Meya-lua; o qual se diminuirà se o Flanqueãte,ou da Tenalha se diminuir, como succede na meã,& pequena Fortificaçaõ:mas como seja muito pouco o que se diminue,não dá outra fòrma destas obras exteriores mais que a representada na fig. 14.

Na outra fig. n. 15. se representa hũa Praça perfeita da meã Fortificaçaõ. O Fosso he de 16. toesas de largura; tres de profũdidade,traçado por duas linhas parallelas ás Faces dos Baluartes & linhas da defensa, formando hum angulo reintrante sempre igual ao Flanqueante exterior da mesma Fortificaçaõ, & sempre semelhante em todos os numeros de seus Polygonos Fig. 15.

A grande Contrascarpa D C,C H q̃ corre em toda a roda do Fosso da Praça he sempre de 25. toesas de largura:seu Reparo B C he de sette toesas de largo; sobre o qual assenta o Parapeito de tres toesas,comprehendidos nellas os tres pès da grossura da muralha;com que vem a restar 18. toesas no espaço A B para Base da subida de duas toesas,& para os alojamentos à maneira de arrabaldes entre o Terrapleno, & Fosso.

Os Flancos desta grande Contrascarpa comprehendem cada hum tres Parapeitos na fòrma dos dos Baluartes, & podem conter, o primeiro tres Canhoens, o segũdoquatro, o terceirodous, que fazem nove Peças em todos tres; destas podem estar duas escondidas; como as dos Flancos da primeira fig. do Capit. 7. & quanto a suas particulares fòrmas, será mais facil de as conhecer, & medir na fig. que de as apprehender por muitas palavras confusas.

O Fosso C E da grande Cõtrascarpa he de doze toesas de largo, duas de fundo, limitado por duas linhas parallelas a seu Reparo sobre o angulo reintrante; das quaes se traça o Revelin (a que chamaM eya-lua) cõ suas duas Demigollas de 20.toesas cada hũa,& suas duas Faces cada hũa de34.toesas de comprido;formando o angulo G de 67.gr.50.min. 20.seg.

O Reparo do Revelin,ou Meya-lua he como os outros a saber de sette de largo emcima, & duas de alto sobre o livel da campanha, ou quatro sobre o fundo do seu Fosso,largo 10. toesas, a saber duas menos que os mais Fossos das obras externas, & a pequena Contrascarpa (he a Estrada encuberta;que assim lhe chama Pagan) dos Fossos da grãde Contrascarpa, & da Meya-lua he de quatro toesas de largura com suas Banquetas,& seu Glacis [isto to he a Explanada; a que alguns chamaõ Glacis, outros Spalto, outros Arcen,em diversas linguas] como nas mais obras sobre-dittas.

E porque todas estas medidas podem tambem servir, como as da primeira fig. nas tres regras, ou modos de Fortificaçoens dittos nos Capitulos 2. & 3. sem outra variedade mais que no valor do angulo do Revelin; o qual crescerá na grande Fortificaçaõ, diminuirâ na pequena conforme o angulo flanqueante;diz o Autor que naõ assina outra forma desta sorte de obras externas mais que a apontada para a Fortificaçaõ meã.

A profundidade dos Fossos destas duas Fortificaçoens exteriores he de duas toesas; a largura de doze; excepto o da Meya-lua singela,que tem 10. de largo sòmente. A altura dos Reparos de quatro sobre o plano de seu Fosso,sem contar os Parapeitos, &havendose de escolher,prefere o Autor a grande Contrascarpa da segunda Praça meã á Contraguarda da primeiraPraça grande, assim pella commodidade de seu alojamento capaz de recolher grande numero de gente,& de animaes necessarios,mas perigosos dentro na Praça cercada; como pella forte defensa que toma da artilheria dos Flancos da grande Contrascarpa; pois que a mosqueteria naõ he taõ favoravel neste caso; como sabem os experimentados.

Todavia a Meya-lua da Praça grande naõ se deve desprezar pello artificio demonstrado de defender seus dobrados Reparos com o Fosso intermedio,&juntamente pella defensa das Contraguardas.

SCHOLIO.

ATèqui he a representaçaõ que o Conde de Pagan faz das duas Praças grande,& meã, a que chama perfeitas: porém contra a perfeiçaõ que quer intimar(alem de outros inconveniẽtes que adiante apontaremos) se póde oppor,que na Praça grande, que guarnece com o Revelin de dobrados Reparos, cõ o Fosso intermedio,& com as Contraguardas se podem encubrir algũs homens ao pè da Praça mais baixa no angulo que aquella fórma com a continuaçaõ da Razante, sem serem descubertos de parte algũa contra a maxima da Fortificaçaõ,que naõ deve haver nella ponto algum,que de outros naõ seja descuberto, & flanqueado: assim

assim que neste caso ainda seguindo a fabrica do Autor, despois de achados os pontos O, V na continuaçaõ das Razantes; dos quaes devem sahir os Flancos mais baixos, lançaria eu a Cortina direita do ponto O ao ponto V, porq̃ entaõ se descubrirá qualquer delles de todo o Flanco, ficando este sempre quasi perpendicular á Razante como elle quer, & em angulo obtuso com a Cortina. Fig. 14.

Muito mais avulta o sobreditto inconveniente na grande Cõtrascarpa da fig. da segunda Fortificaçaõ meã; por quanto a ditta Contrascarpa faz no meyo de sua Cortina hum angulo sahido para fòra; que naõ deixa descubrir em muito mayor espaço o angulo que faz o seu Flanco com a tal Cortina: por onde tambem eu deitára esta direita de Flanco a Flanco; pois o permitte o espaço que fica della para dentro antes do Fosso principal dando lugar para os Terraplenos. Fig. 15.

Tambem tenho por cousa fòra da boa Fortificaçaõ serem os dous Reparos do Baluarte da mesma altura de seis toesas sobre o fundo do Fosso grande; como tambem serem da mesma de quatro toesas os dous Reparos do Revelin sobre o fundo do seu Fosso; que vem a ser de cinco sobre o do principal; pois he maxima bem fundada que sempre as obras exteriores sejaõ mais baixas, & sujeitas ás interiores; & se os dobres Reparos dos Baluartes saõ da mesma altura, & tambem de outra igual os do Revelin; ganhando o inimigo o primeiro Reparo, fica igual com os defensores do segundo.

Pello que eu dispuzera a altura dos Reparos na seguinte fòrma.

O da Cortina, & o mais interior dos dous de cada Baluarte de seis toesas, que saõ 36. pès, de altura sobre o plano do Fosso principal de tres toesas, ou dezoito pès de fundo, & como o Fosso intermedio entre os dous Reparos seja sòmente de duas toesas, ou 12. pès de fundo, ficarà o Reparo interior elevado sobre elle cinco toesas, ou trinta pès.

O Reparo exterior dos dous de cada Baluarte elevado $5\frac{1}{3}$ toesas, ou 32. pès sobre o plano do Fosso principal que lhe corre pello pè de sua muralha; de modo que fique $\frac{2}{3}$ de toesa, ou 4. pès mais baixo que o Reparo interior.

O Reparo interior dos dous do Revelin, alto sobre o plano do grande Fosso $4\frac{2}{3}$ toesas ou 28. pès; & sobre o seu Fosso intermedio

medio $3\frac{2}{3}$ toesas, ou 22. pés;por quanto este Fosso he de 2. toesas, ou 12. pès de fundo.

O Reparo exterior do Revelin, & os Reparos das Conservas 4. toesas, ou 24. pès sobre o fundo do Fosso principal,& sobre o seu particular Fosso 3. toesas,ou 18. pès; por ser este de 2.toesas ou 12. pés de fundo, sendo o principal de tres toesas, ou 18.pés.

De modo que o Reparo da Cortina, & interior do Baluarte fique sempre elevado tres toesas, ou 18. pès sobre o livel da campanha raza;que he onde fazemos esta cõsideraçaõ das Praças regulares que descreve o Conde de Pagan; porque sendo o sitio montuoso se deve haver respeito a sua disposiçaõ.

O Reparo exterior do Baluarte $2\frac{1}{3}$ toesas, ou 14. pés sobre a campanha raza.

O Reparo interior do Revelin $1\frac{2}{3}$ toesas, ou 10. pés sobre a mesma campanha.

O exterior do Revelin,& os das Contraguardas hũa toesa, ou 6. pès sobre o ditto livel;que he o da Estrada encuberta neste caso, & a mayor altura que daõ os Autores às Meyas-luas,& Revelins nas Fortificaçoens regulares; a saber de 4. atè 6. pès de altura. Tudo isto se entende sem entrar a altura dos Parapeitos.

Na fig. 15. da Praça meã com a grande Contrascarpa, que se pòde tambem accommodar a todas as figuras grandes (como o Autor diz) se guardará semelhante disposiçaõ nas alturas dos Reparos, a saber.

O Reparo da Cortina,& interiores dos Baluartes de 6. toesas, ou 36. pès de altura sobre o fundo do Fosso principal,mas de 5. toesas sobre o do Fosso intermedio.

Os Reparos exteriores dos Baluartes de $5\frac{1}{3}$ toesas,ou 32. pès de altura sobre o plano do Fosso principal.

O Reparo de toda a grande Contrascarpa de 4.toesas,& dous terços, ou 28. pès sobre o livel do plano do Fosso grande:3.toesas,& 2.pès sobre o fundo de seu particular Fosso,por ser este de 2. toesas de profundo.

O Reparo do Revelin de 4. toesas sobre o fundo do grande Fosso,ou de 3.sobre o seu particular,que he no mesmo livel,que o da grande Contrascarpa;de modo que este Revelin vem a ficar hũa toesa; ou 6. pès sobre o livel da campanha, ou Estrada encuberta.

Mas

Mas porque neste caso, nem ainda na doutrina de Pagan devem ser os Fossos taõ largos, de que adiante assinamos a razaõ, apontaremos ahi sua largura.

Tambem advirto que na Contraguarda da fig. 14. lhe naõ fizera eu Parapeito da parte opposta á Face do Revelin, pella mesma razaõ pella qual se não faz nos lados das Meyas-luas fabricadas defronte dos angulos flanqueados dos Baluartes; a saber para que seu plano possa ser flanqueado do Revelin; pois estas Contraguardas de Pagan, naõ saõ outra cousa mais que hũas Meyas-luas de Faces mais compridas, que as ordinarias, & nunqua convem que tenhaõ Parapeito contra a Face do Revelin; porque se o inimigo allí entrar fique descuberto aos tiros do ditto Revelin ainda que por dentro fica a Contraguarda descuberta aos do Baluarte.

Porém o mayor reparo que tenho contra esta doutrina de Pagan he, que não tem onde accõmodar a terra que sahir destes Fossos que faz, nem os Terraplenos que aponta de 7 toesas de largura, 3. de altura sobre o livel da campanha, & os das obras exteriores das mesmas 7. de largura, & 2. de altura saõ capazes de recolherem em si tanta terra; havendo de necessidade sobejar hũa grande immensidade da que sahir dos taes Fossos, & não tem onde a accõmodar, ainda que a espalhe pella Explanada, demais da que embebem os Parapeitos, & a vá accõmodando nos Terraplenos internos dos Baluartes, como poderà reconhecer quem lhe fizer a conta, & os experimentados melhor conheceràõ; mayormente quando estes reconhecem que dous pès cubicos de terreno natural cavados, & conduzidos ao Terrapleno, vem a occupar ordinariamente espaço de 3. pès, ainda que a terra seja bem batida com os pizoens, como me consta por experiencia em Alẽ-Tejo, donde se colhe que com muito mayor excesso virà a sobejar a terra, que se tirar dos Fossos, da que houverem de embeber os Reparos de 7; toesas de largura, & seus Parapeitos de 3.

Mas esta duvida parece se torna contra mim ainda com mayor força, que contra o Conde de Pagan; pois tenho ditto, que lhe não approvo serẽ os dobrados Reparos do Baluarte de hũa mesma altura; mas que seja mais baixo o externo: assim mesmo os do Revelin mais baixos successivamente que os dos Baluartes: & tambem os das Conservas, ou Contraguardas.

Respondo que assim o reconheço,& digo que assim Pagan como eu devemos satisfazer a esta duvida;& por tanto que elle naõ faz bem em ordenar os Fossos de tanta largura, que não tenha onde accõmodar a terra;& ainda que tivera se podiaõ escusar taõ largos Fossos, ao menos nas obras exteriores, como tambem os intermedios dos Baluartes, & Revelin,& q̃ convem fazer os Terraplenos mais largos,assim por embeber a terra que sahir dos Fossos, como porque a largura superior de 7. toesas he muito pouca para Praça Real;por quanto assinando 3.toesas de largura ao Parapeito, restaõ 4. de largura para o Terrapleno;que saõ 24. pés; dos quaes descontando ainda 3. pès pella largura da Banqueta, restaõ 21. de largura livre no Terrapleno superior; quando saõ necessarios de 27. para cima a respeito do que occupaõ os Canhoens nas carretas, & do que recuaõ;assim que de 30,ou35.pès convem fazer a largura do Terrapleno a fora o Parapeito, & Bãqueta,& se for de mais largura, melhor ficarâ para as Cortaduras, & outros usos militares; pello que os Terraplenos se devem ordenar das alturas que hei ditto sempre mais superiores os internos: mas suas larguras,& assim as dos Fossos na fórma que aponto no II. Appendiz adiante.

CAP. X.

Do numero, & uso da artilheria que o Cõde de Pagan applica a estas suas Praças Reaes.

ESTE ponto tratta o Autor no seu Cap. 7. que eu tinha traduzido para incorporar aqui: porém como elle se encontra em algũas partes no que naquelle diz;& em outras naõ me parece que fala muito ajustadamẽte; sobre que era necessario fazer particulares reparos,& alargarme por esta causa; podendose escusar de se escreverem as mais das cousas que diz, basta referir do ditto Cap. que dá por bastante artilheria para a guarniçaõ de hũa destas suas Praças Reaes 30. meyos Canhoens de 24. livras,& que se mais ajuntarem 10. Peças de 12. & 6. livras, haverá abundantemente artilheria para a mais perfeita (assim lhe chama) de suas Praças; fundado em que os mayores,& mais importantes exercitos nunqua haõ feito mais que dous Ataques, naõ pella considera-

raçaõ

raçaõ das Praças invadidas, mas pella impossibilidade de poderẽ fazer mais; especialmente contra Fortalezas semelhantes ás suas; & que contra os dous Ataques naõ he necessario empregar mais que dous Flancos; dispõdo nelles parte da artilheria, & outra parte no principio do cerco sobre os Reparos da grande Contrascarpa, ou de seus Baluartes, a fim de obrigar os inimigos a se alojarem mais apartados da Praça; a fazer a circunvallaçaõ mais dilatada; a começarem os Approxes de mais longe, & endereçarem as Baterias desde a abertura das Trincheiras (isto he donde começaõ a abrir os Approxes) por alongar o tempo, & lhe causar mais despeza, & que quando jà os Parapeitos dos Reparos, & Baluartes da grande Contrascarpa estiverem muito arruinados pella Bateria inimiga, se retirem as Peças para as tres Praças, & Orelhoens dos Flancos da Praça principal, deputados para defender as Faces dos Baluartes, & Contrascarpas atacadas; servindose assim da artilheria retirada, como da propia da Praça nas mais occurrencias necessarias.

SCHOLIO.

POsto que deixei de falar em muitas cousas do Cap. 7. de Pagan dignas de reparo; com tudo me parece fazelo de algũas, para que os que nelle as lerem vaõ com mais cautela, se houverem visto este nosso Compendio.

O que diz, acima referido, de que os mais importantes exercitos nunqua haõ feito mais que dous Ataques, pella impossibilidade de poderem fazer mais, me parece ditto livremente.

No sitio de Evora q̃ recuperamos naõ fizemos mais que dous pella pouca gente que tinhamos; que seriaõ oito mil infantes ao mais, despois de havermos rechassado o inimigo com hũa larga refega em Odegebe ribeiro no territorio de Evora, & despois vencido a celebre batalha do Amexial cousa de hũa legoa de Estremoz. Mas se tiveramos mais gente, fariamos terceiro Approxe pella parte da Cartuxa contra o Forte de Sãto Antonio; & assim mo disse o Conde de Schomberg, practicãdo eu com elle no sitio sobre este ponto, dando a razaõ da pouca gente que tinhamos para terceiro Ataqne; sendo que a Praça estava guarnecida com 3U500. infantes Castelhanos, & 700. cavallos, que rendemos.

No sitio que no anno de 1658. puzemos a Badajoz se começaraõ tambem sòmente dous Approxes tarde,& mal;sendo a circunvallaçaõ excessiva,podendo ser muito mais resumida.

As causas disto naõ saõ para escrittas; mas a publica de se naõ poderem começar mais que dous Approxes, era porque naquelle tempo naõ havia gente bastante para mais, a respeito da excessiva circunvallaçaõ, Reduttos, Fortins, & Baterias em outeiros; pois o mayor numero de gente que tivemos pellas listas,que por muitas vezes vi todas as somanas, foraõ 12U300. infantes,& ordinariamente estavamos em numero de dez, ou onze mil: outras vezes menos; sem embargo de se reforçar tanto o exercito que entraraõ nelle mais de 27 U: porèm naõ entrava leva, que naõ sahisse outra igual, ou mayor de enfermos bem examinados pellos medicos.

Porèm as principaes causas, & os motivos de se naõ ganhar aquella Praça saõ mais occultos.Muitos ha vivos que naquelle sitio se achàraõ como eu, & teraõ disto conhecimento.

Diz tambem o Conde de Pagan no seu Cap. 7. que todos os Flancos dos Polygonos destas suas Fortificaçoens, saõ da mesma grandeza capazes de conter 15. Peças de grossa artilheria dentro na capacidade de suas 50. toesas de Parapeitos.

Porèm naõ acho isto conforme a doutrina que tinha dado,por quanto naõ podem sommar os tres Parapeitos das tres Praças,ou Casas-matas dos Flancos 50. toesas,como alli diz; mas combinádo o que havia escritto pag.25.28.& 29. será a somma de 40$\frac{1}{2}$, ou 43$\frac{1}{2}$toesas;& por tanto conforme a conta, que faz para a distancia das Canhoneiras, não se alojaraõ mais que 13. Peças; de que faz mençaõ pag.28.

Isto he se seguirmos a sua doutrina, em que sahe a cada Peça tres toesas por distancia entre meyo, & meyo da Canhoneira; quando a hum Parapeito de 12. toesas de comprido attribue 4. Peças; ou dando a cada hũa 3$\frac{1}{2}$toesas; quando ao Parapeito de 14. assina as mesmas 4. Peças, ou dando a cada hũa 2$\frac{9}{10}$toesas quando ao Parapeito de 14$\frac{1}{2}$determina 5. Peças; ou finalmente dando tres toesas, quando a hum Parapeito de 15. assina as mesmas cinco.

Mas se limitarmos mais o espaço entre Canhoneira,& Canhoneira,que temos ditto basta de 12.pès, ou 11$\frac{1}{4}$Portuguezes;que saõ insensivelmente mayores que os Regios de França(de que 6. en-

entraõ em hũa toesa) poderaõ assestarse muito bem as 15. Peças (que diz no Cap.7.) nos tres Parapeitos das tres Praças, & ainda mayor numero: assim que o que diz o Autor das 15. Peças posto que seja differente do que havia ditto [que era armar os tres Parapeitos das tres Praças sòmente com 13. Peças] com tudo a doutrina não he errada; pois se podem accõmodar as 15. muito folgadamente, & ainda mais se mais quizerem; com tanto que fiquẽ ao menos duas toesas entre meyo, & meyo de Canhoneira.

A razaõ que no ditto Cap. dà contra os Flancos secundarios he de pouco momento; pois ainda que nas figuras de poucos lados (naõ em todas) he difficil bater delles o fundo do Fosso pello lanço da Face do Baluarte opposto; todavia não he impossivel, como elle affirma; pois posta a artilheria á barba no Flanco secũdario, & sendo necessario escarpando mais o Parapeito por cima pella direitura da pontaria da peça endereçada ao Fosso, q̃ corre pello pè da Face do Baluarte, se pòde descubrir bastantemente; devendose no tempo da guerra trabalhar nos Parapeitos, & em outras partes conforme he necessario; quanto mais que qualquer defensa que o Flanco secundario fizer de mais do primario, vem a ser de mayor utilidade, quando por causa do secundario senaõ diminuir o primario cousa de consideraçaõ; pois a dobrada defensa he preferida â singela, conforme o axioma de Goldman jà repetido: a que se acrescenta que crescendo a fig. nos lados, vai o Flanco secundario ficando cada vez em melhor disposiçaõ, para delle se bater o fundo do Fosso: assim que se Pagan dera Flancos secundarios ás suas Praças de mais dos primarios, que lhe assina, ficariaõ melhores; por onde não tem razaõ de os reprovar, nem prova contra elles cousa algũa.

O que diz no mesmo Capit. acerca das Peças das Casas-matas, que para que não sejaõ taõ depressa desmontadas, ou tornadas inuteis pellos grandes combates da contrabateria, que os inimigos fizerem sobre a Contrascarpa, se escondaõ nuamente sobre leitos de cespedes detraz dos Parapeitos, sustentadas sobre paos rolissos meyos metidos no leito, a fim de as apartar mais facilmẽte com cordas, rolando por cima destes paos, & retirandoas ao lado dás Canhoneiras, tornalas a carregar com menos perigo, & trabalho, me parece cousa impracticavel; salvo em hũa taõ grande necessidade de não ter outro modo de dispor a Peça para fazer o tiro;porque confidero que posta nuamente nos paos rolissos saltará com o tiro descompostamente,& será difficil tornala a accõmodar. Tal pòde ser a necessidade de falta de carretas que obrigue a este modo,& outros;mas saõ remedios forçados, & não devem ser voluntarios como quer Pagan.

CAP. XI.

Das Fortificaçoens de Campanha. Traducçaõ do Cap.13. de Pagan.

A Sciencia das Fortificaçoẽs seria menos consideravel,se ella naõ pudesse servir mais que á conservaçaõ das Praças,& das Villas:mas esta Arte passa bem mais alem;pois nos ensina hum dos principaes meyos de conduzir os exercitos com segurança; seja para conquistas,ou para cercos. Aquelles que na execuçaõ de seus intentos preferem o numero,& a força dos homens à prudencia, & â industria,fazem a guerra como selvajens,derramaõ o sangue, destroem as campanhas, & naõ podendo entrar dentro nas Praças, saõ bem depressa necessitados a se retirar,ou pello tẽpo,ou pella diminuiçaõ. Ao contrario, aquelles que juntaõ a sabiduria ao valor, acabaõ mais felizmente suas empresas; porque pella segurança das Trincheiras estaõ em repouso dentro no seu alojamento:não combatem senão com ventajem,& as Praças fortes no fim se lhe vem a render.

E porque este Methodo he o mais humano, & o mais regular, não fazendo o primeiro differença de hum incurso tumultuoso de bandoleiros,quero mostrar neste lugar qual he a Fortificaçaõ de campanha,que chamamos Cortadura,ou Entrincheiramento. Ella he como a outra Fortificaçaõ, ou natural,ou artificial, & tẽ por objecto, ou o alojamento de hum exercito, ou a circunvallaçaõ de hũa Praça cercada.

Para a Fortificaçaõ de hum campo se serviaõ os Gregos ordinariamente da natural: os Romanos sempre da artificial:& eu entendo que hũa, & outra, ou ambas juntas podem ser utilmente empregadas,segundo a situaçaõ,& a occurrencia dos lugares.Mas vòs deveis bem ter cuidado que vosso alojamento seja por toda a parte cuberto da invasaõ de hum vigilante inimigo; porque de outro modo, aquillo que podia ser causa de vossa segurança,serà bem

bem facilmente occasiaõ de vossa perda; naõ se conhecendo cousa taõ perniciosa na guerra como a fraqueza de hum mediocre entrincheiramento. E sem allegar os exemplos dos seculos passados, quantas desordens tem succedido neste tempo pellas faltas destas Fortificaçoens? & quantas mais teriaõ a contescido se pello temor de huns, não estivesse a negligencia dos outros muitas vezes segura? Naõ vos confieis por tanto neste commum erro, & cercai sempre vosso campo de hum bom Parapeito com tres Banquetas á maneira de pequeno Reparo, & com hum Fosso de largura, & profundidade conveniente; seja pello tempo da detença que ahi fizeres, ou pello temor da vizinhança de hum Exercito.

No que toca às outras Peças das Fortificaçoens de campanha, alem das Meyas-luas, & Redentes; de que não discorro por muito cõmuns, eu vos mostrarei os Methodos de as cõstruir nesta sorte.

Para os Reduttos.

TRaçai hum simplez Quadrado de quatro lados, ou linhas do mesmo comprimento, de 10, de 20, ou de 30, toesas cada hũa; segundo a importancia dos lugares aonde as dispuzeres; nas quaes fareis Reparos, & Fossos convenientes a sua grandeza.

Para a Estrella de seis pontas.

DEsenhai hum Triangulo equilatero de tres linhas iguaes, cada hũa de 60. toesas de comprido, que dividireis em tres partes. Despois sobre cada hũa das partes intermedias formai outro Triangulo equilatero de 20. toesas por lado, & ficará traçada a Estrella de seis angulos de 60. gr. & doze Faces de 20. toesas. Mas se esta Estrella não vos parecer de bastante grandeza, não tendes mais que dar 90. toesas ás tres primeiras linhas do primeiro Triangulo, & 30. toesas a cada hum dos tres lados dos pequenos Triangulos.

Da Estrella Octogonal.

FOrmai hum simplez Quadrado de quatro linhas de 60. toesas, & dividi cada hũa em 3. partes. Despois sobre as do meyo levantai Triangulos equilateros de vinte toesas por lado; com q̃ formareis a vossa Estrella de 8. angulos; quatro de 90. gr. & quatro de 60. & desaseis Faces de 20. toesas cada hũa. E se a quizeres

res mayor, dareis 90. toesas aos lados do primeiro Quadrado, & 30. aos lados dos pequenos Triangulos.

Para os Fortes de quatro Baluartes.

SE se houverem de fazer sobre lados de comprimẽto de 100. toesas, tomese a ametade das medidas do Quadrado da grande Fortificaçaõ descripta no Cap. 3. & observando a mesma regra, se traçará logo o Forte de quatro Baluartes. Mas se houver de ser sobre lados de 90. toesas se tome a ametade das medidas do Quadrado da meã Fortificaçaõ. E se sobre lados de 80. tomese a ametade das medidas da pequena.

Se todavia naõ quizeres traçar sobre Bases mayores que de 60 toesas, tomai sòmente o terço das quatro principaes linhas do Quadrado da meã Fortificaçaõ nesta fòrma. 60. toesas para a Base: 8. toesas para a linha perpendicular: 18. toesas; & 2. pès para as Faces dos Baluartes: & 11. toesas para os complementos das linhas da Defensa. Por este modo consiguireis o intento.

Para os Fortes de cinco Baluartes.

SE os cinco lados exteriores saõ de 100. toesas, tomai ametade das medidas da grande Fortificaçaõ. Se saõ de 90. tomai a metade das medidas da meã, & se de 80. ametade das da pequena.

Mas se não forem de mais que de 60. toesas, tomai sòmente o terço das quatro linhas Capitaes da meã Fortificaçaõ; a saber 60 toesas pella Base: 10. pella linha perpendicular: 18. toesas, & 2. pès para as Faces; & 10. toesas, & 4. pès pellos complementos das linhas da Defensa. De sorte que observando com estas medidas as regras dos tres modos de Fortificaçoens, ficaraõ traçados estes pequenos Pentagonos.

Mas acrescenta o Autor que naõ faz delles muita estimaçaõ, & sòmente os admitte em caso de necessidade por razaõ da pequenhez de seus Flancos; ainda que elles sejaõ de 12. toesas, como sahem, quando a Fortificaçaõ he sobre Bases de 100. ou de 90. toesas segundo o ditto acima; podendo accõmodarse em cada hum quatro Peças de grossa artilheria por razaõ dos dobres Parapeitos & hum Canhaõ escondido no cabo do segundo Parapeito, como nos outros Flancos das Praças grandes.

NOTA.

NOTA.

NO que diz o Autor, que no Flanco de 12. toesas se podem accõmodar 4. Peças de grossa artilheria, por razaõ dos dobres Parapeitos, dà a entender que tambem nestes Flãcos faz differentes Praças; & assim no Flanco de 12. toesas, assinando ametade, que saõ 6. toesas para a Praça baixa, como tem ensinado; fica esta capaz de duas Peças; pois da sua doutrina se vè que a cada 3. toesas assina hũa Peça; & dando outras duas Peças para a Praça alta, vem a ser as quatro nas duas Praças que dá a entender nas palavras (Por razaõ dos dobres Parapeitos) & nunqua se deve entender que aqui faz tres Praças por naõ serem as Gollas capazes na fig. Pentagonica de 100, ou 90. toesas de Base; pois para as formar em Base de 160. toesas, que he a sua pequena Fortificaçaõ dos seus tres modos da Real, lhe não deixou Espalda na fig. Pentagonica; como se vè da doutrina dada, & assim as quatro Peças se entendem para a Praça baixa, & para a alta cõforme a sua doutrina, duas para cada hũa; naõ se podendo, nem devẽdo fazer Praça intermedia nestas figuras, em que as Bases forem de 100. 90, ou 80, toesas; porém entaõ convem, que a baixa fique a livel da Estrada encuberta, ou dous atè quatro pès mais abatida segundo a altura do Fosso.

Acerca do que diz de que naõ faz muita estimaçaõ destes Fortes Pentagonicos das medidas referidas, & que sòmente os admitte em caso de necessidade por razaõ da pequenhez de seus Flancos, ainda sendo estes de 12. toesas, se deve entender para Praça Real; que quando naõ seja assim, saõ estes Fortes desta grandeza assaz capazes; & talvez bem defendidos podem só per-si resistir a hum exercito; pois naõ he taõ pouca cousa hum Flanco de 12. toesas, que saõ 72. pès, porque como passa de 60. jà vai sendo capaz de Praça Real; antes já de 60. o fazem capaz da quadrada Real Fritach, Dogen, Cellario, Marolois, & outros; porque o admittem de 6. vergas, que saõ 72. pès Rinthlandicos, ou 60. daquelles de que se attribuem 10. a hũa verga, & por isto lhe chamamos Decimaes na nossa Hercotectonica, que saõ quasi como os nossos, segundo se póde ver na taboa das medidas numer. [r] 3. & Goldman que traz as suas medidas por pès duodecimaes lhe attribue 60.

[r] No Methodo Lusitanico Part. 1. c. 11.

Quanto mais que estes Fortes saõ para passajens, rios, sitios proximos a Praças, onde nem convem, nem póde ser fazerse hũa Fortificaçaõ Real de toda a conta; & neste caso, ainda menores Fortes do que elle diz saõ uteis, & necessarios, pois se aqui os naõ descreve com este intento, era escusado trazer sua fabrica, porq̃ para os Reaes de toda a conta, o havia jà feito; como se vè dos tres modos, que temos declarado em Bases de 200. 180, & 160. toesas.

CAP. XII.

Discorrese sobre a Fortificaçaõ regular do Conde de Pagan, & fabrica dos Hornaveques que nomea por Tenalhas.

COmo este Autor tratta [y] de fundar a defensa nos dobrados Reparos, no numero dos Canhoens bem empregados, & na bondade dos Fossos por elles defendidos, segundo havemos ditto, ordenou nos Flancos tres Praças para haver onde se alojar mayor numero em defensa do Fosso contra as Galerias, & outras obras do inimigo. Daqui veyo que para as Demigollas serem capazes de receber em si as tres Praças, lhe pareceo necessario naõ só fazer muito grandes Faces dos Baluartes, mas deitar os Flancos perpendiculares, ou quasi perpendiculares sobre as linhas Razantes: se bem a invençaõ das tres Praças no Flanco naõ he sua, como insinua, & muitos cuidaõ; pois as refere Jeronymo [z] Maggi por de Jacome Castrioto, & se vè do desenho do Baluarte q̃ traz fol. 46. vers. mais de 60. annos antes de sahir o livro de Pagan. Tãbem Simaõ Stevino de Brugges mais antigo as aponta na sua Fortificaçaõ, [a] & por ventura que outros.

[y] Cap. 2. pag. 8

[z] Lib. 1. cap. 11. pag. 26

[a] Cap. 2. pag. 646 & 651.

Ficaõ pois nesta Fortificaçaõ de Pagan as Faces demasiadamẽte grandes a respeito da Cortina, a saber conforme o primeiro modo (do Pentagono atè a linha recta) a Face do Baluarte quasi os $\frac{6}{7}$ da Cortina: conforme o segundo quasi $\frac{11}{12}$: conforme o terceiro quasi igual: de que resultaõ os Baluartes de disforme grandeza; de immenso custo, & necessitaõ de mayor guarniçaõ, pois ainda que se funde nas obras exteriores; perdidas estas, & retirada a guarniçaõ para as interiores, he necessario que seja proporcionada á grandeza do corpo que ha de animar. Alem do que (como bem

bem aponta Antonio [r] de Ville] a Fortificaçaõ he como o corpo humano: se tem hum membro desproporcionado ao todo, o torna disforme, & por ser muito grande não he mais perfeito, antes lhe occasiona incommodo, pello que os membros da Fortificaçaõ devem ter hũa certa composiçaõ, & symmetria, mediante a qual se distribuaõ as partes, & força igualmente, sem dar mais a hũa tirandoa a outra. Pella palavra igualmente de Ville, se entenda igualmente proporcional. r Lib. 1. part. 1. c. 19.

Fundado nesta consideraçaõ quiz Goldman [a] que a Face fosse sómente ametade da Cortina, porque com esta proporçaõ, sem detrimento de outras partes, se acrescentava o Flanco secundario, & se evitava a profusaõ de Baluartes enormes; se bem permittimos a Face até os $\frac{2}{3}$ da Cortina com Fritach, Dogen, Cellario, Marolois, & outros, rejeitandoas mayores (sem necessidade urgente) contra Errard de Barleduc, & Henrique Hondio, como tambem não as admittimos (sem necessidade) menores que ametade da Cortina contra Ville, Tensini, Jeronymo Cataneo, & outros. Seria mais largo, do que pede hum Compendio disputar sobre estes pontos. Os Scientes lhe busquem as razoens, que tambem hoje naõ saõ escondidas a alguns practicos. a Lib. 1. prop. 15. pag. mihi 24.

O mesmo inconveniente ha no primeiro, & segundo desenho da Fortificaçaõ quadrada.

No terceiro da pequena Fortificaçaõ de 160. toesas de lado de Polygono exterior permittirei a sua fabrica, em que a Face fica de 45. toesas: a Cortina de 63. & 5. pès, a saber aquella pouco mais dos $\frac{2}{3}$ desta: E se de algũa proporçaõ das de Pagan para fortificar o Quadrado eu usara, fora desta, proporcionando as partes correspondẽtes ao lado exterior que me fosse dado, pellas que correspondem em Pagan ao lado exterior de 160. toesas; porque ficariaõ as Faces mais bem proporcionadas com as Cortinas, & crescendo ainda algũa cousa os Flancos; que saõ as partes em que mais consiste a defensa. Ou tambem pello modo que aponto no Cap. 14.

Nas fabricas dos Hornaveques ha o mesmo inconveniente, & com tanto excesso no terceiro modo, que vem a resultar a Face do Baluarte mayor que a Cortina. Se desta fabrica eu usara, escolhera antes o primeiro modo que os outros dous, & por elle proporcionara as partes que deviaõ corresponder ao lado do meu

Polygono exterior,com advertencia que ſenaõ poderà uſar delle; ſe naõ quando o angulo da fig. a que ſe houver de applicar Baluarte inteiro ſeja ao menos de 100.gr.para que o angulo flãqueado reſulte de 60.gr. ou mais alguns minutos; & ainda neſta conveniencia me parece melhor a fabrica do primeiro, ou mayor Hornaveque;porque ſe nos houvermos de valer da do ſegundo, he neceſſario que o angulo da fig. ſeja ao menos de 104. gr.ſe do terceiro que ſeja de 110, como ſe declarará no Cap. 13. em que diſcorreremos ſobre a Fortificaçaõ irregular do Autor; pello q̃ ainda que na Fortificaçaõ regular, já no Pentagono por ſer ſeu angulo de 108. gr. nos poderiamos valer do primeiro,& ſegundo modo dos Hornaveques; todavia pellas razoens ſobredittas preferi o primeiro.

Verdade ſeja que reſultará o Flanco algũa couſa menor do q̃ ſe proporcionàramos pella fabrica do ſegundo, & terceiro; mas couſa de pouco porte;pois ficaõ os Flancos bem grãdes a reſpeito do lado exterior,& compenſando aquella inconſideravel menoria dosFlancos com a menos disforme proporçaõ da Face para a Cortina.

Porèm ainda tenho por mayores inconvenientes os das exceſſivas Demigollas,&obtuſidade dos angulos flanqueados;porque no Pentagono do primeiro modo em que he o lado do Polygono exterior de 200. toeſas,vem a reſultar a Demigolla na continuaçaõ imaginaria da Cortina de 35|16. toeſas,& daqui vai creſcendo nas mais figuras atè que na linha recta vem a ſer de 64|69.& toda a Golla de 129|38. que fazem 776|28.pés quando a Cortina he ſòmente de 70|75. toeſas,que montaõ 424|5. pès,com que a Golla vem a ter outro tãto como a Cortina,& paſſante de quatro quintos mais;que he hum exceſſo enormiſſimo,& impracticavel pella impoſſibilidade das Cortaduras, que poſſaõ fechar tal Golla,& por outros inconvenientes notorios aos Scientes.

No Pentagono da Fortificaçaõ mediana ſahe a Demigolla de 30|44. toeſas donde vai creſcendo atè que na linha recta reſulta de 59|65. & toda a Golla de 119|30.quando a Cortina he ſòmẽte de 60|71. ſahindo aquella quaſi dobrada deſta; pois lhe faltaõ ſòmente 2|12. toeſas para inteirar o dobro da Cortina.

No Pentagono da pequena Fortificaçaõ ſahe a Demigolla de 26|04. toeſas; mas na linha recta de 54|72 & toda a Golla de

109|44. quando a Cortina he sómente de 50|56. resultando aquella bem mais do dobro desta.

Mas porque as Demigollas em Pagan, não saõ na continuaçaõ imaginaria da Cortina; mas da Razante; fiz tambem os calculos, & no Pentagono da grãde Fortificaçaõ sahe a Demigolla na ditta continuaçaõ da Razante de 30|03. toesas, donde vai crescendo nas mais figuras atè que na linha recta será de 67|54. mayor ainda do que era a Demigolla ordinaria na continuaçaõ imaginaria da Cortina; que tinha 64|69.

No Pentagono da meã Fortificaçaõ fica sendo a continuaçaõ da Razante de 25|83. toesas, & daqui cresce nas mais figuras atè que na linha recta vem a ser de 62|88. quando a ordinaria na continuaçaõ da Cortina sahia de 59|65.

No Pentagono da pequena Fortificaçaõ sahe a continuaçaõ da Razante de 21|86. toesas, crescendo nas mais figuras atè que na linha recta he de 50|36. & sòmente (por este seu terceiro modo) sahiria na linha recta a Demigolla na continuaçaõ da Cortina mayor que na da Razante, a saber de 54|72. excedendoa por 4|36. toesas. Mas ainda sendo na continuaçaõ da Razante a Demigolla de 50|36. toesas, virá a ser a Golla na linha recta de 100|72 toesas insensivelmente menor que o dobro da Cortina; a saber menor sòmente que o ditto dobro por $\frac{4}{10}$ de toesa; que saõ 2|4. pès.

Supponhamos pois na grande Fortificaçaõ da linha recta o Flanco armado de tres Praças com Pagan, & porque assina 5. toesas de retirada para dẽtro da Demigolla ao Flanco cuberto a respeito do que ha de ficar mais sahida a Espalda; & ao Parapeito da primeira Praça 3. toesas: cinco ao plano: outras tres ao Parapeito da segunda Praça, & cinco a seu plano, vem isto a montar 21. toesas; que abatidas das 67|54. que se contèm na Demigolla da continuaçaõ da Razante, restaõ 46|54. por Demigolla do Baluarte interior pequeno; cujo dobro he 93|08. em que sòmente se ha de incluir de cada banda outro Parapeito de 3. toesas, & Terrapleno de cinco, que será a Praça mais alta: de modo que a somma das duas Demigollas do Baluarte mais pequeno, & interior he de 93|08. toesas, quando a Cortina he sòmente de 70|75. E se cõsiderarmos o Gosier que he a verdadeira Golla, na linha recta, temos achado acima ser de 129|38. toesas; pello que sempre cõsta da demaſiada grandeza.

Semelhantemente ſerá nos tres modos das fabricas dos Quadrados,& dos Hornaveques;no derradeiro dos quaes avultará eſta disformidade com enormiſſimo exceſſo, ſe deſta fabrica dos Hornaveques nos valermos para Fortificaçoens de Baluartes inteiros.

Os angulos flanqueados reſultaõ tambem demaſiadamente obtuſos nas figuras de muitos lados,& na linha recta; onde pella fabrica da Fortificaçaõ Real grande ſahirá o angulo flanqueado de 146.gr.36.min. Na mediana de 143.gr.7.min.40.ſeg. na pequena de 138.gr.53.min.20. ſeg.

Mas pellos modos dos Hornaveques applicados a Fortificaçaõ de Baluartes inteiros, reſulta o angulo flanqueado na fabrica do mayor de 140.gr.41.min.40.ſeg: no mediano de 136.gr.23. min.40.ſeg: no minimo de 130.gr.35.min. 40. ſeg. que já ſe podia permittir a naõ ſer o inconveniente da Golla,que reſulta muito mayor que o dobro da Cortina neſta fabrica do minimo Hornaveque.

Quando trattarmos da fabrica da Fortificaçaõ irregular ſegũdo o Autor, apontaremos outros incommodos contra a ſua doutrina:por onde naõ he eſte Methodo,ainda que facil de deſenhar, & do qual reſultaõ grandes Flancos, livre de grandiſſimos inconvenientes;que na minha opiniaõ ſe naõ devem practicar.

CAP. XIII.

Diſcorreſe ſobre a Fortificaçaõ das Praças irregulares do Conde de Pagan deſcripta no Cap.6.

ACerca da primeira ſorte de Praças irregulares dos lados entre-ſi iguaes, mas os angulos deſiguaes, diz ſer neceſſario q̃ o menor angulo da fig. irregular arribe aos menos a 100.gr.a fim que o angulo flanqueado em ſua abertura poſſa exceder 60. gr.

Iſto ſuccederá ſe os lados forem de 200. toeſas,ou de 180.fortificandoſe aquelles pello primeiro modo de ſua Fortificaçaõ Real; eſtes pello ſegundo;pois no primeiro caſo reſultará de 66. gr.36.min. o angulo flanqueado do Baluarte que aſſentar ſobre o angulo da fig. de 100.gr. no ſegundo de 63. gr.7.min.48. ſeg.

como facilmente achará quem lhe fizer o calculo pellos suppostos antecedentes.

Mas se os lados exteriores forem sómente de 160. toesas, quãto suppoem por lado da pequena Fortificaçaõ Real, & se seguir o seu Methodo da terceira regra, resultarà o angulo flanqueado sómente de 58.gr.53. min. 20. seg. posto que o Baluarte assente sobre angulo de 100.gr. pello que neste caso he necessario que o menor angulo da fig. irregular seja ao menos de 102 gr. para que o do Baluarte possa exceder 60.gr. como o mesmo Conde de Pagan quer; [a] porque entaõ será já de 60.gr.53.min.20.seg. a Pag. 86.

He tambem de notar; (o que o Autor não diz) que neste caso fica contingente servirem, ou naõ as muralhas velhas; pois havendose de tirar lados iguaes à roda dellas, poderaõ quasi sempre (pella irregularidade das Praças) não ficar naquella distancia; em que pella fabrica do Autor he necessario que o lado do Polygono exterior diste da Cortina, segundo se tem apontado no Cap. 5

E ainda que o sitio offereça commodidade de se poderem tirar iguaes lados exteriores na distancia conveniente para que as velhas muralhas fiquem servindo de Cortinas; todavia pella regra do Autor (sem mais outra circunstancia) naõ se poderá isto obrar porque suppoem sabido o que ainda està por saber.

Declaro mais o ponto. Para se tirar o lado exterior, se deve saber a distancia em que convem ficar apartado da muralha velha; mas a distãcia pella sua regra não se sabe senaõ pella grandeza do lado exterior, a qual pende da distancia; logo fica isto em circulo vicioso como lhe chamaõ os Philosophos, a saber a grandeza do lado supponde a distancia: esta supponde a grandeza do lado.

Acerca da segunda sorte de Praças irregulares [em que os lados dos Polygonos exteriores não podem ser iguaes] declarada no ditto Cap. 6. comette tambem o Autor circulo; pendendo a grandeza do lado da distancia entre elle, & a muralha velha, & a distancia pendendo da grandeza do lado; pello que o seu Methodo declarado no Cap. 6. atè a segunda sorte de Praças irregulares que pertende fortificar pello Methodo das regulares, se poderá executar quando não se dè a dependencia de ajustar a Fortificaçaõ ás muralhas velhas; mas sendo o terreno livre; ou permittindose poder entrar hum Flanco por dentro da muralha velha; outro ficar de fòra, sendo necessario fazer novas Cortinas; salvo se

accident-

accidentalmente ſucceder ajuſtarem os Flancos de algũa frontaria com a ditta muralha velha.

Naõ he iſto dizer que nos naõ poſſamos aproveitar facilmente das muralhas velhas ſenaõ houver algum inconveniente, que o eſtorve; mas que as Fortificaçoens irregulares em que houverem de ſervir as velhas muralhas não ſe podem executar pellas regras da Fortificaçaõ regular (que enſina) do lado do Polygono exterior para dentro com a facilidade, & perfeiçaõ que elle intíma pag.86. & 87. pois aquelles preceitos ſómente, não podem dar na practica o effeito pertendido; como temos moſtrado.

O meſmo inconveniente há acerca da terceira ſorte de Praças irregulares, em que as Baſes ſaõ deſiguaes de 100. atè 200. toeſas, ou aonde hum dos angulos do Polygono exterior não paſſa de 90.gr. antes he mayor a difficuldade por ſerem mais differentes as diſtancias entre as muralhas, & Baſes pellas mayores differẽças, que eſtas ficaõ tendo entre 100. & 200. toeſas; diſtando a Baſe de 100. da Cortina por 29. toeſas, $1\frac{61}{100}$ pé: a de 200. toeſas por 40. toeſas $3\frac{78}{100}$ pés; como ſe vè do Cap.5.

Acreſcentaſe que quando puderamos conhecer as diſtancias entre as muralhas velhas, & Baſes, ſem haver de preceder o conhecimento da grandeza das dittas Baſes, & tomaſſemos cada diſtancia conforme cada Baſe correſpondente, reſultaria daqui hũa disformidade, por quanto as Faces de hum Baluarte ſituado entre Cortina grande, & Cortina pequena naõ ajuſtariaõ em hum ponto da Capital que partiſſe o angulo da fig. pello meyo; mas ficaria eſpaço aberto na ponta do Baluarte entre Face, & Face.

E ſe me diſſeſſem que ſe as Baſes ſe naõ encontraſſem formando angulo na tal Capital, naõ podem deixar de ſe encontrar fòra della; confeſſo ſer aſſim; mas entaõ ficaõ as Baſes de outras differentes grandezas; ſegundo as quaes ſe ſe buſcarem as diſtancias proporcionadas, não viráõ os Flancos a ajuſtar com as muralhas velhas; alem do que reſultaria hũa Face grande reſpondente a Cortina pequena; hũa pequena a Cortina grande; muito fòra da boa proporçaõ, & ſymmetria; podendoſe ajuſtar muito melhor ſem aquella regra com ſe diſporem os Baluartes na Fortificaçaõ irregular por fanteſia; como vulgarmente ſe faz; que ſe for bom o diſcurſo de quem o executar, ſahira bom o deſenho.

Pello que as regras do Conde de Pagan para ſe fortificar o irregular

regular pello regular não podem sahir ajustadas se nos atarmos a aproveitar das muralhas velhas. Se sem depẽdencia dellas se houver de fortificar hum sitio irregular do Polygono exterior para dentro, se pode muito bem obrar; proporcionando a perpendicular D C conforme a grandeza do lado do Polygono exterior segundo as regras dadas pello Autor para a Fortificaçaõ regular: porèm com advertencia que quando vos valeres de algũa das regras dos Hornaveques descriptos no Capit.4. ou de sua proporçaõ, naõ serà senaõ sendo o angulo da fig. capaz para o intento: quero dizer que para vos valeres da regra do primeiro, ou mayor Hornaveque, ha de ser o angulo da fig. a que se quer applicar o Baluarte ao menos de 100. gr. para que o angulo flanqueado resulte ao menos de 60. gr. ou mais alguns minutos, como neste caso. Mas havendo vos de valer da regra do segundo Hornaveque; deve ser o angulo da fig. ao menos de 104. gr. & se da regra do terceiro, serà o angulo da fig. ao menos de 110.gr.

E não tendo taes angulos de fig. porèm menores atè 90.gr em tal caso vos valereis das regras dos Methodos dos Quadrados cõforme a grandeza do lado; proporcionando se for necessario todas as linhas pellas respondentes ao lado do Polygono exterior mais proximo ao vosso, & com a advertencia que havemos feito no Scholio do Cap.3. de que na Base de 200. toesas senaõ tomara a perpẽdicular D C mais que de $26\frac{3}{4}$ (ou se tome de $26\frac{1}{2}$) toesas, & naõ de 27. como propoem o Autor; para que o angulo flãqueado seja de 60. gr. ou os exceda por alguns minutos.

NOTA.

ATèqui he o que me pareceo advertir no que ha que reparar acerca da Fortificaçaõ do Conde de Pagan sobre o regular, & irregular; de que naõ puz exemplos por figuras no irregular; porque para os versados nestas cousas basta o ditto, & para os que o naõ saõ, trago no Cap. seguinte reduzida esta doutrina a mayor brevidade, & facilidade, assim para o regular, como para o irregular do Polygono exterior para dentro sem dependencia das muralhas velhas; escolhendo hum sò dos tres modos da Fortificaçaõ Real grande para todas as figuras do Pentagono para cima. O sobreditto he alem dos inconvenientes, que jà apontei nos Scholios dos Capitulos 9. & 10.

CAP. XIV.

Propoemse mais abreviada, & facilitada a doutrina do Conde de Pagan, assim para o regular; como para o irregular do Polyg. exterior para dentro.

NO REGULAR.

PARA o Quadrado escolho o primeiro dos seus tres modos, mas apurado para que o angulo flanqueado lhe resulte de mais de 60.gr. que a elle lhe sahe menor por alguns minutos. Proponho pois em primeiro lugar a Fortificaçaõ do Quadrado por preceder na ordem numerica ao Pentagono.

Para o Pentagono, & mais figuras seguintes atè a linha recta inclusivè escolho tambem o primeiro dos seus tres modos (sem embargo que elle prefira o segundo ao primeiro; este ao terceiro) mas sendo os lados dos Polygonos exteriores de 200. toesas atè 155.

Porèm sendo os lados dos Polygonos exteriores de menos de 155. toesas atè 50. escolho o primeiro modo com que descreve os Hornaveques.

Concordo com Pagan em se tomar o lado do Polygono exterior de 200. toesas pello mayor extremo. Discrepo no menor; porque elle toma 100. toesas, ou 600. pès [na descripçaõ dos Hornaveques] & eu admittn nesta practica 50. toesas, ou 300. pès por lado do Polygono exterior pellas razoens que me moveraõ ao admittir de 200. na minha practica do Capit. 13. da prim. Part. do Methodo Lusitanico.

Descripçaõ da Fortificaçaõ quadrada regular segundo o Conde de Pagan.

Fig. 4.

PArtase o lado A B do Polygono exterior pello meyo no pōto D; cuja ametade B D se deve sempre entender repartida em 100. partes iguaes.

Do ponto D se levante a perpendicular D C de $26\frac{1}{2}$ partes (posto que Pagan diga 27.) das que B D tem 100.

Tiremse B C M, A C N indefinitas de racionavel grandeza: nellas

nellas se tomem C M, C N de 38. partes das 100. que ha em B D.

Do ponto M ao ponto N se lance a Cortina M N. Nas linhas B C M, A C N se tomem as Faces B F, A E de 60. partes das mesmas 100. de B D.

Dos pontos F, E aos pontos N, M se tirem os Flancos F N, E M; com que ficará descripta a linha ichnographica de hũa fachada do Quadrado regular.

Descripçaõ da Fortificaçaõ pentagonica, & das mais figuras regulares atè a linha recta inclusivé segundo o Conde de Pagan: mas sendo os lados dos Polygonos exteriores de 200. toesas até 155.

PArtase o lado A B do Polygono exterior pello meyo no põtõ D; cuja ametade B D se deve sempre entender repartida em 100. partes iguaes. Fig. 1

Do ponto D se levante a perpendicular D C de 30. partes das que B D tem 100.

Tiremse B C M, A C N indefinitas de racionavel grandeza: nellas se tomem C M, C N de 37. partes das 100. que ha em B D

Do ponto M ao ponto N se lance a Cortina M N.

Nas linhas B C M, A C N se tomem as Faces B F, A E de 60. partes das mesmas 100. de B D.

Dos pontos F, E aos pontos N, M se tirem os Flancos F N, E M; com que ficarâ descripta a linha Ichnographica de hũa fachada do Pentagono, & mais figuras regulares atè a linha recta inclusivè; cujos lados de Polygonos exteriores forem de 200. toesas atè 155. inclusivè.

Descripçaõ da mesma fig. pentagonica, & mais figuras regulares até a linha recta inclusivè, sendo os lados dos Polygonos exteriores de menos de 155. toesas até 50. toesas, ultimo termo menor por nós admittido.

PArtase o lado A B do Polyg. exterior pello meyo no ponto D cuja ametade B D se deve sempre entender repartida em 70. partes iguaes. Fig. 7.

Do ponto D se levante a perpendicular D C de 25. partes das que B D tem 70.

Tiremse B C M, A C N indefinitas de racionavel grandeza: nellas se tomem C M, C N de 27. partes das 70. que ha em B D.

Do ponto M ao ponto N se lance a Cortina M N.

Nas linhas B C M, A C N se tomem as Faces B F, A E de 40. partes das mesmas 70. de B D.

Dos pontos F, E aos pontos N, M se tirem os Flancos F N, E M com que ficará descripta a linha Ichnographica do Pentagono, & mais figuras regulares até a linha recta inclusivè, cujos lados de Polygonos exteriores forem de menos de 155. toesas atè 50. inclusivè.

SCHOLIO.

Fig. 4.

NA Fortificaçaõ regular Quadrada tomei a perpendicular D C de $26\frac{1}{2}$ toesas; que Pagan tomou de 27. Daquella resultaõ os angulos, & linhas, achados por Trigonometria das quantidades seguintes.

O angulo do Flanco, & Razante E M B de 89. gr. 21. min. 10. seg. que na fabrica de Pagan resulta de 89. gr. 7. min. 50. seg.

O angulo C E M de 60. gr. 57. min. 50. seg. que em Pagan he de 60. gr. 39. min. 10. seg.

O angulo flanqueante A C B de 150. gr. 19. min. que em Pagan he de 149. gr. 47. min.

O angulo C M N de 14. gr. 50. min. 30. seg. que em Pagan he de 15. gr. 6. min. 30. seg.

O angulo diminuto D B C de 14. gr. 50. min. 30. seg. que em Pagan he de 15. gr. 6. min. 30. seg.

O angulo flanqueado de 60. gr. 19. que em Pagan he de 59. gr. 47. min.

A Face A E de 60. toesas, como em Pagan.

O Flanco E M de 21|52. toesas, que em Pagan he de 21|73. posto que elle diga 22.

A Cortina M N de 73|46. que em Pagan he de 73|42.

A linha da defensa A N de 141|46. que em Pagan he de 141|52 & vem a ser nelle de 141. toesas $3\frac{12}{100}$ pès; posto que diga 141. toesas, & 4. pès.

A linha A C 103|46. que em Pagan he de 103|52.

A linha E C 43|46. que em Pagan he de 43|52.

APEN-

APPENDIZ II.

DAS OBRAS DO CONDE DE PAGAN accōmodadas á noſſa deſcripçaõ ichnographica, & reguladas por noſſo Methodo.

§. 1.

Combinaõſe algũas circũſtancias entre a fabrica de Pagan, & a que proporei acerca da capacidade neceſſaria na Demigolla para ſe formarem tres Praças na correſpondencia do Flanco cuberto.

CONforme a conſtrucçaõ do Conde de Pagan o Flanco forma angulo obtuſo com a Cortina, & he quaſi perpendicular á Razante, como ſe vè do Cap. 2. do primeiro Appendiz, em cuja ſuppoſiçaõ arma tres Praças em cada hum (excepto na fig. quadrada da pequena Fortificaçaõ Real) ſuppondo para eſte intento o menor lado do Polygono exterior de 160. toeſas que fazem 960. pès dos que chamaõ Regios de França, & ſaõ na grādeza quaſi como os noſſos podendoſe tomar indifferentemēte huns por outros, ſegundo conſta da taboada das proporçoens das medidas q̃ trazemos no principio do Methodo Luſitanico; o qual lado he o mais limitado na grandeza das ſuas tres Fortificaçoens Reaes, como ſe vè do Cap. 2. do primeiro Appendiz.

Nòs pertendemos moſtrar que ſe podem fazer as meſmas tres Praças deſenhando a Fortificaçaõ conforme o noſſo terceiro modo propoſto no Cap. 47. do Methodo Luſitanico, ſendo o Flanco perpendicular à Cortina, & tambem na figur. Quadrada quaſi perpendicular á Razante; ſobre que primeiro faremos hũa combinaçaõ entre o modo de Pagan, & o noſſo para que ſe veja a mayor cōmodidade que eſte offerece para o intento nas figuras de poucos lados (onde he a mayor difficuldade por razaõ da brevidade das Demigollas) ſe como elle faz, lançarmos o Flanco quaſi perpendicular á Razante, & que tambem as podemos fazer ainda que o lancemos perpendicular á Cortina tomando lado de Polygono exterior conveniente.

Repitamos pois (por renovar a memoria) o nosso terceiro modo de desenhar as Fortificaçoens regulares, ou irregulares declarado no ditto Cap. 47. a saber.

No Quadrado.

Sobreface $\frac{28}{100}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{3}{5}$ da Sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{2}{5}$ do Flanco prolongado.

No Pentagono.

Sobreface $\frac{28}{100}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{2}{3}$ da Sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{4}{9}$ do Flanco prolongado.

No Hexagono.

Sobreface $\frac{28}{100}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{4}{5}$ da Sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{9}{20}$ do Flanco prolongado.

No Heptagono.

Sobreface $\frac{27}{100}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{9}{10}$ da Sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{5}{11}$ do Flanco prolongado.

No Octogono.

Sobreface $\frac{27}{100}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado igual a sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{1}{2}$ do Flanco prolongado.

No Enneagono, & mais figuras até a de 30. lados inclusivé.

Sobreface $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{10}{9}$ da Sobreface, a saber outro tanto, & $\frac{1}{9}$
Extensaõ do Flanco $\frac{1}{2}$ do Flanco prolongado.

Na fig. de 31. lados até a linha recta inclusivé.

Sobreface $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ do lado do Polygono exterior.
Flanco prolongado $\frac{5}{4}$ da Sobreface.
Extensaõ do Flanco $\frac{5}{9}$ do Flanco prolongado.

NOTA.

QUEM quizer póde guardar a proporçaõ do Octogono no Enneagono, Decagono, & Undecagono; mas daqui por diante na fig. de 12. lados, & seguintes, atè a de 30. inclu-

sivè

ſivè uſar da proporçaõ que acima ſe declara para o Enneagono, & da de 31. lados atè a linha recta incluſivé ſeguir a que ultimamente propuz para eſtas figuras.

Eſtas ſaõ as proporçoens do meu terceiro Methodo; porèm no que toca á do Quadrado acima ditta ſe ordene particular no modo ſeguinte, porque reſultará mayor Demigolla para ſe poderem accõmodar as tres praças, & nas mais proporçoens do Pentagono para cima na fòrma ſobreditta.

Para o Quadrado em particular.

A Sobreface $\frac{28}{100}$ do lado do Polygono exterior.

O Flanco prolongado $\frac{56}{100}$ da Sobreface.

A Extenſaõ do Flanco $\frac{2}{5}$ do Flanco prolongado.

E ainda quem quizer pòde tanto q̃ achar a Extenſaõ do Flanco L O, lançar do ponto O ao ponto R, onde a Razante B R corta a Cortina, a linha O R, a que chamaremos Flanco obliquo por formar angulo obtuſo cõ a Cortina, ainda que o forma quaſi recto com a ditta Razante a ſaber de 89.gr. 23.min. 10.ſeg.como achará quem lhe fizer o calculo. Fig.16.

Iſto ſuppoſto: poderemos valernos de hũa de duas Demigollas, a ſaber, ou da Demigolla K I ſendo o Flanco O I, ou da Demigolla K R ſendo o Flanco O R quaſi perpendicular à Razante, & ſem Flanco ſecundario na fòrma que faz Pagan; para o que ſe buſque primeiro por Trigonometria o Flanco ſecundario I R na fòrma ſeguinte.

Suppondo o lado do Polygono exterior A B de 864. pès, & ſeguindo a proporçaõ ſobreditta ſerá a Sobreface A L 241|92. cujo dobro A L, B H 483|84. tirado do lado exterior A B de 864. reſta L H igual com a Cortina I F de 380|16.

O angulo diminuto L A O ſe acha por Trigonometria de 12 gr. 37.min. 40.ſeg. & outro tanto o angulo da defenſa interior E R F por ſerem iguaes; [a] & porque o Triangulo E F R he rectangulo, [r] fica tambem ſabido [o] o angulo R E F de 77. gr. 22. min. 20. ſeg. & conhecido o Flanco E F de 81|28512. por onde ſeguindo a proporçaõ da Extenſaõ do Flanco para a Sobreface, ſe achará o complemẽto da Cortina F R de 362|88. que tirados da Cortina I F de 380|16. reſta ſabido o Flanco ſecundario I R de 17|28. a 29. Euclid. r Pella operac. o 32. primi.

A

A Demigolla K I se acha facilmente na fig. quadrada tirando o Flanco prolongado L I r 135|4752. da Sobreface A L 241|92, & o resto 106|4448. será a ditta Demigolla K I, & se lhe ajuntarmos o ditto Flanco secundario I R de 17|28. comporseha a Demigolla acrescentada K R de 123|748. para haver de servir o Flanco obliquo O R se assim o quizerem sem haver Flanco secũdario na fòrma que Pagan quer; sem embargo que naõ vimos em se escusarem Flancos secundarios. O calculo sobreditto he na supposiçaõ do lado do Polygono exterior de 864. pès, como delle se vé, & consta do Cap. 47. do Methodo Lusitanico.

r Pella operac.

Investiguemos agora que lado de Polygono exterior nos será necessario para que segundo a proporçaõ sobreditta que hei proposto da Face para o Flanco prolongado, & deste para a Extensaõ do Flanco nos saya a Demigolla capaz de tres praças, a quatro toesas, ou 24. pés de fundo, ou largo cada hũa, quanto Pagan sòmente lhe assina nas figuras quadradas da meã, & grande fortificaçaõ, nos Pentagonos da pequena, & meã, no Hexagono da pequena, por naõ ter bastantes Demigollas para as fazer mayores como se póde ver das suas figuras pag. 26. & 27. & da sua doutrina pag. 28. & 29. & os Parapeitos a tres toesas de grosso suppõdo que nelles entra a grossura da muralha de pedra, & cal, que sòmẽte faz de tres pés no alto em que acaba, sem que faça mençaõ do seu Talud, ou Base da Escarpa como devia fazer com que vem a ser necessarias 12. toesas, ou 72. pès para as tres praças, & 9. toesas, ou 54. pès para os tres Parapeitos, que montaõ 21. toesas, ou 126. pès, antes em rigor lhe saõ necessarios mais $4\frac{4}{7}$ pés que tudo faz 130|8. como se verá no §. 2. Mas na fig. quadrada da pequena Fortificaçaõ não fórma mais q̃ dous Parapeitos nas duas Praças inferiores, & na terceira superior sómente ametade de hum Parapeito, ou pouco mais, como se vè da sua planta pag. 69. por ter Demigolla sòmente de 15|31578. toesas; & naõ de 18. toesas & tres pés como equivocandose diz na pag. 72. porque os Flãcos saõ os que contèm as 18. toesas, & 3. pés, como havia ditto na pag. 70. & naõ as Demigollas que diz na pag. 72. pondo equivocadamente a palavra Demigollas em lugar da palavra Flancos, ou os numeros que pertenciaõ a estes em lugar dos das Demigollas, que não poz, & outro semelhante erro traz na pag. 71. nos Baluartes do grande, & mediano Quadrado, & ainda que a Demigolla

golla fora das 18. toesas,& 3.pés,não bastava para as tres praças, & tres Parapeitos, porq̃ necessitaõ de 21. toesas, as praças a quatro, & os Parapeitos a tres; & os 4|8. pès para as Bases das Escarpas, de que se dirá no §. 2. Mas ainda sem falar nos 4|8. pès em que Pagan não fala, eraõ necessarias conforme a sua doutrina as 21. toesas.

Por tanto armaremos hũa regra de tres para achar o lado do Polygono exterior de tal comprimento que delle resulte a Demigolla K I capaz de nella accõmodar as tres praças na fòrma seguinte, fazendo todavia mençaõ dos 4|8. pès necessarios para as Bases das Escarpas.

A Demigolla K I sendo de 106|4448. dá por lado de Polygono exterior 864. pès, se for de 130|8. quanto dará pello ditto lado exterior? & executada a regra na fòrma ordinaria, sahirá de 1061|68831. quasi; pellos quaes tomamos 1062. pés. Bastará logo hum lado de Polygono exterior de quasi 1062. pès para sahir a Demigolla K I de 130|8. em que se possaõ accõmodar as tres praças de 4. toesas, ou 24. pés de retirada, ou fundo cada hũa, & tres Parapeitos de tres toesas, ou 18. pès cada hum; sendo assim que (como havemos ditto) nem no Quadrado da meã Fortificaçaõ, que tem por lado exterior conforme a sua hypothesi 180. toesas, ou 1080. pès, nem no da grande que tem 200. toesas, ou 1200. pés accõmoda na Demigolla as dittas tres praças mais que das mesmas 4. toesas, ou 24. pès de fundo, ou largura.

Por onde se vé que pello meu Methodo posso accõmodar ainda na fig. quadrada as tres praças a 4. toesas mais livremente do que Pagan; pois me bastaõ para o intento 1062. pès de lado de Polygono exterior, quando elle nem com 1080. no Quadrado da meã Fortificaçaõ, nem com 1200. no da grande, accõmoda segundo sua construcçaõ praças mayores que das mesmas 4. toesas de fundo, & 3. de grossuras de Parapeitos, sem ainda fazer mençaõ do que occupaõ os Taludes das Escarpas dos muros que sustentaõ as praças; que se nòs tomarmos o ditto lado exterior de 1200. pès, como elle no Quadrado da grande Fortificaçaõ; sahirà a Demigolla por nossa fabrica de 147|84. de que abatidas as 9. toesas, ou 54. pès que occupaõ os Parapeitos, restaõ 93|84. para as tres praças que se podem repartir dando cinco toesas, ou 30. pés de largura á praça superior. & a cada hũa das inferiores 31|92.

pés entrando os 2|4. da Base,ou Talud da Escarpa do muro que a sustenta com que vem a ficar a largura livre de cada hũa 29|52. pès que saõ quasi outras cinco toesas, & he o mayor espaço que elle assina ao fundo,ou largura destas praças,onde as Demigollas lhe resultaõ capazes para o intento,que he noPentagono da grãde Fortificaçaõ;nos Hexagonos da meã,&grãde,&geralmẽte nas figuras de mais lados que de seis, ainda que sejaõ fortificadas não sò conforme a grande,ou meã Fortificaçaõ, mas conforme a pequena;porque nas dittas figuras de mais de 6. lados lhe resultaõ asDemigollas capazes de nellas formar as tres praças a cinco toesas de fundo cada hũa; sendo assim que pello meu Methodo declarado no Cap.47 .&acima proposto jà no Hexagono,& em todas as figuras regulares de mayor numero de lados, ainda que o exterior seja sòmente dos 960. pès conforme a pequena Fortificaçaõ de Pagan, resultaõ as Demigollas capazes das tres praças a cinco toesas; pois no Hexagono sahe a Demigolla de quasi 144|67. em que se podem accõmodar; & nas mais figuras mayores Demigollas.

Vese logo que conforme o nosso Methodo podermos accommodar astres praças na Demigolla tanto,ou ainda mais livremente que Pagan na fig.Quadrada, onde ha a mayor difficuldade para o intento,& ainda nas outras figuras Pentagono,& Hexagono que nas de mais lados ha espaço bem livre por hum,& outro Methodo.

Mas se alguem quizer seguir o estilo de Pagan lançando o Flãco obliquo O R que fòrma angulo quasi recto com a Razante,& obtuso com a Cortina sem ficar Flanco secundario, & sendo entaõ a Demigolla K R mayor que K I, poderá accõmodar as tres praças na Demigolla do Quadrado muito mais livremente q̃ Pagan;pois havemos mostrado que sendo o lado do Polygono exterior 864. pès, resulta a ditta Demigolla K R de 123|7248. por onde supponfo aquelle de 960. conforme a pequena Fortificaçaõ de Pagan,sahirá a dittaDemigolla de 137|472.em que se podem accõmodar as tres praças, não sòmente a quatro toesas, ou 24.pès,mas a 26|224. a fóra os $2\frac{2}{5}$ pès de Talud para o muro da praça media,& outros $2\frac{2}{5}$ para o da superior.

Porèm se suppozermos o lado exterior de 180.toesas,ou 1080 pès conforme a sua meã Fortificaçaõ, nos resultarà a ditta Demigolla

migolla K R de 154|656. em que ſe podem accommodar as tres praças a cinco toeſas,& ſobejar eſpaço;quando conforme Pagan né neſta,nem na grande Fortificaçaõ de 1200.pès de lado de Polig. exterior ſe podem accõmodar as tres praças mais que de 4. toeſas na fig.quadrada,por naõ ter na Demigolla conforme a ſua conſtrucçaõ eſpaço para mais,entrando os tres Parapeitos de 3. toeſas cada hum.

E fazendo a conta para ſe ſaber que lado de Polygono exterior haveremos miſter preciſamente para que a Demigolla K R reſulte capaz de nella ſe embeberem as tres praças a cinco toeſas,& os tres Parapeitos a tres,& mais 4|8. pés para os Taludes dos muros das duas praças intermedia , & ſuperior , ſe acharâ que baſta de 1039|1.menor que os 1080 . da meã , & que os 1200. da grande Fortificaçaõ de Pagan na fig. quadrada , & naõ fazemos mençaõ do Talud da praça inferior,porſuppormos queno Foſſo ſahe para fòra da linhaIchnographica do Flãco cuberto.

Conſta por tanto a mayor largueza que o noſſo Methodo dá para ſe poderem formar as tres praças no comprimento da Demigolla, do que a conſtrucçaõ de Pagan nas figuras de poucos lados onde ha a difficuldade para o intento.

§. 2.

Deſcrevemſe as tres Praças no comprimento da Demigolla em correſpondencia do Flanco cuberto.

FEito o diſcurſo do §. antecedente, entremos agora a formar as tres praças baixas,& alta conforme o noſſo Methodo , & proporçoens apontadas no principio deſte Appendiz;mas ſendo os Flancos perpendìculares à Cortina , & ficando algum Flanco ſecundario conforme noſſo eſtilo, & parecer ainda na figur. quadrada,& ſupponhamos que neſta nos baſta fazer as praças de 4. toeſas como o Conde de Pagan.

E pois havemos ditto que para eſte intento baſta que o lado do Polygono exterior ſeja de 1062. pès para que a Demigolla K I reſulte de 130|8. ou quaſi 131. baſtante para as tres praças a 4. toeſas com eſpaço mais para as Baſes das Eſcarpas de dous muros da praça media, & da ſuperior,& tres Parapeitos.

Tomaremos para a Sobreface E I $\frac{28}{100}$ dos 1062 . pès , que ſaõ

 297|36.

297|36.&para o Flanco prolongado I A $\frac{56}{100}$ da Sobreface,que saõ 166|5216. para a Extensaõ do Flanco B I $\frac{2}{5}$ do Flanco prolongado,que saõ 66|60864.& resta por Flanco A B de 99|91296.

Determinado o Flanco A B, sobre sua ametade D B se forme
Fig. 17. a Espalda,ou Orelhaõ pello modo que havemos ensinado, tirando a linha D C direita ao angulo flanqueado do Baluarte opposto; que seja igual á terça-parte do Flanco total A B, & continuãdo a Face E B atè G tanto que B G seja tambem a terça-parte de A B, se forme a Espalda,ou Orelhaõ como dissemos no Cap.28. da prim.part. operat.do Methodo Lusitanico.

Sobre o ponto D do Flanco cuberto A D se tire a perpendicular D i u r, na qual se tome D i de 3. toesas,ou 18. pés para a grossura do primeiro Parapeito, entrando os tres pès de grosso da muralha,& ficando o Talud de sua Escarpa,no plano do Fosso. O espaço i u de 4. toesas, & 2$\frac{2}{5}$ pès ou 26$\frac{2}{5}$ pès necessarios para o plano da primeira praça, & para o Talud da parede, q̃ ha de sustentar a segunda intermedia;sendo que Pagan lhe assina sómente 4. toesas sem fazer mençaõ dos 2$\frac{2}{5}$ pès necessarios para o ditto Talud:porèm o comprimento da ditta primeira praça se estenda de i atè d tanto como 2. ou 3. pès, formando a parede alli hum relexo,ou recanto,& correndo atè entestar com o do Parapeito n b, & da parte da Cortina haverá outro relexo, de que logo se dirá.

O segundo Parapeito u r de outras tres toesas, ou 18. pès no alto,entrando a grossura superior de 3.pès da parede. A segunda praça r t de outras 4. toesas, & 2$\frac{2}{5}$ pès de largura : porèm o comprimento desta segunda praça será mayor que o da primeira, estendendose mais para a parte da Face do Baluarte.6.pés de r atè n, & de t atè s. A grossura do terceiro Parapeito t g de outras tres toesas entrando a grossura superior do muro, & por terceira praça alta ficarà servindo o Terrapleno interior do Baluarte;porque as primeiras duas praças, & os tres Parapeitos ficaõ por esta conta occupando 17. toesas, & 4$\frac{4}{5}$ pès que fazem 106|8. pès, & porque a Demigolla tem 130|8. pès, sobejaõ ainda 24. por Demigolla livre,& outros tantos da parte da outra Demigolla, que terraplenados servem de praças mais altas,& superiores, ficando por Gosier, ou entrada para o Baluarte interior 33|94112. isto he quasi 34.pés como acharà quem fizer o calculo.

Da

Da parte da Cortina corre a grossura do Parapeito A e perpendicular sobre A D, donde se deixarà tambem hum relexo de 4. pès de e atè o, & outro dos mesmos 4. de m atè x na segunda praça; de modo que a parede o x, que de hũa parte forma as duas praças mais baixa,& intermedia, corra parallela cõ a porçaõ da Demigolla e m para que estas praças fiquem mais largas da parte da Cortina.

A letra F mostra o Parapeito exterior de 3. toesas H o Terrapleno de cinco,& mais largo no espaço L; de modo que o Reparo será de 8. toesas de largo em cima entrando as tres em que assenta o Parapeito. Nas outras figuras serâ ainda mais largo.

O Fosso intermedio,se mostra com a letra M,cuja largura resulta da mesma fabricaconforme for a fig. de menor, ou mayor numero de lados. Aqui he na fig. quadrada de que imos fallando.

Na parede n b que atravessa a largura do Fosso intermedio será bom haver hum Parapeito,para dalli ter este Fosso algũa defensa.O espaço K mostra o Terrapleno interior do Baluarte que fica servindo de terceira praça mais alta.

Temos pois mostrado que ainda em hum Quadrado de 1062 pès de lado exterior, que he menor que o de 1080. da meã Fortificaçaõ de Pagan,podemos accõmodar segundo nosso Methodo as mesmas tres praças, dobrados Reparos,& Parapeitos,& o Fosso intermedio que elle faz.

E posto que no quadrado da pequena Fortificaçaõ naõ tenhamos Demigolla bastante para as tres praças,& Parapeitos, tambẽ no desenho de Pagan a naõ ha, & por isso na praça superior não pode continuar os Parapeitos por todo o espaço necessario, por quanto lhe vinhaõ a fechar a entrada para o Baluarte,como se vè na sua fig.do quadrado da pequenaFortificaçaõ q̃ traz na pag.69

Isto se prova mais evidentemẽte se por Trigonometria se buscar a Demigolla, que forma na continuaçaõ da Razante, a qual conforme os suppostos q̃ toma nesta fig.se acharà de quasi 15|32. toesas, conforme a pequena Fortificaçaõ;mas os tres Parapeitos a tres toesas, duas praças as mais baixas a quatro, montaõ 17. toesas, sem ainda fallar nos $4\frac{4}{5}$ pés que mais saõ necessarios para os Taludes sobredittos,com que não ha na sua Demigolla capacidade para se formar o superior Parapeito correspondente ao Flanco cuberto,quanto mais para ficar espaço para a terceira praça mais ſuperior,& por tanto prevendo a difficuldade,ou por calculo,ou pello petipè,deixou de continuar na figur. o Parapeito por todo o eſpaço neceſſario, & ainda que Pagan ſuppuzera o lado do Polygono exterior de 1062. pés, nem ainda aſſim tinha na Demigolla capacidade para as tres praças a 4. toeſas,& tres Parapeitos a 3. porque conforme a ſua conſtrucçaõ lhe ſahiria a ditta Demigolla de 16|94775. toeſas que fazem 101|6865.pès ſendo que para as tres praças a 4. toeſas, & tres Parapeitos a 3. lhe eraõ neceſſarias 21. toeſas,ou 126. pés,& mais os $4\frac{4}{5}$ dos Taludes das Eſcarpas que montaõ 130|8. que ſaõ quaſi 131. o que naõ ſuccede no noſſo deſenho por ter baſtante Demigolla tanto que tomarmos 1062. pès de lado de Polygono exterior como havemos moſtrado.

E ainda que com os 1062. pes de lado de Polygono exterior fizeramos a conta conforme a conſtrucçaõ de Pagan para o Quadrado da meã Fortificaçaõ,nem aſſim lhe reſultaria a Demigolla baſtante;porque ſahiria de quaſi 20|93. toeſas, ou 125|58.pès; ſendolhe neceſſarios os 130|8. ou 131.que havemos ditto.

E ſe todavia quizermos uſar do deſenho que tambem apontei neſte,& no §. 1. lançando o Flanco do angulo da Eſpalda ao ponto onde a Razante corta a Cortina formando com eſta angulo obtuſo,& quaſi recto com a Razante; creſcendo por eſta cauſa asDemigollas,teremos eſpaço para neſta meſma figura quadrada fazer as praças a ſinco toeſas ſe tomarmos hum lado de Polygono exterior de 1039|3144.ou de 1040.pés que he menor q̃ os 1080 da meã Fortificaçaõ de Pagan, como já havemos apontado; que ſe nós o tomarmos dos meſmos 1080.pès, reſultarà a Demigolla K R dos 154|656. que havemos ditto no §. 1. em que poderemos accõmodar as praças a ſinco toeſas.

Todo eſte diſcurſo; & conta fiz para moſtrar a melhoria do meu deſenho ao de Pagan ainda para accõmodar as ſuas tres praças,& mais obras;donde cõſta ſer o de Pagan defectuoſo nas Demigollas de algũas figuras por naõ terem baſtante comprimento; em outras ſaõ taõ enormes por exceſſo,quanto havemos moſtrado no Cap.12.do primeiro Appendiz.

Continuemos agora com referir a altura deſtas praças em que conſentimos com a doutrina de Pagan a ſaber.

A primeira,& inferior praça pòde ter duas toeſas de alto ſobre

bre o plano do Fosso principal, sendo este de 3. de profundo. A segunda, & intermedia 4. A terceira superior 6.

Mas naõ sou de opiniaõ em serem de igual altura ambos os Reparos do Baluarte como apontei no Scholio do Cap. 9. do I. Appendiz, porèm que o exterior H seja 4. pés mais baixo que o interior K; porque Pagan faz aquelle de 18. sobre o livel da campanha, ou 36. sobre o fundo do seu Fosso como o interior.

Mas nòs sòmente 14. sobre a campanha, ou 32. sobre o plano do Fosso principal. Isto quando houver as mais obras exteriores de Pagan que havemos referido, & vamos aqui descrevendo; porq̃ senão se houverem de fabricar, façase o Reparo exterior do Baluarte 6, ou 8. pès mais baixo que o interior.

Da largura do Fosso intermedio M entre os dobres Reparos se deve considerar que se deve abater o Talud da subida para o Reparo exterior, que occuparà 7. pès, & hũa Lizira de 4. ou 5. q̃ se deve deixar entre o Fosso intermedio, & a ditta subida. Tambem que o ditto Fosso intermedio ficará tanto mais estreito no fundo, quanto montar o Talud de sua Contrascarpa, & da Escarpa da muralha do Reparo interior.

As serventias para as praças baixas, & intermedia vem de dentro da Praça principal sinaladas com as letras Z Z.

Pagan não forma Espalda nem Orelhaõ na fig. quadrada fortificada por algum de seus tres modos, nem na fig. pentagonica fortificada conforme o petit Royal, quando o lado do Polygono exterior he de 960. pés o mais pequeno que admitte para estas Fortificaçoens; porque como fórma a ditta Espalda do Flanco para dentro da Demigolla, não tinha lugar bastante para o intento das tres praças, & juntamente Espalda: porèm como nòs a formamos do Flanco para fóra pello modo ordinario, bem se póde fazer cõ as tres praças na fòrma que acima temos mostrado; porque seria grande defeito ficar a primeira praça baixa sem Espalda, ou Orelhaõ que a emparasse.

O Revelin (a que com muitos chama Meya-lua) com dobres Reparos podemos tambem formar segundo nosso Methodo, a saber dispondo o Fosso obliquo na fòrma ditta no Cap. 16. do Methodo Lusitanico, se tome por Capital do Revelin a linha X V igual aos $\frac{3}{4}$ da Sobreface E I, & do ponto V se tire a Face do Revelim V R direita ao ponto C extremo da linha directiva D C, Fig. 17.

a qual

a qual Face (quando se naõ faz Espalda) havemos ditto se tire na fig. quadrada do primeiro Methodo declarado no Capitulo 14. direita a hũa parte da Cortina (junto do Flanco) igual á sexta parte da Capital X V: mas nos Quadrados do segundo, & terceiro Methodo, que dissemos nos Capitulos 45. & 47. direita ao meyo do Flanco.

O Fosso exterior do Revelin (que no nosso Methodo havemos tambem feito obliquo) se póde aqui fazer parallelo igual ao terço, ou ao mais á ametade da largura do Fosso principal defrõte da Face do Baluarte na sua media largura; pois por ser obliquo naõ tem hũa mesma em todo seu comprimento.

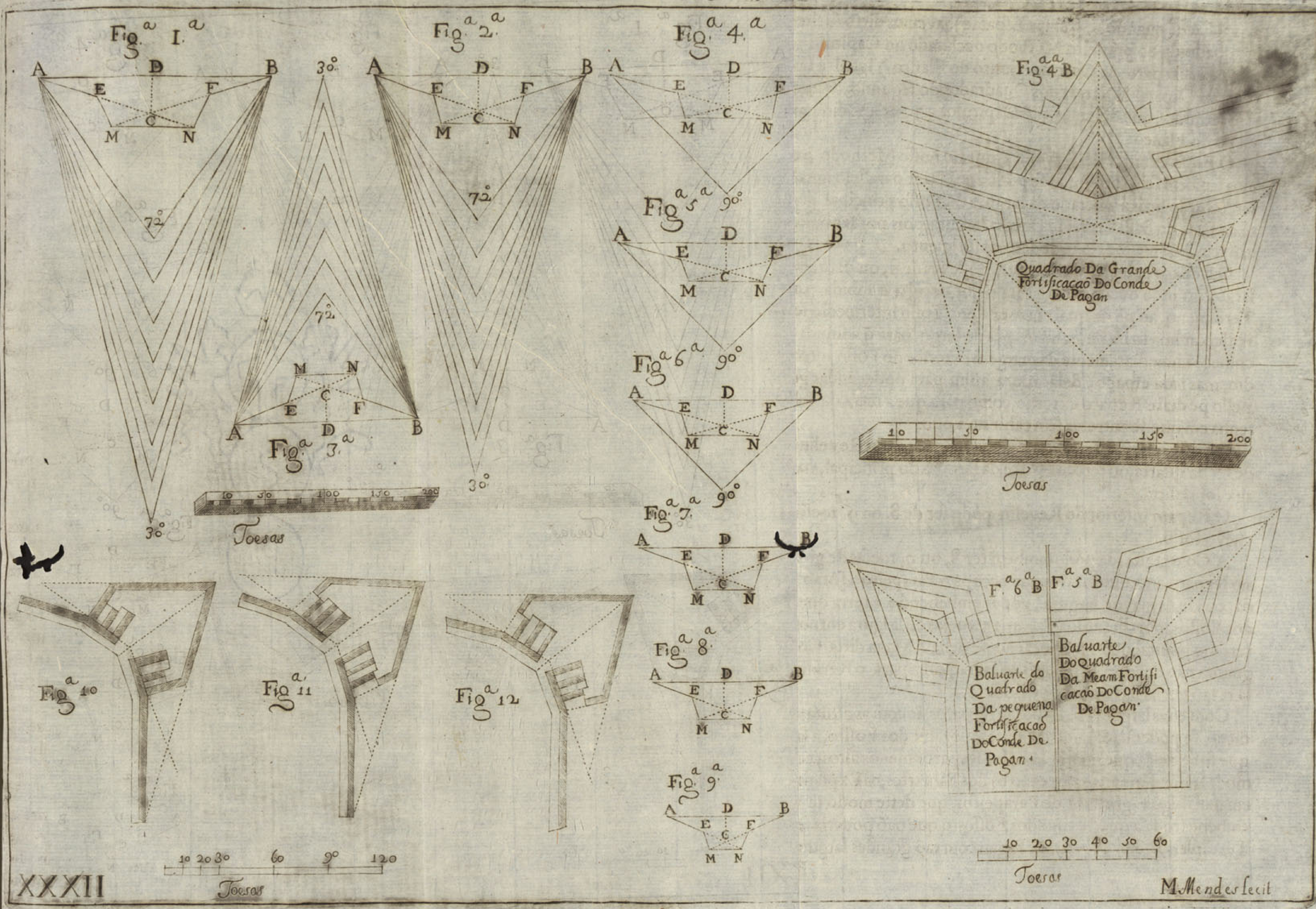
O Reparo exterior do Revelin pòde ser de 8, ou 9. toesas de largo entrando o Parapeito a fòra o que occupa a subida para o Terrapleno, ao pè da qual entre ella, & o Fosso intermedio se deve deixar hũa lizira de 4. ou 6. pès de largo, para q̃ a subida naõ comece immediatamente da margem exterior do Fosso intermedio, mas haja espaço, & largueza assim para poder andar gente pello pè deste Reparo externo, como para que a terra da subida tenha em que se entreter sem cahir no Fosso.

O Fosso intermedio entre os dobres Reparos do Revelin póde ser da quarta, ou terceira parte da largura do principal, na fòrma sobreditta.

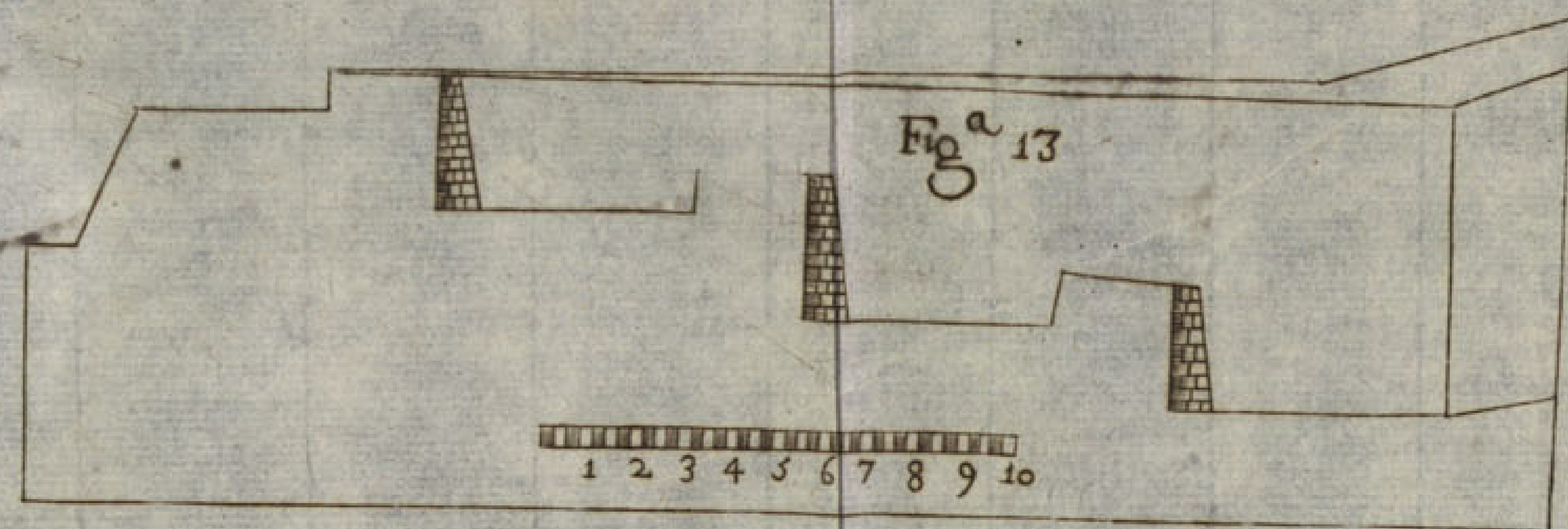
O Reparo interior do Revelin póde ser de 8. ou 9. toesas, ou cheyo todo.

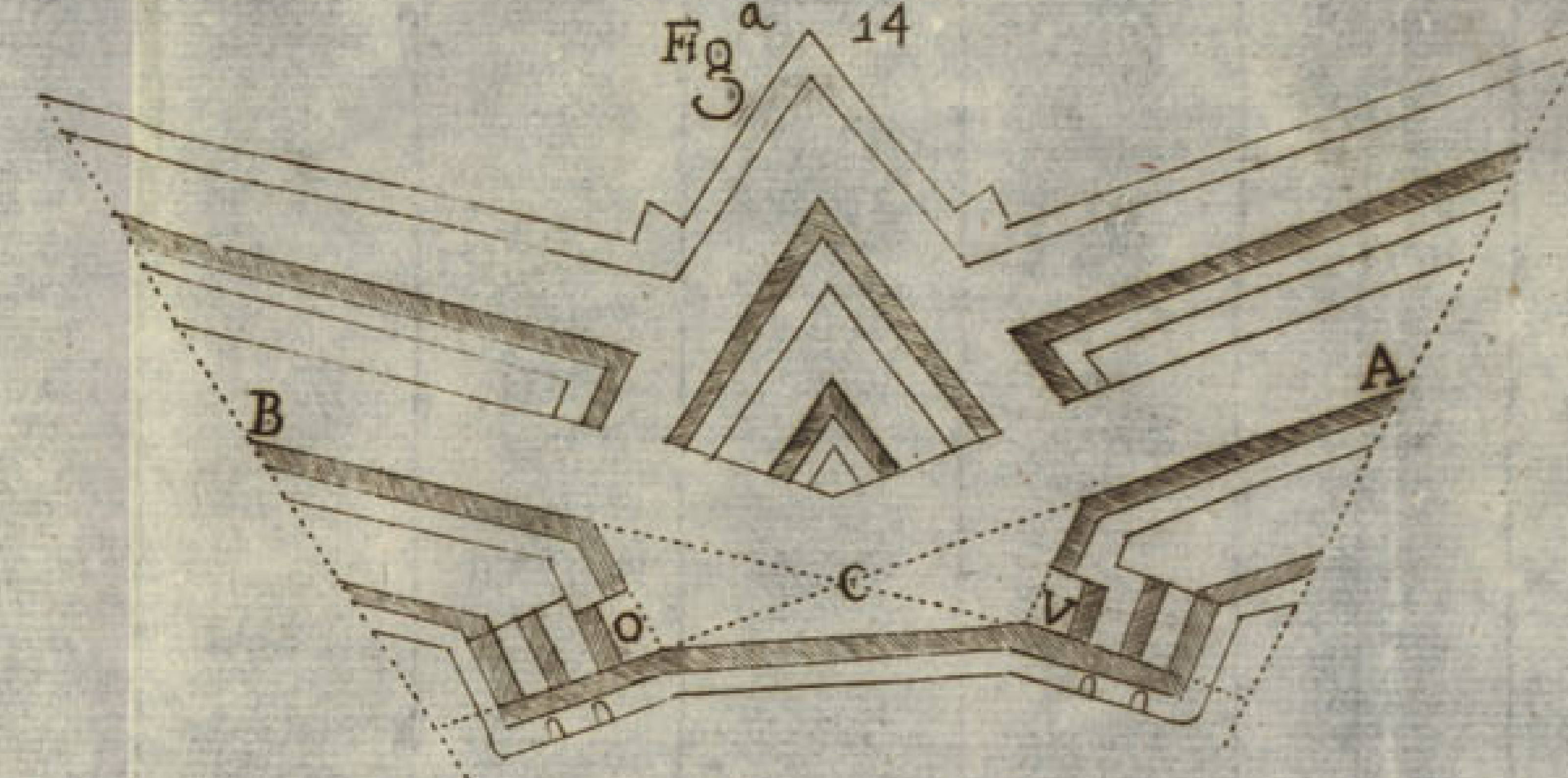
A Contraguarda póde tambem ter 8, ou 9, toesas de grossura no Reparo entrando as tres que occupa o Parapeito a fòra a subida, ou ainda mayor largura, por ir embebendo a terra que sahir dos Fossos, pois lhe assina Pagan 15. toesas de largura entrando o terreno natural que ha de ficar ao pè della. Mas a ditta Contraguarda não deve ter Parapeito no lado q̃ olha para o Revelin pella razaõ que já havemos apontado.

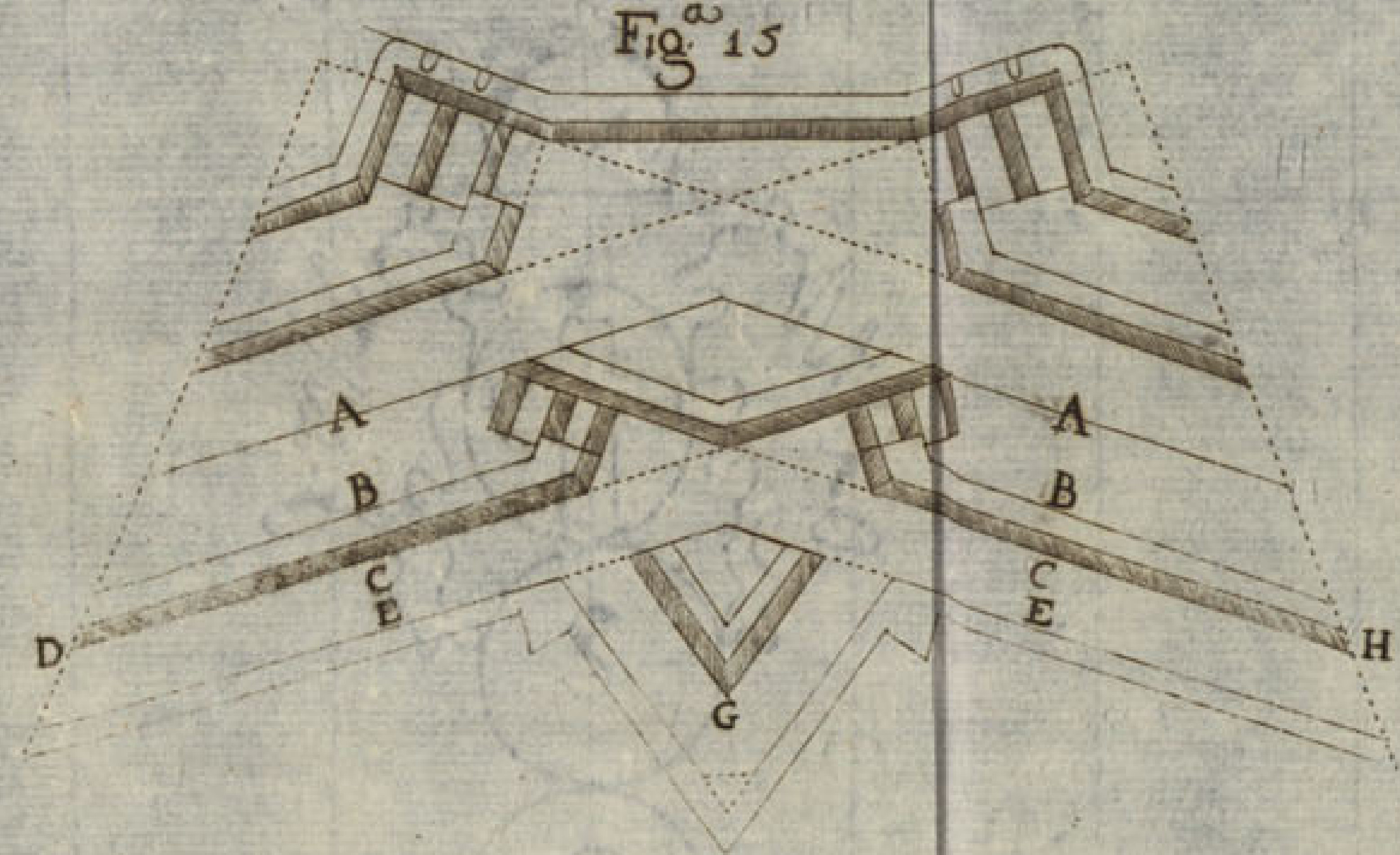
Com estas larguras de Fossos, & Reparos, & com as alturas atraz dittas se poderà accõmodar a terra que sahir dos Fossos, a saber a que sobejar da que menos levaõ os Reparos menos altos; accommodala nos mais altos, nos centros dos Baluartes, na Explanada, & em mais algũa grossura de Parapeitos, que deste modo se virá a embeber toda a que se tirar dos Fossos; o que naõ poderia ser nos Terraplenos de 7. toesas de Pagan com taõ grandes larguras de

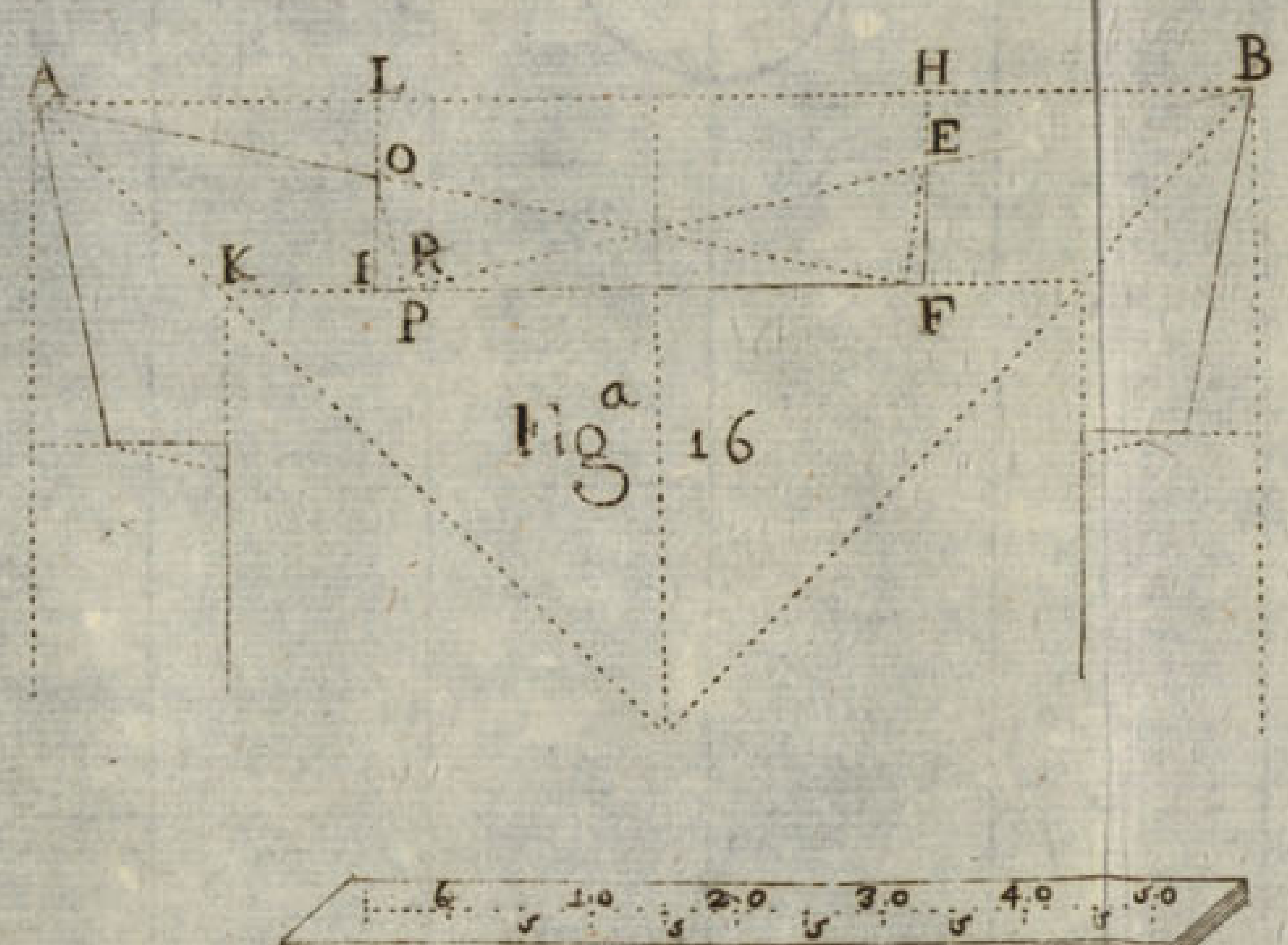


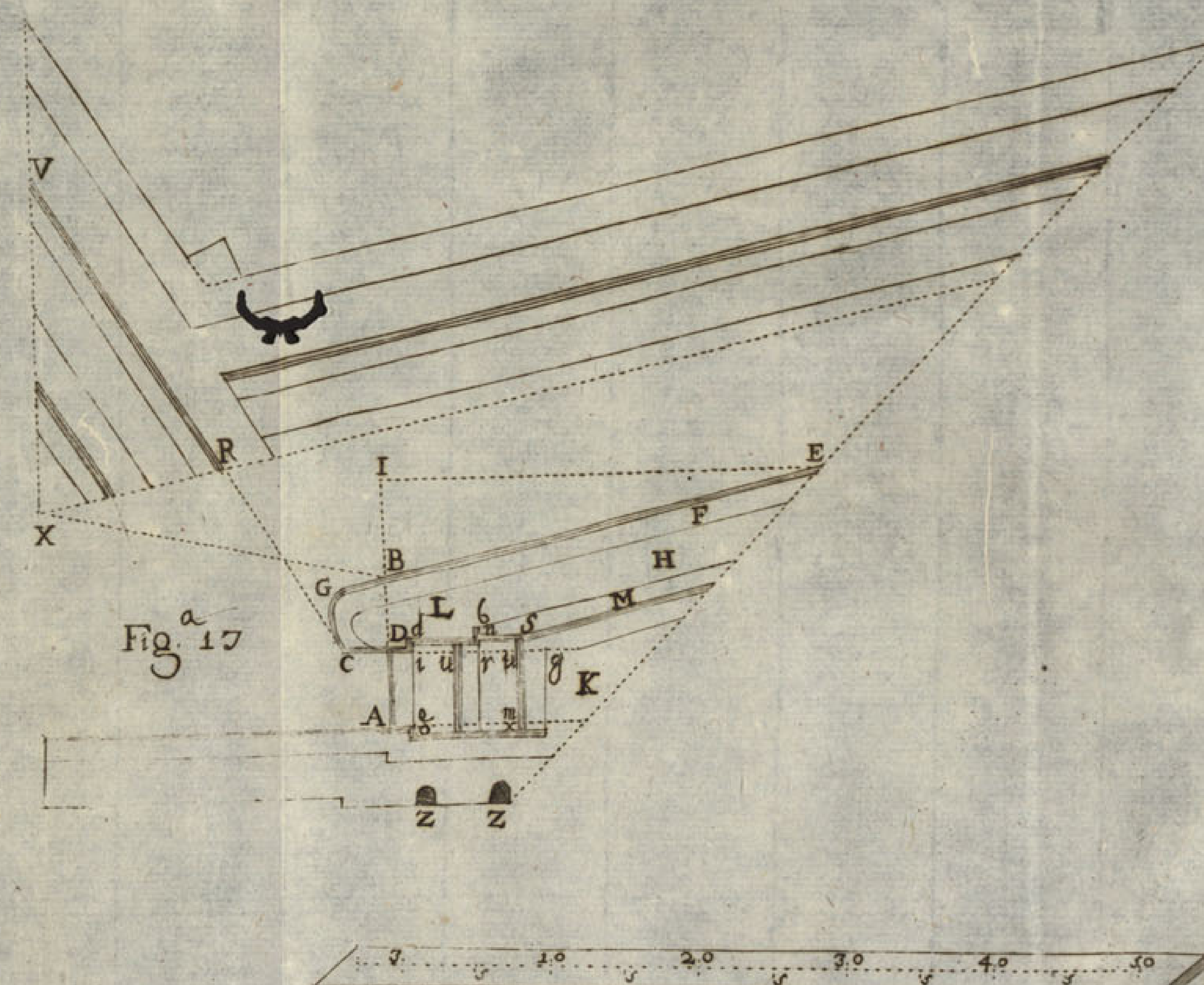
Figª 1ª
Figª 2ª
Figª 3ª
Figª 4ª
Figª 4ª B
Figª 5ª
Figª 6ª
Figª 7ª
Figª 8ª
Figª 9ª
Figª 10
Figª 11
Figª 12
Fª 6ª B
Fª 5ª B
Quadrado Da Grande Fortificação Do Conde De Pagan
Baluarte do Quadrado Da pequena Fortificação Do Conde De Pagan.
Baluarte Do Quadrado Da Meam Fortificação Do Conde De Pagan.
Toesas
XXXII
M. Mendes fecit











XXXIII

M Mendes fecit

I
n

p
q
n
n
p
p
cu
d
ſe
&
p
m

co
to
ſo

ti
p
va
n
d

Fossos da profundidade que assina; sendo que os que nòs assinamos saõ assaz largos,& a profundidade a mesma qne de Pagan.

No que toca à segunda Praça de Pagan, a que tambem chama perfeita com a grande Contrascarpa , & Revelin por fòra della que traz na pagin. 43. & nòs no Cap. 9. do primeiro Appendiz, não venho em ser a Cortina da ditta Contrascarpa com o angulo no meyo sahido para fòra,como elle faz,pellas razoens que alli apontamos. E posto que se pudera fazer a Cortina direita;todavia porque não ha boa disposiçaõ para este intento sem ficar muito curta,& as suas Faces excessivas,me parece escusarse a dìtta grande Conrrascarpa,& quando se queiraõ fazer obras externas, que sejaõ as Contraguardas,ou Conservas, de que havemos trattado, & o Revelin com dobres Reparos, porque ha melhor disposiçaõ para isto em todas as figuras , & atè no Quadrado (como havemos mostrado) onde aquella he menos commoda que nas outras.

Nem tenho por melhor a grande Contrascarpa,ainda que fora com a Cortina direita do que as Contraguardas,& Revelim; posto que Pagan a prefira [r] de que escuso apontar as razoẽs por não ser mais largo,& porque em parte as havemos tocado. [r] Cap. 6. pag. 45.

Nas mais figuras atè a linha recta inclusivè se disponhaõ as Fortificaçoens pello mesmo teor:nas quaes haverá ainda melhor disposiçaõ para se accommodarem as tres praças nos Flancos; pois vaõ crescendo as Demigollas, assim como vai crescendo a fig. no num. dos lados,& por tanto se poderá dar mayor largura,ou fundo as praças como de 6. & mais toesas para ficarem mais capazes, & tambem engrossar mais seus Parapeitos se for necessario,attendendo á capacidade que a Demigolla offerecer para o intento;pois vimos que no Quadrado,onde se dá a menor Demigolla podemos dispor as tres praças com tanta commodidade.

[illegible] de profundidade quea altissima, sendo que os que yo assina-mos saõ assaz largos, & a profundidade a mesma que de Pagan.

No que toca a segunda Praça de Pagan, a que tambem chama perfeita com a grande Contrascarpa, & Revelin por fóra della que traz na pagin. 43. & nós no Cap. 9. do primeiro Appendiz, naõ venho em ser a Cortina da dita Contrascarpa com o angulo no meyo sahido para fóra, como elle faz, pellas razoens que alli a-pontamos. E posto que se pudera fazer a Cortina direita; todavia porque naõ ha boa disposiçaõ para este intento sem ficar muito curta, & as suas Faces excessivas, me parece escusasse a dita gran-de Contrascarpa, & quando se queiraõ fazer obras externas, que sejaõ as Contraguardas, ou Conservas, de que havemos trattado, & o Revelin com dobres Reparos, porque ha melhor disposiçaõ para isto em todas as figuras, & atè no Quadrado (como have-mos mostrado) onde aquella he menos commoda que nas outras.

Nem tenho por melhor a grande Contrascarpa, ainda que fora com a Cortina direita do que as Contraguardas, & Revelins; pos-to que Pagan a prefira * de que escuso apontar as razoẽs por naõ ser mais largo, & porque em parte as havemos tocado.

* Cap. 6. pag. 45.

Nas mais figuras atè a linha recta inclusivè se disponhaõ as For-tificaçoens pello mesmo teorema quaes haverá ainda melhor dis-posiçaõ para se accommodarem as tres praças nos Flancos; pois vaõ crescendo as Demigollas, assim como vai crescendo a fig. no num. dos lados, & por tanto se poderá dar mayor largura, ou fun-do ás praças como de 6. & mais toesas para ficarem mais capazes, & tambem engrossar mais seus Parapeitos se for necessario, at-tendendo á capacidade que a Demigolla offerecer para o intento; pois vimos que no Quadrado, onde se dá a me-nor Demigolla podemos dispor as tres praças com tanta commodidade.

TRIGONOMETRIA PRACTICA RECTILINEA

POR

LUIS SERRAM PIMENTEL

PROLOGO.

A Trigonometria, ou mediçaõ de Triangulos, que vem a ser hũa sciencia, a qual por preceitos fundados theoricamente na Geometria, & Arithmetica, ensina practicamente a resolver em medidas hũas das quantidades de hum Triangulo, pressuppondo outras nelle conhecidas, he de tanto uso, taõ util, & necessaria, que me parece o naõ poderia referir bastantemente, ainda que escrevesse muitas paginas: por tanto o remetto aos livros dos famosos Autores que desta sciencia escrevèraõ especulativa, & practicamẽte, que saõ em grãde numero

Basta significar com elles, que sem a Trigonometria ficaõ impenetraveis as mais das sciencias Mathematicas: com ella facilmente penetraveis, & ainda a mais difficil, & levantada, qual he a Astronomia, como se contêm no distícho seguinte que vulgarmente exta.

Cuncta Trigonus habet, satagit quæ docta Mathesis,
Ille aperit clausum quid quid Olympus habet.

Naõ tratto mais que da practica, que he o necessario para o uso, tirada dos livros dos Autores celebres: pois a tem reduzido a taes termos, que parece naõ póde ser mayor a facilidade, & brevidade, & por tanto todos os modernos por hum, ou outro modo vem a escrever a mesma cousa.

Sigo a ordem de Adriano Ulacco na sua Trigonometria artificial, & de Henrique Gellibrando na sua Instituiçaõ trigonometrical; cuja practica me parece bẽ disposta, a que ajuntei algũas advertẽcias necessarias, que reconheci lhe faltavaõ, especialmente na Trigonometria spherica, como se verà na que em outra occasiaõ darei a luz.

Hũa, & outra Trigonometria, rectilinea, & spherica, tenho escritto ha muitos annos, & ditado algũas vezes aos meus ouvintes na Aula Regia com mais, ou menos largueza. A practica da rectilinea ordinaria, que aqui escrevo, me parece vai taõ copiosa, que lhe naõ faltaõ varios caminhos por differentes analogias para se conseguir a soluçaõ dos problemas ordinarios. Cada hum poderâ escolher o q̃ mais lhe agradar, porque qualquer acharà facil, & sem tropeço.

Advirto finalmente que convem primeiro exercitaremse na Arithmetica decimal, que dou separadamente em compendio antecedente a este Trattado: porque nelle, & em todos os meus calculos uso daquella Arithmetica, como faz em todos os modernos, pellas razoens que no prologo do ditto compendio aponto.

As fig. que servem para este Trattado, vaõ nas Estampas 34. & 35.

PRACTICA DA ARITHMETICA DECIMAL, OV Dizima.

PROLOGO.

A Dizima he hũa invençaõ de Simaõ Stevino de Bruges, a qual despois tomaraõ muitos modernos por ser excellente, para por seu meyo se acharem logo os quebrados com grande approximação, valendose sómente das quatro especies da Arithmetica ordinaria, & dos mesmos modos ordinarios de tirar mais, & mais approximadamẽte as raizes, quadras, cubicas, quadriquadras, surdesolidas, cubicubicas, &c. que de sua natureza forem irracionaes segundo as dignidades da Algebra numerosa, ou especiosa.

Seria necessario alargarme para inculcar sua facilidade, & utilidade para os calculos, & para todo o genero de contas sobre qualquer materia. Os versados nas Mathematicas o reconhecem bem pella liçaõ dos Autores que della usaõ. Donde eu deduzi este Compendio ha muitos annos, o qual hei lido na Aula Regia onde professo as Mathematicas, para exercicio dos calculos da Hercotectonica militar, que ditei; & posto que naõ havia visto Stevino quando escrevi esta practica, todavia vendoo despois me naõ foi necessario acrescentar, ou tirar algũa cousa do que havia escritto, parecendome telo feito bastantemente, referindo sómente agora de novo a definiçaõ da Dizima, que elle traz.

---

§. 1.

Que cousa seja Dizima.

Dizima he hũa especie de Arithmetica inventada pella decupla proporçaõ, consistente nos caracteres das cifras, pellos quaes se descreve qualquer numero, & pella qual se resolvem por numeros inteiros sem quebrados todas as contas, que intervem nos negocios dos homens.

Naõ examino agora filosoficamente a definiçaõ; mas sómente advirto, que em lugar das palavras [Decupla proporçaõ] que eu puz, traz Stevino (Decupla progressaõ.)

Vem a ser, que imagina qualquer inteiro repartido em dez partes, a que chama primos, cada primo em dez segundos, cada segundo em dez terceiros, & assim por diãte do mesmo modo, que os Mathematicos procedem pella divisaõ sexagenaria de hum

grao

grao em 60. minutos, hum minuto em 60. segundos, hum segundo em 60. terceiros, &c. De maneira, que se suppossermos este numero 34|24679. quer dizer que saõ 34. inteiros, pès, palmos, vergas, legoas, estadios, ou outra qualquer medida de que se fala; & mais dous primos que saõ $\frac{2}{10}$ & alem disto 4. segundos que vem a ser $\frac{4}{100}$ & mais 6. terceiros que valem o mesmo que $\frac{6}{1000}$ & juntos com os primeiros dous numeros faz tudo somma de $\frac{246}{1000}$ & ainda mais 7. quartos ou $\frac{7}{10000}$ que com mais 9. quintos, ou $\frac{9}{100000}$ resulta todo o quebrado $\frac{24679}{100000}$ atè onde chegaõ de ordinario os calculadores da Fortificaçaõ por fazerem o Radio, ou semidiametro do circulo de 10000. sem embargo de que para a practica não he necessario mais, que chegar a primos, ou quando muito a segundos. E he de advertir que sempre no quebrado deve ficar por denominador 1. com tantas cifras, quantas forem as letras do numerador.

Numerador he o numero de cima do quebrado. Denominador he o numero debaixo.

Mas quando algum dos numeros do numerador he significativo, ou exponente de quebrado mais miudo, que de primos, se lhe devem imaginar da parte esquerda tantas cifras, como quantos forem os lugares dos quebrados, que faltaõ como por exemplo supponndo, que temos 24. inteiros, & 6. terceiros se haõ de dispor nesta fórma 24|006. que he o mesmo que 24|$\frac{006}{1000}$.

Podese tambem imaginar o Radio repartido ainda em mayor numero de partes que 100000, como em 1000000, que se chamaõ sextos, ou em 10000000, que se dizem septimos, & assim por diante; mas serà escrupulosa impertinencia passar de quintos.

Alguns sinalaõ os numeros inteiros, primos, segundos, terceiros, &c. com os seguintes caracteres (0) ①②③④ &c. ou com outros varios accõmodados emcima dos numeros, a que pertencem, ou poem sò o ultimo caracter em cima da ultima letra numerica. Destes usaõ alguns Autores da Algebra; porém saõ cançados, & mais facil ficaria cifra por exponẽte de numeros inteiros; hũa risquinha de primos; duas de segundos, &c. & ainda tenho por melhor, & mais facil para as operaçoens apartar o numero inteiro do quebrado com hũa risca de alto a baixo como neste num. 3428|76054. o qual significa 3428. inteiros, & mais $\frac{76054}{100000}$ q̃ saõ quintos. Do que dissermos adiante se percebera tudo melhor.

§. 2.

Da practica da Dizima.

AS especies da practica da Dizima saõ as mesmas, que da Arithmetica ordinaria; porque como procede com seus primos, segundos, &c. em proporçaõ decupla dahi nasce ficar o mesmo processo, que das especies ordinarias, o que se verá dos seguintes exemplos.

Reduzir quebrados ordinarios a quebrados da Dizima.

AO numerador do quebrado se acrescente hũa, duas, tres, quatro, ou cinco cifras cõforme quizermos reduzilo a primos, segundos, terceiros, quartos, ou quintos, & o ditto numerador assim acrescentado com as cifras se parta pello denominador do quebrado, & o que sahir no quociente será o quebrado reduzido a primos, segundos, terceiros, &c. conforme a quantidade das cifras acrescentadas ao numerador.

EXEMPLO I.

PRoponhamos se quer reduzir o quebrado $\frac{3}{4}$ a outro da Dizima. Ao numerador 3. acrescẽto cinco cifras, & assim acrescẽtado 300000. o parto pello denominador 4. & sahem no quociente 75. pois atè a segunda cifra despois do 3. he, que se ajusta a repartiçaõ sem sobejar nada. E pois me naõ foraõ necessarias mais, que as primeiras duas cifras adiante do 3. para se ajustar a repartiçaõ; por tanto o numero 75. que sahio no quociente saõ 7. primos, & 5. segundos, ou 75. segundos, que valem o mesmo que $\frac{75}{100}$ porque sempre o denominador se deve entender, que cõsta de 1. com tantas cifras, como quantas letras numericas houver no numerador do quebrado da Dizima; ainda que neste algũas da parte esquerda sejaõ cifras.

Esta reducçaõ em sustancia vem a ser a practica da regra de tres; porque quando se propoem $\frac{3}{4}$ quer dizer que de hum inteiro feito em quatro partes se devem tomar as tres; pois em qualquer quebrado sempre se imagina hũa cousa partida em tantas

partes

partes, quantas ſignifica o denominador do quebrado, pello que armando a regra de tres na fòrma ſeguinte.

Se hũa couſa repartida em 4. partes como moſtra o denominador do quebrado, me dà 3. como moſtra o numerador, que me daria a meſma couſa ſe ſe repartiſſe em 10. ou 100. ou em 1000. ou 10000. ou em 100000? & feita a conta ſahiráõ $\frac{75}{100}$ ou $\frac{750}{1000}$, ou $\frac{7500}{10000}$, ou $\frac{75000}{100000}$. E como na regra de tres ſe ha de multiplicar o ſegũdo numero pello terceiro, & eſte ſeja 10, ou 100, ou 1000, ou 10000, ou 100000, com ſe acreſcentarem cifras ao ſegundo, q̃ he o numerador do quebrado dado, fica feita a multiplicaçaõ, para ſe partir pello primeiro, q̃ he o denominador do ditto quebrado.

EXEMPLO II.

HAjaõ-ſe de reduzir $\frac{23}{57}$ a quebrado da Dizima: Ao numerador 23. acreſcento cinco cifras, & o numero compoſto 2300000. repartido pello denominador 57. dá no quociente 40350. mas porque ficaõ por repartir 50. que he mais que ametade do denominador 57. por tanto em lugar da ultima letra do quociente, que he cifra ponho 1. & fica o quociente mais proximo á verdade, 40351. que ſaõ 4. primos, nenhum ſegundo, 3. terceiros, 5. quartos, 1. quinto, ou fazendo mençaõ do valor de todo o numero, quarenta mil trezentos, & cincoenta, & hũ quintos, que valem o meſmo que eſte quebrado $\frac{40351}{100000}$.

Sommar numeros da Dizima.

QUerẽdoſe ſommar por exemplo tres fileiras de numeros, a ſaber o primeiro 343|70467. o ſegundo 23|04300; o terceiro 0|57038; que ſe diſponhaõ em tres carreiras na fòrma que ſe diſpoem os numeros ordinarios para ſe ſomarem; ſómente com advertẽcia, que ſe haõ de pòr ſemelhantes debaixo de ſemelhantes, & quando faltar na ordem algum ſe deve ſuprir com hũa cifra; como ſe vè no exemplo junto, & a ſomma ſe fará pello modo ordinario, a qual ſerá 367|31805. q̃ he o meſmo, que 367 $\frac{31805}{100000}$.

343	70467
023	04300
000	57038
367	31805

Diminuir numeros da Dizima.

FAzſe a deminuiçaõ pello modo ordinario, devendo ſer o numero de cima mayor que o debaixo, & pondoſe ſemelhantes de-

debaixo de ſemelhantes, ſuprindoſe o lugar com cifra, quando nelle faltar numero, como por exemplo de 283|704. quero tirar 175|54278. diſponho os numeros na fòrma que ſe vè, & fazendo a ſubtracçaõ pello modo ordinario reſtaõ 108|16122. que valem o meſmo que 108| $\frac{16122}{100000}$.

```
 283|70400
 175|54278
 ---------
 108|16122
```

Multiplicar numeros da Dizima.

A Multiplicaçaõ ſe faz na meſma fòrma que a dos numeros ordinarios, & para ſe ſaber que eſpecie ſe gera no producto ſe ajunta o exponente da ultima letra da parte direita do multiplicador com o exponente da ultima letra direita do multiplicado, & a ſomma dos dittos exponentes ſerá o exponente da ultima letra do producto.

EXEMPLO.

QUerẽdoſe multiplicar 428|70456. por 32|23. diſponhaõſe os numeros na fòrma ordinaria preſente, & feita a multiplicaçaõ ſahe no producto 13817|1479688. & porque o exponente ultimo direito do multiplicador era de ſegundos, & o do multiplicado era de quintos, juntos ambos os exponentes a ſaber quintos, & ſegundos fazem ſeptimos, porque dous com cinco fazem 7 exponẽte de ſeptimos, & tal ſe deve pòr em cima da ultima letra, que he 8. & como dallí para a maõ eſquerda vão diminuindo os exponentes por ſua ordem, vem a ficar á cifra exponente de inteiros em cima do ſegundo 7. para a maõ eſquerda, & ſahem 13817, & os mais quebrados adiante que valem o meſmo, que $\frac{1479688}{10000000}$.

```
     428|70456
         32|23
 -------------
     128611368
     85740912
    85740912
  128611368
 -------------
  13817|1479688
```

NOTA.

SE ſe multiplicarem ſòmẽte quebrados da Dizima por outros quebrados da meſma, cuja ſomma dos exponentes denota o quebrado do producto, ſe contem os dittos exponentes por ſua ordem da maõ direita para a eſquerda; & ſe faltarem letras a que attribuir exponente, ponhaõ-ſe cifras em lugar das que faltarem atè o exponente de primos, & ficarà em quebrado, cujo denominador

nador será 1. com tantas cifras como houver letras no numerador; como por exemplo multiplicando 4. terceiros por 5. primos & 3. segundos se geraõ no producto 212. quintos; logo começãdo a contar os exponentes a saber quintos em cima do 2. do maõ direita; quartos em cima do 1. para a maõ esquerda; terceiros em cima do 2. mais para a maõ esquerda; poremos mais hũa cifra tãbem para a maõ esquerda sobre que se imaginem segundos, & outra cifra ainda mais para a esquerda onde se imaginem primos, & ficará o quebrado nesta fórma $\frac{00212}{100000}$.

Repartir numeros da Dizima.

O Repartir he tambem na fòrma ordinaria, & sò para se saber que especie sahe no quociente se tira o exponente do ultimo numero da parte direita do divisor do exponente ultimo direito do diviso, & o que restar será o exponente da ultima letra direita do quociente.

EXEMPLO.

DIvidaõ se 328|459. por 23|43. Disponhaõ se os numeros na fòrma ordinaria presente, & feita a operaçaõ sahe no quociente 14|0. porque tirando o exponente da ultima letra do divisor que era de segundos, do exponẽte da ultima letra direita do diviso que era de terceiros, fica o exponente de primos, que se deve pòr sobre o ultimo numero direito do quociente.

```
004
0125
19413
328|459 |14|0
23|4333
  2344
   23
```

NOTA I.

SE os exponentes do divisor forem mais altos no nome que os exponentes do numero que se quer dividir, se devem ajuntar ao dividendo tantas cifras até que o exponente da ultima cifra direita iguale ao exponente da ultima letra direita do divisor, ou ainda mais algũa cifra adiante, & se deve fazer a divisaõ como está ditto: mas para mayor clareza ponho ainda outro.

EXEMPLO.

QUerendose dividir 140|87. por 25|0675. porque o exponente do divisor he de mais alto grao no nome (por ser de quartos) que o exponente ultimo do dividendo (que he de segundos) acrescento ao ditto dividendo algũas cifras atè que seu ultimo direito exponente iguale, ou exceda ao do divisor. Acrescentêse tres cifras, por exẽplo, & ficarâ o dividẽdo 140|87000. cujo ultimo exponẽte serà de quintos, & feita a divisaõ sahirà no quociente 5|6. & porq̃ sobeja algũa cousa da divisaõ, se se quizerem ir acrescentando mais cifras ao dividendo, & continuando a repartiçaõ iraõ sahindo segũdos, terceiros, quartos, &c.

```
       2
   0  60
  034923
 0155355
14087000 |5|6
 2506755
   25067
```

NOTA II.

SE se repartir sómente quebrado por quebrado de que sahe inteiro, ou inteiro, & quebrado, ou sòmente quebrado, & sempre qualquer que sahir no quociente he o que pertence á unidade, se devem pello mesmo modo ajuntar cìfras ao numero dividendo, quando seu exponente for de mais baixo grao no nome que o divisor, atè que o daquelle iguale, ou vença o deste, & tirando o exponente do divisor do exponente do dividendo, se veja que exponente fica para a ultima letra da parte direita do quociente, & vindo deste exponente pellas mais letras do quociente para a maõ esquerda attribuindo a cada letra seu exponẽte, conforme o lugar em que cahe; se as letras se acabarem primeiro que se chegue ao exponente de primos, poremos cifras nos lugares das letras que faltaõ para os exponentes successivos até o de primos.

EXEMPLO.

REpartamos 2. terços por 4. prim. acrescentando hũa cifra ao 2. para se poder repartir fazem 20. quartos, que repartidos pellos 4. prim. sahem no quociente 5. terceiros; pello que pois faltaõ os exponentes de segundos, & primos; poremos cifras naquelles lugares, & serà o quebrado $\frac{005}{1000}$ terceiros pertẽcente à unidade;

dade; mas a cada hum dos quatro primos sahem 1. terceiro 2. quartos, 5. quintos.

Outro exemplo em que sahem inteiro, & quebrados.

REpartamos $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ q̄ he o mesmo que repartir pella Dizima 7.prim.5.seg. por 4.prim. sahe no quociente 1|875.pertencentes à unidade,& a cada hum dos 4. prim. sahe|1875.quartos isto he $\frac{1875}{10000}$.

Corollario.

DO sobreditto se colhe, q̄ se se multiplicaõ inteiros por inteiros geraõ-se inteiros, porque seus exponentes saõ cifras & sommadas fazem cifras,exponentes de inteiros, & assim inteiros por primos geraõ-se primos, inteiros por segundos resultaõ segundos; inteiros por terceiros resultaõ terceiros, & assim infinitamente porque a cifra exponente de numero inteiro junta com qualquer exponente naõ lhe acrescenta cousa algũa.

Mas se se multiplicarem primos por segundos resultaõ terceiros, porque unidos em hũa somma os exponentes fazem terceiros: semelhantemente segundos por quartos fazem sextos em razaõ do aggregado dos exponentes fazer sextos.

Semelhantemente se entende na divisaõ,devendose tirar o exponente do divisor do exponente do dividendo; porque se por exemplo se repartirem segundos por inteiros sahiraõ no quociẽte segundos em razaõ de que cifra exponente de inteiros no divisor tirada de segundos exponente do dividendo deixou o mesmo exponente de segundos; & se se repartirem quartos por primos sahiraõ no quociente terceiros, porque tirado o exponente de primos (que he o do divisor) do exponente de quartos,que he o do dividendo,restaõ terceiros exponente do quociente. Mas se o exponente do divisor for de mais alto grao, que o do dividendo se devem acrescentar tantas cifras ao numero dividendo, atè que seu ultimo exponente direito iguale,ou exceda ao exponente do divisor; para que este se possa tirar daquelle, como se disse no exemplo atraz.

NOTA.

O Uſo da Dizima, ſe vè tambem excellentemente practicado na approximaçaõ das raizes irracionaes; que aſſim ſe chamaõ,porque nunqua ſe podem exprimir em numeros certos, ainda que infinitamente ſe podem approximar mais à verdade; por tanto naquelles numeros,que naõ tem raizes quadras, cubicas,quadradas de quadradas, ſurdeſolidas, quadricubicas, ou cubiquadras,&c. poſto que haja diverſos modos de approximar as ſuas raizes, de que largamente trattaõ os Arithmeticos; todavia nenhum he mais ajuſtado, que mediante a Dizima; pois por ella ſe podem infinitamente approximar as dittas raizes com o meſmo modo,ou practica da extracçaõ.

E porque meu intento naõ he aqui enſinar a Arithmetica,porque ſupponho,que falo com os exercitados nella, ao menos até a extracçaõ das raizes quadra,& cubica,tocarei ſómente como pella Dizima ſe approximaõ infinitamente aquellas que não ſaõ racionaes,para que tambem neſta parte ſe veja a excellencia deſte invento,que todavia neſte ponto da approximaçaõ he jà muito antigo;pois ſe acha nos Autores que da Arithmetica eſcreveraõ, entre os modos de approximar tambem eſte, que he proprio, & particular da Dizima, poſto que entaõ ſenaõ reparava individualmente na origem donde ſe dirivava.

Supponho pois que ſe tira a raiz quadra por algum dos modos ordinarios dos Arithmeticos,& que pella não ter juſta o numero de que ſe tira,ſobeja algũa couſa da ultima repartiçaõ;para ſe ſaber pois quanto mais terá a raiz approximada, que o numero, q̃ tem ſahido no quociente,trattãdoſe de raiz quadra,ſe acreſcente ao numero dividendo da parte direita hum binario, ou par de cifras,& continuandoſe por diante a extracçaõ como ſe o dividendo aſſim acreſcentado foſſe hũ numero inteiro propoſto no principio para ſe delle tirar a raiz, & o numero que de novo acreſcer no quociente ſeraõ decimos,que acreſcem aos numeros dos inteiros do quociente.

E ſe ainda do dividendo aſſim acreſcentado ſobejar algũa couſa da repartiçaõ, ſe lhe acreſcente por diante da meſma parte direita outro binario de cifras, & continuando a operaçaõ acreſcerá outra letra no quociente,que junta com a primeira,que avia acreſ-

acreſcido fazem centavos de hum inteiro anexos ao numero dos inteiros do quociente, & aſſim continuando por diante acreſcentando binarios de cifras ao dividendo, iraõ ſahindo milleſſimos, dez milleſſimos, cem milleſſimos, mil milleſſimos, &c.

Em alguns calculos meus chegava ordinariamente a cem milleſſimos, quando eraõ endereçados a couſas, que pediaõ ſemelhante miudeza; aſſim como ſe acharaõ os Senos, Tangentes, & Secantes, & o Principe dos Aſtronomos Ptolemeo inveſtigou mediante extracçoens de raizes quadras irracionaes bem approximadas as grandezas dos corpos, & Spheras celeſtes.

Quando ſe tratta da extracçaõ da raiz cubica approximada, & tirada por algum dos modos dos Arithmeticos, ſe acreſcẽtaõ ternarios de cifras ao numero dividendo, aſſim como para a quadra ſe acreſcentaõ binarios; para a quadrada de quadrada, ou por outro nome quadriquadra ſe acreſcentaõ quaternarios; para a ſurdeſolida quinarios, para a quadricubica ſenarios, &c. cujas demonſtraçoens, & as propoſiçoẽs em que ſe fundaõ as extracçoẽs deſtas raizes pedem mais alta contemplaçaõ, como ſe pòde ver nos Autores que na Algebra foraõ primeiras luzes, Diophanto Alexandrino, Fr. Lucas de Burgo, Cardano, Tartaglia, o noſſo inſigne Pedro Nunes, Rafael Bombello, Clavio, Stevino, Vieta, Renato de Cartes, Alberto Gerardo, Renaldino, & outros.

Fim da Dizima.

TRIGONOMETRIA PRACTICA RECTILINEA

CAP. I.

Das noticias que devem preceder para a intelligencia, & uso da Trigonometria.

§. 1.

Que cousa sejaõ graos, minutos, & segundos.

REpartem os Mathematicos a circunferencia de qualquer circulo, ou seja grande, ou pequeno em 360. partes iguaes que se chamaõ graos: cada grao em 60. partes mais miudas que se chamaõ minutos: cada minuto em outras 60. ainda mais miudas q̃ se dizem segundos, & assim pordiante continuando com a mesma divisaõ sexagenaria que he de 60. em 60. minutos.

A razaõ que tiveraõ para a dividirem em 360. partes mais que em outro qualquer numero, he porque aquelle tem muitas partes que chamaõ aliquotas sem quebrado, a saber ametade, que saõ 180. gr. a terça-parte que saõ 120. a quarta-parte 90. a quinta 72 a sexta 60. a oitava 45. a nona 40. a decima 36. & outras muitas sem entrar quebrado.

Com o mesmo fundamento repartiràõ o grao em 60. minutos porque naõ querendo repartilo em outras 360. partes por ser divisaõ muito miuda para o grao, escolheràõ outro numero abaixo de 360. que tivesse tambem muitas partes aliquotas, & naõ acharaõ outro tanto a proposito como o num. 60. porque este tem ametade que saõ 30: terço que saõ 20. quarto que saõ 15. o quinto 12. o sexto 10. & outras partes sem quebrado.

§. 2.

Que cousa he angulo plano rectilineo, como se mede seu valor, & de suas especies.

ANgulo plano rectilineo segundo Euclides he a inclinaçaõ de duas linhas rectas que reciprocamente se tocaõ, & naõ jazem

jazem em direito como por exemplo a inclinaçaõ que a linha A B tem para a linha C B, ou C B para A B tocandose reciprocamente no ponto B, & naõ jazendo em direito hũa da outra, he o angulo A B C rectilineo. Fig. 1. Estampa 34.

Esta inclinaçaõ que hũa linha tem a outra pode ser mayor, ou menor, & daqui resultar mayor, ou menor angulo, a saber mais ou menos aberto, & a medida por onde se mede sua grandeza he o arco descripto do ponto angular intercepto entre os lados que formaõ o angulo: como o arco A C descripto do ponto B como de polo, he a medida do angulo A B C: porque quantos graos, & minutos, &c. tiver o ditto arco A C, de tantos se diz ser o angulo A B C & he o seu valor.

Para se saber pois o valor de cada angulo, ou do arco que o mede, como tambem os lados de hum Triangulo se inventou a Trigonometria, que he a doutrina da mediçaõ dos Triangulos de que trattamos na presente obra no tocante a practica, que he o de que mais se necessita para o uso das outras partes da Mathematica.

O angulo he de tres sortes, recto, agudo, & obtuso. O recto sempre consta de 90. gr. ou he medido pella quarta parte da circunferencia de hum circulo chamada Quadrante em que ha os dittos 90. graos. O agudo consta de menos graos que de 90, ou se mede por hum arco menor que Quadrante: O obtuso de mais de 90. gr. mas de menos que de 180. ou se mede por hum Arco mayor que Quadrante porém menor que semicirculo.

Semelhantemente se entende tudo o sobreditto acerca dos angulos Sphericos, de que diremos na Trigonometria Spherica em outro Trattado.

§. 3.

Que cousa seja Triangulo, & de suas especies.

TRiangulo he hũa fig. comprehendida de tres lados que juntamente comprehẽdem tres angulos que ha no Triangulo.

O Triangulo he de tres sortes, rectangulo, obtusangulo, acutangulo.

Triangulo rectangulo he, aquelle que tem hum angulo recto dos tres que nelle ha, como A B C que tem recto o angulo B. Fig. 2.

Trian-

Triangulo obtusangulo D E F, que tem obtuso o angulo E
Fig.3. Fig.4. Triangulo acutangulo G H I, que tem todos os tres angulos agudos.

O Triangulo rectilineo, que tiver angulo recto, naõ pòde ter outro recto, nem obtuso; & o que tiver angulo obtuso naõ pòde ter outro obtuso, nem recto, porque todos os tres angulos de qualquer Triangulo rectilineo saõ iguaes [r] a dous angulos rectos, ou 180. gr. como se dirá na segunda propriedade dos Triangulos no §. 8.

[r] 32. primi. Euclid.

Porém nos Sphericos he differente, porque os tres angulos de qualquer Triangulo Spherico sempre saõ [a] mayores que dous rectos, & menores que seis, como se dirá na Trigonometria Spherica.

[a] Regiom. 49. Clav. prop. 31. Triang. Spheric. & alij.

Os Triangulos se denominaõ tambem pellos lados; porque se tiver todos os tres lados iguaes se diz equilatero, ou isopleuro: se dous iguaes, & hũ desigual se diz Isosceles: se todos tres desiguaes se diz Scaleno.

§. 4.

Dos Senos, Tangentes, & Secantes.

PARA a intelligencia da Trigonometria se devem primeiro saber algũas cousas, que lhe pertencem, & de que se val, como saõ os Senos, Tangentes, & Secantes, & o mais que explicaremos.

Devese pois saber, que o fundamento principal de quasi todas as sciencias Mathematicas consiste em saber medir, & reduzir a numeros, os lados, & angulos de hum Triangulo, como se descubrirà pello discurso deste Compendio. Para conseguir este fim, pouco a pouco foraõ os antigos engenhosamente descubrindo varias proporçoens, & regras, formando hũa nova sciencia nomeada Trigonometria, reduzida hoje a summa perfeiçaõ.

Dividio pois o antiquissimo Hipparcho, & despois delle outros, entre os quaes saõ os principaes Mileo Romano, & Ptolemeo Egypcio, a circunferencia de qualquer circulo em 360. partes, a q̃ chamaraõ graos; cada grao em 60. min. cada minuto em 60. seg. &c. como dissemos no §. 1. Mas o diametro deste circulo em 120. partes,

partes, ou o ſemidiametro em 60. & conforme a iſto inveſtigou Ptolemeo as partes, que ſe continhaõ em qualquer linha, que ſubtendeſſe hum arco de 30. min. & de todas as mais partes de hum quadrante de circulo, que ſe venceſſem de meyo, a meyo grao, como por exemplo ſeja a circunferencia A B C D dividida em 360 gr. & o diametro A C ſe reparta em 120. partes, ou o ſemidiametro A E em 60. Lanceſe a linha A H que ſubtenda o arco A H imaginado de $\frac{1}{2}$ gr. por naõ confundir a fig. com partes mais miudas, & logo a linha A K que ſubtende o arco A K de hum gr. A R que ſubtende o arco A R de $1\frac{1}{2}$ gr. A F de 2. gr. &c. Achou pois Ptolemeo, & diſpoz em taboas no 1. do Almageſto, quantas partes daquellas de que o ſemidiametro A E contèm 60. havia em cada hũa recta das A H, A K, A R, A F, a que chamou Cordas, outros ſubtenſas, ou inſcriptas. Fig. 5.

Deſpois conhecendo outros que era couſa moleſta inveſtigar as Cordas de qualquer arco mayor, ou menor, que de 30, a 30, minutos em taes partes, quaes o ſemidiametro tiveſſe 60. por reſpeito de continuas multiplicaçoens, diviſoẽs, extracçoens de raizes, & outros calculos moleſtos de que tambem nascia difficuldade na mediçaõ dos Triangulos, viraõ que mais certa, miuda, & expeditamente ſe reſolveria o negocio, ſe o ſemidiametro foſſe dividido em mayor numero de partes que 60. & foraõ os primeiros, que o dividiraõ em 100000, & deſpois em 10000000, Georgio Purbachio, Joaõ de Regiomonte, & Pedro Appiano, por ſer numero de baſtantiſſima miudeza; & pureza, para os calculos, em cuja ſuppoſiçaõ foraõ inveſtigando as ametades das Cordas de qualquer arco em taes partes, quaes o ſemidiametro tiveſſe 10000000. por acharem que lhes ſervia de mais expedito uſo, q̃ inteiras, havendo jà eſtas ametades tomado o nome particular de Senos por inſtituiçaõ dos Arabes, q̃ primeiro viraõ darſe a meſma proporçaõ entre as Cordas, ou ſubtenſas, que entre os Senos que ſaõ ſuas ametades, & que mais facil, & expedito uſo davaõ os dittos Senos divididos em mayor numero, & partes mais miudas.

Mas o Seno em commum foi deſpois dividido em Seno total, Seno recto, Seno verſo, & Seno de complemento.

Seno total, ou Radio, ſe diz o ſemidiametro do circulo.

Seno recto ſe define a ametade da Corda que ſubtende o duplo do arco de que ſe diz Seno recto.

 Seja

Fig.6. Seja a linha A C B Corda do arco A K B por tanto a ametade A C da Corda A C B se diz Seno recto do arco A K que he a ametade do arco A K B ao qual subtendia a Corda A C B.

Outros definem Seno recto ser a linha perpendicular, que cahe de hum extremo do arco, de que se diz Seno recto, sobre o diametro do circulo, que passa pello outro extremo como a linha A C que cahe perpendicularmente do ponto A extremo do arco A K sobre o ponto C do diametro F E K que passa pello põto K outro extremo do arco A K; & pella mesma razaõ he tambem a ditta linha A C Seno recto do arco F H A; de modo que cada Seno recto o he de cada hum de dous arcos, que inteiraõ hum semicirculo.

Seno verso; ou sagitta se diz a linha C K que he a parte do diametro, que fica entre o extremo K do arco A K de que se diz Seno verso, & entre A C Seno recto do mesmo arco.

Seno de complemento se diz a linha A O que he Seno recto do arco A H complemẽto do arco K A. Cõplemento de hũ arco he o que lhe falta para 90. gr. ou quadrante de hum circulo; ou tambem o arco que passa de quadrante, qual he A H que he complemento do arco K A, pois aquelle he o que a este falta para inteirar o quadrante K A H ou tambem o arco H L he complemento do arco K H L por ser o que este passa de quadrante: semelhantemente o arco H M he complemento do arco K H M.

Outros por melhor distinçaõ chamaõ excesso ao complemento do arco mayor, que quadrante; como o arco H L he o excesso do arco K H L mayor que quadrante; & o arco H M, o excesso do arco K H M tambem mayor que quadrante; de modo que ao que a hum arco falta para inteirar hum quadrante chamaõ complemento; & ao que passa de quadrante chamaõ excesso. Isto fica assim com mais distinçaõ.

Tambem reciprocamente se se considerar a linha A O Seno recto do arco A H, serà a linha A C Seno do complemẽto do ditto arco A H que he o arco A K, & a linha O H Seno verso do arco A H.

He porém de advertir que qualquer dos sobredittos Senos, que o seja de hum arco, he tambem Seno do angulo a que esse arco subtende; por exemplo. O Seno A C que o he do arco A K, o fica tambem sendo do angulo A E K, de que este arco está descripto;

to; pois quantos graos tem o arco, de tantos se diz ser o angulo do qual como de cētro for descripto o ditto arco: assim mesmo C K serà Seno verso do angulo A E K, A O Seno recto do arco A H, & do angulo O E A, & tambem do angulo obtuso A E D pello ser do arco A K B D, que o subtende.

Achados os dittos Senos, delles colheraõ os modernos ultimamente com felicidade grande, outras linhas chamadas Tangentes, & Secantes, varias proporçoens entre ellas, & os Senos, & o modo de as dividir em semelhantes partes, de que o semidiametro tivesse 10000000; com que mais facilitaraõ o descobrimento dos lados, & angulos de qualquer Triangulo, que he todo o intento de tanto artificio.

He pois a Tangente de hum arco, ou angulo a linha que tocando o circulo na extremidade de hũ semidiametro a que seja perpendicular, & de hum arco menor que quadrante, fica entre o tal semidiametro, & entre a linha que do cētro do circulo se tira pello outro extremo do ditto arco atè a Tangente, qual he a linha A B Tāgente do arco E A & do angulo B C A; Mas a linha C B q̃ do centro C se estende atè cortar a Tāgente A B no ponto B se diz secante do ditto arco E A ou angulo B C A. Pella mesma razaõ a linha A F serà Tangente do arco A K, ou angulo F C A; & Fig. 7
a linha C F Secante do mesmo arco, ou angulo.

No que toca às Tangentes, & Secantes dos complementos se deve entēder na mesma fòrma dos Senos, a saber que assim como a linha E H he Seno recto do arco A E conforme a definiçaõ do Seno, & a linha A B sua Tāgente; C B sua Secante; assim a linha E I he Seno do arco E D, complemento do arco A E: mas a linha D G sua Tāgente; C G sua Secante. O mesmo se entende a respeito dos angulos A C E; D C E por ser este complemento daquelle, assim como o arco E D he complemento do arco A E.

§. 5.

Da applicaçaõ dos Senos, Tangentes, & Secantes.

SUpposto o ditto no §. 1. & achadas proporçoens varias entre os lados de hum triangulo, Senos Tangentes, & Secantes de seus angulos como se vè em Purbachio, Regiomōte, & outros, houve meyo de dadas tres quantidades de hum triangulo achar as outras tres,excepto quando sómente forem dados os tres angulos de hum Triãgulo rectilineo,pois entaõ senaõ podem saber os lados,mas sòmente a proporçaõ , que elles entre si tem , que será qual a dos Senos dos dittos angulos,porque como todo o Triãgulo tenha 6. quantidades, a saber 3. lados,& 3.angulos, dadas 3. se busca algũa de 4. linhas proporcionaes entre os lados,Senos, Tãgentes,& Secantes,de maneira que sempre,ou o lado buscado,ou o Seno do angulo buscado fique em quarto lugar, porque como dadas 4.linhas proporcionaes por exemplo,que assim se haja A B para D C como C F para B H;seja o rectangulo D F feito das intermedias D C, C F igual ao rectangulo A H composto das extremas A B, B H, & tambem dados 4. numeros proporcionaes a multiplicaçaõ dos intermedios,seja igual á multiplicaçaõ dos extremos, conheceraõ que de quatro quantidades proporcionaes, se as primeiras tres fossem sabidas,ou em linhas, ou em numeros, senaõ ignoraria a quarta,porque o producto da multiplicaçaõ da segunda pella terceira, repartido pella primeira daria a quarta, conforme Regiomonte na 19.do 1.de seus Triangulos,o que declaro com o seguinte.

Figur. 8.

EXEMPLO.

Fig. 9.

SEja o Triãgulo A B C,& nelle dados os lados A B de 50.palmos. B C de 60. & o angulo A de 40.gr. buscase o angulo B C A: pois por quanto conforme a proporçaõ 1.do 2. livro dos Triangulos de Regiomõte,& 1. dos triãgulos rectilineos de Clavio 3. do 1.de Ulacco 10. dos Triangulos de Magino,& por outros muitos,quaesquer dous lados tem entre si a mesma proporçaõ que os Senos dos angulos oppostos, seraõ proporcionaes,ou assim se haverá.

O lado B C de 60 palmos

Para o lado B A de 50

Como o Seno E F do angulo A dado de 40. graos que nas taboas se acha de 6427876.

Para o Seno H G do angulo B C A buscado. Pello que conforme o sobreditto, multiplicando o segundo numero 50.pello terceiro 6427876. & o producto 321393800. repartido pello primeiro 60.dará no quociente 5356563$\frac{1}{3}$ que he o Seno H G do angulo C inquirido; o qual numero buscado nas taboadas dos

Senos,

Senos, ou o mais proximo a elle, se acha responderemlhe 32. gr. 23. min. quasi, & de tantos proximamente diremos ser o angulo B C A buscado.

Isto supposto; devemos ter por assentado que quando na soluçaõ dos problemas triangulares houvermos de usar das taboas dos Senos Tãgentes, & Secantes, & nos propuzerem tres quantidades proporcionaes, se deve multiplicar a segũda pella terceira, & repartir o producto pella primeira, para que saya a quarta, ou seu Seno, Tangente, ou Secante, que he a operaçaõ da regra aurea, nomeada vulgarmente regra de tres.

Porém ainda despois de achadas as dittas proporçoens, & facilitado o uso da Trigonometria evitandose as difficuldades antigas, se deo em outra nova não pequena, que era o ser necessario, por obra da regra, aurea multiplicaremse dous numeros muito grandes hum por outro, & o producto repartirse por hum terceiro semelhante de que recrecia grande difficuldade, & trabalho na ditta operaçaõ; em tanto que com grande cuidado os modernos trabalharaõ por achar algum meyo, com que ou se evitasse, ou aliviasse o trabalho, & difficuldade. E sendo o primeiro Magino o que mais nisso trabalhou, & discubrio, ordenou os problemas do seu primeiro Movel de tal maneira, q̃ sẽpre no primeiro lugar da regra aurea ficasse o Seno todo; vendo que cõ isso aliviava, ou a mayor parte, ou ao menos ametade da operaçaõ, & trabalho; pois por ser o Seno todo 10000000. que he 1. com muitas cifras, & ficar servindo de divisor, não he necessario para por elle se dividir outro numero; mais que tirar tantas letras do dividendo da parte direita, quantas cifras houver no divisor como he notorio aos Arithmeticos, a qual traça evitou ao menos ametade do trabalho nas operaçoens.

Esta mesma difficuldade, & trabalho procurou evitar por outro caminho Nicolao Raymaro nos Triãgulos Sphericos com hũ Compendio engenhoso, a que chamou Prostapheresis (que significa igualaçaõ) com tanto que ficasse no primeiro lugar o Seno todo, o qual invento foi despois demonstrado, & ampliado por Clavio no Lemma 53. do Astrolabio, & por Magino noprimeiro Movel liv. 1. Theorema 33. & no livro. 2. pondo no primeiro lugar, naõ sò o Seno todo, mas qualquer outro num. de Tangente, ou Secante; se bem pellas muitas cautelas, de que necessita, naõ livra de embaraço, & moleſtia ao calculador; & por tanto naõ apontamos mais eſpecifica,& exemplificada noticia do ditto modo,paſſandonos ao admiravel dos Logarithmos de que cõmummente uſaõ os modernos em ſeus calculos.

§. 6.

Do admiravel invento dos Logarithmos.

SUppoſto o ditto nos §§. acima,& quãto procuraraõ os Mathematicos aliviar o trabalho, & embaraço da regra aurea exercitada em numeros taõ grãdes,como he nos Senos,Tãgentes, & Secantes a reſpeito do Seno todo dividido em 100000, ou em 10000000,foi o illuſtre Eſcocez Joaõ NeperoBaraõ de Merchiſtonio o primeiro,que glorioſamente entre varios modos bons,& excellentes achou hum ſuperior de abreviar, & facilitar o uſo da regra aurea por meyo de certos numeros, a que chamou Logarithmos, que da Algebra deduzio, & publicou no anno de 1620. reduzidos deſpois a melhor genero, & fòrma pello douto Henrique Briggio,ſe bem pello meſmo Nepero advertido. E porque o noſſo intento he trattar ſòmente do uſo dos dittos Logarithmos, de que ſò por agora neceſſitamos para a execuçaõ dos problemas que neſte compẽdio trattaremos, deixamos ſua primeira origem, & conſtrucçaõ,paſſando ſò a explicar,que couſa ſejaõ,& que effeito,& utilidade cauſem, & modo com que ſe applicaõ nos calculos dos triangulos rectilineos,& Sphericos,aſſim como apontamos dos Senos, Tangentes,& Secantes.

G

Numeros proporcionaes.	Log. A	Log. B	Log. C	Log. D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
256	9	13	29	11

K

Numeros proporcionaes.	Log. F	Log. L	Log. M	Log. N
1	4	3	8	47
3	6	7	14	42
9	8	11	20	37
27	10	15	26	32
81	12	19	32	27
243	14	23	38	22
729	16	27	44	17
2187	18	31	50	12
6561	20	35	56	07

Define pois Adriano Ulacco liv. 1. Trigonometriæ cap. 1. ſerẽ os Logarithmos huns numeros q̃ adjuntos aos proporcionaes obſervaõ entre ſi iguaes differenças, & que por tanto cõmodamẽte ſe podem chamar companheiros equidifferentes dos numeros proporcionaes, como por exemplo dados na taboa G os numeros continuamente proporcionaes 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c. poderemos ajuntarlhe por Logarithmos quaeſquer numeros dos aſſinalados com as letras A, B, C, D, que ſaõ numeros que ſe vaõ vencendo, ou diminuindo huns aos outros com igual exceſſo a ſaber os ſinalados com a letra A ſe vencem ſempre por 1, os da letra B por 1, os da letra C por tres: os da letra D ſe diminuem pellos meſmos 3. & pudera ſer por qualquer outro como foſſe ſempre com igual exceſſo, ou diminuiçaõ.

Semelhantemente na taboada K aos numeros proporcionaes da primeira coluna ſe podẽ applicar por Logarithmos quaeſquer dos numeros das colunas ſeguintes aſſinalados com as letras F, L, M, N, ou outros que mais aprazerem como ſe vençaõ, ou diminuaõ com igual exceſſo hum aos outros.

Iſto ſuppoſto; ſe deve ſaber que quando ſe daõ ſemelhantes quatro numeros, que ſe vencem huns, aos outros por igual exceſſo; os quaes ſe dizem eſtar em proporçaõ Arithmetica, por exemplo os numeros 3, 7, 11, 15, da coluna L que ſe vencem por 4. eſtes taes numeros tem tal propriedade que a ſomma dos dous extremos ſe iguala a ſomma dos dous intermedios; o que he demõſtrado por Jordano liv. 1. propoſiçaõ 3. & ſe vè manifeſtamente nos ſobredittos numeros; dos quaes o primeiro, & o quarto, que ſaõ 3, & 15. fazem 18. quanto tambem ſommados os dous intermedios 7. & 11.

Mas quando os numeros eſtaõ em proporçaõ geometrica, que he o meſmo, q̃ haverſe o ſegundo para o primeiro na meſma proporçaõ, que o quarto para o terceiro, ou o primeiro para o ſegũdo, que o terceiro para o quarto (poſto que do meſmo modo, ou de outro ſe haja o terceiro para o ſegundo, ou o ſegundo para o terceiro (como por exemplo os numeros 2, 4, 8, 16, em tal caſo o producto da multiplicaçaõ dos extremos he igual ao producto da dos intermedios conforme a 19. do 7. de Euclides, & diſſemos no §. 2. o que ſe vè dos ſobredittos numeros, porque multiplicãdo o extremo 2. pello outro 16. ſe geraõ 32. & os meſmos 32. da

mul-

multiplicação dos intermedios 4,& 8, o que se verà em todos os mais numeros desta sorte, como nos numeros 2;5;8;20, ou em 3; 4;9;12, como tambem nos numeros 3, 4, $5\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{9}$, & outros infinitos, que estejaõ em proporçaõ geometrica discreta, ou continua.

Assentado o sobreditto, vio Joaõ Nepero, que se em lugar dos Senos, Tangentes, & Secantes numeros, que estaõ em proporçaõ geometrica, & dos quaes dados 3. he necessario multiplicar o segundo pello terceiro, & o producto repartirse pello primeiro, para que saya o quarto, se puzessem outros que estivessem em progressaõ arithmetica, & dos quaes dados 3. se sommassem os dous ultimos, & da somma se tirasse o primeiro para que sahisse o quarto, se facilitava com grande excesso o uso da regra aurea por meyo dos taes numeros, por quanto ainda que fossem muito grãdes, como em sommalos se sommavaõ sòmẽte duas letras, naõ avia difficuldade, &o mesmo era no tirar do numero, que da somma se avia de diminuir; & assim inventou os Logarithmos que da Algebra deduzio para com elles por meyo da somma, & diminuiçaõ obrar facilmente o que com os Senos, Tangentes, & Secantes, difficultosamente se fazia por meyo de multiplicaçaõ, & divisaõ, & melhor se declararà com o seguinte exemplo.

Fig.10. Seja dado o Triangulo A K D no qual se supponhaõ sabidas tres cousas a saber o lado A K de 13528. palmos, pès, ou outra medida; & os angulos A D K de 32. gr. 20. min. A K D 43. gr. 37. min. buscasse o lado A D.

Pois por quanto conforme o problema 4. cap. 4. liv. 1. de Ulacco: assi se ha

O Seno do angulo A D K de 32. gr. 20. min. opposto ao lado dado A K

Para o Seno do angulo A K D de 43. gr. 37. min. opposto ao lado buscado A D.

Como o lado dado A K de 13528.

Para o lado buscado A D.

Para se achar o lado A D pello modo antigo dos Senos se deviaõ buscar nas taboas, & disporemse pello seguinte modo: a saber.

O Seno de 32. gr. 20. min. que he	53484.41
O Seno de 43. gr, 37. min. que he	68983.02.
O lado A K de	13528

E multiplicando o ſegundo numero 6898302. pello terceiro 13528. & dividindoſe o producto 93320229456. pello primeiro 5348441. para que ſahiſſe o 4. 17448. quaſi pello lado A D buſcado.

Mas conforme o modo Logarithmico dos modernos ſe devẽ buſcar nas taboas, & diſpor pella ordem ſeguinte a ſaber.

O Logarithmo de 32.gr.20.min.que he ——	9,7282271
O Logarithmo de 43.gr.37.min. que he ——	9,8387421
O Logarithmo de 13528.que he ——	4,1312335
E ſommado o ſegundo num. com o terceiro, & da ſomma ——	13,9699756
Tirarſe o primeiro numero ——	9,7282271
Para que fique o quarto numero ——	4,2417485

Logarithmo de 17448. quaſi, quantidade do lado buſcado A D.

E aſſim cõ ſumma facilidade por meyo dos Logarithmos ſommando, & diminuindo ſe reſolve o calculo dos triangulos rectilineos, & Sphericos, o que antigamente ſe fazia multiplicando, & repartindo com grande difficuldade, & trabalho por meyo dos Senos, Tangentes, & Secantes.

Por onde deve ficar aſſentado, que dandoſe 3. quantidades, ou numeros proporcionaes, & uſandoſe das taboas dos Senos, Tangentes, & Secantes, ſe deve multiplicar o numero, que eſtiver em ſegundo lugar pello terceiro, & o producto repartirſe pello primeiro, para que ſaya o quarto, ou ſeu Seno, Tangente, ou Secãte.

Mas uſandoſe de Logarithmos ſe devem ſommar os Logarithmos do ſegundo, & terceiro termo, & da ſomma tirarſe o Logarithmo do primeiro para que fique o Logarithmo do quarto, como ſe tem ditto.

Ou ſe devem ſommar os Logarithmos do ſegundo, & terceiro com o complemento arithmetico do primeiro, & da ſomma tirar o radio, ou duplo, ou triplo do radio cõforme as vezes que o Radio ſe puder tirar ſegundo a grandeza da ſomma, conforme ſe verà em alguns caſos dos Triangulos Sphericos mais eſpecialmẽte. Vejaſe a Nota ſegunda deſpois do ſegundo Scholio ao probl. 1. com que ficarà o Logarithmo do quarto. Complemẽto arithmetico ſe diz o que ao primeiro falta para igualar o Logarithmo do Radio, ou o duplo, ou triplo Logarithmo do Radio, & ſe acha vendo o que a cada hũa das letras do primeiro Logarithmo falta para 9. começandose da parte esquerda, & sò na ultima letra da parte direita se verá a differença para 10; advirtindo, que quando o primeiro numero for Logarithmo do Radio não tem complemento arithmetico, o que escuso mais declarar, & outras curiosidades, & abreviaturas nesta materia; porque o sobreditto he o mais essencial, & o que necessario nos he para o uso dos problemas trigonometricos.

§. 7.

Da declaraçaõ das taboas dos Logarithmos.

A Disposiçaõ das taboas dos Logarithmos he varia segundo o capricho de seus Autores; como se vé das de Keplero no Trattado, que intitula, Chilias Logarithmorum; das de Frobenio na sua Clavis trigonometrica; de Laurencio Eichtadio na sua Pædia Astronomica; de Fr. Bonaventura Cavalerio no seu directorio general; & de outros que hei visto, entre os quaes, naõ trattando das de Henrique Briggio por serem nellas applicados os Logarithmos a partes centessimas de graos, traça, ainda que boa que naõ está em uso, me parece havelas melhor disposto Henrique Gellibrando; & Adriano Ulacco que saõ as de que cõmummente uso em meus calculos; principalmente das de Ulacco por trazer nellas Logarithmos, naõ sò para cada minuto de grao, mas para cada sexta parte de minuto que saõ 10. seg. & serem dispostas com muito bom, & claro methodo.

Constaõ pois as dittas taboas de Ulacco em cada pagina de onze colunas, na primeira das quaes da parte esquerda estaõ os minutos de hum a hum: na segunda os segundos de 10. a 10. & em cima destas duas colunas os graos, a que se devem ajuntar os minutos, & segundos das dittas colunas: na terceira vaõ os Logarithmos respondentes aos Senos dos taes graos, minutos, & segundos da primeira, & segunda coluna: na quarta as differenças de entre cada dous proximos Logarithmos da terceira coluna, q̃ servem para quando se quer tirar algũa parte proporcional: na quinta os Logarithmos dos Senos do complemento: na sexta as differenças entre elles: na septima os Logarithmos das Tangentes: na octava suas differenças: na nona os Logarithmos das Tangẽtes do do cõplemẽto: na decima, & undecima minutos, & ſegund. com outros graos ao pè dellas de 45. gr. para cima conforme os quaes ſe buſcaõ os Logarithmos dos dittos 45. gr. para cima, pellos titulos, que eſtaõ no couce de cada taboada, como da demonſtraçaõ junta ſe vè. E porque eſtas couſas melhor ſe explicaõ com a praćtica, do que com muitas palavras, a ella remetto a plena intelligẽcia com o uſo, & exercicio, que das dittas taboas teremos, como de outras, q̃ ſaõ dos Logarithmos dos numeros abſolutos, & vaõ no fim do livro apartadas; nos quaes vaõ por ſua ordem em colunas os numeros ordinarios de 1. atè 10000, 20000, ou 100000, conforme a quantidade que cada Autor fabricou; & tomou de outros; & á margem dos dittos numeros vaõ poſtos os Logarithmos, que lhe reſpondem. De hũa, & outra taboada ſe vé melhor o exemplo no ditto livro de Ulacco, que vulgarmente exta.

As taboas de Henrique Gellibrando ſaõ quaſi na meſma fòrma, poſto que naõ com tanta miudeza, ſe bem com baſtante, porque ſaõ fabricadas ſòmente por graos, & minutos, nas quaes eſtaõ tambem os Senos, Tangentes, & Secantes naturaes: cada pagina contèm 6. colunas pella maneira ſeguinte; a ſaber em cima de cada pagina vaõ poſtos os graos: na primeira coluna da maõ eſquerda os minutos adjacentes aos dittos graos: na ſegunda coluna os Senos que lhes reſpondem: na terceira as Tangentes: na quarta as Secantes: na quinta os Logarithmos dos Senos: na ſexta os Logarithmos das Tangentes, como ſe póde ver das dittas taboas de Gellibrando em varias impreſſoens, que dellas há.

As ſobredittas taboas naõ trazem Logarithmos das Secantes, porque ſem elles ſe pòde executar o calculo de todos os Triangulos rećtilineos, & Sphericos; ſe bem alguns os trazem com mais abundancia, & mayor variedade como Frobenio na ſua Clave trigonometrica, Bonaventura Cavalerio no ſeu Direćtorio, & outros ſoltando os problemas por varios caminhos; em alguns dos quaes ſe val dos Logarithmos das Secantes.

E poſto que nas dittas taboas os naõ haja daremos em ſeu lugar hũa regra facilima com que logo ſe achem pellos Logarithmos dos Senos, & Tangentes.

§. 8.

De algũas suppoſiçoens, & propriedades mais insignes dos Triangulos planos rectilineos, neceſsarias para melhor intelligẽcia da Trigonometria, & seu uſo.

SUPPOSIC,OENS

1.

EM todo o Triangulo qualquer lado ſe pòde ſuppor por Baſe, ſem embargo, que no Triangulo Iſoſceles ſe coſtumem chamar lados os dous iguaes, & Baſe o lado que os ſuſtenta.

2.

Em todo o Triangulo ſe chama perpendicular, perpendiculo, ou catheto a linha, que cahindo de qualquer dos angulos cortar em angulos rectos o lado oppoſto produzido, ſe neceſſario for; como no Triangulo A B C a linha B E, que deſcendo do angulo B corta o lado oppoſto A C em angulos rectos no ponto E, cortãdo tambem a área do Triangulo.

Mas ſe o angulo A C B contermino á Baſe A C for obtuſo, cahirà a perpendicular B E fòra do Triangulo no lado A C produzido até E, & ſe for recto o angulo da Baſe, coincidirá a perpendicular B E com o meſmo lado B C do Triangulo.

3.

Caſo, ou ſegmento da Baſe ſe chama qualquer das porçoens da Baſe interpoſta entre a perpendicular, & qualquer dos lados; a ſaber [r] hum ſegmento A E, outro C E.

r Fig. 11.

Porèm deveſe advertir que quando a perpendicular cahe fòra do Triangulo na Baſe produzida, como na fig. 12. [a] por hũ ſegmento ſe entende a Baſe continuada atè a perpendicular, qual he a linha A C E, por outro, o exceſſo C E entre o lado B C do Triangulo, & a perpendicular B E. Aſſim o toma Regiomonte, & com elle Clavio, & todos. Se a perpendicular coincidir com hũ lado do Triangulo, como na 13. [a] fig. naõ ha emtaõ ſegmentos da Baſe. Tudo iſto apontei, porque he neceſſario para a intelligẽcia do acreſcentamento, que farei ao theorema 5. adiante propoſto.

a Fig. 12

Fig. 12.

a Figur. 3.