. n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as da quelle que menos tiver. n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros, procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais. n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante. n. 68

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve sahir o outro no quociente; e multiplicando o divisor pelo quociente, deve sahir o producto igual ao dividendo. n. 74.

Fracçaõ, ou *Quebrado*, he o numero que representa as partes da unidade, a qual se suppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado saõ necessarios dous numeros, hum que mostre em quantas partes se suppoem dividida a unidade, o qual se chama *denominador*; e o outro, que mostre de quantas dessas partes consta a quantidade que queremos significar, o qual se chama *numerador*. n, 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-se *termos* delle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador, vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em huma expressaõ fraccionaria, divide-se o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-se pelo donominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado naõ muda de valor, quando se multiplicaõ, ou dividem ambos os seus termos por hum mesmo numero. n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mesmo denominador, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo denominador do outro. Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros. n. 90. 91.

zindo as especies inferiores a huã fracçaõ da principal, antes de fazer as ditas operaçoens. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente. n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se-ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor reduz-se ás unidades da sua infima especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisaõ, como no caso do divisor incomplexo. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém *o quadrado das dezenas*, o *dobro do producto das dezenas pelas unidades*, e *o quadrado das unidades*. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que póde ser de huma só letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se escreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará á classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada; e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz appoximada de hum numero, que a naõ tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas saõ as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de num quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se os termos saõ quadrados perfeitos; quando naõ, reduz-se o quebrado á dizima, de sorte que tenha numero

Se

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a ſoma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 178. 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos ſerá igual ao quadrado do meio, e reciprocamente. n. 178.

Dados tres termos de huma proporçaõ geometrica conhecer-ſe-ha o quarto. Porque ſe eſte for hum dos extremos, o producto dos meios ſe dividirá pelo outro; e ſe for hum dos meios, o producto dos extremos ſe dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporçaõ de quatro termos naõ ſe perde, mudando os extremos para meios, e os meios para extremos; nem tambem, trocando entre ſi de lugar os meios, ou os extremos. n. 181 182.

A proporçaõ naõ ſe póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os conſequentes por hum meſmo numero. n. 185.

Se em qualquer proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença do antecedente e conſequente, ſe comparar com o antecedente ou conſequente, em ambas as raſoens do meſmo modo, o reſultado eſtará em proporçaõ. n. 183.

Em toda a proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença dos antecedentes he para a ſoma, ou differença dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente. n. 185.

Em qualquer numero de raſoens iguais, a ſoma de todos os antecedentes he para a ſoma de todos os conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente. n. 186.

Raſaõ compoſta he a que reſulta de duas, ou mais raſoens, multiplicando entre ſi os antecedentes, e da meſma ſorte os conſequentes. n. 187.

Raſaõ *duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada* &c, he a que ſe compoem de duas, tres, quatro &c raſoens iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporçoens, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem eſtaõ em proporçaõ. n. 190

As potencias ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 191.

As raizes ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 192.

A *Regra de tres* tem por objecto achar hum dos termos de huma proporçaõ por meio dos outros. Eſta he *ſimples*, quando a queſtaõ naõ involve mais do que quatro termos; e *compoſta*, quando involve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres *directa* he quando hum dos termos principais deve conter o outro do meſmo modo que o relativo do primeiro contém o relativo do ſegundo; e *inverſa*, ou *reciproca*, quando hum dos termos principais deve conter o outro, como o relativo deſte contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o ſeu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes; e na inverſa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A *Regra de Companhia* tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaiſquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a ſoma dos numeros dados para o numero propoſto, aſſim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A *Regra de falſa poſiçaõ* he ſimples

dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.

O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas saõ as unidades da characteristica, e mais huma. n. 222.

A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 226.

O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo delle, multiplicado pelo expoente da mesma potencia. n. 229.

O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo delle, dividido pelo expoente da mesma raiz. n. 23ç.

O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.

Pratica-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.

O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracçaõ, achar-se-ha reduzindo tudo a fracçaõ, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.

O Logarithmo de huma fracçaõ propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do sinal —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isso os Logarithmos das fracçoens proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.

Se á characteristica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero dés, cem, mil vezes &c maior; e ao contrario. n. 238.

Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde ás primeiras quatro, ou sinco letras delle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cortaráõ outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a characteristica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.

O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as casas decimais. n. 240.

O Logarithmo de huma fracçaõ decimal propria buscase tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se poem o sinal —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dirá as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor. n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula

ELEM.
DE
ARITH.