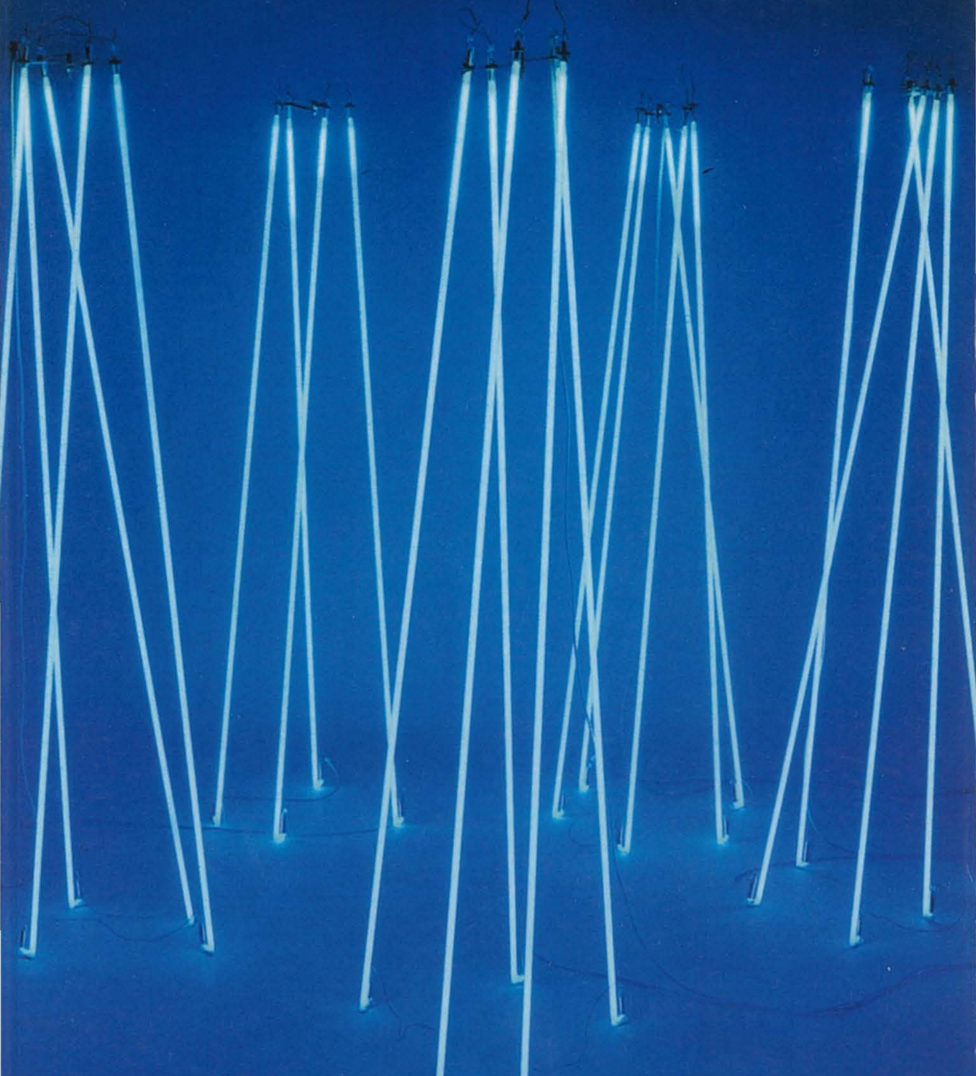
CIÊNCIA ABERTA

Fronteiras da Ciência

Desenvolvimentos Recentes – Desafios Futuros

RUI FAUSTO • CARLOS FIOLHAIS • JOÃO FILIPE QUEIRÓ
Coordenadores



gradiva • Imprensa da Universidade de Coimbra

(Página deixada propositadamente em branco)

RUI FAUSTO, CARLOS FIOLHAIS
JOÃO FILIPE QUEIRÓ
Coordenadores

FRONTEIRAS DA CIÊNCIA

Desenvolvimentos Recentes
Desafios Futuros

gradiva

Imprensa da Universidade de Coimbra

© *Gradiva – Publicações, L.da / Imprensa da Universidade de Coimbra*, 2003
Coordenação editorial: *Rui Fausto, Carlos Fiolhais* e *João Filipe Queiró*
Tradução: *Jean Burrows, Vivien Burrows, Rui Fausto, Carlos Fiolhais* e *João Filipe Queiró*
Revisão do texto: *Isabel Pedrome*
Capa: *António Barros* [Imprensa da Universidade. Coimbra], sobre imagem de «Águas Vivas», escultura de *Silvestre Pestana*, 2001
Foto: *António Alves;* Infografia: *ESTÍMULUS* [*design*]; Cortesia: *Galeria Alvarez-Arte Contemporânea*
Paginação: *António Resende* e *Paula Isabel Jorge*

Impressão e acabamento: *G.C. – Gráfica de Coimbra, L.da*
Reservados os direitos para Portugal por:
Gradiva – Publicações, L.da e *Imprensa da Universidade de Coimbra*

Gradiva – Publicações, L.da
Rua Almeida e Sousa, 21, r/c, esq.• 1399-041 Lisboa
Telefs. 21 397 40 67/8 • 21 397 13 57 • 21 395 34 70
Fax 21 395 34 71 • Email: gradiva@ip.pt
URL: http://www.gradiva.pt

Imprensa da Universidade de Coimbra
Rua Antero de Quental, 195 • 3000-033 Coimbra
Telefs. 351 239 85 31 10
Fax 351 239 85 31 19 • e-mail: fjrpress@ci.uc.pt
URL: http://www.imp.uc.pt

ISBN: *972-662-923-3*
1.ª edição: *Agosto de 2003*
Depósito legal n.º *199 463/2003*

OBRA PUBLICADA COM O PATROCÍNIO DE:
FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
CAIXA GERAL DE DEPÓSITOS

Benoît B. Mandelbrot
Yale University
New Haven
E. U. A.

Fractais

Os fractais são uma família de formas geométricas, e eu acredito que para se poderem compreender as formas geométricas precisamos de as ver. Tem sido muitas vezes esquecido que a geometria *precisa* de ter uma componente visual, e penso que em muitos casos esta omissão se tem revelado perigosa. Por isso, irei apresentar-vos um grande número de *slides*[1].

Deixem-me, no entanto, começar por apresentar uma espécie de resumo sem *slides* e fazer uma breve introdução geral sobre o âmbito da geometria fractal. Para mim, a geometria fractal constitui uma base geométrica de trabalho posicionada entre a ordem geométrica excessiva

---

[1] Infelizmente é impossível reproduzir nesta versão escrita todos os *slides* que normalmente apresento numa conferência, por isso o texto foi adaptado para se ajustar à utilização de um número consideravelmente menor de figuras. É também impossível integrar aqui a videocassete que utilizei durante a minha exposição. Esta videocassete, preparada por mim e pelo compositor Charles Wuorinen, foi apresentada pela primeira vez em Abril de 1990 no Museu Guggenheim em Nova Iorque, durante um evento subordinado ao tema «Fractais e música», e mais tarde, em 1992, no Allice Tully Hall do Lincoln Center, na mesma cidade. Constitui um meio muito conveniente de mostrar um grande número de fractais num curto intervalo de tempo.

de Euclides e o caos geométrico da matemática geral. Baseia-se numa forma de simetria que tinha sido anteriormente pouco utilizada e valorizada, nomeadamente a auto-semelhança, ou alguma invariância mais geral à contracção ou ampliação.

A geometria fractal pode ser convenientemente vista como uma linguagem, e tem provado o seu valor através da sua utilidade. A sua utilização na arte e na matemática pura, sem qualquer aplicação prática, pode considerar-se *poética*. O seu uso em várias áreas onde se estudam os materiais e noutros domínios da engenharia oferece exemplos de *prosa prática*. A utilização em física teórica, especialmente em conjunto com as equações fundamentais da física matemática, combina *poesia* com *prosa erudita*. Alguns dos problemas que podem ser analisados através da geometria fractal envolvem mistérios antigos, alguns deles já conhecidos do homem primitivo, outros mencionados na Bíblia, e outros ainda familiares a todos os artistas que se dedicam a estudar as formas naturais, em especial os paisagistas.

Feitos estes esclarecimentos preliminares, deixem-me então entrar nos detalhes. Antes, porém, gostaria de referir uma passagem maravilhosa que Galileu escreveu na alvorada da ciência: *A filosofia está escrita neste grande livro — estou a falar do universo — que se nos oferece constantemente para contemplação, mas que não pode ser lido até termos aprendido a sua linguagem e termos ficado familiarizados com os símbolos em que está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática, e os símbolos usados são triângulos, círculos e outras formas geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra nele contida — sem as quais nos moveremos em vão num labirinto escuro.* (Galileu Galilei, *Il Saggiatore*, 1623).

Todos sabemos que a mecânica e o cálculo e, consequentemente, toda a ciência quantitativa foram construídos com base nestes símbolos, e todos sabemos que estes símbolos pertencem à geometria euclidiana. Além disso, todos concordamos com Galileu quando este afirma que esta geometria é necessária para descrever o mundo que nos rodeia, a começar pelo movimento dos planetas e a queda de pedras na Terra.

Mas será ela suficiente? Para responder a esta questão, concentremo-nos na parte do universo que vemos na nossa vida quotidiana. Os prédios modernos que se assemelham a caixotes são cubos ou paralelepípedos. Uma boa ardósia é plana. As mesas de qualidade são planas e têm, vulgarmente, esquinas direitas ou arredondadas. De um modo geral, os produtos do trabalho do homem, do engenheiro e do construtor são planos, redondos ou seguem outras formas muito simples da geometria clássica que se aprende na escola.

Pelo contrário, um grande número de formas naturais — por exemplo as formas das montanhas, de nuvens, das pedras partidas e das árvores — são demasiado complexas para a geometria euclidiana. As montanhas não são cones. As nuvens não são esferas. As costas das ilhas não são círculos. Os rios não correm em linha recta. Assim, se quisermos estender a aplicação da ciência ao estudo destes aspectos da natureza, torna-se necessário utilizar uma ferramenta mais elaborada que a geometria euclidiana.

De facto, hoje em dia existe uma geometria capaz de incluir montanhas e nuvens. Eu fui capaz de a compor na sua forma geral em 1975, mas ela integra um grande número de peças que já existiam desde há muito tempo, embora dispersas. Como tudo em ciência, esta nova geometria tem raízes muito, muito profundas e longas. Deixem-me então apresentar alguns dos trabalhos que ela pode produzir.

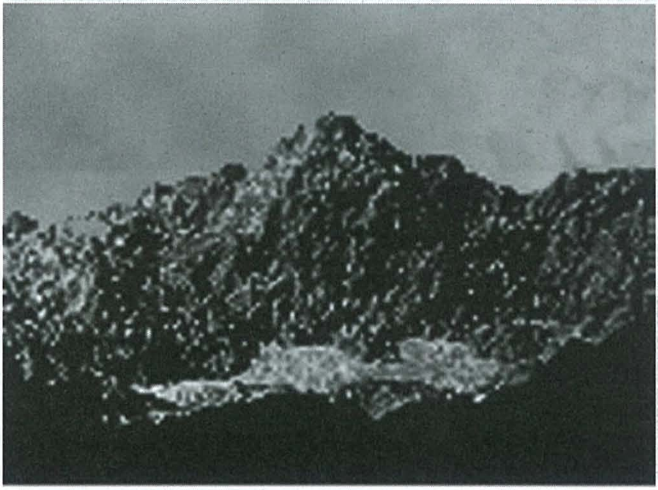


Fig. 1 — Paisagem fractal que nunca existiu (R. F. Voss)

A figura 1 parece mostrar uma montanha real, mas na verdade não se trata nem de uma fotografia, nem de uma pintura. É uma falsificação matemática, uma entidade construída num computador; baseia-se exclusivamente numa fórmula matemática da geometria fractal. O mesmo acontece com a falsificação de uma nuvem que se apresenta na figura 2.

Uma característica muito interessante e muito importante das figuras 1 e 2 é que ambas constituem adaptações de fórmulas que eram já conhecidas da matemática pura. Graças à geometria fractal, vários objectos matemáticos que eram considerados muito afastados da física tornaram-se as ferramentas adequadas para o estudo da natureza. Regressarei a este assunto mais adiante.

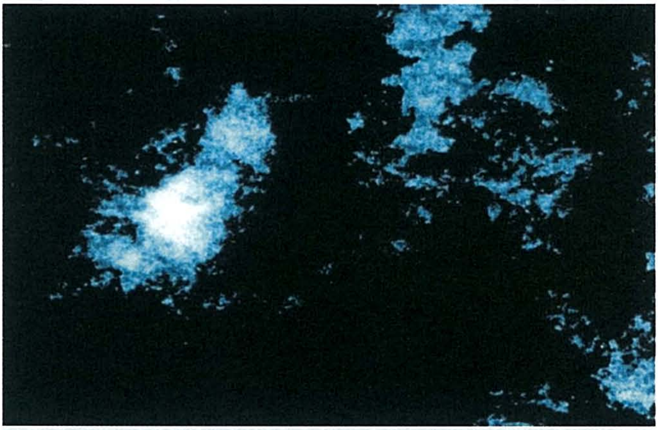


Fig. 2 — Formação de nuvens que nunca existiu (S. Lovejoy e B. B. Mandelbrot)

A simulação fractal do relevo teve um sucesso surpreendente. Foi usada, por exemplo, no filme *Star Trek II: The Wrath of Khan* (*O Caminho das Estrelas II: A Ira de Khan*), uma das obras-primas do cineasta americano George Lucas. Muitos viram, mas muito poucos se aperceberam, sem para tal terem sido alertados, de que o novo planeta que surge nas sequências do *Génesis* neste filme é um fractal. Se o pudesse mostrar aqui, veriam que esse fractal possui características peculiares (super auto--estradas e quadrículas), que se ficaram a dever ao facto de a *Lucasfilm* ter introduzido uma simplificação no processo de cálculo para que este pudesse fazer-se de uma forma suficientemente rápida. Mas não precisamos de nos demorar a olhar para as imperfeições. É de longe mais interessante o facto de os filmes que incluem fractais criarem uma ponte entre duas actividades que nunca se esperaria virem a encontrar-se, a matemática e a física, por um lado, e a arte popular, por outro.

Numa perspectiva mais geral, uma característica dos fractais que inicialmente considerei muito surpreendente e que continua a ser uma fonte de admiração, é que as pessoas lhes respondem emocionalmente de uma forma muito intensa. Podem gostar ou não gostar deles, mas, em qualquer dos casos, esta emoção é completamente diferente do aborrecimento que a maioria das pessoas exprime relativamente à geometria clássica. Deixem--me salientar que jamais direi alguma coisa depreciativa sobre a geometria de Euclides; na realidade adoro-a. Foi uma parte importante da minha vida enquanto criança e estudante; na verdade, a razão principal por que sobrevivi academicamente apesar da minha escolaridade caótica foi ter sido sempre capaz de usar a intuição geométrica para superar a minha falta de habilidade para manipular as fórmulas matemáticas. Mas todos sabemos por experiência própria que quase toda a gente, excepto os geómetras profissionais, se referem a Euclides como frio e seco. As formas fractais são exactamente tão geométricas como as de Euclides, apesar de provocarem emoções que não se julgava que a geometria pudesse provocar.

Vou referir-me agora brevemente ao caos determinístico. Tenho aqui de mencionar alguns aspectos fundamentais deste assunto. A geometria própria do caos determinístico é igual à geometria própria das montanhas e das nuvens. O facto de apenas precisarmos de *uma* nova geometria é realmente maravilhoso, porque poderiam ser precisas *várias* para além da euclidiana. Mas tal não acontece. A geometria fractal desempenha ambos os papéis. Ela é não só a linguagem adequada para descrever a forma das montanhas e das nuvens, mas é também a linguagem adequada para considerar todos os aspectos geométricos do caos.

Eu próprio dediquei muito esforço ao estudo do caos determinístico e gostaria de vos mostrar alguns exemplos de formas que pude encontrar neste contexto.

A figura 3 é um fragmento muito ampliado de um conjunto a que foi dado o meu nome. Este fragmento do conjunto de Mandelbrot foi ampliado por um factor igual ao número de Avogadro, que é cerca de 10^{23}. Porque é que foi escolhido este número particular? Porque é um número grande muito interessante[2], e uma ampliação tão grande como esta proporcionou uma excelente oportunidade para testar a aritmética de precisão quádrupla dos computadores IBM há alguns anos (ela passou o

[2] O número de Avogadro ($6{,}022 \times 10^{23}$) é igual ao número de partículas de um gás contidas num volume de aproximadamente 22,4 litros, em condições de pressão e temperatura normais (1 atmosfera e 0 °C).

teste; é muito engraçado poder justificar diversão e ciência pura com base em objectivos específicos tão terra-a-terra). Se todo o conjunto de Mandelbrot tivesse sido desenhado na mesma escala, o seu fim situar-se-ia algures nas proximidades da estrela Sírio.

A forma do «escaravelho» negro situado perto do centro é muito semelhante à do centro branco da figura 12, que mostra a forma de todo o conjunto de Mandelbrot. Encontrar «escaravelhos» por toda a parte é um sinal de ordenamento geométrico. Por outro lado, o padrão circundante não está presente no conjunto inteiro, dependendo muito do ponto onde o *zoom* é focado (isto é um sinal de variedade e mesmo de caos). Voltarei a este conjunto mais tarde.

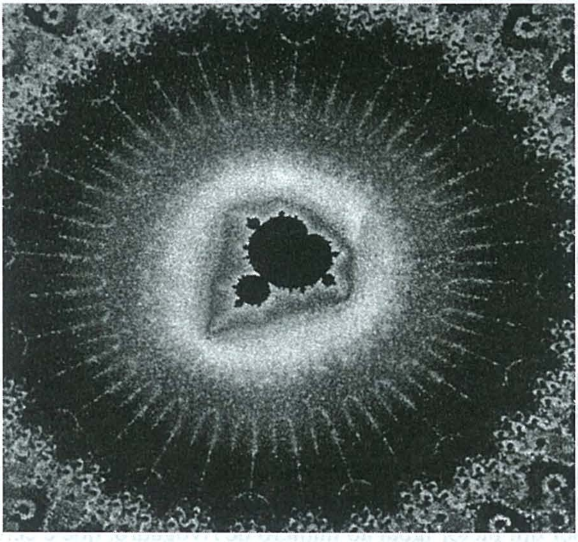


Fig. 3 — Fragmento muito pequeno do conjunto de Mandelbrot (R. F. Voss)

A forma da figura 4 é uma variante do conjunto de Mandelbrot que corresponde a uma fórmula ligeiramente diferente. Esta forma é aqui reproduzida apenas para referir um aspecto verdadeiramente espantoso e extraordinariamente agradável da geometria fractal. Os fractais são percepcionados por muita gente como objectos belos. No entanto, estas formas foram inicialmente desenvolvidas com propósitos científicos, com o propósito de perceber como o mundo é formado tanto estática (em termos de montanhas) como dinamicamente (em termos de caos, atractores estranhos, etc.). Por outras palavras, as formas apresentadas nas figuras 1 a 4 *não pretendiam* ser bonitas. Isto levanta muitas questões. A questão mais importante é simplesmente *porque são os fractais bonitos?* Este facto deve dizer-nos algo sobre o nosso mecanismo de percepção visual.

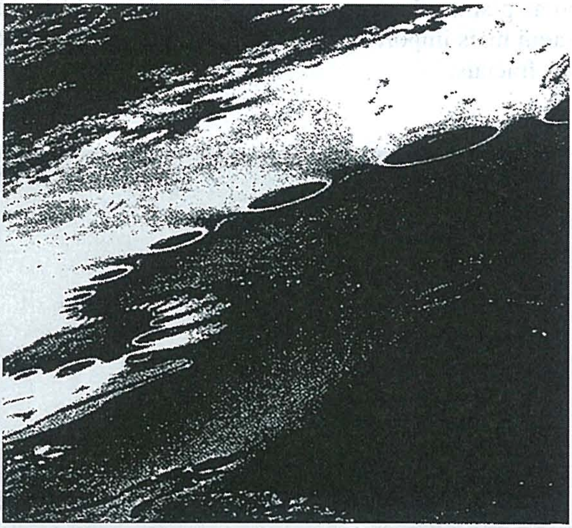


Fig. 4 — Pequeno fragmento do conjunto de Mandelbrot modificado (B. B. Mandelbrot)

Quis começar com as figuras 1 a 4 porque a sua estrutura é muito rica. Mas exagerei. A sua estrutura é de facto tão rica que estas figuras não podem ser usadas para explicar a característica principal de todos os fractais. O princípio fundamental subjacente a este tipo de objectos é evidenciado mais claramente na figura 5, que — para variar — reproduz uma fotografia real de um objecto real. Poderão reconhecer que se trata de uma variedade de couve-flor, chamada *Romanesco*. Cada rebento assume uma forma exactamente igual à do objecto inteiro e, por seu lado, cada rebento se subdivide em rebentos menores idênticos aos anteriores, e por aí adiante. Posso dizer-vos que a mesma estrutura se repete através de cinco níveis de crescimento da couve-flor que podem ser separados à mão e observados a olho nu e de muitos mais que apenas se podem observar recorrendo à lupa ou ao microscópio.

Até há pouco tempo os cientistas não prestavam muita atenção a esta propriedade «hierárquica». A sua primeira reacção a este tipo de formas botânicas não era a observação dos rebentos dentro dos rebentos, mas das espirais formadas pelos rebentos. Este interesse levou ao conhecimento detalhado da relação entre a *média de ouro* (e a série de Fibonacci) e o modo como as plantas formam espirais. Mas a estrutura hierárquica dos rebentos é aqui mais importante para nós, porque está relacionada com a essência dos fractais.

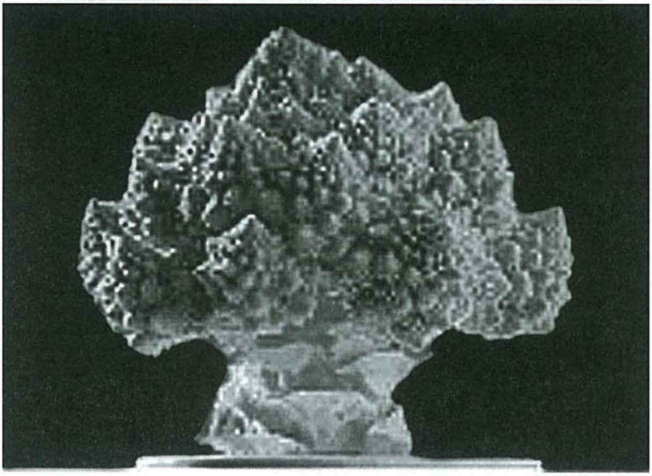


Fig. 5 — Couve-flor Romanesco *(R. Ishikawa)*

Antes de continuarmos e esclarecermos *o que é* um fractal, vejamos aquilo que um fractal *não é*. Tomemos uma forma geométrica e examinemo-la cada vez com maior detalhe. Isto é, peguemos em partes progressivamente menores em torno de um ponto P e permitamos que cada uma delas se dilate até atingir um tamanho previamente estipulado.

Se a nossa forma pertence à geometria padrão, é bem conhecido que as ampliações assumem formas progressivamente mais suaves. Por exemplo, podemos dizer que se espera que uma curva seja «atraída», por ampliação, para uma linha recta (definindo assim a tangente à curva no ponto P). O termo *atractor* é emprestado pela dinâmica e pela teoria das probabilidades. Esperamos também que uma curva seja atraída, por ampliação, para um plano (definindo deste modo um plano tangente à curva no ponto P).

De uma forma mais geral, podemos dizer que praticamente qualquer estrutura local de uma forma padrão converge, por dilatação, para um dos poucos «atractores universais» existentes. O adjectivo grandioso — *universal* — é emprestado pela física moderna. Um exemplo de excepção a esta regra acontece quando P é um ponto duplo de uma curva; a curva nas proximidades de P é então atraída para duas linhas que se interceptam e possui duas tangentes; mas os pontos duplos são raros nas curvas vulgares.

As formas que temos vindo a considerar não são localmente lineares. De facto, elas podem ser ditas «geometricamente caóticas» até que se prove o contrário. Num local completamente diferente da grande cidade da ciência, um tipo de caos geométrico tornou-se conhecido entre 1875 e 1925. Embora num contexto diferente da realidade natural, os matemáticos ficaram a saber que a rugosidade das formas geométricas *não tem necessariamente* de desaparecer quando estas são observadas em maior detalhe. É perfeitamente possível que ela permaneça constante ou que oscile para sempre para cima e para baixo. Contudo, o enraizamento da geometria padrão era tão forte que estas formas não tradicionais não foram reconhecidas como modelos da natureza. Muito pelo contrário, foram consideradas monstruosas e patológicas. No entanto, depois da descoberta destes conjuntos geométricos a matemática evoluiu para uma generalização progressivamente maior.

A ciência tem constantemente de navegar entre dois perigos: a falta e o excesso de generalidade. Entre os dois extremos é sempre necessário encontrar o ponto de equilíbrio certo, de forma a fazer as coisas correctamente. Poderá então existir um território intermédio, onde prevalece o caos geométrico «organizado» ou «ordenado», entre os extremos da ordem geométrica excessiva de Euclides e do caos geométrico das matemáticas mais gerais? A ambição da geometria fractal consiste precisamente em facultar-nos este território intermédio.

A razão pela qual os fractais são mais especiais do que outras formas mais gerais da matemática é serem caracterizados pelas chamadas *simetrias* invariantes relativamente à dilatação e/ou contracção. Genericamente, os fractais matemáticos ou naturais são formas cuja rugosidade e fragmentação *não* tendem a anular-se *nem* a oscilar, mas *permanecem essencialmente iguais* à medida que aproximamos cada vez mais o plano de observação e aumentamos a sua resolução. Neles, a estrutura de cada peça encerra a chave para a totalidade da estrutura.

A afirmação anterior é clarificada e ilustrada na figura 6, que representa uma forma muitíssimo mais simples que as apresentadas nas figuras 1 a 5. Por graça, chamei-lhe *entrançado de Sierpinski*[3], e a piada pegou.

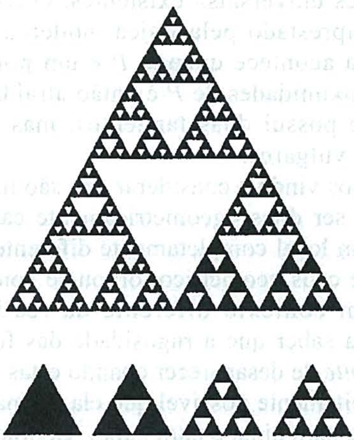


Fig. 6 — Entrançado de Sierpinski. *Fases iniciais e mais avançadas de construção*

Os quatro pequenos diagramas da figura 6 mostram o ponto de partida para a construção do objecto, enquanto o diagrama maior mostra a figura numa fase de construção mais avançada. A operação básica de construção consiste em dividir um dado triângulo (a negro) em quatro triângulos menores iguais, e em apagar (branquear) seguidamente o triângulo central. Esta operação é inicialmente executada no triângulo de lado unitário totalmente negro a seguir e três triângulos negros remanescentes de lado 1/2. O processo continua, seguindo um padrão designado por *eliminação recursiva*, que é extensamente utilizado na construção de fractais. A

---

[3] Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi um distinto matemático polaco, cujo trabalho pioneiro muito contribuiu para a afirmação e desenvolvimento da teoria dos números e da teoria dos conjuntos.

substituição recursiva e a *adição recursiva* (que encontraremos brevemente), bem como a *multiplicação recursiva* (que excede o âmbito desta conferência) são padrões relacionados com este.

Tomemos então o objecto fractal e executemos sobre ele uma redução linear isotrópica, cuja razão é a mesma em todas as direcções — nomeadamente 1/2 — e cujo ponto fixo é qualquer um dos três vértices do triângulo que circunscreve o objecto. Esta transformação é conhecida por *semelhança* (ou, mais precisamente, *homotetia*). Examinando o desenho maior, correspondente a um estágio mais avançado de construção da forma fractal, é evidente que cada uma das três formas menores se pode sobrepor exactamente à forma resultante desta operação de redução de escala. Por esta razão, diz-se que o fractal considerado possui as propriedades de *auto-semelhança* — mais precisamente, uma auto-semelhança *exacta* ou *linear*.

Esta nomenclatura, de certa forma pesada, tem de ser usada porque podemos também entender *semelhante* como sinónimo aproximado de *análogo*. Nos primeiros dias de vida da geometria fractal, a ambiguidade resultante de uma terminologia menos cuidadosa era aceitável para os físicos porque os primeiros estudos apenas se concentravam em formas estritamente auto-semelhantes. Contudo, desenvolvimentos mais recentes estenderam a noção de fractal a formas auto-aparentadas, nas quais as reduções são ainda lineares, mas as razões de redução segundo as diferentes direcções do espaço são diferentes. Por exemplo, um relevo é aproximadamente auto-aparentado: para se passar de um pedaço de grande dimensão para um pedaço pequeno temos de contrair as coordenadas vertical e horizontais usando factores de escala diferentes.

Quando o entrançado de Sierpinski é construído por eliminação dos triângulos centrais, tal como na figura 6, as suas propriedades de auto--semelhança à redução surgem como *estáticas* e *a posteriori*. No entanto, esta é uma ideia totalmente enganosa. A sua prevalência e o facto de serem vistas como imperfeições continuam a surpreender-me. De facto, as mesmas simetrias podem ser reinterpretadas «dinamicamente», e elas são suficientes para gerar o objecto. O expediente, que é designado por jogo do caos, é uma interpretação estocástica de um esquema que se deve a Hutchinson. Começa-se com um iniciador, um conjunto limitado arbitrariamente, por exemplo um ponto P_0. Designemos as três homotetias a realizar sobre o objecto por S_0, S_1 e S_2, e uma sequência aleatória formada pelos dígitos 0, 1 e 2 por $k(m)$. Então defina-se uma órbita formada pelos pontos $P_1 = S_{k(1)}(P_0)$, $P_2 = S_{k(2)}(P_1)$, e, mais genericamente, $P_j = S_{k(j)}(P_{j-1})$. Verifica-se que esta órbita é atraída para o entrançado e que, depois de algumas etapas, descreve esta forma muito bem.

Pensava que a palavra *auto-semelhança* tinha sido usada pela primeira vez num artigo que escrevi em 1964. Verifiquei mais tarde que ela tinha sido usada anteriormente pelo menos uma vez. Por que será então que esta palavra nunca tinha sido utilizada extensamente, apesar de a ideia que exprime ser absolutamente óbvia e muito antiga? A razão é que as formas a que ela se refere não tinham qualquer importância até à publicação do meu trabalho. Por exemplo, Sierpinski tinha definido a sua forma com um propósito que tinha já sido esquecido há muito — porque o objectivo não era muito importante.

Por que é que a auto-semelhança se tornou importante? Um dos motivos por que a geometria fractal adquiriu um enorme alcance, e por que eu dispendi tanto tempo e esforço para a tornar uma disciplina, resultou da constatação de que várias descobertas baseadas na experimentação (cada uma delas realizada por um investigador diferente) indicam que o relevo terrestre é auto-semelhante, e que o mesmo acontece com muitas outras formas à nossa volta. As figuras 1 a 5 são suficientes para mostrar que a ideia de que a auto-semelhança é uma noção estéril e pouco proveitosa está completamente errada.

Tendo em conta o que acabámos de referir, podemos então perguntar porque se tornou importante o entrançado. Ele não parece ser nada interessante; de facto, é tão inexoravelmente monótono que se poderia chamar simplesmente euclidiano! Com alguns dias de estudo ficariam a saber quase tudo sobre ele. O mesmo acontece com outra forma muito conhecida, designada vulgarmente por curva de floco de neve ou *ilha de von Kock*, com um conjunto chamado *poeira de Cantor*, assim como com várias outras estruturas da mesma família conhecidas há bastante tempo. A razão por que estas formas são importantes é que temos de iniciar o estudo da geometria fractal *com* o entrançado de Sierpinski e a sua família. Mas o prazer de trabalhar com as formas fractais começa verdadeiramente quando nos concentramos em formas um pouco mais complexas.

O interessante surge depois de termos acrescentado ao problema um elemento de imprevisibilidade, que pode ser devida ao aleatório (como nas figuras 1, 2 e 5) ou à não linearidade (como nas figuras 3 e 4). A não linearidade é a palavra-chave para o novo significado do caos, nomeadamente do caos determinístico, e o aleatório é a chave para o caos no sentido tradicional da palavra. Estes dois efeitos estão intimamente associados.

Deixemos então os fractais linearmente auto-semelhantes porque nalguns casos a apresentação de um gráfico apropriado é suficiente para quebrar a sua monotonia inexorável.

A figura 7 mostra a minha variante da curva que Giuseppe Peano construiu em 1890. As curvas de Peano caracterizam-se por conseguirem preencher um fragmento de um plano. Páginas e páginas têm sido escritas pelos matemáticos apenas para dar azo à liberdade de imaginação que permite ao homem inventar formas claramente afastadas da realidade. A curva de Peano foi especialmente inventada como contra-exemplo de uma crença natural que era considerada universal: que as curvas e as superfícies não se misturam. Foi inventada com o propósito de separar a matemática e a física em duas áreas de investigação completamente independentes. Infelizmente, foi bastante bem sucedida neste aspecto, pelo menos durante um século.

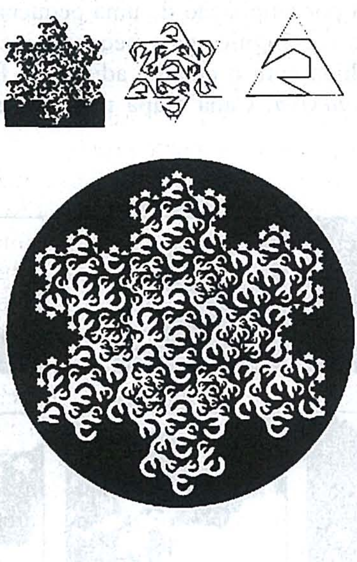


Fig. 7 — Variante de Mandelbrot da curva de Peano (B. B. Mandelbrot).

Para se obter a minha nova curva de Peano substitui-se um segmento de recta inicial pela linha quebrada em ziguezague apresentada no canto superior esquerdo da figura. De seguida, cada elemento dessa linha quebrada (cada zigue e cada zague) é substituído por uma versão reduzida da linha quebrada em ziguezague original. A mesma operação (chamada *substituição recursiva*) é então repetida de novo interminavelmente. O diagrama apresentado à direita na parte superior da figura 7 torna mais fácil acreditar que os limites entre o branco e o negro acabarão por definir uma curva de floco de neve. O diagrama maior, apresentado na parte inferior da figura, é apenas uma imagem computacional da minha curva, na qual todos os segmentos de recta foram substituídos por um arco de círculo. Qualquer um pode ver nela vários tipos de sistemas ramificados: artérias e veias, rios, chamas, ou quaisquer outros. Torna-se muito difícil não associar esta curva a coisas muito reais. Mas, no entanto, tal não sucedeu até eu ter chamado a atenção para o facto e, por isso, em certa medida a matemática e a física avançaram em direcções muito diferentes.

Para continuar a desmontar a impressão de «imperfeição» associada à auto-semelhança, consideremos a figura 8, onde se apresenta uma sequência de paisagens aleatórias completamente artificiais. Cada parte desta figura é obtida por ampliação de uma pequena porção da imagem anterior (contida no rectângulo mais pequeno inserido nesta última) devidamente preenchida com o detalhe adicional. Este procedimento é chamado *adição recursiva*. Cada etapa mostra uma paisagem que é,

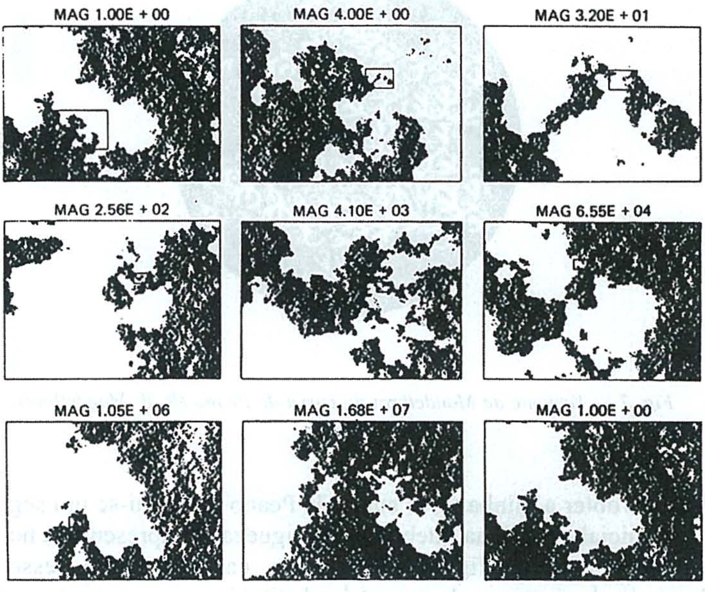


Fig. 8 — Zoom *sobre uma paisagem fractal que nunca existiu (R. F. Voss).*

naturalmente, diferente da anterior. Comparada com a sua antecessora, cada imagem contém mais detalhe, mas, ao mesmo tempo, é qualitativamente igual àquela. As ampliações sucessivas poderiam ser diferentes porções da mesma costa marítima examinadas à mesma escala, embora sejam, de facto, vizinhanças de um único ponto examinadas a escalas muito diferentes. É possível concluir de forma muito clara que estas ampliações sucessivas de um litoral não convergem, no limite, para uma tangente!

Nesta altura deixem-me recordar uma história sobre a grande dificuldade que os antigos Gregos sentiam em definir *tamanho*. Os navegadores sabiam que demorava mais tempo circum-navegar a Sardenha do que a Sicília. Por outro lado, existiam evidências de que os campos da Sardenha eram menores que os da Sicília. Então qual seria a ilha maior? Parece que, sendo sobretudo marinheiros, os Gregos sustentaram durante muito tempo a crença de que a Sardenha era a maior das duas ilhas porque o seu litoral era mais extenso. Mas examinemos a figura 9 e reflictamos sobre a noção de comprimento de uma orla marítima. Se o barco usado para circum-navegar for grande, o capitão afirmará que o comprimento da costa percorrida é bastante pequeno. Um barco muito mais pequeno aproximar-se-á muito mais da praia e navegará, por isso, ao longo de uma curva muito maior. Um homem que caminhe ao longo da costa medirá um comprimento

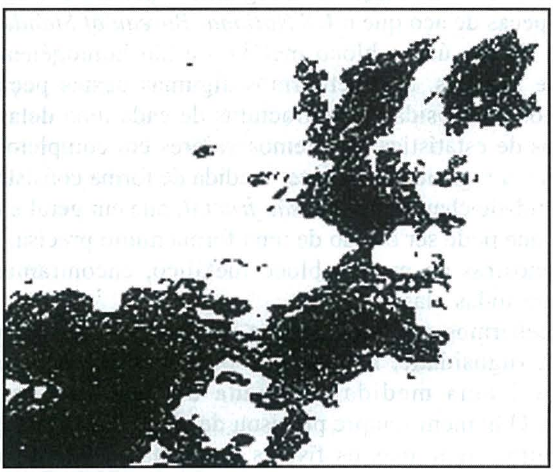


Fig. 9 — Um litoral fractal que nunca existiu (B. B. Mandelbrot)

ainda maior. Como saber então qual é o «comprimento verdadeiro da costa da Sardenha»? A questão parece simultaneamente elementar e idiota, mas verifica-se que tem uma resposta inesperada. A resposta é «depende»! O comprimento da costa depende de se circum-navegar a ilha num barco grande ou pequeno, caminhar ao longo da costa, ou usar um «rato» ou qualquer outro instrumento para medir o seu litoral.

Este exemplo faz-nos avaliar o extraordinário poder da estrutura mental que as escolas nos impuseram ao ensinar-nos Euclides. Muitas pessoas que pensam que nunca conseguiram compreender a geometria aprenderam, não obstante, o suficiente para pensarem que cada curva deve ter um comprimento. No caso das curvas em que estou interessado, esta noção surge, contudo, como a ideia errada a reter da aprendizagem escolar porque tais curvas têm um comprimento teórico infinito e o seu comprimento prático depende do método usado para o medir. O aumento do comprimento é mais rápido onde o litoral é mais rugoso, o que implica que estudemos a noção de *rugosidade*.

Esta noção é fundamental porque o mundo em que vivemos contém muitos objectos rugosos. No entanto, a tarefa de medir objectivamente a rugosidade revelou-se extraordinariamente difícil. Aqueles cujo trabalho o exige, como os metalúrgicos, pedem aos seus amigos estatísticos que lhes forneçam um número que possa resultar da medição e que se possa designar *rugosidade*. Mas, para avaliar as dificuldades que surgem na resolução deste problema, façamos a seguinte experiência. Peguemos num conjunto de peças de aço que o *US National Bureau of Standards* garante serem feitas de um único bloco metálico e tão homogéneas quanto o homem pode fazê-las. Se quebrarmos algumas destas peças e depois determinarmos a rugosidade das fracturas de cada uma delas de acordo com os livros de estatística, obteremos valores em completo desacordo.

No entanto, a rugosidade pode ser medida de forma consistente a partir de uma quantidade chamada *dimensão fractal*, que em geral é um número fraccionário que pode ser obtido de uma forma muito precisa. Analisando diferentes amostras do mesmo bloco metálico, encontramos a mesma dimensão para todas elas.

Para percebermos a ideia de que a dimensão fractal é uma medida adequada da rugosidade, recordemos o que significa dizer-se que a temperatura é uma medida adequada do conceito de estado de aquecimento. O homem sempre precisou de saber que certas coisas eram quentes e outras frias, mas os físicos necessitavam de dispor de uma maneira fiável de medir o estado de aquecimento. Isso só aconteceu a partir da invenção do termómetro, que permitiu que pessoas diferentes, usando o mesmo termómetro, pudessem, finalmente, obter a mesma medida do grau de aquecimento de um objecto. A descrição do grau de aquecimento de um corpo através de um número constituiu o primeiro e indispensável passo para que mais tarde os físicos pudessem formular uma teoria da matéria.

De forma análoga, e muito afortunadamente, a geometria fractal nasceu a partir de algumas ideias sobre o modo de exprimir a rugosidade e a complexidade de um objecto por um número. Algumas destas ideias deram origem a um conjunto de ferramentas distintas, mas relacionadas, que são designadas globalmente por *dimensões fractais* (podemos encará-las como diferentes tipos de chaves de fendas, todas diferentes, mas possuindo elementos semelhantes e objectivos de utilização essencialmente iguais). Quem trabalha com a geometria fractal rapidamente desenvolve uma intuição da dimensão fractal e pode estimá-la com exactidão para algumas formas simples.

A razão para o uso do termo *dimensão* é que as definições desta noção podem também aplicar-se a pontos, intervalos, quadrados e cubos e, nestes casos, obtêm-se valores iguais àqueles com que estamos familiarizados e que provêm da geometria de Euclides (0, 1, 2 e 3, respectivamente). Quando aplicadas a fractais, contudo, estas definições conduzem em geral a valores não inteiros. A ideia genérica de «rugosidade» requer, de facto, várias concretizações numéricas diferentes. A existência de uma multiplicidade de diferentes «dimensões fractais» tem-se, por isso, mostrado muito útil. Uma dimensão fractal proposta por Hausdorff e Besicovitch foi o primeiro exemplo, mas, em termos práticos, esta dimensão é muito difícil de obter e demasiado especializada. A variante mais simples é a dimensão de *semelhança*, D_s, que se aplica a formas linearmente auto-semelhantes. Tal como já referi, isto significa que tais formas são constituídas por N réplicas da forma total, sendo cada réplica uma redução linear da anterior por um factor r. Deste modo, define-se então

$$D_s = \log N / \log (1/r).$$

Para um ponto, um intervalo, um quadrado e um cubo, obtém-se $D_s = 0, 1, 2$ e 3, respectivamente. Tal como previstos, estes são os valores familiares das dimensões «vulgares». Mas, para o entrançado de Sierpinski, temos $N = 3$ e $r = 1/2$, pelo que $D_s = \log 3 / \log 2 \approx 1{,}5849$.

Outra dimensão fractal simples é a *dimensão mássica*. Consideremos uma distribuição de massa de densidade uniforme numa linha, num plano ou no espaço. Escolhamos agora uma esfera de raio R cujo centro se localize no conjunto considerado. A massa dentro dessa esfera é

$M(R) = FR^D$, onde D é a dimensão «vulgar» e F é uma constante numérica. A noção de densidade uniforme estende-se aos fractais e em muitos casos pode definir-se um expoente D; este corresponde à dimensão mássica do fractal, que é muitas vezes igual à dimensão de *semelhança*.

Infelizmente, não posso aqui ir além deste ponto no que concerne à dimensão fractal. O próximo tópico que quero focar é o valor crescente do papel da geometria fractal como meio de descoberta e estudo de novos aspectos da natureza. Como exemplo, escolhi para vos mostrar um modo de crescimento aleatório que gera objectos fractais designados usualmente por *agregados limitados por difusão* (ALD) ou agregados de Witten-Sander. No centro da figura 10 observa-se um ALD. Trata-se de uma forma semelhante a uma árvore, de complexidade variável, que pode ser utilizada para simular o modo como as cinzas se formam, como a água penetra nas rochas, as fendas se espalham num sólido ou os relâmpagos se propagam.

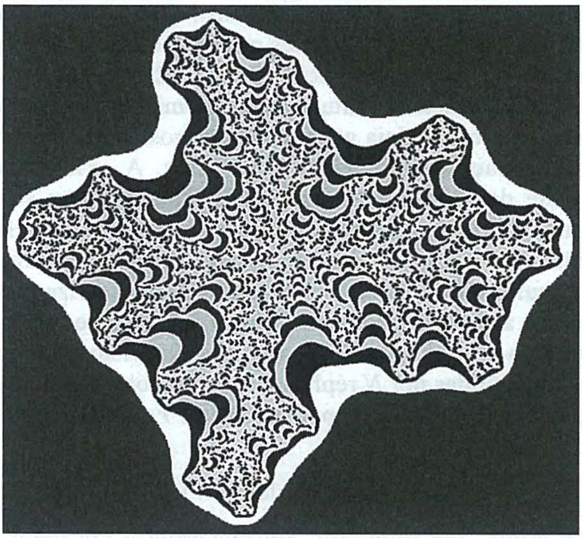


Fig. 10 — ALD envolvido pelas suas curvas equipotenciais (C. J. G. Evertsz e B. B. Mandelbrot)

Para vermos como o crescimento evolui, peguemos num tabuleiro de xadrez muito grande e coloquemos numa casa central uma rainha, que não permitimos que se mova. Os peões, que se podem deslocar segundo qualquer das quatro direcções do tabuleiro, saem de uma posição inicial na periferia do tabuleiro, escolhida aleatoriamente, e são instruídos no sentido de executarem um movimento ao acaso (andarem como bêbados). A direcção de cada passo é escolhida de entre as quatro possibilidades disponíveis com igual probabilidade. Quando um peão atinge um quadrado vizinho daquele onde se encontra a rainha original transforma-se numa nova rainha e não pode mover-se mais. No final ficamos com uma colecção de rainhas dispostas segundo uma estrutura ramificada que se assemelha bastante a uma aranha.

De um modo bastante surpreendente, as simulações computacionais deste tipo de sistemas mostraram que os ALD são fractais aproximadamente auto-semelhantes, isto é, pequenas regiões destas estruturas são muito parecidas com versões contraídas de regiões maiores. Mas os ALD desviam-se da auto-semelhança linear aleatória, o que apresenta alguns desafios interessantes para o futuro.

Uma das razões da importância dos ADL é servirem de interface entre o suave e o fractal. Uma premissa da geometria fractal é que a maior parte dos objectos existentes no mundo são fractais. Contudo, espera-se que a ciência seja cumulativa, adicionando-se o novo ao que já existe sem abandonar este último. A nova sabedoria não pode negar a velha sabedoria, cuja premissa é que o mundo é feito de formas suaves e envolve mudanças suaves e equações diferenciais.

Vamos ver então como os ALD mostram que a velha e a nova sabedoria são compatíveis se se abandonar a antiga expectativa filosófica de que virá um dia a provar-se que *tudo* o que existe no mundo é suave ou tem alterações suaves.

Para mostrar como uma variação suave pode produzir um comportamento rugoso, a construção original de um ALD tem inicialmente de ser reescrita usando a teoria dos potenciais electrostáticos. A descrição que se segue é necessariamente um pouco esquemática. Consideremos uma caixa grande na qual o ALD cresce e liguemo-la a um potencial positivo, considerado unitário; ligue o agregado ao potencial 0. O valor do potencial em qualquer ponto da caixa pode então ser descrito de forma conveniente através de curvas equipotenciais, por exemplo as curvas ao longo das quais o potencial assume os valores crescentes 0,01, 0,02,..., 0,99. A figura 10 evidencia que todas estas curvas são suaves e oferecem uma transição progressiva entre a caixa e as fronteiras do agregado. O cálculo analítico está fora de questão, mas o «senso comum da física» pode ser combinado com o cálculo numérico. A fronteira do objecto inclui agulhas e cada uma delas tem uma probabilidade elevada de ser atingida pelo relâmpago. Isto manifesta-se no facto de as linhas equipotenciais se tornarem abundantes nas proximidades dos extremos de um ALD. De uma forma mais geral, voltando aos peões aleatórios que constroem um ALD, a posição onde o peão pára pode ser obtida a partir da forma das linhas equipotenciais electrostáticas.

Atingimos agora a etapa lógica seguinte, que implica que os ALD tenham originado uma inovação intelectual de grande importância. Durante cerca de 200 anos o estudo dos potenciais envolveu fronteiras fixas. Mas, no caminhar aleatório simples que cria um ALD, um «contacto entre peças», na terminologia acima apresentada, pode ser interpretado como uma forma de provocar uma deslocação da fronteira. Assim, as experiências numéricas com os ALD ensinaram-nos que, quando permitimos que as fronteiras se desloquem como resposta ao potencial, elas se tornam fractais. Isto implica que sabemos agora, sem qualquer sombra de dúvida, que podemos criar fractais rugosos a partir de propriedades suaves de linhas equipotenciais. Mas este conhecimento permanece imperfeito. É evidente que gostaríamos de poder adicionar a estas ideias alguma matemática exacta e mais alguns argumentos físicos. Apesar disso, vale a pena ressaltar que a geometria fractal conduziu a um problema completamente novo, delineou as linhas gerais para a sua solução, e deu trabalho a muitos cientistas.

Vou agora afastar-me pela segunda vez do aleatório em direcção ao caos determinístico e dos objectos no espaço físico real em direcção a objectos imaginários. O que permanecerá inalterado é que continuarei a considerar conjuntos em forma de «agulha», rodeados por linhas suaves equipotenciais.

A primeira noção que importa aqui considerar é a de conjunto de Julia[4] de iteração quadrática. Tomemos um ponto C com coordenadas u e v e designemo-lo por *parâmetro*. De seguida, tomemos, num plano diferente, um ponto P_o com coordenadas x_o e y_o. Então, façamos $x_1 + x_0^2 - y_0^2 + u$ e $y_1 = 2x_o y_o + v$. Estas fórmulas podem parecer um pouco artificiais, mas elas simplificam-se se o ponto C com coordenadas x e y for representado por um número complexo $z = x + iy$. (Podemos adicionar e multiplicar números complexos como fazemos com os números reais, excepto que i^2 tem de ser sempre substituído por -1).

---

[4] Do matemático francês Gaston Julia, que estudou estas entidades matemáticas juntamente com o seu colega Pierre Fatou, durante a Primeira Guerra Mundial.

$$x_1 + x_0^2 - y_0^2 + u$$

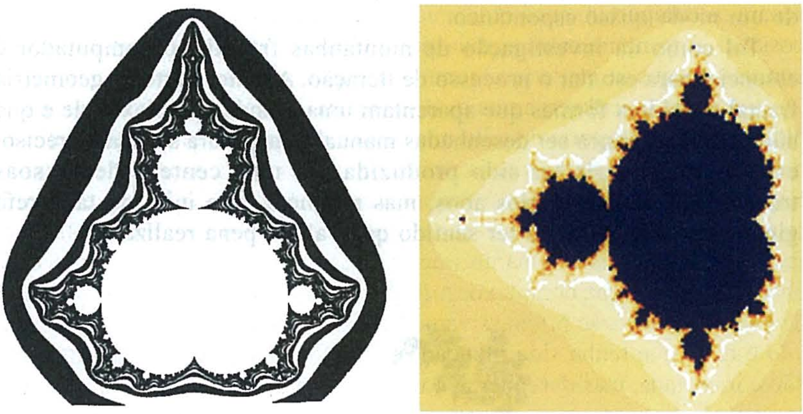
Para os números complexos $C = u + iv$ e $Z = x + iy$, a regra anterior simplifica-se: $Z_1 = z_o^2 + c$ e (mais genericamente) $Z_{k+1} = Z_k^2 + C$. Mesmo o leitor que se assusta ao ouvir falar de números complexos compreende facilmente as expressões usando x_k e y_k.

Quando a órbita P_k não consegue afastar-se em direcção ao infinito diz-se que o ponto inicial, P_o, pertence ao «conjunto de Julia preenchido». Um exemplo ilustrativo é apresentado na figura 11. Se começarmos a construção do conjunto fora da forma a negro, alcançaremos o infinito. Se a começarmos no seu interior, não conseguiremos nunca atingir o infinito. A fronteira entre as regiões negras e brancas da figura é conhecida por *curva de Julia*. Esta curva é aproximadamente auto-semelhante. Nenhum pedaço é absolutamente idêntico a um pedaço maior devido ao efeito das deformações não lineares. É surpreendente que através de um processo iterativo se possa criar uma qualquer forma de auto-semelhança de um modo quase espontâneo.

Tal como na investigação de montanhas fractais, o computador é essencial para estudar o processo de iteração. A maior parte da geometria fractal considera formas que aparentam uma grande complexidade e que não poderiam nunca ser desenhadas manualmente. Para ser mais preciso, esta figura poderia ter sido produzida por uma centena de pessoas trabalhando durante vários anos, mas ninguém teria iniciado tal tarefa gigantesca sem primeiro ter sentido que valia a pena realizá-la.

Fig. 11 — Conjuntos de Julia quadráticos (Z → Z² + C). Cada fronteira de lista preta ou branca corresponde a um valor diferente de C (B. B. Mandelbrot)

Eu não só tive acesso a um computador em 1979 como estava familiarizado com o seu poder. Por isso, senti que valia a pena tentar realizar estes cálculos, mesmo tendo em conta que não sabia exactamente a que é que eles iriam conduzir. Uma exploração preliminar conduziu-me a uma forma primitiva da que está representada na figura 12. Os conjuntos de Julia do mapa $Z^2 + C$ podem assumir todos os tipos de formas e uma pequena alteração no valor de C pode alterar muito o conjunto de Julia. Em 1979 iniciei a classificação de todas as formas possíveis dos conjuntos de Julia (por razões que não tenho tempo de discutir aqui) e obtive uma forma nova. Esta forma foi designada por *conjunto de Mandelbrot*, M, o que, naturalmente, considero uma grande honra. A figura 3, que já foi apresentada, é uma porção muito pequena da figura 12.



a) *b*)

Fig. 12 — Conjunto de Mandelbrot, rodeado pelas suas curvas equipotenciais (B. B. Mandelbrot)

Eis como o conjunto M se constrói. Pegue-se num ponto inicial, C_o, no plano, com coordenadas u_o e v_o. A partir das coordenadas de C_o, obtenha-se um segundo ponto, C_1, com coordenadas $u_1 = u_o^2 - v_o^2 + u_o$ e $v_1 = 2u_o u_o + v_o$. De seguida, obtenha-se o ponto C_2, de coordenadas $u_2 = u_1^2 - v_1^2 + u_o$ e $v_2 = 2u_1 v_1 + v_o$. Mais genericamente, as coordenadas u_k e v_k de C_k são obtidas de u_{k-1} e v_{k-1} através das chamadas «fórmulas de iteração» $u_k = u^2_{k-1} - v_k{}^2_{-1} + u_o$ e $v_k = 2u_{k-1}\, v_{k-1} + v_o$. Quando C_o é representado por $Z_o = u_o + iv_o$, as fórmulas acima simplificam-se a $Z_1 = z_o{}^2 + z_o$ e $Z_k = z_k{}^2_{-1} + z_o$ Diz-se que os pontos C_k formam a órbita de C_o, e o conjunto M é definido da forma seguinte: se a órbita C_k não se dirige para o infinito, dizemos que C_o está contido no conjunto M. Se a órbita C_k se dirige para o infinito, dizemos que o ponto C_o está fora de M.

Este algoritmo tem a ver com o problema muito sério da dinâmica determinista que se segue. Quando C_o está no interior de M, a dinâmica dos quadrados dá origem a uma órbita perfeitamente ordenada, no sentido em que é assimptoticamente periódica. Quando C_o se encontra fora de M, pelo contrário, o comportamento da órbita é determinístico, mas na prática imprevisível e portanto caótico. A dinâmica dos quadrados foi escolhida para ser estudada em pormenor porque neste caso o critério que separa os comportamentos ordenado e caótico é, como vimos, o mais claro possível. A fronteira entre as duas possibilidades, no entanto, é muito mais confusa do que se poderia alguma vez esperar.

À medida que observamos os detalhes de uma qualquer porção menor da fronteira de M, parte daquilo que vemos é simplesmente uma repetição de qualquer outra parte que já tínhamos observado a uma escala maior. Este elemento de repetição é essencial na beleza. Mas a beleza também requer um elemento de variação, e neste caso tal elemento também é facilmente observado. Quanto mais nos aproximamos, mais aquilo que observamos se torna complexo. A forma geral é a mesma, mas a estrutura de pormenor torna-se progressivamente mais elaborada. Esta característica *não* é nada que tenha sido planeado. Pelo contrário, como a matemática não é inventada, mas descoberta, corresponde a qualquer coisa que sempre esteve ali e mostra-nos que a matemática de *z quadrado mais C* é surpreendentemente complicada, contrariamente à simplicidade da fórmula. Descobrimos que o conjunto M, quando examinado cada vez de mais perto, exibe a co existência de uma repetição rígida do mesmo tema, combinada com uma variedade de pormenor que surpreende a imaginação. Vi pela primeira vez o conjunto de Mandelbrot num monitor de computador a preto e branco com muito fraca qualidade gráfica, além de que a imagem parecia suja. Mas, quando ampliámos aquilo que nos parecia ser sujidade, encontrámos uma cópia extraordinariamente minúscula da totalidade do gráfico.

Na figura 12 *a*), o conjunto de Mandelbrot é o «escaravelho» branco ao centro. Os seus limites são muito rugosos, mas está rodeado por um conjunto de listas alternadamente pretas e brancas cujos limites se tornam progressivamente mais suaves à medida que nos afastamos de M. Os limites destas listas são, de facto, curvas equipotenciais do laplaciano — tal como na figura 10, embora muito mais fáceis de obter.

Obviamente, as figuras a preto e branco apresentadas neste livro, como a figura 12 *a*) são muito menos bonitas do que as ilustrações a cores do conjunto de Mandelbrot que o leitor já deve ter podido observar. Um equivalente a cores da figura 12 *a*) pode ser observado na figura 12 *b*). A qualidade da apresentação colorida evidencia a arte dos programadores, tal como o faz a qualidade do colorido das montanhas fractais, mas a estrutura propriamente dita do conjunto de Mandelbrot é independente do reboco cromático. O importante é que a estrutura é tão complexa que não a poderemos perceber se o colorido não for suficientemente rico. De facto, o conjunto tem uma riqueza de estrutura tão grande (figura 13) que não a podemos observar numa imagem monocromática. Diferentes formas de colorir a imagem evidenciam diferentes particularidades do conjunto M. Mais uma vez, esta estrutura não foi inventada com o objectivo de construir algo belo, mas apenas com o propósito de explorar a teoria avançada de z quadrado mais C.

Para o leigo, a arte fractal parece simplesmente mágica, mas nenhum matemático pode desistir de tentar compreender a sua estrutura e o seu significado. Uma característica notável resultante de alguns progressos científicos recentes é que, desde que a sua origem fosse escondida, muita da matemática inspirada no conjunto M poderia facilmente passar por matemática «pura». Para muitos matemáticos, a possibilidade de manipular interactivamente figuras gráficas de grande complexidade, recentemente tornada acessível graças aos enormes progressos obtidos na área da computação, revelou-se uma nova fonte de questões de matemática pura e de conjecturas, de problemas isolados e de teorias completas. Para dar um exemplo, a análise do conjunto de Mandelbrot levou-me, em 1980, a formular muitas conjecturas simples de estabelecer, mas muito difíceis de infirmar. Para os matemáticos, o seu lento e difícil desenvolvimento não as tornou menos fascinantes porque um grande número de «resultados colaterais» intrinsecamente interessantes foram sendo obtidos durante o seu estudo.

Nesta altura devo contar-vos uma história. A matemática pura é com certeza uma das actividades humanas mais notáveis. É certamente diferente na sua essência da arte de criar figuras através da manipulação numérica e tem, de facto, provado poder prosperar num isolamento glorioso — pelo menos durante alguns períodos breves de tempo. Apesar disso, a interacção entre a arte, a matemática e os fractais confirma o que é sugerido por quase todas as experiências anteriores. Ao longo do seu longo percurso, a matemática tirou partido do facto de não tentar destruir

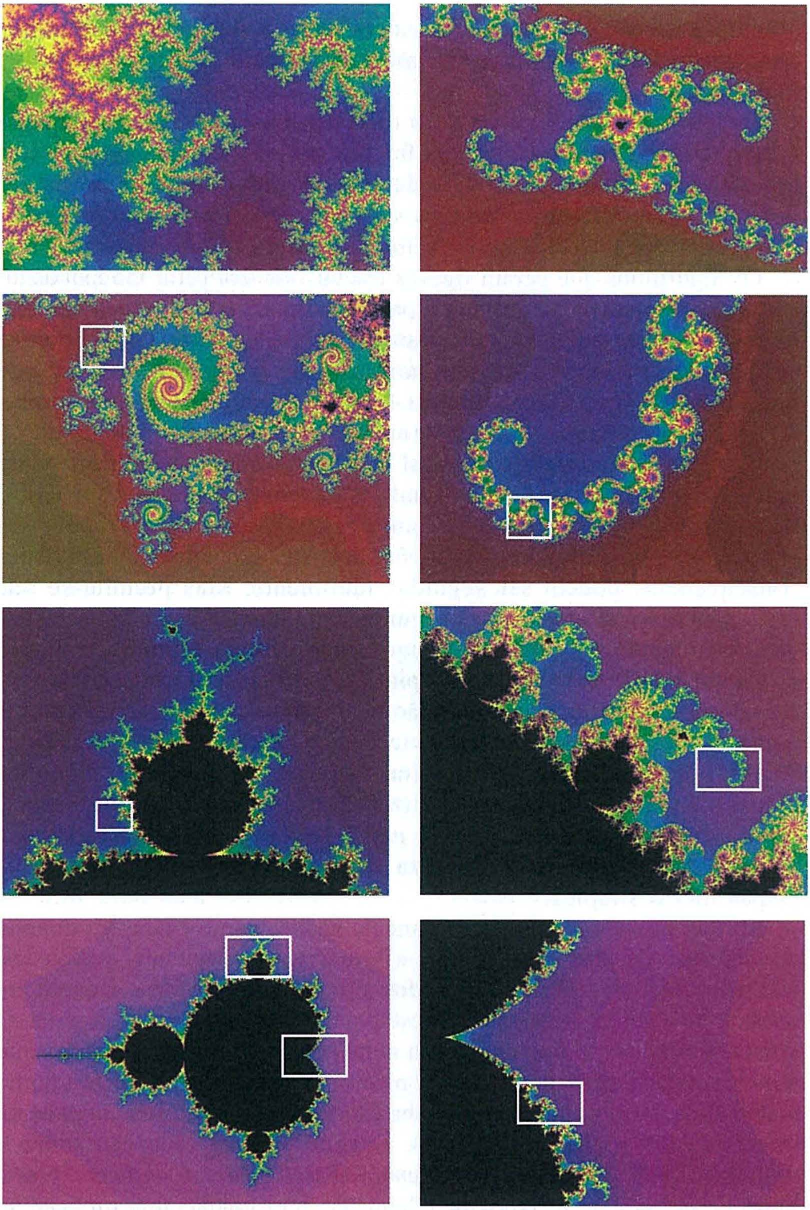


Fig. 13 — Zooms *sucessivos sobre o conjunto de Mandelbrot*

a unidade «orgânica» que parece existir entre o abstracto e o intuitivo, duas actividades humanas aparentemente disjuntas, mas igualmente importantes.

Deixem-me agora agrupar as diferentes componentes da minha apresentação. Como puderam os fractais assumir o protagonismo que hoje lhes reconhecemos no acto de «extrair ordem a partir do caos»? A chave desta questão reside na seguinte descoberta que fiz graças à computação gráfica e que é a todos os títulos surpreendente.

Os algoritmos que geram figuras fractais são em geral tão extraordinariamente simples que chegam a parecer idiotas. Isto significa que têm mesmo de ser considerados «simples». Os resultados fractais que permitem alcançar, pelo contrário, surgem normalmente como estruturas de uma grande riqueza. À partida pensar-se-ia que a construção de formas complexas necessitaria de assentar em regras complexas.

Qual é a característica especial que leva a que a geometria fractal actue de maneira tão pouco usual? A resposta é muito simples. O algoritmo é recursivo e o código computacional escrito para o representar envolve *ciclos*, isto é, as instruções básicas são simples, e as suas consequências podem ser seguidas facilmente. Mas permita-se que estas instruções simples sejam seguidas repetidamente. Então, a menos que consideremos os fractais antigos mais simples (como o conjunto de Cantor ou o entrançado de Sierpinski), o processo de iteração conduz à construção de uma transformação progressivamente mais complexa, cujos efeitos a nossa mente segue cada vez com mais dificuldade. Acaba por se atingir algo qualitativamente diferente do bloco de construção original. Podemos dizer que a situação corresponde à satisfação daquilo que, em geral, não é senão um sonho: a esperança de descrever e explicar a natureza «caótica» como uma sucessão de etapas muito simples.

Muitos fractais foram imediatamente aceites como exemplos de uma nova forma de arte. Alguns são «figurativos», enquanto outros são totalmente irreais e abstractos. Todos eles causam um forte impacto em quase toda a gente, eivados como estão de um «aroma» quase sensual. O artista, a criança e o homem da rua nunca parecem ter visto o suficiente e nunca tinham pensado poder vir a receber alguma coisa deste tipo de matemática. Nem o matemático tinha esperado que a sua ciência pudesse interagir com a arte deste modo. Eugene Wigner escreveu sobre *a despropositada eficiência da matemática nas ciências naturais*. Nesta linha de pensamento, tive o privilégio de acrescentar uma proposição paralela sobre *a despropositada eficiência da matemática como criadora de formas que o homem pode admirar e desfrutar*.

Leituras adicionais

The Fractal Geometry of Nature, de B. B. Mandelbrot, W. H. Freeman, 1982, o primeiro livro generalista sobre este assunto, permanece como um livro de referência fundamental. Muitos outros livros surgiram depois de 1982.

O livro básico sobre «como fazer» é *The Science of Fractal Images*, Eds. H. O. Peitgen e D. Saupe, Springer, 1988.

O melhor livro sobre iteração é *The Beauty of Fractals*, de H. O. Peitgen e D. Saupe, Springer, 1986.

Sobre outros aspectos matemáticos relevantes ver *Fractals: Mathematical Foundations and Applications*, de K. J. Falconer, J. Wiley, 1990.

Sobre aplicações concretas dos fractais, devem mencionar-se duas referências que são volumes especiais de publicações periódicas de grande divulgação e que podem ser facilmente encontradas nas bibliotecas especializadas. A primeira é *Proceedings of the Royal Society of London*, volume A 423 (8 de Maio, 1989), que foi também reproduzida em forma de livro, *Fractals in the Natural Sciences*, Eds. M. Fleischmann *et al.*, Princeton University Press, 1990. A segunda é *Physica D.*, volume 38, que foi também reproduzida como *Fractals in Physics, Essays in honor of B. B. Mandelbrot on his 65th birthday*, Eds. A. Aharony e J. Feder, North Holland, 1989.

Sobre a física, um manual tradicional é *Fractals*, de J. Feder, Plenum, 1988.

Sobre alguns aspectos de natureza filosófica ou social, ver a adenda à 3.ª edição do meu livro *Les Objects fractals*, Flammarion, 1989 (em português *Objectos Fractais*, Gradiva, 1998).

Muitos dos meus artigos originais serão reproduzidos numa série de volumes a publicar na *Selecta;* infelizmente, a minha vontade de os reproduzir com qualidade tem vindo a atrasar a sua publicação.

A palavra «fronteiras» pode ser tomada em diferentes sentidos. Pode referir-se aos limites, necessariamente provisórios, entre o conhecido e o desconhecido, ou aos limites entre o possível e o impossível, e, dentro do possível, entre o desejável e o indesejável. Fronteiras podem também ser as delimitações, nem sempre nítidas, entre ciência e não-ciência, e dentro da ciência, entre as várias disciplinas. Quais são então as fronteiras da ciência?

Neste livro, a resposta a esta pergunta é dada, segundo as mais diferentes perspectivas, por um conjunto notável de personalidades, cientistas ou não, entre as quais se contam três Prémios Nobel.

RUI FAUSTO, CARLOS FIOLHAIS e JOÃO FILIPE QUEIRÓ são, respectivamente, professores de Química, Física e Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

ISBN 972-662-923-3

9 789726 629238

gradiva • Imprensa da Universidade de Coimbra